ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FERNANDO BERTOLINI

La teoria algebrica della misura e della integrazione, e suo rapporto con la teoria classica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 3-4 (1957), p. 225-247

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_225_0>

LA TEORIA ALGEBRICA DELLA MISURA E DELLA INTEGRAZIONE, E SUO RAPPORTO CON LA TEORIA CLASSICA

FERNANDO BERTOLINI (a Roma).

In un'opera postuma di recente pubblicazione ([1]), C. CARATHÉODORY espone una teoria «algebrica» della misura e della integrazione, che risulta più generale (almeno potenzialmente) della ordinaria teoria quale s'è venuta configurando in questi ultimi anni (cfr. ad es. [2], [3], [4], [5], ecc.); la differenza essenziale tra le due teorie può esser formulata, nei suoi termini più semplici, così:

dato un σ-anello $\mathscr{A}$ di sottoinsiemi d'un dato insieme ambiente, la teoria ordinaria studia le funzioni d'insieme non negative e numerabilmente additive definite su $\mathscr{A}$ (funzioni «misura»), nonchè certe funzioni di punto individuate da $\mathscr{A}$ (funzioni «misurabili»);

dato un reticolo booleano generalizzato $\mathcal{R}$, numerabilmente completo e dotato d'elemento nullo, la teoria algebrica studia le funzioni definite su $\mathcal{R}$, non negative e numerabilmente additive, nonchè certi enti [detti «funzioni di luogo» = «Ortsfunktionen», ed introdotti con i soli mezzi della teoria dei reticoli] l'ufficio dei quali è analogo a quello delle funzioni misurabili di punto nella teoria ordinaria.

È evidente a prima lettura che la teoria ordinaria rientra (almeno potenzialmente) in quella algebrica come caso particolare; un controesempio dello stesso C. CARATHÉODORY mostra poi che le due teorie non sono equivalenti. Si pone allora la questione: *come va modificata la teoria ordinaria per ottenere, ove sia possibile, una teoria equivalente o magari più generale di quella algebrica?*

Nel presente lavoro si risponde completamente a tale domanda; precisamente si fa vedere che, per ottenere una teoria equivalente a quella di C. CARATHÉODORY, basta indebolire opportunamente le ipotesi sul sistema d'insiemi $\mathscr{A}$, e modificare in conformità la definizione di funzione misurabile. La teoria così ottenuta pare altrettanto semplice di quella ordinaria, e dà un'idea esatta della entità della generalizzazione conseguita da C. CARATHÉODORY.

Veniamo ad esporre ora a grandi linee la teoria ordinaria della misura e della integrazione, generalizzata al modo accennato dianzi, e confrontiamola passo per passo con la teoria algebrica.

1. **Il sistema fondamentale d'insiemi.** È assegnato un insieme ambiente X (il cui elemento o « punto » generico indicheremo con x) ed un sistema $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X (insiemi « fondamentali ») verificante le proprietà seguenti:

1) *$\mathcal{A}$ è chiuso alle operazioni di unione ($\cup$) e di intersezione ($\cap$) finite, nonchè rispetto alla operazione di differenza ($-$);*

2) *data una successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'insiemi fondamentali, esiste sempre un insieme fondamentale contenente $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, e tra gl'insiemi fondamentali contenenti $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ve n'è uno « minimo »* $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (« congiunzione » della successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$), *ossia tale che*:

i) $$\bigsqcup_{n=1} A_n \in \mathcal{A},$$

ii) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

iii) $$\text{se } (A \in \mathcal{A}) \text{ ed } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A, \text{ allora } \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$$

(tale congiunzione è univocamente determinata da $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Si osservi quanto segue.

a) *L'insieme vuoto $\varnothing$ è fondamentale; infatti, se è $A \in \mathcal{A}$, si ha $\varnothing = A - A \in \mathcal{A}$.*

b) *Data una successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'insiemi fondamentali, tra gl'insiemi fondamentali contenuti in $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ve n'è uno « massimo »* $\bigsqcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (« interferenza » della successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$); difatti, detto B un insieme $\in \mathcal{A}$ e contenente $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, abbiamo:

i) $$B - \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (B - A_n) \in \mathcal{A};$$

ii) $$B - \bigsqcup_{n=1}^{\infty}(B - A_n) \subset B - \bigcup_{n=1}^{\infty}(B - A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\,;$$

iii) se $A \in \mathscr{A}$ ed $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, allora si ha, successivamente,

$$A \subset B - \bigcup_{n=1}^{\infty}(B - A_n)\,,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}(B - A_n) \subset B - A\,,$$

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty}(B - A_n) \subset B - A\,,\ A \subset B - \bigsqcup_{n=1}^{\infty}(B - A_n)\,,$$

il che appunto prova che l'interferenza cercata è $\bigsqcap_{n=1}^{\infty} A_n = B - \bigsqcup_{n=1}^{\infty}(B - A_n)$;

in modo analogo potrebbe provarsi che è $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = B - \bigsqcap_{n=1}^{\infty}(B - A_n)$.

c) *Nel caso che la successione* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *consti di non più di due elementi distinti* A *e* B, *appartenenti a* $\mathscr{A}$, *avremo* $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \sqcup B = A \cup B$, $\bigsqcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \sqcap B = A \cap B$; ossia *congiunzione e interferenza finite coincidono, rispettivamente, con unione e intersezione finite.*

d) *Dati l'insieme fondamentale* A *e la successione d'insiemi, pure fondamentali,* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, *si ha:*

i) $$A \sqcup \bigsqcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcap_{n=1}^{\infty}(A \sqcup A_n)\,,$$

ii) $$A \sqcap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty}(A \sqcap A_n)\,.$$

Dimostro la (ii), la dimostrazione della (i) essendo analoga. In primo luogo si ha $A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, e quindi $A \cap A_k \subset A \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, per ogni indice k; ne segue $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n) \subset A \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ed infine $\bigsqcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n) \subset A \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. In secondo luogo, posto $B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)$, $C = A \cup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, si ha successivamente

$$A \cap A_k \subset B,\ (A \cap A_k) \cup (C - A) \subset B \cup (C - A)\,,$$

$$A_k \cup (C - A) \subset B \cup (C - A)\,,\ A_k \subset B \cup (C - A)$$

per ogni indice k; quindi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B \cup (C - A)$, $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B \cup (C - A)$ ed infine $A \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A \cap [B \cup (C - A)] = A \cap B \subset B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$.

Con ciò la (ii) è completamente dimostrata.

e) *Gli assiomi* (1) *e* (2), dunque, in virtù delle osservazioni precedenti, *caratterizzano* $\mathscr{A}$ *come un reticolo d'insiemi* (rispetto alla relazione d'inclusione $\subset$ intesa come relazione d'ordine $\sqsubseteq$ del reticolo, e rispetto alle operazioni $\sqcup$ e $\sqcap$ di congiunzione ed interferenza) *booleano generalizzato, dotato d'elemento nullo e numerabilmente completo;* inoltre, in $\mathscr{A}$ l'elemento nullo è l'insieme vuoto, e nel caso finito le operazioni $\sqcap$, $\sqcup$ si identificano colle operazioni $\cap$, $\cup$ rispettivamente.

2. **Confronto tra il sistema fondamentale d'insiemi $\mathscr{A}$ e l'anello fondamentale di somi di C. Carathéodory.** A base della sua teoria, C. CARATHÉODORY considera (¹) un reticolo booleano generalizzato $\mathcal{R}$, numerabilmente completo e dotato di elemento nullo (²). Gli elementi del reticolo $\mathcal{R}$ (« somi ») possono essere di natura qualsiasi, in particolare si può assumere come reticolo $\mathcal{R}$ il sistema d'insiemi $\mathscr{A}$ introdotto al paragrafo precedente: la teoria algebrica può dunque essere particolarizzata al caso $\mathcal{R} = \mathscr{A}$.

