ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MAURO PAGNI

Su un problema al contorno tipico per l'equazione del calore in $n+1$ dimensioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 3-4 (1957), p. 209-216

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_209_0>

SU UN PROBLEMA AL CONTORNO TIPICO PER L'EQUAZIONE DEL CALORE IN $n+1$ DIMENSIONI

di MAURO PAGNI (Modena)

In questa Nota mi propongo di estendere al caso di $n+1$ variabili la parte sostanziale dello studio fatto nella Memoria [1] « *Su un problema al contorno tipico per l'equazione del calore* » per l'equazione del calore in tre variabili e precisamente il teorema di esistenza e di unicità di una soluzione « forte » del problema al contorno di derivata obliqua « regolare » ivi considerato.

1. Sia D un dominio dello spazio $(x_1, \ldots, x_n)$ limitato dalla ipersuperficie semplice e chiusa c_0 e dalle k ipersuperficie semplici e chiuse $c_1, \ldots, c_k$, a due a due prive di punti a comune esterne l'una all'altra e interne tutte a c_0; $c_0, \ldots, c_k$ essendo di classe 2 in ogni loro punto.

Diciamo τ il dominio dello spazio $(x_1, \ldots, x_n, y)$ il quale sia o il cilindro retto determinato dalla base D e dal segmento $0 \leq y \leq y_0$ oppure quello che si ottiene da questo con deformazione continua in modo da rimanere limitato dagli iperpiani $y=0$ e $y=y_0$, che le sezioni con gli iperpiani $y=t$ $(0 \leq t \leq y_0)$ siano domini dello stesso tipo di D e che inoltre la sua ipersuperficie laterale sia di classe 2 in ogni suo punto, con iperpiano tangente che formi con gli iperpiani $y = \text{cost}$ un angolo maggiore di un numero $\theta > 0$.

---

(1) Detta Memoria, che si trova nel presente volume di questa Rivista, verrà indicata brevemente con $[M]$; ad essa si rimanda per la bibliografia. Dopo la redazione di $[M]$ sono venuto a conoscenza di un lavoro di J. L. LIONS, che uscirà sui Reports dell'University of Kansas, Lawrence, june 1957, nel quale viene fra l'altro studiato, nel caso del solo cilindro retto, il problema di derivata obliqua regolare per equazioni paraboliche assai generali e in particolare per quella del calore, mediante un procedimento introdotto per la prima volta in un caso particolare da S. FAEDO nella Memoria « *Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione* » vol. I, Serie III (1949) di questa Rivista.

Indichiamo con $p(y')$ $(0 \leq y' \leq y_0)$ la sezione del dominio τ con l'iperpiano $y = y'$; con σ la frontiera di τ e con s la ipersuperficie laterale τ, sicchè risulta $\sigma = p(0) + p(y_0) + s$. Per ogni punto M di s sia definito un asse $l(M)$, giacente sull'iperpiano passante per M e parallelo all'iperpiano $y = 0$, penetrante in τ; inoltre i coseni direttori di $l(M)$ siano funzioni di classe 1 del punto M di s.

Poniamo per $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $M \equiv (x_1, \ldots x_n, y)$ e $N \equiv (x'_1, \ldots, x'_n, y')$ essendo due punti dello spazio tali che $y' > y$,

$$h_{\alpha,\beta}(M, N) = \frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}, \quad (r = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2})$$

e più in generale essendo $\lambda > 0$

$$h_{\alpha,\beta}(M, N) = \frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta} e^{-\frac{\lambda r^2}{4(y'-y)}}.$$

Sia poi $F(M, N)$ la funzione così definita

$$F(M, N) \begin{cases} = h_{0, \frac{n}{2}}(M, N) & \text{per } y' > y, \\ = 0 & \text{per } y' \leq y. \end{cases}$$

Si ponga ancora

$$E(u) = \Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \left(\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$$

$$E^*(u) = \Delta_2 u + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Considereremo il seguente problema al contorno

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} E(u) = 0 & \text{in } \tau - \sigma, \\ u = 0 & \text{su } p(0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial l} = g & \text{su } s, \end{cases}$$

g essendo una assegnata funzione su s (2).

