ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

ANTONIO CHIFFI

**Sugli sviluppi in serie di autosoluzioni**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 11, nº 3-4 (1957), p. 217-223

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_217_0>

# SUGLI SVILUPPI IN SERIE DI AUTOSOLUZIONI

di ANTONIO CHIFFI (Pisa)

1. — In un dominio limitato $D$ di uno spazio ad $m$ dimensioni, le cui coordinate di punto indichiamo con $x_1, x_2, \ldots, x_m$, consideriamo il seguente operatore differenziale:

$$E[\varphi] = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}(P) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c(P)\,\varphi.$$

Esso sia del tipo ellittico (positivo) e sia dotato di funzione di Green rispetto alla condizione al contorno:

$$L[\varphi] = \alpha(P) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \beta(P)\,\varphi = q(P), \qquad P \in \mathcal{F} D,$$

dove con $\nu$ si è indicato l'asse conormale. Ciò accade se sono soddisfatte talune ipotesi qualitative per le funzioni che compaiono in $E[\ ]$ ed in $L[\ ]$ e per la frontiera di $D$ e quantitative per i coefficienti $c$, $\alpha$ e $\beta$ sulle quali non ci soffermiamo. In tali ipotesi e se $\vartheta(P)$ è una funzione positiva in $D$, il problema omogeneo:

$$E[\varphi] + \lambda\,\vartheta\,\varphi = 0 \qquad \text{in } D \tag{1}$$

$$L[\varphi] = 0 \qquad \text{su } \mathcal{F} D \tag{2}$$

ammette soluzioni [1] (autosoluzioni) per una infinità numerabile di valori reali di $\lambda$ (autovalori). Disponiamo gli autovalori in ordine di modulo crescente e ripetiamo ciascuno di essi tante volte quante sono le corrispondenti autosoluzioni (sempre in numero finito). Si ottiene un sistema di numeri $\{\lambda_n\}$ a ciascuno dei quali corrisponde una autosoluzione $\varphi_n$ e il sistema $\{\varphi_n\}$ risulta ortogonale con peso $\vartheta$ e può considerarsi normale.

---

(1) Cfr. M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*. Rondinella, Napoli, 1940, pag. 821.

Detto $s$ un intero positivo, facciamo le seguenti ulteriori ipotesi: per $m > 1$ la frontiera del dominio $D$ sia suscettibile nell'intorno di ogni suo punto di una rappresentazione parametrica mediante funzioni definite in un dominio limitato $E$ di uno spazio ad $m-1$ dimensioni, continue con le loro derivate fino a quelle di ordine $s$ (ovvero di ordine 1 per $s=0$, ovvero di ordine 2 per $s=1$) e tali da porre una corrispondenza biunivoca tra $E$ e la porzione di superficie rappresentata e da rendere massima la caratteristica della matrice jacobiana della trasformazione; le funzioni $a_{ik}$, $c$ e $\vartheta$ siano continue con le derivate fino a quelle ordine $s-1$ (ovvero di ordine 2 per $s=0$ e $s=1$).

In queste ipotesi risultano continue in $D$ le derivate delle autosoluzioni fino a quelle di ordine $s$ [2].

2. — Sia data in $D$ una funzione $f(P)$, ivi continua con le sue derivate fino a quelle di ordine $s$ se $s$ è pari; fino a quelle di ordine $s+1$ se $s$ è dispari. Posto:

$$E^0[f] = f; \qquad E^1_\vartheta[f] = \frac{1}{\vartheta} E[f];$$

$$E^k_\vartheta[f] = \frac{1}{\vartheta} E[E^{k-1}_\vartheta[f]] \qquad (k \text{ intero} \geq 2),$$

supponiamo che siano verificate le uguaglianze:

$$L[E^i_\vartheta[f]] = 0 \qquad \text{per } P \in \mathcal{F} D \tag{3}$$

con $i = 1, \ldots, \frac{s-1}{2}$ se $s$ è dispari, mentre se $s$ è pari sia: $i = 2, \ldots, \frac{s}{2} - 1$.

