Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Silvio Cinquini

Sopra un teorema relativo alle estremanti di una classe di problemi variazionali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 3-4 (1957), p. 137-147
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_137_0>

SOPRA UN TEOREMA RELATIVO ALLE ESTREMANTI DI UNA CLASSE DI PROBLEMI VARIAZIONALI

di SILVIO CINQUINI (Pavia)

Le estremali e le estremaloidi di ordine 2 relative agli integrali curvilinei in forma parametrica dipendenti dagli elementi differenziali dei primi due ordini (1)

$$\mathcal{J}^{(2)}_{C^{(2)}} = \int_{C^{(2)}} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s))\, d\, s$$

(ove s è la lunghezza dell'arco rettificato e $\theta'(s)$ è la curvatura della curva ordinaria $C^{(2)}$) hanno formato oggetto di due Note in corso di stampa (2). Tra le proprietà enunciate nella seconda di tali Note figura un teorema il quale afferma, sotto opportune condizioni per la funzione $F(x, y, x', y', \theta')$, che una curva ordinaria $C^{(2)}$ minimante $\mathcal{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$ è un'estremaloide di ordine 2.

Nelle presenti righe ci occupiamo (n.2) della dimostrazione di tale teorema, indicando in qual modo il procedimento di tipo ben noto (3), sul quale essa è basata, deve essere adattato per superare le difficoltà inerenti ai

---

(1) A tali problemi abbiamo dedicato qualche anno fa due Memorie, nelle quali ci siamo occupati della semicontinuità e dell'esistenza dell'estremo assoluto degli integrali $\mathcal{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$: S. CINQUINI: *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore.* Annali Scuola Normale superiore di Pisa, serie II, vol. XIII (1944) [1947], pp. 19-49. *Sopra le condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali in forma parametrica di ordine superiore.* ibidem, vol. XIV (1945) [1948] pp. 1-19.

(2) S. CINQUINI. *Sopra le estremali di una classe di problemi variazionali.* Rend. Accademia Nazionale dei Lincei, vol. XXIII (1957). *Sopra le estremaloidi di una classe di problemi variazionali.* ibidem. Nel seguito tali Note verranno indicate rispettivamente con N. I e N. II.

(3) L. TONELLI. *Fondamenti di Calcolo delle variazioni.* Due volumi. (N. Zanichelli, Bologna 1921-3) .Vedi vol. II, Cap. I, n. 34, a), pp. 98-100.

S. CINQUINI. *Sopra le equazioni di Eulero dei problemi variazionali di ordine n.* Annali di Matematica pura e applicata, T. XVI (1937) pp. 61-100. Vedi n. 7, pp. 76-80. Cfr. anche S. CINQUINI, N. I, n. 2.

problemi variazionali in questione: a tal riguardo è superfluo ricordare (4) che tali problemi presentano sia difficoltà che nel caso del più semplice problema variazionale (quello del primo ordine) si incontrano soltanto nella forma ordinaria, sia difficoltà che traggono origine dal fatto che la curvatura non è un funzionale additivo.

Rinviamo alle Note citate in (2) (in particolare a N. II) per alcuni casi particolari del teorema del n. 2 (5) e per altri risultati relativi alle estremaloidi di ordine 2, limitandoci a illustrare il teorema del n. 2 con qualche esempio (n.3), e soggiungendo che i problemi in questione possono dar luogo a ulteriori interessanti ricerche.

1. GENERALITÀ. Per tutte le generalità rinviamo ai nostri lavori citati in (1) e (2), limitandoci a ricordare che $F(x, y, x', y', \theta')$ è una funzione: 1°) definita e continua, insieme con le proprie derivate parziali $F_x, F_y, F_{x'}, F_{y'}, F_{\theta'}$, in ogni punto (x, y) del campo A, per ogni coppia di numeri x', y' non entrambi nulli e per ogni valore finito di θ'; 2°) positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili x', y' e tale che sia $F(x, y, 0, 0, \theta') = 0$.

Inoltre si chiama *curva ordinaria* $C^{(2)}$ ogni curva rettificabile

$$C^{(2)}: \qquad x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad (0 \leq s \leq L),$$

ove s è l'arco rettificato, per la quale le funzioni $x(s)$, $y(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine $x'(s)$, $y'(s)$, ogni punto $(x(s), y(s))$ con $0 \leq s \leq L$ appartiene al campo A ed esiste finito l'integrale (di LEBESGUE)

$$\mathcal{J}^{(2)}_{C^{(2)}} = \int_{C^{(2)}} F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s))\, ds,$$

ove

$$\theta'(s) = \frac{d\,\theta(s)}{d\,s} = x'(s)\, y''(s) - x''(s)\, y'(s)$$

è la curvatura della curva $C^{(2)}$, $\theta(s)$ essendo l'angolo di direzione.

2. TEOREMA. *Supponiamo che, in corrispondenza a ogni campo limitato A_λ appartenente ad A, si possano determinare sei numeri positivi N_1, N_2,*

(4) Rinviamo ai nostri lavori citati in (1).