Vogliamo dimostrare in questo paragrafo che tale particolarizzazione è solo apparente, e che supponendo sistematicamente $\mathcal{R} = \mathscr{A}$ la teoria non sarebbe meno generale.

In base ad un noto risultato di teoria dei reticoli (³), al reticolo distributivo $\mathcal{R}$ (quale che sia la sua natura) può sempre associarsi un insieme ambiente X' ed un sistema $\mathscr{A}'$ di sottoinsiemi di X', in modo che:

i) assunta in $\mathscr{A}'$ come relazione d'ordine $\sqsubseteq$ l'inclusione $\subset$, $\mathscr{A}'$ risulta un reticolo isomorfo ad $\mathcal{R}$ rispetto a tale relazione, e quindi rispetto alle operazioni di interferenza e congiunzione;

ii) in $\mathscr{A}'$ l'interferenza e la congiunzione *finite* si identificano rispettivamente con la intersezione e l'unione finite.

Dimostriamo ora che $\mathscr{A}'$ può essere preso in modo da soddisfare le condizioni (1) e (2) che nel paragrafo 1 sono imposte al sistema $\mathscr{A}$.

(¹) Cfr. [1], assiomi 1 — 4, pp. 18, 19, 20 e 24, che appunto caratterizzano i reticoli booleani generalizzati, numerabilmente completi, con elemento nullo.

(²) In [1] la congiunzione tra A e B è indicata con $A \dotplus B$, anzichè $A \sqcup B$, l'interferenza con AB anzichè $A \sqcap B$; nel caso numerabile è usato $\sum_k \dotplus A_k$ invece di $\bigsqcup_k A_k$, $\prod_k A_k$ invece di $\bigsqcap_k A_k$; la relazione d'ordine $\sqsubseteq$ del reticolo $\mathfrak{R}$ è indicata con $\subseteq$.

(³) Cfr. [6], teor. 20· 1, p. 106. Si può prendere come X' la totalità degli ultrafiltri propri di $\mathcal{R}$, associando ad ogni $A \in \mathcal{R}$ l'insieme A' degli ultrafiltri propri contenenti A.

1) In primo luogo, $\mathscr{A}'$ possiede un elemento nullo O' (in quanto $\mathcal{R}$ ne è dotato), ossia un sottoinsieme di X' contenuto in tutti gli insiemi appartenenti ad $\mathscr{A}'$; questo elemento nullo è univocamente determinato. Ad ogni insieme $A' \in \mathscr{A}'$ associamo l'insieme $A' - O'$; al variare di A', l'insieme $A' - O'$ descrive un sistema d'insiemi $\mathscr{A}''$, tale che:

i) assunta come relazione d'ordine $\sqsubseteq$ l'inclusione $\subset$, esso risulta un reticolo isomorfo ad $\mathscr{A}'$ e quindi ad $\mathcal{R}$ (difatti, per $A' \in \mathscr{A}'$, $B' \in \mathscr{A}'$ si ha $A' \subset B'$ quando e solo quando è $A' - O' \subset B' - O'$, essendo O' contenuto sia in A' che in B');

ii) in esso l'interferenza e la congiunzione finite si identificano rispettivamente con la intersezione e l'unione finite (difatti, per $A' \in \mathscr{A}'$, $B' \in \mathscr{A}'$, si ha

$(A'-O') \cap (B'-O') = (A' \cap B') - O' \in \mathscr{A}''$, $(A'-O') \cup (B'-O') = (A' \cup B') - O' \in \mathscr{A}''$,

e quindi necessariamente si ha $A'' \sqcap B'' = A'' \cap B''$, $A'' \sqcup B'' = A'' \cup B''$ per $A'' \in \mathscr{A}''$, $B'' \in \mathscr{A}''$);

iii) il suo elemento nullo O'' non è che l'insieme vuoto $\emptyset$ (difatti è $\emptyset = O' - O'$).

Si conclude che, senza alcuna restrizione, possiamo supporre eguale all'insieme vuoto già l'elemento nullo di $\mathscr{A}'$ (in caso contrario basterà sostituire $\mathscr{A}'$ con $\mathscr{A}''$ in ciò che segue).

2) La proprietà (ii) implica che *il sistema $\mathscr{A}'$ sia chiuso alla unione ed alla intersezione finite;* avendo poi supposto $O' = \emptyset$, ne segue che *$\mathscr{A}'$ è chiuso anche rispetto alla differenza* (difatti la differenza tra due insiemi, $C' = A' - B'$, è caratterizzata dalla proprietà $C' \cap B' = \emptyset$, $C' \cup B' = A' \cup B'$; detti A e B i somi corrispondenti in $\mathcal{R}$ rispettivamente ad A' e B', posto $D = A - B$, avremo $D \sqcap B = 0$, $D \sqcup B = A \sqcup B$, e quindi $D' \cap B' = \emptyset$, $D' \cup B' = B' \cup A'$ per il corrispondente di D in $\mathscr{A}'$, D': si conclude $C' = D' \in \mathscr{A}'$).

3) Data una successione $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ di insiemi del sistema $\mathscr{A}'$, detto A_n il soma che in $\mathcal{R}$ corrisponde ad A'_n $(n = 1, 2, \ldots)$, detto A' l'insieme che in $\mathscr{A}'$ corrisponde al soma $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, avremo:

i) $A' \in \mathscr{A}'$;

ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \subset A'$, in quanto dalla $A_k \sqsubseteq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ segue $A'_k \subset A'$, per ogni indice k;

iii) se $B' \in \mathscr{A}'$ ed è $\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \subset B'$, detto B il soma che in $\mathcal{R}$ corrisponde all'insieme B', avremo $A_n \sqsubseteq B$ per ogni indice n, e quindi $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \sqsubseteq B$, da cui $A' \subset B'$.

Si conclude che A' è congiunzione (in $\mathcal{A}'$) della successione $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$.

In conclusione:

non soltanto è vero che *il sistema di insiemi* $\mathcal{A}$ *soddisfa gli assiomi che* C. CARATHÉODORY *impone al reticolo di somi astratti* $\mathcal{R}$;

ma è vero altresì che *qualunque reticolo di somi astratti soddisfacente gli assiomi di* C. CARATHÉODORY *è isomorfo* (rispetto alla relazione d'ordine $\sqsubset$, e quindi rispetto alla interferenza $\sqcap$ ed alla congiunzione $\sqcup$) *ad un sistema d'insiemi* $\mathcal{A}'$ *verificante gli assiomi* (1) *e* (2) del paragrafo 1 (nel sistema $\mathcal{A}'$ come relazione d'ordine va intesa l'inclusione $\subset$).

L'assunto è pienamente provato.

3. **Funzioni d'insieme fondamentale e funzioni misura.** Dopo quanto esposto al paragrafo 2, è evidente che le definizioni ed i risultati esposti in [1] possono applicarsi e (rispettivamente) dedursi supponendo sistematicamente $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, senza perder di generalità. Per quanto riguarda il contenuto dei capitoli I, II e V di [1] (funzioni di somi = funzioni d'insieme fondamentale, e funzioni misura) non si ottengono con ciò sostanziali semplificazioni logiche (*a differenza di quanto riguarda il contenuto dei capitoli* III, IV, VI, *e sgg. di* [1]), ma soltanto una maggiore intuitività del discorso. Le definizioni e i risultati principali sono i seguenti.

DEFINIZIONE. Una funzione reale d'insieme, $\mu(A)$, definita sul sistema $\mathcal{A}$ (e suscettibile anche dei valori $-\infty$, $+\infty$) si dice una *funzione misura* quando:

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) dati ad arbitrio l'insieme $B \in \mathcal{A}$ e la successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'insiemi pure $\in \mathcal{A}$, dalla relazione $B \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ segue sempre la diseguaglianza $\mu(B) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (4).