Posto:

$$c_r = \int_D \vartheta\, f\, \varphi_r\, d\, P,$$

vogliamo dimostrare il seguente:

TEOREMA: *Nelle ipotesi in cui ci siamo posti vale, se $s$ è pari, la disuguaglianza:*

$$\sum_{r=1}^{n} \lambda_r^s c_r^2 \leq M \int_D \sum_{j=0}^{s} \sum_{i_1+\cdots+i_m=j} \left(\frac{\partial^j f}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_m^{i_m}}\right)^2 d\, P \tag{4}$$

---

(2) Cfr. C. MIRANDA. *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer, Berlino, Cap. V, n. 36.

*essendo M una costante positiva indipendente da n; se invece s è dispari e, di più, si suppone che sia:*

$$c \leq 0; \qquad \alpha\,\beta \geq 0; \qquad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0), \tag{5}$$

*vale la disuguaglianza:*

$$\sum_{r=1}^{n} \lambda_r^s\, c_r^2 \leq M \int_D \sum_{j=0}^{s} \sum_{i_1+\dots+i_m=j} \left(\frac{\partial^j f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}\right)^2 d\,P + \tag{6}$$
$$+ N \int_{\mathcal{F}D} \sum_{j=0}^{s} \sum_{i_1+\dots+i_m=j} \left(\frac{\partial^j f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}\right)^2 d\sigma\,,$$

*essendo M ed N costanti positive indipendenti da n* (3).

Per dimostrare la (4) partiamo dalla disuguaglianza:

$$\int_D \vartheta \left\{ E_\vartheta^{s/2} \left[ f - \sum_{r=1}^{n} c_r\, \varphi_r \right] \right\}^2 d\,P \geq 0. \tag{7}$$

Se si tiene conto della formula:

$$E_\vartheta^{s/2}\,[\varphi_r] = (-1)^{s/2}\, \lambda_r^{s/2}\, \varphi_r\,, \tag{8}$$

la (7) si può così scrivere:

$$\int_D \vartheta \{ E_\vartheta^{s/2}[f] \}^2\, dP - 2(-1)^{s/2} \sum_{r=1}^{n} c_r\, \lambda_r^{s/2} \int_D \vartheta\, E_\vartheta^{s/2}\,[f]\, \varphi_r\, dP + \sum_{r=1}^{n} c_r^2\, \lambda_r^s \geq 0. \tag{9}$$

Si ha poi applicando $\frac{s}{2}$ volte la formula di Green:

$$\int_D \vartheta\, E_\vartheta^{s/2}\,[f]\, \varphi_r\, dP = \int_D \vartheta\, E_\vartheta^{s/2}\,[\varphi_r]\, f\, d\,P + \tag{10}$$
$$+ \int_{\mathcal{F}D} a \sum_{j=0}^{s/2-1} \left\{ E_\vartheta^j\,[\varphi_r] \frac{\partial}{\partial \nu}\, E_\vartheta^{s/2-j}\,[f] - E_\vartheta^{s/2-j}\,[f] \frac{\partial}{\partial \nu}\, E_\vartheta^j\,[\varphi_r] \right\} d\sigma\,,$$

---

(3) Per $s = 0$ la (4) si riduce alla disuguaglianza di Bessel. Per $s = 1$, $m = 2$, cfr. COURANT-HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, Springer, Berlino, 1937, vol. II, cap. VII. Una disuguaglianza formalmente analoga alla (4) per $s$ pari, $m = 2$ e 3 $E\,[\,] \equiv \Delta_2$, $\alpha$ e $\beta$ costanti positive, ha stabilito A. HAMMERSTEIN *Entwicklungen gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen;* Mathematische Zeitschrift, 27 (1928), pag. 270-311. Qui la funzione $f$, pur verificando relazioni analoghe alle (3), soddisfa ad ipotesi di regolarità meno restrittive e i coefficienti $c_r$ ed il secondo membro della (4) coincidono con gli analoghi da noi definiti se la $f$ è continua in $D$ con le derivate in questione.