---

(2) Ad esso può sempre riportarsi, con note considerazioni, il problema più generale $E(u) = f$ in $\tau - \sigma$; $u = \varphi$ su $p(0)$; $\dfrac{\partial u}{\partial l} = g$ su s.

Studieremo il problema (1), come fatto nei nn. 4, 5, 6 di $[M]$, traducendolo in una equazione integrale ordinaria mediante un opportuno nucleo $H(M, N)$.

2. Indichiamo con $\alpha_{11}(M), \ldots, \alpha_{n1}(M)$, 0 i coseni direttori di $l(M)$, con $\beta_1(M), \ldots, \beta_n(N)$, 0 i coseni direttori della conormale $\nu(M)$ (3). Denotiamo con $\mathbf{l}$, $\mathbf{v}$ rispettivamente i vettori unitari su $l(M)$ e $\nu(M)$, con $\mathbf{m}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ un sistema ortogonale di vettori unitari individuante, nell'iperpiano $y = \text{cost}$ passante per M, la varietà lineare ad $n - 1$ dimensioni passante per M ed ortogonale ad $l(M)$.

Siano infine $\alpha_{1i}(M), \ldots, \alpha_{ni}(M)$, 0 $(i = 2, \ldots, n)$ i coseni direttori di $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{r}$ il segmento orientato che unisce $(x_1, \ldots, x_n, 0)$ con $(x'_1, \ldots x'_n, 0)$ e $\Phi(x)$ la funzione così definita $\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Per $M \equiv (x_1, \ldots, x_n, y)$ punto di s e $N \equiv (x'_1, \ldots, x'_n, y')$ punto qualunque dello spazio, si ponga, detto d un opportuno numero positivo (4)

$$H(M, N) = \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{v}}{(y' - y)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} - \frac{\sum_{i=2}^{n} (\mathbf{r} \times \mathbf{m}_i)(\mathbf{v} \times \mathbf{m}_i)}{(y' - y)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-\frac{\sum_{i=2}^{n} (\mathbf{r} \times \mathbf{m}_i)^2}{4(y' - y)}} \left\{ \Phi\left(\frac{\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{2(y' - y)^{\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{\mathbf{l} \times \mathbf{r} + d}{2(y' - y)^{\frac{1}{2}}}\right) \right\} \qquad \text{per } y' > y,$$

$H(M, N) = 0$ per $y' \leq y$.

Con ragionamenti perfettamente analoghi a quelli fatti nel n. 4 di $[M]$ si prova che la $H(M, N)$ gode delle seguenti proprietà

1) per $l \equiv \nu$ $H(M, N)$ coincide con $F(M, N)$;

---

(3) La conormale è l'asse spiccato dai punti M di s i cui coseni direttori verificano le equazioni $\beta_i(M) = \cos(x_i, n_M)$ $(i = 1, \ldots, n)$ essendo n_M la normale in M ad s diretta verso l'interno di τ; la conormale riesce in questo caso la proiezione della normale sull'iperpiano $(x_1, \ldots, x_n)$.

(4) d è un qualunque numero positivo se in ogni punto M di s l'asse opposto ad $l(M)$ non ha altro punto a comune con τ. Se ciò non accade in ogni punto, l'asse opposto ad $l(M)$ incontrerà la s in un insieme di punti che ha un primo elemento M_1; la distanza $\overline{MM_1}$ al variare di M su s ha un estremo inferiore positivo δ e d è un qualunque numero positivo minore di δ.

2) fissato comunque M su s, $H(M, N)$ come funzione di N è continua insieme alle sue derivate prime e seconde in $\tau - \sigma$ ed è ivi soluzione della equazione $E(u) = 0$;

3) per M su s e N di τ tali che $M \neq N$ vale la limitazione

$$| H(M, N) | \leq A\, h_{0, \frac{n}{2}}(M, N) + B\, h^{(\lambda)}_{1, \frac{n+1}{2}}(M, N);$$

(A, B, λ costanti indipendenti da M ed N).

