ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

UGO BARBUTI

Analisi esistenziale in problemi di propagazione semilineari

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 3-4 (1957), p. 183-207

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_183_0>

ANALISI ESISTENZIALE IN PROBLEMI DI PROPAGAZIONE SEMILINEARI

di UGO BARBUTI (Pisa)

Si abbia la equazione:

$$L[u] = \mathcal{I}[u] + F[u] = 0\,, \tag{1}$$

con

$$\mathcal{I}[u] = -u_{xx} + a_1 u_{xt} + a_2 u_{tt}\,, \tag{2}$$

ove a_1, a_2 sono funzioni di x, t nella striscia

$$0 \leq x \leq c \quad , \quad t \geq 0 \tag{S}$$

ed è supposto:

$$a_2(x, t) > 0 \tag{3}$$

in (S), mentre $F[u]$ è un operatore differenziale del primo ordine, non necessariamente lineare. Posto:

$$F[u] = F(x, t, u_x, u_t, u),$$

riterremo che la funzione F sia definita in:

$$0 \leq x \leq c\,, t \geq 0\,, \qquad -\infty < \begin{Bmatrix} u_x \\ u_t \\ u \end{Bmatrix} < +\infty\,. \tag{S*}$$

La equazione (1), di necessità lineare solo nelle derivate seconde di u, la diremo *semilineare* (1); la ipotesi (3), che noi supporremo in avanti sempre

---

(1) La denominazione semilineare è già usata nella teoria delle equazioni a derivate parziali, si veda, ad es., [1] a p. 138.

verificata, implica la iperbolità dell'operatore $\mathcal{J}[u]$ in ogni punto di (S); questo carattere è peculiare dei così detti fenomeni di propagazione che la Fisica matematica propone allo studio.

Detta $(\overline{S})$ la striscia aperta (S), e, detta $\mathcal{C}$ la classe delle funzioni $u(x, t)$ continue in (S) con le loro derivate prime e seconde, si può porre il seguente generale problema di propagazione :

PROBLEMA A). — *Ricercare nella classe $\mathcal{C}$ le fuuzioni che soddisfano in $(\overline{S})$ la* (1) *e verificano le condizioni* (*di tipo misto*) *seguenti* :

$$u(x, 0) = g(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g_1(x) \qquad (0 \le x \le c) \tag{4}$$

$$u(0, t) = f_1(t) \quad , \quad u(c, t) = f_2(t) \qquad (t \ge 0) \tag{5}$$

ove le $g(x)$, $g_1(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ sono assegnate funzioni.

È evidente che affinchè il problema A) abbia senso è necessario supporre compatibili le (4) e (5) tra di loro e con la condizione che la u verifichi la (1).

Nel caso che l'operatore $F[u]$ sia lineare il problema A) è stato trattato, ed in modo esauriente, in [2] da S. Faedo, il quale è pervenuto ad un notevole teorema di esistenza ed unicità, utilizzando un suo metodo di approssimazioni successive e da lui denominato *metodo dei momenti* (2).

Sempre nel caso lineare, ma in $m+1$ variabili indipendenti, ed utilizzando il medesimo metodo, il problema A) è stato ripreso recentemente da A. Chiffi [5] per la soluzione che potremo dire debole (3), utilizzando noti risultati di G. Stampacchia.

In questo lavoro ci siano proposti la trattazione del caso semilineare (4) ed abbiamo ottenuto, superando difficoltà non solamente formali, un teorema di esistenza e di unicità del problema A) che contiene il teorema di S. Faedo.

Il metodo usato è ancora quello dei momenti, che si è rivelato ancor più afficace e spontaneo strumento d'indagine nell'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione. Questo strumento appare strettamente

---

(2) Per ricerche anteriori alla memoria [2] sui problemi di propagazione si vedano [3], [4].

(3) Nel caso $m=2$ e $m=3$ A. Chiffi trova la soluzione nella classe $\mathcal{C}$.

(4) Questo interessante argomento di studio mi è stato proposto dal prof. S. Faedo, che desidero quì ringraziare.

connesso con la iperbolicità dell'operatore $\mathcal{I}[u]$, mentre esso risulta, ora, del tutto *indipendente dalla linearità* di $F[u]$. Questo risultato può costituire un primo passo verso una teorica del metodo sul piano dell'analisi funzionale astratta.

Teorema d'unicità.

1. Ricordiamo un lemma di cui sistematicamente ci serviremo in seguito:

LEMMA [5] I. — *Se* $\varphi(t)$, $\beta(t)$, $A(t)$ *sono continue in* $(0, T)$, *se* $\varphi(t)$, $\beta(t) \geq 0$, $A(t) > 0$ *e* λ *è una costante* > 0, *e, se:*

$$A(t)\,\varphi(t) \leq \lambda + \int_0^t \beta(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \tag{6}$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

allora si ha:

$$\varphi(t) \leq \frac{\lambda}{A(t)} \exp \int_0^t \frac{\beta(\tau)}{A(\tau)}\,d\tau \tag{7}$$

$$(0 \leq t \leq T).$$

OSSERVAZIONE. — *Se la* (6) *vale con* $\lambda = 0$ *allora è* $\varphi(t) \equiv 0$.

Infatti la (6) varrà a fortiori se λ è una costante positiva arbitraria, e, posto

$$M(T) = \operatorname*{Max}_{(0,\,T)} \frac{1}{A(t)} \exp \int_0^t \frac{\beta(\tau)}{A(\tau)}\,d\tau\,,$$

riesce per la (7) $0 \leq \varphi(t) \leq \lambda M(T)$, ed essendo λ arbitraria, ne viene l'asserto.

2. Proviamo ora il seguente torema d'unicità per il problema A), il quale si riferisce ad aventuali soluzioni, prescindendo dalla loro esistenza.

---

[5] di Gronwall generalizzato. La dimostaziene di questa proposizione nella formulazione quì data può facilmente conseguirsi, utilizzando un noto ragionamento (Cfr., ad es. R. Bellman [6] a p. 35).