con $a = \{ \sum_k (\sum_i a_{ik} X_i)^2 \}^{1/2}$, essendo $X_i$ i coseni direttori della normale esterna di $\mathcal{F}D$. L'integrale di frontiera che compare nella (10) si annulla perchè $E_\vartheta^j [\varphi_r]$ soddisfa alla (2), come pure alla (2) soddisfa $E_\vartheta^{s/2-j} [f]$ per l'ipotesi (3). Infatti se le funzioni $u$ e $v$ soddisfano entrambe alla (2), scritta questa per la $u$ e per la $v$, moltiplicando per $v$ la prima relazione così ottenuta, la seconda per $u$ e sottraendo, si ha:

$$\alpha \left\{ v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} = 0.$$

Se una porzione di $\mathcal{F}D$ è $\alpha \neq 0$, ivi è anche:

$$v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 ; \tag{11}$$

sulla parte di $\mathcal{F}D$ dove è $\alpha = 0$ è pure $u = v = 0$ e la (11) è parimenti soddisfatta. Sostituendo la (10) nella (9) e tenendo sempre conto della (8), si ha:

$$\int_D \vartheta \{ E_\vartheta^{s/2} [f] \}^2 dP - 2 \sum_{r=1}^n c_r^2 \lambda_r^s + \sum_{r=1}^n c_r^2 \lambda_r^s \geq 0 \tag{12}$$

e da questa segue la (4).

Per dimostrare la (6), posto:

$$f_n = \sum_{r=1}^n c_r \varphi_r ; \qquad M(u) = E_\vartheta^{(s-1)/2} [f] ;$$

$$N[u, v] = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} ; \qquad N[u] = N[u, u],$$

partiamo dalla disuguaglianza:

$$\int_D \{ N [M (f - f_n)] - c [M (f - f_n)]^2 \} dP + \tag{13}$$

$$+ \int_{\mathcal{F}D} a \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ [M (f - f_n)]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} M (f - f_n) \right]^2 \right\} d\sigma \geq 0 ,$$

verificata per le (5). L'espressione $M (f - f_n)$ soddisfa alla (2). Da questa, moltiplicandola prima per $\alpha\,\varphi$ e poi per $\beta\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\,\nu}$ e sommando, si ha l'identità:

$$(14)\qquad \frac{\alpha\,\beta}{\alpha^2+\beta^2}\left[\varphi^2+\left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,\nu}\right)^2\right]=-\,\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,.$$

La (13) diventa allora:

$$(15)\qquad \int_D \{N\,[M\,(f-f_n)]-c\,[M\,(f-f_n)]^2\}\,d\,P\,-$$

$$-\int_{\mathcal{F}D} a\;M\,(f-f_n)\,\frac{\partial}{\partial\,\nu}\,M\,(f-f_n)\;d\sigma\geq 0\,.$$

Anche questa volta teniamo conto che è:

$$M(f_n)=(-1)^{(s-1)/2}\sum_r c_r\,\lambda_r^{(s-1)/2}\,\varphi_r\;;$$

$$N\,[M\,(f)\,,\;M\,(f_n)]=(-\,1)^{(s-1)/2}\sum_r c_r\;\lambda_r^{(s-1)/2}\;N\,[M\,(f)\,,\;\varphi_r]\,;$$

$$N\,[M\,(f_n)]=\sum_{r,p} c_r\;c_p\;\lambda_r^{(s-1)/2}\;\lambda_p^{(s-1)/2}\;N\,[\varphi_r\,,\,\varphi_p]\;;$$

e riscriviamo così la (15):

$$(16)\qquad \int_D \{N\,[M\,(f)]-c\,[M\,(f)]^2\;dP-\int_{\mathcal{F}D} a\,M(f)\,\frac{\partial}{\partial\,\nu}\,M\,(f)\;d\,\sigma\;+$$

$$+\,(-\,1)^{(s-1)/2}\sum_r c_r\;\lambda_r^{(s-1)/2}\left(-\,2\int_D\{N\,[M\,(f)\,,\;\varphi_r]-c\;M\,(f)\;\varphi_r\}\;d\,P\,+\right.$$