Dalle condizioni (i) ed (ii) segue subito che *ogni funzione misura è non negativa e monotona.*

DEFINIZIONE. Data una funzione misura $\mu(A)$, si dice *misurabile* (μ) ogni insieme $U \in \mathcal{A}$, che goda della proprietà seguente: preso ad arbitrio un insieme $A \in \mathcal{A}$, se è $\mu(A) < +\infty$, allora è $\mu(A) = \mu(A \cap U) + \mu(A - U)$.

Si dimostra che:

(a) *gli insiemi misurabili* (μ) *costituiscono un sistema* $\mathcal{A}_\mu$, *chiuso alle operazioni di differenza nonchè di congiunzione e interferenza numerabili, su* $\mathcal{A}$; *pertanto il sistema* $\mathcal{A}_\mu$ *verifica gli assiomi* (1) *e* (2) *del paragrafo* 1;

---

(4) Ammesso, beninteso, che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ converga, o diverga, assolutamente

(b) *altrettanto può dirsi per il sistema $\mathcal{N}_\mu$ degli insiemi $A \in \mathcal{A}$ per i quali è $\mu(A) = 0$, nonchè per il sistema $\mathcal{F}_\mu$ degli insiemi di misura σ-finita* (ossia eguali alla congiunzione d'una successione d'insiemi misurabili (μ), per ciascuno dei quali μ è finita);

(c) *inoltre, i sistemi $\mathcal{N}_\mu$ e $\mathcal{F}_\mu$ sono contenuti nel sistema $\mathcal{A}_\mu$, e su $\mathcal{A}_\mu$ sono chiusi alla relazione d'inclusione* $\supset$ (sistemi « ereditari » su $\mathcal{A}_\mu$);

(d) *la funzione misura $\mu(A)$ risulta numerabilmente additiva su $\mathcal{A}_\mu$: ossia, data una successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'insiemi mutuamente disgiunti e misurabili (μ), si ha* $\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Eccetera.

Si deve osservare in tutto ciò soprattutto una cosa: questa teoria è perfettamente analoga a quella ordinaria, con la sola avvertenza di sostituire « congiunzione » e « interferenza » numerabili lì dove nella teoria ordinaria sono l'unione e la intersezione numerabili.

Una seconda osservazione è questa. La teoria ordinaria è stata costruita anche partendo da un δ-anello d'insiemi (sistema numerabilmente $\cap$-completo) anzichè partendo da un σ-anello (sistema numerabilmente completo, ossia $\cup$ - $\cap$-completo) (5). L'analogo consisterebbe nel porre in luogo dell'assioma 2 del paragrafo 1 il seguente, più debole,

2') *data una successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'insiemi fondamentali, tra gli insiemi fondamentali contenuti in $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ve n'è uno massimo $\bigsqcap_{n=1}^{\infty} A_n$* (« interferenza » della successione data), e modificare in conformità i risultati (a), (b), (c) e (d) di questo paragrafo.

La cosa è perfettamente fattibile, come osserva lo stesso C. CARATHÉODORY (v. [1], pp. 148-149); ci siamo attenuti alla formulazione (2) del paragrafo 1 al solo scopo di ottenere una teoria direttamente confrontabile con quella effettivamente costruita in [1].

Una osservazione più o meno dello stesso tenore della precedente va fatta a proposito dell'introduzione di funzioni misura di segno qualsiasi (cfr. però [1], cap. X, p. 274 e sgg.).

4. **Le funzioni di punto fondamentali.** Per definire l'operazione di integrazione, C. CARATHÉODORY si serve della nozione (piuttosto artificiosa e poco intuitiva) di « funzione di luogo » = « Ortsfunktion », di cui tratta

---

(5) Cfr. [5].

(6) $A[f < y]$ indica, al solito, quel sottoinsieme di A su cui è $f < y$; analogamente $A[f \leqq y]$, ecc.

(7) $f \cap g$ $(f \cup g)$ rappresenta quella funzione che, per ciascun $x \in A$, ha valore egnale al minimo (al massimo) dei due numeri $f(x)$ e $g(x)$.

in [1], capp. III e IV. Se si prende $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, si ha il notevole vantaggio di poter impiegare, invece di queste « funzioni di luogo », certe funzioni di punto individuate del sistema $\mathcal{A}$, ciò che consente una maggiore intuitività nella trattazione, facendosi a meno dei faticosi algoritmi introdotti in [1], cap. IV.

Introdotto al paragrafo 1 il sistema $\mathcal{A}$ degli insiemi fondamentali, introduciamo in corrispondenza la classe $\mathcal{M}$ delle funzioni di punto « fondamentali ».

Una funzione di punto f si dirà « fondamentale » se:

1) *il suo insieme di definizione A è fondamentale;*

2) *per ogni numero reale (improprio) y esiste almeno un insieme fondamentale $A_f(y)$ tale che*

$$A\,[f < y] \subset A_f(y) \subset A\,[f \leqq y]\ (^6)$$

ovvero, in altre parole, *tale che*

$$f(x) < y \ \textit{ implichi } \ x \in A_f(y) \ \textit{ ed } \ x \in A_f(y) \ \textit{ implichi } \ f(x) \leqq y.$$

Sussistono i teoremi seguenti:

I. *È fondamentale ogni funzione costante, definita su un insieme fondamentale.* Banale.

II. *Dato un numero finito di insiemi fondamentali, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, è fondamentale qualsiasi funzione definita su $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ e costante su ciascuno degli insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$.* Banale.

III. *Date due funzioni f e g, entrambe fondamentali e definite sull'insieme A, risultano fondamentali anche le funzioni $f \cap g$ e $f \cup g$* (7). Difatti si ha, per ogni y reale,

$$A[f \cap g < y] = A\,[f<y] \cup A\,[g<y] \subset A_f(y) \cup A_g(y) \subset A\,[f \leqq y] \cup A\,[g \leqq y] = A[f \cap g \leqq y],$$

$$A[f \cup g < y] = A\,[f<y] \cap A\,[g<y] \subset A_f(y) \cap A_g(y) \subset A\,[f \leqq y] \cap A\,[g \leqq y] = A[f \cup g \leqq y],$$

ed è
$$A_f(y) \cup A_g(y) \in \mathcal{A}, \quad A_f(y) \cap A_g(y) \in \mathcal{A}.$$

IV. *Date due funzioni f e g, entrambe fondamentali e finite sull'insieme A di definizione, risultano fondamentali le funzioni $f + g$ ed $f \cdot g$, $-f$, e (se è $g(x) \neq 0$ in tutto A) $1/g$* (8).

---

(8) Con $f+g$, $f.g$, $-f$ ed $1/g$ si intendono quelle funzioni che, per ciascun $x \in A$, hanno rispettivamente il valore $f(x)+g(x)$, $f(x).g(x)$, $-f(x)$ e $1/g(x)$. Analogamente per $f-g$ ed f/g.