TEOREMA I. — *Se le funzioni* a_1, a_2 *sono continue in* (S) *con le loro derivate* $\frac{\partial a_1}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial t}$;

se $F(x, t, u_x, u_t, u)$ *è continua in* (S^*) *e presi in* (S^*) *due punti qualunque* $P \equiv (x, t, u_x, u_t; u)$, $\overline{P} \equiv (x, t, \overline{u}_x, \overline{u}_t, \overline{u})$ *si ha:*

$$(8) \qquad | F(\overline{P}) - F(P) | \leq \alpha_1 | \overline{u}_x - u_x | + \alpha_2 | \overline{u}_t - u_t | + \alpha_3 | \overline{u} - u | \text{ [6]}$$

ove α_i $(i = 1, 2, 3)$ *sono funzioni non negative e continue in* (S), *allora il problema* A) *ha al più una soluzione.*

Siano $\overline{u}(x, t)$, $u(x, t)$ due distinte soluzioni del problema A). Posto $v = \overline{u} - u$, si avrà per la linearità di $\mathcal{I}[u]$:

$$(1') \qquad \mathcal{I}[v] + F[\overline{u}] - F[u] = 0,$$

con le condizioni:

$$(4') \qquad v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0$$

$$(5') \qquad v(0, t) = v(c, t) = 0.$$

Sia $T > 0$ e diciamo (S_T) il rettangolo $0 \leq x \leq c$, $0 \leq t \leq T$; supponiamo T tale che in (S_T) le $\overline{u}, u$ siano distinte in almeno un punto. Integrando per parti, e tenendo conto delle condizioni al contorno (5'), otteniamo [7]:

$$(9) \qquad \begin{cases} -\int_0^c v_{xx} v_t \, dx = \int_0^c v_x v_{tx} \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^c v_x^2 \, dx \\ \int_0^c a_1 \, v_{xt} \, v_t \, dx = \frac{1}{2} \int_0^c a_1 \, (v_t^2)_x \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^c \frac{\partial a_1}{\partial x} v_t^2 \, dx \\ \int_0^c a_2 \, v_{tt} \, v_t \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^c a_2 \, v_t^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_0^c \frac{\partial a_2}{\partial t} v_t^2 \, dx . \end{cases}$$

[6] La (8), che può dirsi una condizione di Lipschitz « in grande » per la F rispetto alle variabili u_x, u_t, u, permette non solamente di raggiungere l'unicità per il problema A), ma essa ritorna, nella proposizione del n° 4, che assicura l'esistenza della approssimazioni successive del metodo dei momenti e ritorna ancora nella dimostrazione del lemma II. e IV. Osserviamo che la (8) non implica affatto una linearità di F rispetto a u_x, u_t, u: essa vale, ad es., per la funzione $\sqrt{1 + u_x^2 + u_t^2} + \text{sen}\, u$.

[7] Cfr. loc. cit. in [2] nella dimostrazione del teorema I.

Moltiplicando la (1′) per v_t e integrando rispetto ad x tra o e c, otteniamo:

(10) $$\int_0^c \{ \mathcal{I}[v]\, v_t + (F[\bar{u}] - F[u])\, v_t \}\, dx = 0$$

$$(0 \leq t \leq T).$$

Tenuto conto delle (9), otterremo per quest'ultima:

(11) $$\frac{1}{2} K'(t) + R(t) = 0 ,$$

ove si è posto

(12) $$K(t) = \int_0^c (a_2\, v_t^2 + v_x^2)\, dx$$

(13) $$R(t) = \int_0^c (F[\bar{u}] - F[u])\, v_t - \frac{1}{2} \int_0^c \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial t} \right) v_t^2\, dx .$$

Per la ipotesi (8), detto $B(T)$ il massimo dei massimi delle $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ in (S_T), avremo per $R(t)$

(14) $$| R(t) | \leq B(T) \int_0^c (| v_x v_t | + v_t^2 + | v v_t |)\, dx + \frac{1}{2} \int_0^c \left| \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial t} \right| v_t^2\, dx .$$

Poichè $a_2 > 0$, posto:

(15) $$\varphi(t) = \int_0^c (v_t^2 + v_x^2)\, dx ,$$

si potrà trovare una costante $A'(T) > 0$, per la quale è in (S_T) (8)

(16) $$K(t) \geq A(T)\, \varphi(t) , \qquad (0 \leq t \leq T)$$

Si ha d'altra parte, utilizzando la disuguaglianza di Schwarz:

$$v^2(x, t) = \left(\int_0^c v_x(x, t)\, dx \right)^2 \leq c \int_0^c v_x^2\, dx$$

---

(8) Basta prendere per $A(T) = \text{Min}\,(1, \min_{(S_T)} a_2)$.

e nella (14) il primo addendo al secondo membro si può maggiorare con

$$B(T)\int_0^c \left(2v_t^2 + \frac{1}{2}(v_x^2 + v^2)\right) dx$$

ed anche, tenendo conto della precedente, con

$$B(T)\int_0^c \left(2v_t^2 + \frac{1}{2}\,v_x^2 + \frac{c}{2}\int_0^c v_x^2\,dx\right) dx\;,$$

che si può scrivere:

$$B(T)\int_0^c \left(2v_t^2 + \frac{c^2+1}{2}\,v_x^2\right) dx\;.$$

Detta allora $\frac{\beta(T)}{2}$ una costante non inferiore in (S_T) a

$$\frac{c^2+1}{2}\,B(T)\,,\quad 2\,B(T) + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial t}\right|,$$

la (14) dà, tenendo conto delle maggiorazioni fatte:

$$|\,R(t)\,| \leq \frac{\beta(T)}{2}\int_0^c (v_t^2 + v_x^2)\,dx\,. \tag{16'}$$

Integrando tra 0 e t $(0 \leq t \leq T)$ la (11), tenendo anche conto che (Cfr. (12) e le condizioni iniziali (4')) $K(0) = 0$, si ha:

$$K(t) = -\,2\int_0^t R(\tau)\,d\,\tau\,,$$

quindi

$$K(t) \leq 2\int_0^t |\,R(\tau)\,|\,d\tau$$

e da questa, per la (15), (16') e (16)

$$A\,(T)\,\varphi\,(t) \leq \beta\,(T)\int_0^t \varphi\,(\tau)\,d\,\tau$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

onde, per la osservazione fatta di seguito al lemma I, $\varphi(t) = 0$ in $(0, T)$. Si ha cioè (Cfr. la (15)) $v_x = v_t = 0$ in (S_T); per le condizioni (4′) o (5′) e per essere v della classe $\mathcal{C}$, segue $v = 0$ in (S_T) e ciò porta l'unicità.

Esistenza delle approssimazioni successive del metodo dei momenti per il problema A).

3. Consideriamo ora il metodo dei momenti per il problema A). Supponiamo che nelle (5) sia $f_1(t) = f_2(t) = 0$ (a questo caso ci si può sempre ricondurre con un cambiamento di variabile (Cfr. n. 5)) e ammettiamo che le $g(x)$ e $g_1(x)$, che compaiono nelle (4) e che si annullano ora negli estremi per le condizioni di compatibilità (essendo $f_1(0) = f_2(0)$), siano su $(0, c)$ continue con la loro derivata prima e prendiamo in considerazione il sistema di funzioni (9)

$$\varphi_i(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi i x}{c} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

Esisteranno due successioni di costanti $\{g_{in}\}$ e $\{g'_{in}\}$ in modo da riuscire:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g_{in}\, \varphi_i(x) = g(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g'_{in}\, \varphi_i(x) = g_1(x)$$

con convergenza uniforme in $(0, c)$.