$$\left.+\int_{\mathcal{F}D} a\;\varphi_r\,\frac{\partial}{\partial\,\nu}\,M\,(f)\;d\sigma+\int_{\mathcal{F}D} a\;M\,(f)\,\frac{\partial\,\varphi_r}{\partial\nu}\,d\sigma\right)+$$

$$+\sum_{r,p} c_r\;c_p\,\lambda_r^{(s-1)/2}\;\lambda_p^{(s-1)/2}\left(\int_D\{\,N\,[\varphi_r\,,\;\varphi_p]-c\;\varphi_r\;\varphi_p\}\;dP-\int_{\mathcal{F}D} a\;\varphi_r\,\frac{\partial\varphi_p}{\partial\nu}\,d\sigma\right)\geq 0.$$

Eseguiamo una integrazione per parti sul secondo integrale di dominio che compare nel primo membro della (16):

$$(17) \qquad -2\int_D \{N[M(f),\ \varphi_r] - c\,M(f)\,\varphi_r\}\,d\,P =$$

$$= \int_D \varphi_r\,E[M(f)]\,dP - \int_{\mathcal{F}D} a\,\varphi_r\,\frac{\partial}{\partial\nu}\,M(f)\,d\,\sigma +$$

$$+ \int_D M(f)\,E[\varphi_r]\,dP - \int_{\mathcal{F}D} a\,M(f)\,\frac{\partial\varphi_r}{\partial\nu}\,d\sigma\,.$$

Al primo integrale di dominio a secondo membro della (17) applichiamo la formula di Green $\frac{s+1}{2}$ volte con la tecnica già usata per dimostrare la (4) e tenendo ogni volta conto della formula:

$$E[\varphi_r] = -\lambda_r\,\vartheta\,\varphi_r:$$

$$(18) \qquad \int_D \varphi_r\,E[M(f)]\,d\,P = (-1)^{(s-1)/2+1}\,\lambda_r^{(s-1)/2+1}\,c_r\,.$$

Analogamente si opera sul secondo integrale di dominio a secondo membro della (17):

$$(19) \qquad \int_D M(f)\,E[\varphi_r]\,dP = (-1)^{(s-1)/2+1}\,\lambda_r^{(s-1)/2+1}\,c_r\,.$$

Si ha pure:

$$(20) \qquad \int_D \{N[\varphi_r,\ \varphi_p] - c\,\varphi_r\,\varphi_p\}\,dP = \int_D \varphi_r\,E[\varphi_p]\,dP + \int_{\mathcal{F}D} a\,\varphi_r\,\frac{\partial\varphi_p}{\partial\nu}\,d\sigma\,.$$

Sostituiamo la (17) nella (16), tenendo conto delle (18), (19) e (20); si ottiene:

$$(21) \qquad \int_D \{N[M(f)] - c\,[M(f)]^2\}\,dP - \int_{\mathcal{F}D} a\,M(f)\,\frac{\partial}{\partial\nu}\,M(f)\,d\sigma -$$

$$-2\sum_r c_r^2\,\lambda_r^s + \sum_r c_r^2\,\lambda_r^s \geq 0$$

e da questa la (6).

3. — Nelle ipotesi in cui ci siamo posti nel caso di $s$ dispari gli autovalori sono tutti positivi, come è facile vedere. Da ciò segue che, in entrambi i casi, la serie:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r^s c_r^2 \tag{22}$$

è convergente e la sua somma non supera i secondi membri di (4) e (6) rispettivamente.

Nei casi particolari in cui è noto che le successioni:

$$\left\{ \frac{\partial^j f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{j_m}} \right\} \qquad (j = 0, \ldots, s)$$

convergono in media verso le corrispondenti derivate di $f$ su $D$ e, per $s$ dispari, anche su $\mathcal{F}D$, si può asserire che i primi membri di (7) e (13) tendono a zero per $n$ tendente all'infinito. La somma della serie (22) eguaglia allora, a seconda dei casi, l'integrale che compare nella (12) o la somma degli integrali che compaiono nella (21).