1) $-f \in \mathcal{M}$; difatti si ha, per ogni y reale,

$$A\,[f < -y] \subset A_f(-y) \subset A\,[f \leqq -y]$$

e quindi

$$A\,[-f < y] \subset A - A_f(-y) \subset A\,[-f \leqq y]\,, \quad A - A_f(-y) \in \mathcal{A}.$$

2) $1/g \in \mathcal{M}$; difatti, si ha (essendo sempre $g(x) \neq 0$)

$$A\,[g < 0] = A_g(0) = A\,[g \leqq 0]$$

e quindi

$$A\,[1/g < 0] = A_g(0) = A\,[1/g \leqq 0]\,, \quad A_g(0) \in \mathcal{A}\,, \text{ per } y = 0\,,$$

$$A[1/g<y] \subset A_g(0) \cup [A - A_g(1/y)] \subset A[1/g \leqq y], \; A_g(0) \cup [A - A_g(1/y)] \in \mathcal{A}, \text{ per } y > 0\,,$$

$$A[1/g<y] \subset A_g(0) \cap [A_{-g}(1/|y|) \subset A\,[1/g \leqq y]\,, \; A_g(0) \cap A_{-g}(1/|y|) \in \mathcal{A}\,, \text{ per } y < 0.$$

3) $f + g \in \mathcal{M}$; per dimostrarlo fissiamo ad arbitrio il numero reale y. Prendiamo in primo luogo un $x \in A$, tale che sia $f(x) + g(x) < y$; possiamo allora trovare due numeri razionali u e v tali da aversi $f(x) < u$, $g(x) < v$, $u + v < y$; ne segue che è $x \in A_f(u) \cap A_g(v)$, $u + v < y$, e quindi

$$A\,[f + g < y] \subset \bigcup_{u,v}^{u+v<y} [A_f(u) \cap A_g(v)] \subset \bigsqcup_{u,v}^{u+v<y} [A_f(u) \sqcap A_g(v)] \in \mathcal{A}\,(u, v \text{ razionali}).$$

In secondo luogo, prendiamo a piacere quattro numeri razionali u, v, r, s, con $u + v < y < r + s$; necessariamente sarà $u < r$ ovvero $v < s$, e quindi $A_f(u) \subset A_f(r)$ ovvero $A_g(v) \subset A_g(s)$, in ogni caso $A_f(u) \cap A_g(v) \subset A_f(r) \cup A_g(s)$; data l'arbitrarietà di u, v, r, s, avremo successivamente

$$\bigcup_{u,v}^{u+v<y} [A_f(u) \cap A_g(v)] \subset A_f(r) \cup A_g(s)\,,$$

$$\bigsqcup_{u,v}^{u+v<y} [A_f(u) \sqcap A_g(v)] \subset A_f(r) \cup A_g(s)\,,$$

$$\bigsqcup_{u,v}^{u+v<y} [A_f(u) \sqcap A_g(v)] \subset \bigcap_{r,s}^{r+s>y} [A_f(r) \cup A_g(s)]\,,$$

$$\bigsqcup_{u,v}^{u+v<y} [A_f(u) \sqcap A_g(v)] \subset \bigsqcap_{r,s}^{r+s>y} [A_f(r) \sqcup A_g(s)]\,(u, v, r, s, \text{ razionali}).$$

Quest'ultima relazione permette di completare la dimostrazione della tesi (3), provando che è

$$\bigsqcup_{u,\,v}^{u+v<y} [A_f(u) \sqcap A_g(v)] \subset A\,[f+g \leqq y] \quad (u\,,\ v \text{ razionali}):$$

difatti, se in un punto x di A si ha $f(x)+g(x)>y$, possiamo trovare due numeri razionali r ed s tali da aversi

$$f(x)>r\,,\quad g(x)>s\,,\quad r+s>y\,,\quad \text{da cui}\quad x \notin A_f(r)\,,\quad x \notin A_g(s)\,,\quad r+s>y\,,$$

poi $x \notin A_f(r) \cup A_g(s)$, $r+s>y$, quindi $x \notin \bigcap_{r,\,s}^{r+s>y} [A_f(r) \cup A_g(s)]$, ed infine

$$x \notin \bigsqcup_{u,\,v}^{u+v<y} [A_f(u) \sqcap A_g(v)] \quad (u\,,\ v\,,\ r\,,\ s \text{ razionali}).$$

In conclusione per ogni numero reale y si ha. (con u, v, r, s razionali)

$$A\,[f+g<y] \subset \bigsqcup_{u,\,v}^{u+v<y} [A_f(u) \sqcap A_g(v)] \subset \bigsqcap_{r,\,s}^{r+s>y} [A_f(r) \sqcup A_g(s)] \subset A\,[f+g \leqq y].$$

4) $f \cdot g \in \mathcal{M}$. Se le due funzioni f e g sono entrambe non negative su A, la dimostrazione è analoga a quella della tesi (3); se ciò non accade, ponendo $f_+ = f \cup 0$, $g_+ = g \cup 0$, $f_- = -(f \cap 0)$, $g_- = -(g \cap 0)$ (9) si ha $f_+ \in \mathcal{M}$, $f_- \in \mathcal{M}$, $g_+ \in \mathcal{M}$, $g_- \in \mathcal{M}$, $f \cdot g = f_+ \cdot g_+ + f_- \cdot g_- - f_+ \cdot g_- - f_-\, g_+$, e quindi $f \cdot g \in \mathcal{M}$.

Il teorema IV dimostra in sostanza che la totalità delle funzioni finite fondamentali, definite su un dato insieme A, è chiusa alle operazioni $+$, $-$, $\times$, $:$, definite nel modo più ovvio, con la solita eccezione, per la divisione, che il divisore non assuma in A il valore zero.

Il teorema III dimostra che la totalità $\mathcal{M}^A$ delle funzioni fondamentali su un dato insieme $A \in \mathcal{A}$, costituisce un reticolo rispetto alla relazione d'ordine $\sqsubseteq$ così definita (in modo ovvio):

$$f \sqsubseteq g \ \text{ significa } \ f \leqq g\,, \ \text{ ossia } \ f(x) \leqq g(x) \ \text{ per ogni } \ x \in A\,.$$

In tale reticolo la congiunzione $\sqcup$ e l'interferenza $\sqcap$ finite s'identificano rispettivamente con le operazioni $\cup$ e $\cap$.

(9) Con 0 s'è indicata, al solito, la funzione identicamente nulla; è ovvio che f_+, f_-, g_+, g_- sono non negative.

Il reticolo $\mathfrak{M}^A$ risulta anche completo numerabilmente, come dimostra il seguente teorema

V. *Data una successione* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *di funzioni fondamentali, definite sullo stesso insieme* A,

tra le funzioni fondamentali su A *maggioranti la successione ve n'è una minima* $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_n$ (« congiunzione » della successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$);

tra le funzioni fondamentali su A *minoranti la successione ve n'è una massima* $\bigsqcap_{n=1}^{\infty} f_n$ (« interferenza » della successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$).

In altre parole *esistono due funzioni fondamentali e definite su* A, $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_n$ *e* $\bigsqcap_{n=1}^{\infty} f_n$ *tali che*

i) $\bigsqcap_{n=1}^{\infty} f_n \leqq \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \leqq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_n$ (10);

ii) se $f \in \mathfrak{M}^A$ *ed è* $f \leqq \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$ *ovvero* $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f$, *ne segue, rispettivamente,* $f \leqq \bigsqcap_{n=1}^{\infty} f_n$, *ovvero* $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f$.

Dimostriamo la metà del teorema, e precisamente la $\sqcup$ - completezza numerabile del reticolo $\mathfrak{M}^A$, l'altra metà essendo analoga.

Per costruire la funzione $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_n$, consideriamo per ogni punto $x \in A$, il gruppo $\mathcal{G}(x)$ degli insiemi fondamentali contenuti in A e contenenti x (11), e poniamo

$$g(x) = \lim_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)}'' \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

1) $g \in \mathfrak{M}^A$. Fissato il numero reale y, dalla diseguaglianza $g(x) < y$ segue l'esistenza d'un insieme fondamentale B, contenuto in A e contenente x, tale che sia $B \subset A\,[\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n < y] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A\,[f_n < y] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$, e quindi $B \subset \bigsqcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$ ed infine $x \in \bigsqcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$;

---

(10) Con $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n$ ($\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$) s'intende quella funzione che, per ciascun $x \in A$, assume valore eguale all'estremo superiore (inferiore) della successione numerica $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

(11) Cfr. [5], pag. 6 e sgg. .

dunque

$$A\,[g < y] \subset \prod_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y) \in \mathscr{A}\,.$$

In secondo luogo, fissato il numero reale y, dalla

$$x \in \prod_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$$

segue subito, per ogni indice n, e per ogni $z \in \prod_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$, $f_n(z) \leqq y$ e quindi $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z) \leqq y$, da cui, immediatamente,

$$g(x) = \lim_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)}{}'' \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z) \leqq y\,;$$

dunque $\prod_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y) \subset A\,[g \leqq y]$ c. d. d.