Per $M \equiv (x_1, \ldots, x_n, y)$ di s e $N \equiv (x_1', \ldots, x_n', y')$, con $y' > y$, di $\tau - \sigma$ si ha

$$\frac{\partial H(M, N)}{\partial x_j'} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{l} \times \mathbf{v}\,(x_j' - x_j)}{(y' - y)^{\frac{n+2}{2}}} + \frac{\alpha_{j1} \sum_{i=2}^{n} (\mathbf{r} \times \mathbf{m}_i)(\mathbf{v} \times \mathbf{m}_i)}{(y' - y)^{\frac{n+2}{2}}}\right] e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} +$$

$$+ \left\{ \frac{-\sum_{i=2}^{n} \alpha_{ji}(\mathbf{v} \times \mathbf{m}_i)}{(y' - y)^{\frac{n+1}{2}}} + \frac{\left[\sum_{i=2}^{n} \alpha_{ji}(\mathbf{r} \times \mathbf{m}_i)\right]\left[\sum_{i=2}^{n} (\mathbf{r} \times \mathbf{m}_i)(\mathbf{v} \times \mathbf{m}_i)\right]}{2(y' - y)^{\frac{n+3}{2}}} \right\} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} \left\{ \Phi\left(\frac{\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{2(y' - y)^{\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{\mathbf{l} \times \mathbf{r} + d}{2(y' - y)^{\frac{1}{2}}}\right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\alpha_{j1} \sum_{i=2}^{n} (\mathbf{r} \times \mathbf{m}_i)(\mathbf{v} \times \mathbf{m}_i)}{(y' - y)^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{\sum_{i=2}^{n} (\mathbf{r} \times \mathbf{m}_i)^2 + (\mathbf{l} \times \mathbf{r} + d)^2}{4(y' - y)}} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Le stesse considerazioni fatte nel n. 4 di [M] permettono di stabilire le seguenti proprietà:

4) $$\frac{\partial H(M, N)}{\partial l_M} = \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M} + L(M, N)$$

dove $L(M, N)$ è una funzione continua e limitata al variare di M su s e di N in $\tau - N$;

5) per M su s e N in $\tau - s$,

$$\left| \frac{\partial H(M, N)}{\partial x_j'} \right| \leq A\, h_{1, \frac{n+2}{2}}(M, N) + B\, h^{(\lambda)}_{0, \frac{n+1}{2}}(M, N) + C\, h^{(\lambda)}_{2, \frac{n+3}{2}}(M, N) + D$$

(A, B, C, D, λ costanti indipendenti da M, N) ($j = 1, \ldots, n$).

3. Ricordiamo (vedi Levi [9] pag. 47 e pag. 67) che non appena $n+1+\alpha-2\beta>0$ le funzioni $h_{\alpha,\beta}(M, N)$, $h^{(\lambda)}_{\alpha,\beta}(M, N)$, come funzioni di M sono sommabili su s per qualunque fissato N; che gli integrali $\int_s h_{\alpha,\beta}(M, N)\, d_M s$ e $\int_s h^{(\lambda)}_{\alpha,\beta}(M, N)\, d_M s$ sono funzioni continue di N in tutto lo spazio e che se si pone $n+1+\alpha-2\beta=q$ e se si fa l'ipotesi che M e N siano su s e $y'-y<\delta$ si ha

$$\int_s h_{\alpha,\beta}(M, N)\, d_M s \leq \mathcal{L}\, \delta^{\frac{q}{2}}, \qquad \int_s h^{(\lambda)}_{\alpha,\beta}(M, N)\, d_M s \leq \mathcal{L}_1\, \delta^{\frac{q}{2}}$$

($\mathcal{L}$ costante dipendente solo da α, β e $\mathcal{L}_1$ dipendente solo da α, β, λ). Sia $\delta(M)$ una funzione continua su s e si consideri la funzione

$$v(N)=\int_s \delta(M)\, H(M, N)\, d_M s. \tag{2}$$

Quanto sopra ricordato e le 3) mostrano immediatamente che $v(N)$ è continua in τ.