Poniamo (10)

$$v_n(x, t) = \sum_{i=1}^{n} c_{in}(t)\, \varphi_i(x) \tag{18}$$

ove alle $c_{in}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ imponiamo di soddisfare il sistema differenziale ordinario del secondo ordine

$$\int_0^c L[v_n]\, \varphi_s(x)\, dx = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

(9) Ai fini della convergenza in media delle approssimazioni successive alla soluzione del problema A), supposta esistere, si può assumere, nel caso lineare, un qualunque sistema $\{\varphi_i(x)\}$ ammesso al metodo variazionale (Cfr. [2], Teor. V).

(10) In loc. cit. [2], cap. II, n. 3.

con le condizioni iniziali

$$c_{in}(0) = g_{in}\,, \quad c'_{in}(0) = g'_{in} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,. \tag{20}$$

La (18) si dice *l'ennesima approssimazione* del metodo dei momenti (11).

4. Nel caso lineare il sistema (19) è lineare nelle $c_{in}(t)$ e poichè, come tra poco vedremo, esso è normalizzabile, ciò porta senz'altro la esistenza in (S) e l'unicità della approssimazione ennesima $v_n(x\,,\,t)$. Nel caso semilineare si presenta la necessità di decidere quando ciò possa avvenire; noi proveremo in proposito che:

Nelle stesse ipotesi del teorema I esiste ed è unica in (S) *la approssimazione ennesima* (18).

Il sistema differenziale (19) si scrive:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c''_{in} \int_0^c a_2\,\varphi_i\,\varphi_s\,dx = -\sum_{i=1}^{n} c'_{in} \int_0^c a_1\,\varphi'_i\,\varphi_s\,dx + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} c_{in} \int_0^c \varphi''_i\,\varphi_s\,dx - \int_0^c F[v_n]\,\varphi_s(x)\,dx \end{aligned}\right. \qquad (s = 1, 2, \dots, n). \tag{19'}$$

Questo sistema è normalizzabile, essendo la matrice dei coefficienti delle c''_{in} la matrice di Gram relativa alle funzioni $\sqrt{a_2(x\,,\,t)}\,\operatorname{sen}\dfrac{\pi i x}{c}$ $(i = 1\,,\,2\,,\dots,\,n)$, linearmente indipendenti per ogni t. Normalizzando tale sistema avremo per esso la forma:

$$\begin{aligned} c''_{sn} = &\sum_{i=1}^{n} [A_{si}(t)\,c'_{in} + B_{si}(t)\,c_{in}] - \\ &- \sum_{j=1}^{n} D_{sj}(t) \int_0^c F[v_n]\,\varphi_j(x)\,dx \end{aligned} \qquad (s = 1, 2, \dots, n) \tag{19''}$$

ove le A_{si}, $B_{si}\,D_{sj}$ sono funzioni continue di t.

---

(11) Cfr. in loc. cit. [2], cap. II, n° 3.

Posto:

$$\begin{cases} c_{in}(t) = \gamma_i(t) \\ c'_{in}(t) = \gamma_{n+i}(t) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

si ottiene il sistema equivalente al (19) (20)

$$(19''') \qquad \gamma'_h = f_h(t, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2n}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2n)$$

$$\gamma_h(0) = \begin{cases} g_{hn} & (h = 1, 2, \ldots, n) \\ g'_{hn} & (h = n+1, n+2, \ldots, 2n) \end{cases}$$

ove si ha

$$(\overline{19}) \qquad f_h(t, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) = \begin{cases} \gamma_{n+h} & (h = 1, 2, \ldots, n) \\ \sum_{i=1}^{n} [A_{hi}(t)\gamma_{n+i} + B_{hi}(t)\gamma_i] - & \end{cases}$$

$$- \sum_{j=1}^{n} D_{nj}(t) \int_0^c (F(x, t, \sum_i \gamma_i \varphi'_i(x), \sum_i \gamma_{n+i}\varphi_i(x), \sum_i \gamma_i \varphi_i(x))\varphi_j(x)\, dx$$

$$(h = n+1, \ldots, 2n).$$

Il sistema (19'''), a causa della contiuuità dei secondi membri rispetto al complesso delle variabili t, γ_h, ammette almeno una soluzione ([12]). Proviamo che essa esiste in futuro, vale a dire per ogni $t \geq 0$; per questo si fissi un $T > 0$ e diciamo $\Delta\gamma_h$ degli incrementi arbitrari delle variabili indipendenti γ_h; per la ipotesi (8) avremo:

$$\Big| \int_0^c F(x, t, \sum_i (\gamma_i + \Delta\gamma_i)\varphi'_i(x), \sum_i (\gamma_{n+i} + \Delta\gamma_{n+i})\varphi_i(x), \sum_i (\gamma_i + \Delta\gamma_i)\varphi_i(x))\varphi_j(x)\, dx -$$

$$- \int_0^c F(x, t, \sum_i \gamma_i \varphi'_i(x), \sum_i \gamma_{n+i}\varphi_i(x), \sum_i \gamma_i \varphi_i(x))\varphi_j(x)\, dx \Big| \leq$$

$$\leq B(T) \Big\{ \Big| \sum_i \Delta\gamma_i \int_0^c \varphi_j(x)\varphi'_i(x)\, dx \Big| + \Big| \sum_i \Delta\gamma_{n+i} \int_0^c \varphi_j(x)\varphi_i(x)\, dx \Big| +$$

$$+ \Big| \Sigma \Delta\gamma_i \int_0^c \varphi_j(x)\varphi_i(x)\, dx \Big| \Big\}$$

ove $B(T)$ è la medesima costante definita nel Teorema I.

([12]) Per il teorema di Peano. Cfr., ad es., [7] p. 39.

Da quest'ultima, tenendo conto della $(\overline{19})$, si deduce che per il sistema (19''') si ha:

$$|f_h(t, \gamma_1 + \varDelta\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n} + \varDelta\gamma_{2n}) - f_h(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})| \leq A(T)\, \Sigma_h\, |\varDelta\gamma_h|,$$

ove $A(T)$ è una opportuna costante; vale così per il sistema (19''') una condizione di Lipschtiz in grande. Da questa segue subito non solamente l'unicità della soluzione, ma anche la sua esistenza [13] in *tutto* $(0, T)$, e, poichè T è arbitrario, si ha l'asserto.