2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \leqq g$. Fissiamo ad arbitrio $x \in A$ ed il numero reale y maggiore di $g(x)$; come abbiamo visto al punto precedente, dalla $g(x) < y$ segue $x \in \prod_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$ e da questa segue $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z) \leqq y$: per la arbitrarietà di y, l'assunto è provato.

3) *Se* $f \in \mathfrak{M}^A$ *ed è* $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f$, *allora è anche* $g \leqq f$. Per provar ciò, essendo $\lim_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)}{}'' \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z) \leqq \lim_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)}{}'' f(z)$ su tutto A, basterà mostrare che è

$$\lim_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)}{}'' f(x) \leqq f(x) \text{ su tutto } A.$$

Ma, con lo stesso ragionamento del punto (1), per ogni numero y maggiore di $f(x)$ abbiamo $x \in A_f(y) \subset A\,[f \leqq y]$, e quindi $\lim_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)}{}'' f(z) \leqq y$: per la arbitrarietà di y segue l'assunto.

In conclusione ponendo $\coprod_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)}{}'' \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ si soddisfano le condizioni dell'enunciato, le quali d'altronde non ammettono più d'una funzione che le soddisfi.

In modo analogo avremo $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)}{}' \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

OSSERVAZIONE. Si noti, che nel dimostrare il punto (3) del teor. V, nonchè l'analogo relativo alla funzione $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$, si è provato che:

VI. *Se* $f \in \mathcal{M}^A$, *allora si ha* $f(x) = \lim_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)} f(z)$ *per ogni* $x \in A$.

OSSERVAZIONE. Si noti ancora che il teorema V consente di introdurre le seguenti nozioni di limite, per qualunque successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni fondamentali sullo stesso insieme A:

$$\operatorname*{Lim'}_{n\to\infty} f_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcap_{k=n}^{\infty} f_k, \quad \operatorname{Lim''} f_n = \bigsqcap_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=n}^{\infty} f_k.$$

Il teorema V ha dimostrato che, dato un insieme fondamentale A, il reticolo $\mathcal{M}^A$ è numerabilmente completo; il teorema seguente dimostra che esso è (a meno di isomorfismi) il minimo reticolo numerabilmente completo contenente come elementi le funzioni fondamentali «costanti a tratti» su A.

VII. *Dato l'insieme fondamentale* A *e la funzione* $f \in \mathcal{M}^A$, *esiste una successione* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *di funzioni* $\in \mathcal{M}^A$ *tali che:*

i) per ciascun indice n, *si può decomporre* A *nell'unione finita d'insiemi fondamentali, su ciascuno dei quali* f_n *sia costante;*

ii) $f = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_n$.

VII'. *Dato l'insieme fondamentale* A *e la funzione* $f \in \mathcal{M}^A$, *esiste una successione* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *di funzioni* $\in \mathcal{M}^A$, *tali che:*

i) per ciascun indice n, *si può decomporre* A *nella unione finita di insiemi fondamentali, su ciascuno dei quali* f_n *sia costante;*

ii) $f = \bigsqcap_{n=1}^{\infty} f_n$.

Dimostro solo il teorema VII, l'altro essendo analogo. A questo fine, sia $\{y_n\}$ una successione di numeri reali densa su tutto l'asse reale, e poniamo, per ciascun indice n,

$$f_n(x) = -\infty \text{ su } A_f(y_n), \quad f_n(x) = y_n \text{ su } A - A_f(y_n).$$

È immediato che per ciascun indice n si ha

$$f_n \leqq f, \text{ e quindi } \bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f.$$

D'altra parte, per ogni $x \in A$ e per ogni numero y minore di $f(x)$, esiste un indice k tale da aversi $y < y_k < f(x)$, e quindi (teor. VI) esiste un insieme fondamentale B, contenente x e contenuto in A, tale da aversi $y_k < f(z)$ per ogni $z \in B$; ne segue

$$B \subset A - A_f(y_k) \quad \text{e quindi} \quad f_k(z) = y_k \quad \text{su} \quad B,$$

da cui

$$y < y_k = f_k(x) \leqq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leqq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_n(x);$$

data l'arbitrarietà di y, si conclude $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_n = f$, c. d. d..

È opportuno qui osservare che l'insieme delle funzioni fondamentali «costanti a tratti» su un dato insieme fondamentale A, è chiuso alle operazioni di intersezione e di unione finite, e quindi costituisce un reticolo subordinato a $\mathcal{M}^A$.

Concludiamo questo paragrafo notando che la teoria qui delineata delle funzioni fondamentali è perfettamente analoga alla teoria ordinaria delle funzioni misurabili, con la sola avvertenza di sostituire «funzione interferenza» e «funzione congiunzione», lì dove nella teoria ordinaria compaiono, rispettivamente, «funzione estremo inferiore» e «funzione estremo superiore» d'una successione di funzioni.

5. **Funzioni fondamentali e funzioni di luogo: confronto.** Veniamo ora a dimostrare l'equivalenza tra la nozione di «funzione di luogo» di C. CARATHÉODORY e quella di «funzione fondamentale» introdotta al paragrafo 4, sempre ammettendo di aver posto $\mathcal{A}$ in luogo di $\mathcal{R}$ nella teoria «algebrica».

Secondo C. CARATHÉODORY, una funzione di luogo φ, definita sul soma (= insieme fondamentale) A si individua assegnando una scala di somi $[S_\varphi(y)]$ contenuti in A, ossia una legge che ad ogni numero reale improprio y faccia corrispondere un insieme fondamentale $S_\varphi(y) \subset A$, con la proprietà che

$$\text{dalla } y' \leqq y'' \text{ segua sempre } S_\varphi(y') \subset S_\varphi(y'').$$

Cominciamo con lo stabilire il lemma:

I. *Fissato in A il punto x, e data la scala di somi $[S_\varphi(y)]$ contenuti in A, si ha*

$$\inf\{y: x \in S_\varphi(y)\} = \sup\{y: x \notin S_\varphi(y)\} \; (^{12}).$$

([12]) Al solito, $\sup\{y: x \notin S_\varphi(y)\}$ designa l'estremo superiore dell'insieme dei numeri (reali impropri) y tali che $x \notin S_\varphi(y)$; ecc..

Poniamo per abbreviazione: $\overline{y} = \inf\{y\colon x \in S_\varphi(y)\}$, $\underline{y} = \sup\{y\colon x \notin S_\varphi(y)\}$.

1) Se fosse $\overline{y} > \underline{y}$, preso un valore y tale che $\overline{y} > y > \underline{y}$, avremmo $x \notin S_\varphi(y)$ e contemporaneamente $x \in S_\varphi(y)$.

2) Se d'altra parte fosse $\overline{y} < \underline{y}$, esisterebbe un numero $u < \underline{y}$ con $x \in S_\varphi(u)$, e di conseguenza un altro numero v maggiore di u con $x \notin S_\varphi(v)$; avremmo allora

$$u < v \quad \text{e} \quad S_\varphi(u) \not\subset S_\varphi(v)$$

il che è assurdo.

Si conclude $\overline{y} = \underline{y}$, c. d. d. .