Studiamo ora, essendo Q un qualunque punto di s, il limite

$$\lim_{N\to Q\,(\text{su } \nu_Q+)} \frac{\partial v(N)}{\partial l_Q}=\lim_{N\to Q\,(\text{su } \nu_Q+)} \int_s \delta(M)\, \frac{\partial H(M, N)}{\partial l_Q}\, d_M s.$$

Tenuto presente, come è noto, che

$$\lim_{N\to Q\,(\text{su } \nu_Q+)} \int_s \delta(M)\, L(M, N)\, d_M s=\int_s \delta(M)\, L(M, Q)\, d_M s$$

e che (vedi Levi [9] e [10])

$$\lim_{N\to Q\,(\text{su } \nu_Q+)} \int_s \delta(M)\, \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M}\, d_M s=\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2}\,\delta(Q)+\int_s \delta(M)\, \frac{\partial F(M, Q)}{\partial \nu_M}\, d_M s;$$

servendoci delle maggiorazioni stabilite per $H(M, N)$ e per le sue derivate

$\dfrac{\partial H(M\,,\,N)}{\partial x_j'}$ e della 4), procedendo come nel n. 5 di [M] si ha

$$(3)\qquad \lim_{N\to Q\,(\mathrm{su}\ \nu_Q+)} \frac{\partial v(N)}{\partial l_Q} = \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2}\,\delta(Q) + \int_s \delta(M)\,\frac{\partial H(M\,,\,Q)}{\partial l_Q}\,d_M s.$$

Si osservi infine che anche qui, con le stesse considerazioni usate nel n. 5 di [M], si ottiene, per M e Q entrambi su s e tali che $M \neq Q$,

$$(4)\qquad \left|\frac{\partial H(M\,,\,Q)}{\partial l_Q}\right| \leq A\,[h_{0,\frac{n}{2}}(M\,,\,Q) + h_{2,\frac{n+2}{2}}(M\,,\,Q) + h^{(\lambda)}_{1,\frac{n+1}{2}}(M, Q) +$$

$$+ h^{(\lambda)}_{3,\frac{n+3}{2}}(M\,,\,Q) + h_{1,\frac{n}{2}}(M, Q) + h^{(\lambda)}_{0,\frac{n-1}{2}}(M, Q) + h^{(\lambda)}_{2,\frac{n+1}{2}}(M\,,\,Q)] + B$$

(A , B , λ costanti opportune indipendenti da M e Q).

Se $\delta(M)$ è soltanto sommabile su s con le stesse considerazioni usate nel n. 5 di [M] (vedi in particolare pag. 101 e 102) si ha che per quasi tutti i punti Q di s

$$\lim_{N\to Q\,(\mathrm{su}\ \nu_Q+)} v(N) = \int_s \delta(M)\,H(M\,,\,Q)\,d_M s$$

e

$$(3')\qquad \lim_{N\to Q\,(\mathrm{su}\ \nu_Q+)} \frac{\partial v(N)}{\partial l_Q} = \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2}\,\delta(Q) + \int_s \delta(M)\,\frac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q}\,d_M s.$$

4. Siamo ora in grado di tradurre il problema (1) in equazione integrale ordinaria. Indichiamo rispettivamente con $\{v\}_c$ e $\{v\}$ le classi delle funzioni date dalla (2) per δ rispettivamente continua o sommabile su s. Se si cerca la soluzione del problema (1) con g continua nella classe $\{v\}_c$, poichè tali v verificano la $E(u) = 0$ in $\tau - \sigma$ e la $v = 0$ su $p(0)$, basterà imporre alla funzione δ di soddisfare la seguente equazione integrale

$$(5)\qquad \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2}\,\delta(Q) + \int_s \delta(M)\,\frac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q}\,d_M s = g(Q).$$

Introdotta la successione dei nuclei iterati del nucleo $\dfrac{\partial H(M\,,\,Q)}{\partial l_Q}$

$$(6)\qquad \begin{cases} G_m(M\,,\,Q) = \displaystyle\int_s G_{m-1}(M\,,\,N)\,\frac{\partial H(N\,,\,Q)}{\partial l_Q}\,d_N s\,, \\ G_0(M\,,\,Q) = \dfrac{\partial H(M\,,\,Q)}{\partial l_Q} \qquad\qquad m = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