5. Supponendo $f_1(t), f_2(t)$; $g(x), g_1(x)$ continue con le loro derivate prime e seconde, è possibile costruire una funzione $w(x, t)$ tale che, facendo per il preblema A) il cambiamento di variabile $v = u - w$, il problema medesimo A) si trasforma nel seguente [14]

PROBLEMA B). — *Ricercare nella classe $\mathcal{C}$ le funzioni $v(x, t)$ che soddisfano in (S) la equazione*

$$L[v] = \mathcal{J}[v] + \psi[v] = 0 \tag{1''}$$

ove

$$\psi[v] = F(x, t, v_x + w_x, v_t + w_t, v + w) - \mathcal{J}[w] \tag{21}$$

con le condizioni

$$v(x, 0) = v^t(x, 0) = 0 \tag{4''}$$

$$v(0, t) = v(c, t) = 0 \tag{5''}$$

È opportuno osservare che se la $F(x, t, u_x, u_t, u)$ è continua e soddisfa alla condizione (8), alla medesima condizione vi soddisferà la $\psi(x, t, v_x, v_t, v)$ definita dalla (21). Ciò porta che, ammessa tale condizione per la F, esiste

---

(13) Cfr. ad es., [7] a p. 15.

(14) Cfr. loc. cit. [2], cap. II, n° 4. Se si assume:

$$w(x, t) = (f_1(t) - f_1(0) - tf_1'(0))\left(1 - \frac{x}{c}\right) + (f_2(t) - f_2(0) - tf_2'(0))\,\frac{x}{c} + g(x) + tg_1(x),$$

tenendo conto delle condizioni di compatibilità: $f_1(0) = g(0)$, $f_1'(0) = g_1(0)$, $f_2(0) = g(c)$, $f_2'(0) = g_1(c)$, si raggiunge lo scopo.

ed è unica l'approssimazione ennesima $v_n(x,t)$, relativa al problema B). Potremo assumere con $u_n(x,t) = v_n(x,t) - w(x,t)$ *l'approssimazione ennesima, relativa al problema A)* (15).

Esistenza della soluzione.

6. Proveremo per il problema A) il seguente teorema di esistenza.

TEOREMA II. — *Se i coefficienti a_1, a_2 sono continui con le loro derivate prime e seconde rispetto a t in (S) ed ivi esiste continua $\frac{\partial a_1}{\partial x}$; se la funzione $F(x,t,u_x,u_t,u)$ è contiuua in (S^*) ed ivi soddisfa la ipotesi* (8), *se esistono continue in (S^*) le derivate prime e seconde di F rispetto agli argomenli t, u_x, u_t, u e il loro valore ossoluto è maggiorabile in (S_t^*) con una funzione continua di t, se esiste continua, per $t=0$, F_x; se infine, $f_1(t), f_2(t)$ sono continue per $t \geq 0$ con le loro derivate dei primi quatto ordini, mentre $g(x)$ e $g_1(x)$ sono continue in $(0,c)$ con le loro derivate rispettivamente fino al terzo e secondo ordine e sono verificate le condizioni di compatibilità in $x=0$, $t=0$:*

$$f_1 = g\,,\ f_1' = g_1\,;\ -g'' + a_1 g_1' + a_2 f_1'' + F(0,0,g',f_1',f_1) = 0$$

ed in $x=c$, $t=0$:

$$f_2 = g\,,\ f_2' = g_1\,;\ -g'' + a_1 g_1' + a_2 f_2'' + F(c,0,g',f_2',f_2) = 0\,,$$

allora il problema A) ammette una soluzione, che è unica per il teorema I.

Per dimostrare questa proposizione adatteremo i ragionamenti di S. Faedo al nostro caso. Trasformeremo innanzitutto il problema A) nel problemaB) e va notato che la funzione ψ, defiinita dalle (21), gode delle medesime proprietà della F. Applicheremo poi il metodo dei momenti al problema B). Sia $v_n(x,t)$ l'approssimazione ennesima (18) relativa al problema B) dove le $c_{in}(t)$ soddisfano il sistema differenziale

$$(19_1) \qquad \int_0^c L[v_n]\,\varphi_s(x)\,dx = \int_0^c \{\mathcal{J}[v_n] + \psi[v_n]\}\,\varphi_s(x)\,dx = 0 \qquad (s = 1,2,\ldots,n)$$

$$(20_1) \qquad c_{in}(0) = 0\,,\quad c_{in}'(0) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

(15) In loc. cit [2], cap. II, n. 4.

Tale approssimazione esiste ed è unica come già sappiamo (n. 5); notiamo anche che le condizioni di compatibilità si traducono, nel nostro caso, per le (4″) e (5″), in:

$$\psi(0, 0, 0, 0, 0) = 0, \qquad \psi(c, 0, 0, 0, 0) = 0$$

7. Supposte soddisfatte le ipotesi del teorema II, ci fermeremo in questo numero e nei n. 8, 9 a provare alcuni lemmi preparatori. Da essi seguirà, usando i medesimi ragionamenti di S. Faedo, la dimostrazione del Teorema II. Si ha intanto il seguente lemma.

LEMMA II. — *Fissato un $T > 0$, esiste una $C_1(T)$ tale da avere:*

$$\int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 \right\} dx \leq C_1(T) \tag{22}$$

$$(0 \leq t \leq T;\ n = 1, 2, \ldots\ldots)$$

Le (19_1) si possono scrivere

$$\int_0^c \{\mathcal{J}[v_n] + \psi[v_n] - \psi[0]\} \varphi_s(x)\, dx + \int_0^c \psi[0]\, \varphi_s(x)\, dx = 0 \ (^{16})$$

$$(0 \leq t \leq T; \quad s = 1, 2, \ldots, n)$$

Moltiplicando quest'ultima per $c'_{sn}(t)$, sommando rispetto ad s e ricordando la (18), si ha

$$\int_0^c \{\mathcal{J}[v_n] + \psi[v_n] - \psi[0]\} \frac{\partial v_n}{\partial t}\, dx + \psi_n(t) = 0 \tag{23}$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

ove si è posto

$$\psi_n(t) = \int_0^c \psi[0] \frac{\partial v_n}{\partial t}\, dx. \tag{24}$$

Ragioniamo come al n° 2 [17]. La $v_n(x, t)$ soddisfa alla medesima ipotesi (5′)

---

[16] La scrittura $\psi[0]$ significa $\psi(x, t, 0, 0, 0)$.

[17] nella dimostrazione del teorema I.