Ne segue il teorema

II. *Data la scala di somi* $[S_\varphi(y)]$ *contenuti in* $A \in \mathcal{A}$, *è fondamentale la funzione* f, *definita su* A, *la quale sul generico punto* x *di* A *assume il comune valore di*

$$\sup\{y : x \notin S_\varphi(y)\} = \inf\{y : x \in S_\varphi(y)\}.$$

Difatti per ciascun punto $x \in A$ avremo che

$$y < f(x) \qquad \text{implica} \qquad x \notin S_\varphi(y),$$

$$y > f(x) \qquad \text{implica} \qquad x \in S_\varphi(y);$$

ne segue, con le notazioni del paragrafo 4,

$$A\,[f < y] \subset S_\varphi(y) \subset A\,[f \leqq y]$$

ed il teorema è dimostrato ponendo $A_f(y) = S_\varphi(y)$.

Dalla definizione stessa di funzione fondamentale segue che

III. *Data un'arbitraria funzione fondamentale* f *definita su* A, *essa può ottenersi sempre da una opportuna scala di somi* (*contenuti in* A) *al modo indicato dal teorema precedente.*

Date su un medesimo insieme fondamentale A due scale di somi, $[S_\varphi(y)]$ e $[S_\psi(y)]$, C. Carathéodory dice che è

$$[S_\varphi(y)] \leqq [S_\psi(y)]$$

quando, per ogni coppia y' ed y'' di numeri reali (impropri), dalla diseguaglianza $y' < y''$ segue l'inclusione $S_\psi(y') \subset S_\varphi(y'')$.

Ebbene, sussiste il teorema:

IV. *Date due scale di somi* $[S_\varphi(y)]$, $[S_\psi(y)]$ *contenuti nell'insieme fondamentale* A, *siano* f *e* g *le due funzioni che si ottengono rispettivamente da* $[S_\varphi(y)]$ *e* $[S_\psi(y)]$ *con il procedimento del teorema II.*

Dalla $[S_\varphi(y)] \leqq [S_\psi(y)]$ *segue allora* $f \leqq g$, *e viceversa.*

Per dimostrarlo premettiamo il lemma:

V. *Nelle ipotesi del teorema IV, la condizione*

(a) «*per ogni coppia di numeri reali* $u < v$, *si ha* $S_\psi(u) \subset S_\varphi(v)$» *equivale alla condizione*

(b) «*per ogni coppia di numeri reali* $u < v$ *e per ogni* $x \in A$, $g(x) \leqq u$ *implica* $f(x) \leqq v$».

1) (a) implica (b); difatti, se (b) fosse falso, vi sarebbe un punto $x \in A$ ed una coppia di numeri reali $u < v$ con $g(x) < u$ e $v < f(x)$, quindi $x \in S_\psi(u)$ ed $x \notin S_\varphi(v)$: ne seguirebbe $S_\psi(u) \not\subset S_\varphi(v)$ con $u < v$, e la (a) sarebbe falsa.

2) (b) implica (a); difatti, se (a) fosse falso vi sarebbe un punto $x \in A$ ed una coppia di numeri reali $u < v$ tali che $x \in S_\psi(u)$ e $x \notin S_\varphi(v)$ e quindi $g(x) \leqq u$, $v \leqq f(x)$, ed infine $g(x) < f(x)$; ne seguirebbe l'esistenza di altri due numeri reali $r < s$ con $g(x) < r$, $s < f(x)$, e la (b) risulterebbe falsa.

Con ciò il lemma V è dimostrato.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema IV. La relazione $[S_\varphi(y)] \leqq [S_\psi(y)]$ equivale a dire che, per ogni coppia di numeri reali $u < v$ si ha $S_\psi(u) \subset S_\varphi(v)$; per il lemma V ciò equivale a dire che, in ciascun punto $x \in A$, la $g(x) \leqq u$ implica $f(x) \leqq v$ per ogni coppia di numeri reali $u < v$; per l'arbitrarietà di u e v, ciò equivale a dire che è $f(x) \leqq g(x)$ su tutto A, c. d. d..

Possiamo venire, infine, al risultato fondamentale di questo paragrafo.

Considerando equivalenti due scale di somi $[S_\varphi(y)]$ ed $[S_\psi(y)]$ (contenuti nello stesso insieme $A \in \mathscr{A}$) quando si ha ad un tempo

$$[S_\varphi(y)] \leqq [S_\psi(y)] \quad \text{e} \quad [S_\psi(y)] \leqq [S_\varphi(y)],$$

C. CARATHÉODORY chiama «funzioni di luogo» definite su $A \in \mathscr{A}$, le classi di equivalenza in cui la totalità delle scale di somi contenuti in A viene ripartita. Ma il teorema IV dimostra che due scale di somi sono euqivalenti se e solo se il procedimento indicato dal teorema II associa loro la stessa funzione fondamentale; quindi si ha:

VI. *Fissato l'insieme* $A \in \mathscr{A}$, *la totalità delle funzioni di luogo definite su* A *forma, rispetto alla relazione di ordine* $\leqq$, *un reticolo isomorfo a quello delle funzioni fondamentali definite in* A.

OSSERVAZIONI. 1). Poichè la definizione di limite di una successione di funzioni reali fondamentali ovvero di luogo può esser data mercè il solo uso della relazione d'ordine $\leqq$, dal teorema VI segue che il sistema delle funzioni di luogo definite su $A \in \mathscr{A}$ è isomorfo ad $\mathscr{M}^A$, anche rispetto alle operazioni $\operatorname*{Lim'}_{n \to \infty}$ e $\operatorname*{Lim''}_{n \to \infty}$ (che in $\mathscr{M}^A$ sono state definite nella osservazione prima del teorema VII del paragrafo 4).

2). Per analoga ragione il sistema $\mathscr{M}^A$ è isomorfo al sistema delle funzioni di luogo su A, anche rispetto alle operazioni «modulo di», «parte positiva di» e «parte negativa di».

3). Data una funzione di luogo φ definita su $A \in \mathscr{A}$, ed un insieme fondamentale $B \subset A$, la teoria algebrica chiama «funzione traccia della φ su B» quella funzione ψ di luogo che è definita su B ed ammette la scala di somi $[B \cap S_\varphi(y)]$; ma alla ψ il procedimento del teorema II associa una funzione g, che sull'insieme B coincide con la f. Ciò dimostra che l'isomorfismo che ci interessa sussiste anche rispetto alla operazione di «traccia».

6. Ancora sul confronto tra funzioni di luogo e funzioni fondamentali. Resta ormai da dimostrare nient'altro che l'isomorfismo aritmetico (ossia rispetto alle operazioni $+$, $-$, $\times$, $:$) tra il sistema delle funzioni finite di luogo e quelle delle funzioni finite fondamentali, tutte aventi lo stesso insieme di definizione $A \in \mathscr{A}$.

Per le funzioni di luogo, C. CARATHÉODORY introduce le operazioni valendosi del concetto di estremo superiore (ed inferiore) sul soma $B \subset A$, d'una funzione di luogo definita nel soma A, secondo la definizione seguente:

Data una funzione di luogo φ, definita in $A \in \mathscr{A}$, si dice «estremo superiore (inferiore) di φ nell'insieme fondamentale $B \subset A$» il numero $\beta_\varphi(B)$ (il numero $\alpha_\varphi(B)$) dato dall'eguaglianza

$$\beta_\varphi(B) = \begin{cases} \inf\ \{y:\ B \subset S_\varphi(y)\} & \text{se è } < +\infty, \\ \sup\ \{y:\ B \not\subset S_\varphi(y)\} & \text{se è } > -\infty \end{cases}$$

$$\left(\alpha_\varphi(B) = \begin{cases} \sup\ \{y:\ B \cap S_\varphi(y) = \emptyset\} & \text{se è } > -\infty, \\ \inf\ \{y:\ B \cap S_\varphi(y) \neq \emptyset\} & \text{se è } < +\infty. \end{cases}\right) \ [13].$$

(13) Al solito, $[S_\varphi(y)]$ indica una scala di somi relativa alla φ.