la maggiorazione 4) permette di fare ragionamenti analoghi a quelli svolti da E. MAGENES per $n = 2$ nei nn. 1, 2 di [11] (II Nota) e per $n > 2$ da POGORZELSKI in [19] (5) e provare che: *per ogni coppia di punti* $Q \equiv (x_1', \ldots, x_n', y')$, $M \equiv (x_1'', \ldots, x_n'', y'')$, *di* s *risulta, posto* $\varrho = \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + \ldots + (x_n' - x_n'')^2}$, *per ogni* $y' \neq y''$

$$|\,G_m(M\,,\,Q)\,| \leq \frac{A}{|y' - y''|^{1-\frac{m+1}{4}}\;\varrho^{\,n-\frac{m+3}{2}}}\,,$$

$$(m=1,2,\ldots,2n-3)$$

$$\int_s \left|\,G_{m-1}(M, N)\,\frac{\partial H(N\,,\,Q)}{\partial l_Q}\right| d_N s \leq \frac{A}{|y' - y''|^{1-\frac{m+1}{4}}\;\varrho^{\,n-\frac{m+3}{2}}}\,,$$

dove A *è una costante indipendente da* M *e* Q *e si conviene di porre* $\dfrac{1}{|y' - y''|^0} = \log \dfrac{1}{|y' - y''|}$, $\dfrac{1}{|y' - y''|^\gamma} = 1$ per $\gamma < 0$, $\dfrac{1}{\varrho^0} = \log \dfrac{1}{\varrho}$; $G_{2n-2}(M,Q)$ *e tutti i successivi sono funzioni continue della coppia* $(M\,,\,Q)$ *di punti di* s.

Mediante calcoli analoghi a quelli fatti dal Levi e dal Pogorzelski si può allora provare la convergenza uniforme della serie $\sum\limits_{m=2n-2}^{\infty} G_m(M,\,Q)$ ed ottenere così lo sviluppo del nucleo risolvente $K(M\,,\,Q)$ di $\dfrac{\partial H(M\,,\,Q)}{\partial l_Q}$.

---

(5) In [11] e in [19], per ragioni di semplicità, si suppone che il dominio τ sia il cilindro retto ma si vede facilmente che i risultati ed i ragionamenti valgono per un dominio di tipo più generale quale quello qui considerato. Del resto questi risultati per il dominio anzidetto trovansi dettagliatamente conseguiti per $n = 2$ nella Tesi di laurea del dott. SERGIO CAMPANATO dal titolo « *Teoremi di completezza relativi alla equazione del calore e questioni connesse* » discussa nella Università di Modena nell'anno accademico 1953-54.

La (15) ha dunque una ed una sola soluzione data da

$$\delta(Q) = \frac{2}{(2\sqrt{\pi})^n}\left[g(Q) + \int_s g(M)\,K(M, Q)\,d_M s\right]. \tag{7}$$

Se si tien anche conto dei teoremi di unicità dati da M. PICONE in [15] si ha il seguente teorema

Il problema (1) *con* g *funzione continua su* s *ammette la soluzione* $v(N) = \int_s H(M, N)\ \delta(M)\,d_M s$, *con* $\delta(M)$ *data dalla* (7) *e tale soluzione è unica nella classe delle funzioni regolari* (6) *in* τ.

Se poi si cerca la soluzione nella classe $\{v\}$ del problema (1) con g sommabile, le stesse considerazioni fatte a pag. 104 di $[M]$ permettono di ottenere *un teorema di esistenza per il problema* (1) *e di unicità nella classe* $\{v\}$.

Osserviamo infine che, posto

$$u(N) = \int_s \mu(M)\,F(M, N)\,d_M s, \tag{8}$$

ed indicate con $\{u\}_c$ e $\{u\}$ rispettivamente le classi di funzioni date dalla (8) con μ continua e con μ sommabile su s, le stesse considerazioni di quelle fatte al n. 7 di $[M]$ portano a stabilire l'equivalenza fra le due classi $\{u\}$ e $\{v\}$.

---

(6) Una funzione u si dirà regolare in τ rispetto ad (1) se essendo continua in ogni punto interno a τ e interno a $p(y_0)$ con le derivate dei primi due ordini che compaiono in $E(u)$, riesce inoltre continua in τ ed ammette in ogni punto di s la $\frac{\partial u}{\partial l}$.