(Cfr. la (18) e (17)) perciò, posto ancora (analogamente alle (12) e (15))

$$(25) \qquad K_n(t) = \int_0^c \left\{ a_2 \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \,, \quad \varphi_n(t) = \int_0 \left\{ \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right) \right\}^2 dx$$

si otterrà per ogni t di $(0, T)$

$$K_n'(t) + 2R_n(t) + 2\psi_n(t) = 0 \qquad (0 \leq t \leq T)$$

Integrando la precedente tra 0 e t (osservando che $K_n(0) = 0$), ripetendo ragionamento fatte al n. 2, atto a maggiorare $|R(t)|$, troveremo per $\varphi_n(t)$ la disuguaglianza

$$A(T)\,\varphi_n(t) \leq \beta(T) \int_0^t \varphi_n(\tau)\, d\tau + \lambda_n(T)$$

ove $A(T)$, $\beta(T)$ hanno il medesimo significato che al n. 2, mentre si è posto

$$\lambda_n(T) = 2T \operatorname*{Max}_{(0,T)} |\psi_n(t)| ,$$

essendo ψ_n definila dalla (24). Per il lemma I, riuscirà allora

$$(26) \qquad \varphi_n(t) \leq \frac{\lambda_n(T)}{A(T)} \exp \frac{\beta(T)}{A(T)} t \qquad (0 \leq t \leq T)$$

Si può d'altra parte svincolare il secondo nembro di questa da n e si ottiene [18]

$$(27) \qquad \varphi_n(t) \leq 4T^2 \left(\frac{\mu(T)}{A(T)} \right)^2 \exp 2 \frac{\beta(T)}{A(T)} T . \qquad (0 \leq t \leq T)$$

con $\mu(T)$ indipendente da n e ciò prova il lemma II.

---

[18] Utilizzando per la (24) la disuguaglianza di Schwarz, si ottiene:

$$|\psi_n(t)| \leq \sqrt{\int_0^c \psi^2[0]\, dx} \cdot \sqrt{\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx}$$

e da quì segue che

$$\lambda_n(T) \leq 2T\mu(T) \operatorname*{Max}_{(0,T)} \sqrt{\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 dx}$$

LEMMA III. — *Fissato un $T > 0$, esiste una $C_2(T)$ per la quale si ha:*

$$\int_0^c \left\{\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t}\right)^2\right\} d\,x \leq C_2(T) \tag{28}$$

$$(0 \leq t \leq T\,;\ n = 1\,,2\,,\ldots)$$

Dopo avere derivato rispetto a t la (19_1), si moltiplichi per $c''_{sn}(t)$ e si sommi rispetto ad s; otterremo in $(0\,,T)$

$$\int_0^c \left\{\mathcal{I}\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right) + \frac{\partial a_1}{\partial t}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial a_2}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \psi_t + \psi_{v_x}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + \right. \tag{29}$$

$$\left. + \psi_{v_t}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \psi_v\frac{\partial v_n}{\partial t}\right\}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\,d\,x = 0$$

Poichè $\dfrac{\partial v_n}{\partial t}$ soddisfa a condizioni analoghe alle $(5')$ (è cioè $\dfrac{\partial v_n(0\,,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial v_n(c\,,t)}{\partial t} = 0$) potremo ancora ragionare come nel lemma precedente; posto:

$$K_n(t) = \int_0^c \left\{a_2\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t}\right)^2\right\} dx\,;\quad \varphi_n(t) = \int_0^c \left\{\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t}\right)^2 d\,x\right. \tag{30}$$

si otterrà dalla (29)

$$K'_n(t) + 2\,R_n(t) + 2\,\psi_n(t) = 0\,, \tag{31}$$

---

ove $\mu(T)$ è il massimo di $\sqrt{\int_0^c \psi^2[0]\,dx}$ in $(0\,,T)$; e poichè riesce (Cfr. la (25))

$$\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 d\,x \leq \varphi_n(t)\,,$$

si ha in definitiva:

$$\lambda_n(T) \leq 2\,T\mu \operatorname*{Max}_{(0,T)} \sqrt{\varphi_n(t)} = 2T\mu(T)\sqrt{\operatorname*{Max}_{(0T)} \varphi_n(t)}$$

e da questa per la (26) si ottiene subito la (27).

ove si è posto

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
R_n(t) &= \int_0^c \left\{ \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial a_2}{\partial t}\right) + \psi_{v_t} \right] \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 + \left[\frac{\partial a_1}{\partial t} + \psi_{v_x}\right] \frac{\partial^2 v_n}{\partial x\, \partial t} \cdot \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right\} dx \\
\psi_n(t) &= \int_0^c \left[\psi_t + \psi_v \frac{\partial v_n}{\partial t}\right] \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\, dx
\end{aligned}
\right.
$$

Maggiorando $|R_n(t)|$ in $(0, T)$ si ottiene:

$$
|R_n(t)| \leq \frac{\beta(T)}{2} \int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\, \partial t}\right)^2 \right\} dx
$$

ove $\dfrac{\beta(T)}{2}$ è una costante non inferiore al massimo in (S_T^*), e per ogni n, delle funzioni

$$
\left| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial a_2}{\partial t} - \frac{\partial a_1}{\partial x} + \psi_{v_x}\right) + \psi_{v_x} \right|, \quad \frac{1}{2}\left| \frac{\partial a_1}{\partial t} + \psi_{v_x} \right|,
$$

certamente esistente per la ipotesi fatta su ψ_{v_x}, ψ_{v_t}.

Integrando la (31) su $(0, t)$ e ragionando nel solito modo, si ottiene per $\varphi_n(t)$, definita dalla (30), la disuguaglianza:

$$
A(T)\, \varphi_n(t) \leq \beta(T) \int_0^c \varphi_n(\tau)\, d\tau + \lambda_n(T) + K_n(o)
$$

$$
(0 \leq t \leq T)
$$

ove $A(T)$ ha il solito significato (cfr. n. 2) e

$$
(33)\qquad \lambda_n(T) = 2T \operatorname*{Max}_{(0,T)} |\psi_n(t)|,
$$

ove $\psi_n(t)$ è definita dalla (32). Dalla disuguaglianza su scritta per il lemma I si ha:

$$
(34)\qquad \varphi_n(t) \leq \frac{K_n(0) + \lambda_n(T)}{A(T)} \exp \frac{\beta(T)}{A(T)}\, t .
$$

e poichè si può svincolare il secondo membro [19] da n è provato il lemma.