Dimostriamo dunque il teorema:

I. *Data una funzione di luogo* φ, *definita in* $A \in \mathcal{A}$, *detta* f *la corrispondente funzione fondamentale* [14], *si ha*

$$\beta_\varphi(B) = \sup\{f(x) :\ x \in B\},$$

$$\alpha_\varphi(B) = \inf\{f(x) :\ x \in B\},$$

per ogni insieme fondamentale B *contenuto in* A.

Basterà ovviamente dimostrare la prima eguaglianza, l'altra essendo analoga.

1) Se fosse $\sup\{f(x) :\ x \in B\} < \beta_\varphi(B) < +\infty$, si potrebbero trovare due numeri reali u, v tali che

$$\sup\{f(x) :\ x \in B\} < u < v < \inf\{y :\ B \subset S_\varphi(y)\},$$

da cui segue sia la relazione $B \subset A_f(u) = S_\varphi(u)$, sia l'implicazione «se $B \subset S_\varphi(y)$ allora $v < y$»; si concluderebbe dunque $v < u$, che è assurdo.

2) Se fosse

$$\sup\{f(x) :\ x \in B\} < \beta_\varphi(B) = +\infty,$$

esisterebbe un numero reale u tale che

$$\sup\{f(x) :\ x \in B\} < u,\quad B \not\subset S_\varphi(u),$$

e quindi nuovamente

$$B \subset A_f(u) = S_\varphi(u),\quad B \not\subset S_\varphi(u),$$

il che è assurdo.

3) Se fosse

$$\beta_\varphi(B) < \sup\{f(x) :\ x \in B\},$$

esisterebbe un numero reale u tale che

$$B \subset S_\varphi(u),\quad u < \sup\{f(x) :\ x \in B\},$$

e quindi esiste un punto $x \in B$ per cui

$$B \subset S_\varphi(u),\quad u < f(x),\quad \text{e quindi}\quad x \notin A_f(u) = S_\varphi(u):$$

ne seguirebbe di nuovo $B \subset S_\varphi(u)$ e $B \not\subset S_\varphi(u)$, il che è assurdo.

Il teorema è dimostrato.

---

[14] Con le notazioni dei paragrafi 4 e 5 possiamo porre $A_f(y) = S_\varphi(y)$, per ogni y.

OSSERVAZIONE. Questo teorema I giustifica la definizione di C. CARATHÉODORY per $\alpha_\varphi(B)$ e $\beta_\varphi(B)$. Si osservi come venga eliminata naturalmente una bizzarria notevole della teoria algebrica: *l'esistenza di funzioni di luogo sprovviste di valori.*

Secondo la teoria algebrica, una funzione di luogo φ assume il valore y quando si ha $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} S_\varphi\left(y - \frac{1}{k}\right) \neq \bigsqcap_{k=1}^{\infty} S_\varphi\left(y + \frac{1}{k}\right)$, ossia quando v'è un insieme fondamentale su cui la corrispondente funzione f sia identica ad y: perchè φ non assuma alcun valore (secondo C. CARATHÉODORY), basta dunque che in ciascun insieme di livello della f non sia contenuto alcun insieme fondamentale $\neq \emptyset$.

Dopo il teorema I, la dimostrazione dell'isomorfismo aritmetico tra le funzioni fondamentali finite è a portata di mano. Mi limito al solo caso della operazione $+$, gli altri essendo analoghi (con qualche difficoltà dovuta al segno, nel caso della $\times$ e della $:$, che però si risolve separando parti positive e parti negative).

Siano date due funzioni di luogo finite, φ e ψ, sullo stesso insieme fondamentale A, siano f e g le corrispondenti funzioni fondamentali. Per un teorema di C. CARATHÉODORY (16), esiste una ed una sola funzione di luogo χ, definita su A, verificante la condizione

$$\alpha_\varphi(B) + \alpha_\psi(B) \leqq \alpha_\chi(B) \leqq \beta_\chi(B) \leqq \beta_\varphi(B) + \beta_\psi(B)$$

per ogni B fondamentale e contenuto in A; ciò significa, per il teorema I, e per i risultati del paragrafo precedente, che esiste una ed una sola funzione fondamentale h, definita su A, verificante la condizione

$$\alpha_\varphi(B) + \alpha_\psi(B) \leqq h(x) \leqq \beta_\varphi(B) + \beta_\psi(B)$$

per ogni B fondamentale e contenuto in A, per ogni $x \in B$; h, naturalmente, è la funzione che in $\mathcal{M}^A$ corrisponde a χ. Ma la funzione $f + g$ verifica la condizione imposta ad h, dunque si ha $f + g = h$.

L'isomorfismo rispetto alla operazione $+$ è dimostrato. Analogamente per le altre tre operazioni, con le dovute cautele.

OSSERVAZIONI FINALI. Nel capitolo IV, pag. 121 e sgg., di [1], vengono considerate altre maniere di « comporre » tra loro più funzioni di luogo, oltre le quattro operazioni dell'aritmetica; ma è ormai banale, che il discorso

(15) Cfr. [1], p. 86.
(16) [1], p. 108.

tenuto in questo paragrafo a proposito della operazione $+$ si può applicare in generale a tutte le altre « leggi di composizione » considerate da C. CARATHÉODORY: non vi insisterò più a lungo.

7. **Le funzioni misurabili** (μ) **e la nozione di integrale.** I due paragrafi 5 e 6 ci consentono di sbarazzarci della nozione di funzione di luogo (e quindi, del contenuto dei capitoli III e IV di [1]), e rimpiazzarle con le funzioni fondamentali, con i teoremi del paragrafo 4.

Seguendo ora le tracce del cap. VI di [1], dedicato alla integrazione, avremo le definizioni e i risultati seguenti.

DEFINIZIONE. *Assegnata la funzione misura μ, si dirà misurabile (μ) ogni funzione di punto f verificante le seguenti proprietà:*

i) *è definita su un insieme A misurabile (μ);*

ii) *per ogni numero reale (improprio) y esiste un insieme $A_f(y)$ misurabile (μ) tale che*

$$A\,[f < y] \subset A_f(y) \subset A\,[f \leqq y]\,.$$

Chiamiamo $\mathcal{M}_\mu$ $(\mathcal{M}_\mu^A)$ l'insieme delle funzioni misurabili (μ) (definite su A). È evidente che

1) *Ogni funzione misurabile (μ) è fondamentale, ossia $\mathcal{M}_\mu \subset \mathcal{M}$.*

2) Per i risultati del paragrafo 2 e le definizioni del paragrafo 4, *le funzioni misurabili (μ) non sono altro che le funzioni « fondamentali » rispetto al sistema $\mathcal{A}_\mu$ degli insiemi misurabili (μ), assunto come « fondamentale ».*

3) Per i risultati del paragrafo 3, la interferenza e la congiunzione numerabili, nonchè la differenza su $\mathcal{A}$ subordinano le operazioni di egual nome su $\mathcal{A}_\mu$; di conseguenza, in virtù dell'osservazione precedente:

i) *Dato un numero finito d'insiemi misurabili (μ) $A_1, A_2, \dots, A_n$, è misurabile (μ) qualunque funzione definita su $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ e costante su ciascun insieme $A_1, A_2, \dots, A_n$* (cfr. teorr. I e II del paragrafo 4).

ii) *L'insieme $\mathcal{M}_\mu^A$, delle funzioni misurabili (μ) su A, è chiuso alle operazioni di interferenza e di congiunzione numerabili, e quindi a quella di passaggio al limite, su $\mathcal{M}^A$,* (cfr. teorema III e V del paragrafo 4).

iii) *Qualunque funzione misurabile (μ) è eguale alla congiunzione (interferenza) numerabile, su $\mathcal{M}^A$, di una successione di funzioni misurabili (μ) « costanti a tratti »* (cfr. teor. VII e VII′ del paragrafo 4).

iv) *Il sistema delle funzioni finite, misurabili (μ) su A, è chiuso alle operazioni $+$, $\times$, $-$, $:$* (con la solita eccezione che il divisore non deve essere mai nullo su A; cfr. Teor. IV del paragrafo 4).