---

[19] Si cerchi dapprima (Cfr. loc. cit. [2], cap. III, n. 4) una maggiorazione per $K_n(0)$. Le (19_1) danno per $t=0$ (si veda le (20_1))

$$(^*)\qquad \int_0^c \left\{a_2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \psi[0]\right\}_{t=0} \varphi_s(x)\, dx \qquad (s=1,2,\dots,n)$$

e, moltiplicando per $c''_{sn}(t)$ e sommando, si ha:

$$(^*_*)\qquad \int_0^c \left[a_2\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2\right]_{t=0} dx = -\int_0^c \left\{\psi[0]\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)\right\}_{t=0} dx$$

Partendo dalla disuguaglianza

$$\int_0^c \left(\frac{\psi[0]}{\sqrt{a_2}} + \sqrt{a_2}\,\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2_{t=0} dx \geq 0,$$

si trae subito, tenendo conto della $(^*_*)$, della (30) e della (20_1), che

$$K_n(0) = \int_0^c a_2(x,0)\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2_{t=0} dx \leq \int_0^c \frac{\psi^2_{t=0}[0]}{a(x,0)}\, dx = H$$

Sostituendo in (34) Si ha la disuguaglianza

$$(^{*}_{**})\qquad \varphi_n(t) \leq \frac{H+\lambda_n(T)}{A(T)} \exp \frac{\beta(T)}{A(T)}\, t \qquad (0 \leq t \leq T)$$

Si potrà ragionare, ora, in modo analogo al lemma II. Applicando la formula di Schwarz alla $\psi_n(t)$, definita dalla (32), si avrà

$$|\psi_n(t)| \leq \sqrt{\int_0^c \left[\psi_t + \psi_v \frac{\partial v_n}{\partial t}\right]^2 dx}\ \sqrt{\int_0^c \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 dx}$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

per le ipotesi fatte su ψ_t, ψ_v e per il lemma II, esisterà un $M(T)$ tale che

$$\sqrt{\int_0^c \left[\psi_t + \psi_v \frac{\partial v_n}{\partial t}\right]^2 dx} \leq M(T);$$

Poichè $\sqrt{\int_0^c \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 dx} \leq \sqrt{\varphi_n(t)}$ avremo, ricordando la (33): $\lambda_n(T) \leq 2TM(T) \max\limits_{(0,T)} \sqrt{\varphi_n(t)}$

LEMMA IV. — *Fissato un $T > 0$, esiste una $C_3(T)$ per cui è:*

(35) $$\int_0^c \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)^2 dx \leq C_3(T)$$

$$(0 \leq t \leq T;\ n = 1, 2, \ldots)$$

Moltiplicando ambo i membri della (19_1) per $-\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2 c_{sn}(t)$ e sommando rispetto ad s, si ottiene [20]

$$\int_0^c \{\mathfrak{I}[v_n] + \psi[v_n]\} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} dx = 0, \qquad (0 \leq t \leq T)$$

e da questa si ha in $(0, T)$

(36) $$\int_0^c \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)^2 dx = \int_0^c \Phi[v_n] \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} dx,$$

Dalla (⁂), tenuto conto di quest'ultima, avremo:

$$\operatorname{Max} \varphi_n(t) \leq \frac{H + 2TM(T) \operatorname{Max} \sqrt{\varphi_n(t)}}{A(T)} \exp \frac{\beta(T)}{A(T)} T; \qquad (0 \leq t \leq T)$$

Fissato ora un qualunque n o riesce $2TM(T) \operatorname*{Max}_{(0T)} \sqrt{\varphi_n(t)} < H$ e, in questo caso, dalla precedente si ha:

$$\varphi_n(t) < \frac{2H}{A(T)} \exp \frac{\beta(T)}{A(T)} T \qquad (0 \leq t \leq T)$$

il cui secondo membro non dipende da n, oppure è $2TM(T) \operatorname*{Max}_{(0,T)} \sqrt{\varphi_n(t)} \geq H$, e in questo caso la medesima disuguaglianza fornisce

$$\operatorname{Max} \varphi_n(t) \leq \frac{4TM(T)}{A(T)} \operatorname{Max} \sqrt{\varphi_n(t)} \exp \frac{\beta(T)}{A(T)} T,$$

e quindi (come in nota (18)):

$$\varphi_n(t) \leq 16\, T^2 \left(\frac{M(T)}{A(T)}\right)^2 \exp 2 \frac{\beta(T)}{A(T)} T,$$

il cui secondo membro non dipende ancora da n.

[20] Cfr in loc. cit. [2], cap. III, lemma III.

ove si è posto

$$\Phi[v] = a_1 v_{xt} + a_2 v_{tt} + \psi[v] \,. \tag{37}$$

Utilizzando per la (36) la formula di Schwarz ed osservando che esiste una $C_3(T)$ per cui è [21]

$$\int_0^c \Phi^2[v_n]\,dx \leq C_3(T)\,, \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{37'}$$

ne viene la tesi.

8. Lemma V. — *Fissato un $T > 0$, esistono due $C_4(T)$, $C_5(T)$ per le quali si ha*

$$\int_0^c \left\{\left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial t^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial t^2}\right)^2\right\} dx \leq C_4(T) \tag{38}$$

$$\int_0^c \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x^2\,\partial t}\right)^2 dx \leq C_5(T) \tag{39}$$

$$(0 \leq t \leq T;\ n = 1, 2, \ldots)$$

---

(21) Si può procedere nel modo seguente; è intanto

$$\int_0^c \Phi^2[v_n]\,dx \leq 2\int_0^c \left(a_1 \frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + a_2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \psi[v] - \psi[0]\right)^2 dx + 2\int_0^c \psi^2[0]\,dx$$

e ricordando la ipotesi (8)

$$\int_0^c \Phi^2[v_n]\,dx \leq 4\int_0^c \left(a_1 \frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + a_2 \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 dx + 4B^2(T)\int_0^c \left\{\left|\frac{\partial v_n}{\partial x}\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\partial v_n}{\partial t}\right| + |v_n|\right\}^2 dx + 2\int_0^c \psi^2[0]\,dx$$

ove $B(T)$ ha lo stesso significato che nel teorema del n. 2. Ricordando ora che (cfr. n. 2)

$$v_n^2 \leq c\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 dx$$

ed i lemmi II, e III, ne viene l'affermazione fatta.

Ragioniamo per la (38) come nel lemma III. Derivata rispetto a t due volte la (19_1), si moltiplichi per $c_{sn}'''(t)$ (22) e si sommi rispetto ad s, troveremo

$$\begin{aligned}(40)\qquad &\int_0^c \left\{ \mathcal{J}\left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right] + 2\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{\partial a_2}{\partial t}\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right) + \frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \right. \\ &\left. + \left[\psi_t + \psi_{v_x}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + \psi_{v_t}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \psi_v \frac{\partial v_n}{\partial t}\right]_t \right\}\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\,dx = 0\end{aligned}$$

ove l'indice t indica la derivazione, poichè $\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}$ soddisfa a condizioni analoghe alle (5′) (Cfr. lemma III), posto

$$(41)\qquad \begin{cases} K_n(t) = \displaystyle\int_0^c \left\{ a_2 \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial t^2}\right)^2 \right\} dx \\ \varphi_n(t) = \displaystyle\int_0^c \left\{ \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial t^2}\right)^2 \right\} dx\,. \end{cases}$$

Dalla (40) si otterrà

$$K_n'(t) + 2R_n(t) + 2\psi_n(t) = 0$$

ove si è posto:

$$R_n(t) = \int_0^c \left\{ \left[\frac{3}{2}\frac{\partial a_2}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_1}{\partial x} + \psi_{v_t}\right]\left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2 + \left[2\frac{\partial a_1}{\partial t} + \psi_{v_x}\right]\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial t^2}\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3} \right\} dx$$

e dove per $\psi_n(t)$ (23) si ha, per i lemmi I, II e III e per le ipotesi fatte

(22) Va osservato che dal sistema (19_1), che potremo scriverlo nella forma normale $(19'')$, discende facilmente, nelle nostre ipotesi, l'esistenza delle derivate terze $c_{sn}'''(t)$.

(23) La $\psi_n(t)$ ha la forma:

$$\begin{aligned}\psi_n(t) = \int_0^c &\left\{ \frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \right. \\ &+ \left[\psi_{tt} + \psi_{tv_x}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + \psi_{tv_t}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \psi_{tv}\frac{\partial v_n}{\partial t}\right] + \\ &+ \left[\psi_{v_x t} + \psi_{v_x v_x}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + \psi_{v_x v_t}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \psi_{v_x v}\frac{\partial v_n}{\partial t}\right]\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + \\ &+ \left[\psi_{v_t t} + \psi_{v_t v_x}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial t} + \psi_{v_t v_t}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \psi_{v_t v}\frac{\partial v_n}{\partial t}\right]\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \\ &\left. + \left[\psi_{v_t} + \psi_{vv_x}\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t} + \psi_{vv_t}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \psi_{vv}\frac{\partial v_n}{\partial t}\right]\frac{\partial v_n}{\partial t} + \psi_v\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right\}\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\,dx\end{aligned}$$

sulle derivate seconde di ψ (24)

$$| \psi_n(t) | \leq M(T) \sqrt{\int_0^c \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2 dx}. \tag{42}$$

Ragionando come nel lemma III avremo

$$A(T)\,\varphi_n(t) \leq \beta(T) \int_0^c \varphi_n(\tau)\, d\tau + \lambda_n(T) + K_n(0)$$

ove $A(T)$, $\beta(T)$, $\lambda_n(T)$ hanno significati analoghi (25); da ciò segue ancora per il lemma I

$$\varphi_n(t) \leq \frac{K_n(0) + \lambda_n(T)}{A(T)} \exp. \frac{\beta(T)}{A(T)}\, t \tag{43}$$

Ma si può, ripetendo il ragionamento fatto nel lemma III, svincolare il secondo membro di questa da n (26) e la prima parte della tesi è provata.

---

(24) Cfr. la nota (19).

(25) Cfr. nota lemma II. $A(T)$ ha lo stesso significato, $\frac{\beta(T)}{2}$ è una costante non inferiore al massimo in (S_T^*), e per ogni n, dei due valori

$$\left| \frac{3}{2}\frac{\partial a_2}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_1}{\partial t} + \psi_{v_t} + \frac{1}{2}\psi_{v_x} \right|, \quad \frac{1}{2}\left| 2\frac{\partial a_1}{\partial t} + \psi\, v_x \right|,$$

che esiste per le ipotesi fatte sulle derivate di ψ, mentre

$$\lambda_n(T) = 2T \operatorname*{Max}_{(0,T)} | \psi_n(t) | ; \qquad k_n(0) = \int_0^c \left\{ a_2(x,0) \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2_{t=0} + \left(\frac{\partial^3 v_u}{\partial x \partial t^2}\right)^2_{t=0} \right\} dx$$

(26) Si cerca da prima (come nella nota (19)) una maggiorazione per $K_n(0)$; per questo si maggiora in primo luogo $\int_0^c \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x \partial t^2}\right)^2 dx$. Se integriamo per parti la (*) della nota (19), tenendo conto delle condizioni di compatibilità $\psi(0,0,0,0,0) = \psi(c,0,0,0,0) = 0$, si ottiene:

$$\int_0^c a_2(x,0) \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x \partial t^2}\right)_{t=0} \cos\frac{s\pi x}{c}\, dx = -\int_0^0 \left\{ \psi_x[0] + \frac{\partial a_2}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right) \right\}_{t=0} \cos\frac{\pi s x}{c}\, dx.$$

Per la seconda parte si potrà ragionare come nel lemma IV. Si derivi rispetto a t la (19_1) e, dopo aver moltiplicato per $-\left(\frac{\pi s}{c}\right)^2 c'_{sn}(t)$, si sommi

---

Moltiplicando questa per c''_{sn} e sommando, si ottiene:

$$\int_0^c a_2(x,0)\left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial t^2}\right)^2_{t=0} d\,x = -\int_0^0 \left\{\left[\psi_n[0] + \frac{\partial a_2}{\partial x}\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right]\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial t^2}\right\}_{t=0} dx$$

Utilizzando questa relazione e la disuguaglianza

$$\int_0^c \left\{\frac{\psi_x[0] + \dfrac{\partial a_2}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}}{\sqrt{a_2}} + \sqrt{a_2}\,\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial t^2}\right\}^2_{t=0} dx \geq 0\,,$$

si ottiene, ragionando come nella nota (19) (e utilizzando il lemma III), la disuguaglianza

$$(*) \qquad \int_0^c \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t^2}\right)_{t=0} dx \leq H_1/A\,(T)$$

con H_1 indipendente da n.

Si maggiora in secondo luogo $\int_0^c a_2(x,0)\left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^2}\right)^2_{t=0} dx$. Dopo aver derivate le (19_1) rispetto a t, ponendo $t=0$, si moltiplichi per c'''_{sn} e si sommi rispetto ad s ottenemo, tenuto conto che

$$(v_n)_{t=0} = \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)_{t=0} = \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)_{t=0} = 0\,,$$

$$\int_0^c a_2(x,0)\left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2_{t=0} dx = -\int_0^c \left\{\left[\psi_t + \left(\frac{\partial a_2}{\partial t} + \psi_{v_t}\right)\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + a_1\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial t^2}\right]\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right\}_{t=0} dx$$

Utilizzando la relazione precedente, e, la disuguaglianza:

$$\int_0^c \left\{\frac{\psi_t + \left(\dfrac{\partial a_2}{\partial t} + \psi_{v_t}\right)\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial t} + a_1\dfrac{\partial^3 v_n}{\partial x\,\partial t^2}}{\sqrt{a_2}} + \sqrt{a_2}\,\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right\}^2_{t=0} dx \geq 0,$$

rispetto ad s; otterremo

$$\int_0^c \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x^2 \partial t}\right)^2 dx = \int_0^c \left\{ a_1 \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^2 \partial x} + a_2 \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3} + \frac{\partial a_1}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} + \frac{\partial a_2}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \psi_t + \psi_{v_x} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} + \psi_{v_t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + \psi_v \frac{\partial v_n}{\partial t} \right\} \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^2 \partial t} dx .$$

Da questa per i lemmi precedenti, per le ipotesi fatte sulle derivate della ψ, utilizzando ancora la formula di Schwarz ne viene la (39).