Come si vede, la teoria delle funzioni misurabili (μ) è perfettamente analoga a quella ordinaria, con la solita sostituzione delle operazioni $\sqcup$ e $\sqcap$ rispettivamente al posto delle $\cup$ e $\cap$.

Ciò premesso, la definizione di integrale si presenta come segue:

1) Sia f una funzione misurabile (μ) e non negativa sull'insieme A_0 di misura σ-finita; si prendano in A_0, ad arbitrio, un numero finito n di insiemi mutamente disgiunti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ di misura finita [17] ed in corrispondenza n numeri reali (finiti) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tali che sia

$$y_k \leqq \inf \{ f(x) : x \in A_k \}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

e consideriamo il numero

$$I = \sum_{k=1}^{n} y_k \, \mu(A_k);$$

al variare di $n, A_1, A_2, \ldots, A_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ con le condizioni indicate, il numero I descrive un insieme, il cui estremo superiore si chiama *integrale di f esteso ad A_0, rispetto a μ*, e si scrive

$$\int_{A_0} f \, d\mu.$$

2) Sia f una funzione misurabile (μ) sull'insieme A_0 di misura σ-finita; posto

$$f_+ = f \cup 0, \quad f_- = -[f \cap 0],$$

entrambe le funzioni f_+ ed f_- risultano misurabili (μ) e non negative su A_0; posto

$$\psi_+(A_0) = \int_{A_0} f_+ \, d\mu, \quad \psi_-(A_0) = \int_{A_0} f_- \, d\mu,$$

se le due quantità $\psi_+(A_0)$ e $\psi_-(A_0)$ non sono entrambe infinite, si dice che *f è integrabile su A_0 rispetto a μ*, e la quantità

$$\int_{A_0} f \, d\mu = \int_{A_0} f_+ \, d\mu - \int_{A_0} f_- \, d\mu$$

viene chiamata *integrale di f su A, rispetto a μ*.

---

[17] Ossia, tali che $\mu(A_k) < +\infty \; (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Non è difficile riconoscere che la definizione qui adottata, perfettamente analoga a quella classica (cfr. [2], pp. 19 e 20), coincide, salvo il diverso linguaggio, con la definizione di C. CARATHÉODORY (18), suppostovi $\mathcal{R} = \mathcal{A}$. I risultati della teoria « algebrica » contenuti nei capitoli VI e seguenti di [1], restano pertanto validi; si ha però il vantaggio di poterli conseguire con metodi simili a quelli classici (cfr. ancora [2], pg. 21 e segg.) con la sola sostituzione di « interferenza » al posto di « intersezione » e di « congiunzione » al posto di « unione » (e la conseguente alterazione del significato di « limite per una successione d'insiemi, o di funzioni, misurabili (μ) »)

Si riottengono così in modo del tutto naturale e spontaneo la *completa* (*numerabile*) *additività* (19), *la assoluta continuità* (rispetto alla misura adottata), *la linearità* (rispetto all'integrando) *dell'integrale* e così *la decomposizione di* LEBESGUE e *quella di* JORDAN, nonchè *il teorema di* RADON-NIKODYM, ecc. ecc. Ma non vogliamo dilungarci su ciò.

8. **Osservazioni finali e conclusione.** Ci sia lecito ora concludere con qualche osservazione.

1) La teoria sommariamente delineata in questo lavoro si riduce immediatamente a quella classica, ammettendo che il sistema di insiemi fondamentali $\mathcal{A}$ sia chiuso rispetto alla intersezione ad alla unione numerabili: allora i segni $\sqcup$, $\sqcap$ vengono ad esser del tutto equivalenti ai segni $\cup$, $\cap$ (rispettivamente) in tutta la trattazione sopra svolta. Questo mostra, per così dire, « di quanto » la teoria algebrica è più generale di quella ordinaria.

2) La teoria classica è stata di reçente ampliata (20) non solo considerando misure con segno, ma permettendo al sistema degli insiemi misurabili di essere solo un δ-anello anzichè un σ-anello: quest'ultima circostanza permette di considerare integrali e misure con segno che non sono a variazione unilateralmente limitata su tutto il δ-anello. Non c'è difficoltà (come s'è già detto al paragrafo 3) ad ampliare la teoria qui esposta, in modo da includere anche questo caso.

3) Resta incompiuta la trattazione « algebrica » della derivazione delle funzioni d'insieme (di soma).

4) Restano anche aperte le questioni riguardanti il « prolungamento » di una funzione misura. Ossia; data sul sistema d'insiemi fondamentali $\mathcal{A}$ la funzione misura μ, caratterizzare, i reticoli $\mathcal{A}^*_\mu$ subordinati ad $\mathcal{A}$ e mi-

---

(18) La definizione (1) del testo equivale alla (159.6) di p. 179 di [1]; la definizione (2) del testo è identica a quella di p. 184 di [1].

(19) Intesa nel senso spiegato in (d) al paragrafo 3.

(20) Vedi [5].

nimali rispetto alla proprietà seguente: la traccia di μ su $\mathcal{A}_\mu^*$, e la additività numerabile di μ sul reticolo $\mathcal{A}_\mu$ degli insiemi misurabili (μ), determinano la funzione μ su tutto $\mathcal{A}_\mu$.

5) La teoria delineata in questo lavoro è, in un certo senso, duale di quella algebrica, gli enti «punto» ed «insieme di punti» della prima essendo risp. duali degli enti «soma» e «luogo = ultrafiltro proprio di somi» della seconda, allo stesso modo che nella Geometria Proiettiva piana gli enti «punto» e «punteggiata» sono risp. duali degli enti «retta» e «fascio di rette» (Cfr. nota (3))

È intenzione dello scrivente ritornare su questi argomenti.

FERNANDO BERTOLINI

BIBLIOGRAFIA CITATA

[1] C. CARATHÉODORY, *Mass und Integral und ihre Algebraisierung,* Birkhäuser Verlag, 1956.
[2] S. SAKS, *Theory of Integral,* Varsavia 1937.
[3] P. HALMOS, *Measure Theory,* Londra 1950.
[4] K. MAYRHOFER, *Inhalt und Mass,* Springer Verlag, Wien 1952
[5] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari,* Trieste 1954.
[6] H. HERMES, *Einführung in die Verbandstheorie,* Springer Verlag, Berlin 1955.

ELENCO DEI SIMBOLI PRINCIPALI

$\sqsubset$; relazione d'ordine del reticolo («precede»).

$\sqcap , \bigsqcap$; operazione d'interferenza del reticolo («l'ultimo precedente comune»).

$\sqcup , \bigsqcup$; operazione di congiunzione del reticolo («il primo seguente comune»).

$\subset$; relazione d'inclusione tra insiemi («è contenuto in»).

$\cap , \bigcap$; operazione di intersezione tra insiemi, o di estremo inferiore tra funzioni.

$\cup , \bigcup$; operazione di unione tra insiemi, o di estremo superiore tra funzioni.

$\mathcal{R}$; reticolo fondamentale di somi della teoria algebrica.

$\mathcal{A}$; reticolo degli insiemi fondamentali [con $\sqsubset$ eguale ad $\subset$].

$\mathcal{A}_\mu$; reticolo degli insiemi misurabili (μ). [con $\sqsubset$ eguale ad $\subset$].

$\mathcal{M} , (\mathcal{M}^A)$; reticolo delle funzioni fondamentali (definite su A). [con $\sqsubset$ eguale a $\leqq$].

$\mathcal{M}_\mu , (\mathcal{M}_\mu^A)$; reticolo delle funzioni misurabili (μ) (definite su A) - [con $\sqsubset$ eguale a $\leqq$].