9. Consideriamo la funzione di Green $G(x, \xi)$ relativa al problema $y''(x) + \lambda y(x) = 0$, $y(0) = t(c) = 0$. Riesce:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(c-\xi)}{c} & \text{se} \quad x \leq \xi \\[2ex] \dfrac{\xi(c-x)}{c} & \text{se} \quad x > \xi \end{cases}$$

e vale per la $G(x, \xi)$ lo sviluppo in serie di autofunzioni, uniformemente convergente:

$$G(x, \xi) = -\frac{2}{c} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{i\pi x}{c} \operatorname{sen} \dfrac{i\pi \xi}{c}}{\left(\dfrac{i\pi}{c}\right)^2} . \tag{44}$$

---

si potrà ragionare come precedentemente, e, tenendo conto della (*), delle ipotesi fatte e del lemma III, si deduce:

$$\int_0^c \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2_{t=0} dx \leq H_2$$

con H_2 indipendente da n. Da quest'ultima e dalla (*) segue la voluta maggiorazione per $K_n(0)$.

Partendo dalla (43), a questo punto, si ragiona come nel lemma III, alla nota (19), utilizzando la (42).

Si può provare ancora il seguente lemma

LEMMA VI. — *Se $\Phi[v]$ è l'operatore definito in* (37) *e $C_3(T)$ la costante definita nel lemma IV, si ha*

$$\left| v_n(\xi, t) + \int_0^c \Phi[v_n(x, t)]\, G(x, \xi)\, dx \right| \leq C_3(T)\ \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

La dimostrazione si fa come in [2] (27).

---

(27) (Cfr. [2], lemma V). Si ha:

$$(*) \qquad -\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \Phi[v_n] = \vartheta[v_n] + \Psi[v_n]$$

e ricordando le (17) e (18)

$$\int_0^c \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{c}\, dx = 0 \qquad (i = n+1, n+2, \ldots)$$

Ne viene dalla (*), per la (44) e tenuto conto dalle (19_1)

$$\int_0^c \{\vartheta[v_n] + \Psi[v_n]\}\, G(x, \zeta)\, dx = -\frac{2c}{\pi^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i} \operatorname{sen} \frac{i\pi\xi}{c} \int_0^c \Phi[v_n] \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{c}\, dx,$$

da questa discende

$$\left| \int_0^c \{\vartheta[v_n] + \Psi[v_n]\}\, G(x, \xi)\, dx \right| \leq \frac{2c}{\pi^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left| \int_0^c \Phi[v_n] \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{c}\, dx \right|$$

Ma si ha

$$\left| \int_0^c \Phi[v_n] \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{c}\, dx \right| \leq c^{\frac{1}{2}} \sqrt{\int_0^c \Phi^2[v_n]\, dx},$$

per cui il primo membro della precedente si può maggiorare con

$$2\frac{c^{3/2}}{\pi^2} \sqrt{\int_0^c \Phi^2[v_n]\, dx} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

e poichè $\sum_{1+n}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{1}{n}$, ricordando la (37') ne viene la tesi.

10. La dimostrazione del Teorema II, che si fonda sui lemmi precedenti, può ora conseguirsi, ripetendo alla lettera i ragionamenti di S. Faedo e perciò rimandiamo alla memoria [2] (28).

Vale anche con lo stesso ragiouamento la seguente osservazione

OSSERVAZIONE. — *Le successioni*

$$\left\{ v_n ; \frac{\partial v_n}{\partial x}, \frac{\partial v_n}{\partial t}, \frac{\partial v_n}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v_n}{\partial x\, \partial t} \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

convergono uniformemente in (S_T) *alla soluzione del problema* B) *e alle derivate omonime e quindi le successioni*

$$\left\{ v_n - w, \frac{\partial v_n}{\partial x} - w_x, \frac{\partial v_n}{\partial t} - w_t, \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} - w_{tt}, \frac{\partial^2 v_n}{\partial x\, \partial t} - w_{vt} \right\}$$

convergono uniformemente alla soluzione e alle derivate omonime sul problema A) (29).

---

(28) Cfr. cap. III, § 2, n. 1, 2. I lemmi II, III, IV, V, precedenti danno dei criteri di eguale continuità (Cfr. [2], [8], [9]). Per essi è possibile costruire una successione d'interi $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ in modo che le successioni:

$$\left\{ v_{n_k}, \frac{\partial v_{n_k}}{\partial x}, \frac{\partial v_{n_k}}{\partial t}, \frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial x\, \partial t} \right\}$$

convergano uniformemente ad una funzione $v(x, t)$ e alle derivate omonime in (S_T). Si prova poi utilizzando il lemma VI che $v(x, t)$ risolve il problema B) e perciò $v - w$ (Cfr. il n. 5) il problema A).

(29) Altri risultati della memoria [2] (cap. III, § 3, n. 2) come la convergenza in media $\frac{\partial v_{n_k}}{\partial x^2}$ a $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ su $(0, c)$ per ogni $t > 0$ ed il teorema generale di convergenza (cap. IV) pre ogni sistema $\{\varphi_i(x)\}$ ammesso al metodo variazionale, appaiono intimamente legati alla linearità dell'operatore $F[u]$ e non sembrano per tanto deducibili nelle ipotesi del teorema II, come lo sono in [2], senza ulteriori ipotesi su F.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI CITATE

[1] - C. MIRAMDA: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer, (1955).

[2] - S. FAEDO: *Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione*, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, S. III, v. I, (1949).

[3] - M. PICONE: *Nuovi contributi all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Soc. R. Napoli, S. IV, v. VI, (1936).

[4] - M. PICONE: *Analisi quantitativa ed esistenziale nei problemi di propagazione*, Atti del 1, Congs. U.M.I. (1937).

[5] - A. CHIFFI: *Analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione*, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, S. III, v. IX, (1955).

[6] - R. BELLMANN: *Stability theory of differential equations*, MacGraw-Hill Book Co., Inc. (1953).

[7] - G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte prima, Zanichelli (1948).

[8] - L. TONELLI: *L'estremo assoluto negli integrali doppi*, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, S. II^0 v. II, (1933).

[9] - S. FAEDO: *Alcuni nuovi criteri di eguale continuità per le funzioni di più variabili*, Rend. di Mat., Roma, S. V, V. VI, (1947).