(5) Al n. 3, a) di N. II si rileva la maggior generalità del nostro teorema del n. 2 in confronto al risultato che si può trarre da una Memoria di N. BOGOLIOUBOFF, nella quale i problemi variazionali in questione erano impostati in una forma un po' diversa dalla nostra.

N_3, $R < 1$, $\eta < 1$, $H \geq 1$, *in modo che in tutti i punti* (x, y) *di* A_λ, *per tutte le coppie* x', y' *normalizzate, per ogni coppia* φ_0, φ_1 *con* $\varphi_0^2 + \varphi_1^2 \leq R^2$ *e per qualunque coppia* $\theta', \widetilde{\theta'}$ *con* $|\theta'| \geq H$,

$$(1) \qquad (1-\eta)\,|\theta'| \leq |\widetilde{\theta'}| \leq (1+\eta)\,|\theta'|$$

risulti

$$(2) \quad \begin{cases} |\, F_x(x+\varphi_0, y, x'+\varphi_1, y', \widetilde{\theta'})\,| \leq N_1\,|\,F(x,y,x',y',\theta')\,| + N_2\,|\,\theta'\,| + N_3 \\ |\, F_{x'}(x+\varphi_0, y, x'+\varphi_1, y', \widetilde{\theta'})\,| \leq N_1\,|\,F(x,y,x',y',\theta')\,| + N_2\,|\,\theta'\,| + N_3 \\ |\theta' F_{\theta'}(x+\varphi_0, y, x'+\varphi_1, y', \widetilde{\theta'}\,| \leq N_1\,|\,F(x,y,x',y',\theta')\,| + N_2\,|\,\theta'\,| + N_3, \end{cases}$$

ove il punto $(x+\varphi_0, y)$ *appartiene al campo* A, *e anche*

$$(3) \quad \begin{cases} |\, F_y(x, y+\varphi_0, x', y'+\varphi_1, \widetilde{\theta'})\,| \leq N_1\,|\,F(x,y,x',y',\theta')\,| + N_2\,|\,\theta'\,| + N_3 \\ |\, F_{y'}(x, y+\varphi_0, x', y'+\varphi_1, \widetilde{\theta'})\,| \leq N_1\,|\,F(x,y,x',y',\theta')\,| + N_2\,|\,\theta'\,| + N_3 \\ |\theta' F_{\theta'}(x, y+\varphi_0, x', y'+\varphi_1, \widetilde{\theta'})\,| \leq N_1\,|\,F(x,y,x',y',\theta')\,| + N_2\,|\,\theta'\,| + N_3, \end{cases}$$

ove il punto $(x, y+\varphi_0)$ *appartiene al campo* A.

Sotto queste ipotesi, se

$$C_0^{(2)}: \qquad x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad (0 \leq s \leq L)$$

è una curva ordinaria $C^{(2)}$ *minimante* $\mathcal{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$ *in una classe* $K^{(2)}$ *di curve ordinarie* $C^{(2)}$, *ogni arco*

$$\overline{C}_0^{(2)}: \qquad x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad (s_1 \leq s \leq s_2)$$

di $C_0^{(2)}$, *i cui punti, ad eccezione al più di quelli terminali, siano interni al campo* A *e di indifferenza rispetto ad* A *e a* $K^{(2)}$, *è un'estremaloide di ordine* 2 *relativa alla funzione* F, *vale a dire per ogni* s *di* (s_1, s_2) *sono verificate le equazioni*

$$(4) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{s_1}^{s} ds \int_{s_1}^{s} F_x\, dx - \int_{s_1}^{s} [F_{x'} - 2\,x'\,\theta'\,F_{\theta'}]\, ds - \frac{d}{ds}\int_{s_1}^{s} y'\,F_{\theta'}\, ds = C_1 + C_2\, s \\ \displaystyle\int_{s_1}^{s} ds \int_{s_1}^{s} F_y\, ds - \int_{s_1}^{s} [F_{y'} - 2\,y'\,\theta'\,F_{\theta'}]\, ds + \frac{d}{ds}\int_{s_1}^{s} x'\,F_{\theta'}\, ds = C_3 + C_4\, s, \end{cases}$$

ove C_1, C_2, C_3, C_4 *sono quattro costanti.*

Per brevità e per fissare le idee ci riferiamo alla dimostrazione che conduce a stabilire la prima delle (4).

Procedendo in modo ben noto si suppone, inizialmente, che

$$C': \qquad x = x(s), \quad y = y(s), \qquad (s_1' \leq s \leq s_2'),$$

ove $s_1 < s_1' < s_2' < s_2$, sia un arco di $\overline{C}_0^{(2)}$ tale che ogni suo punto sia interno al campo A, e che esista un numero positivo $\varrho < 1$, con ϱ minore della minima distanza dei punti di C' dalla frontiera di A, in modo che, sostituendo a C' un qualunque arco di curva ordinaria $C^{(2)}$, avente gli stessi punti terminali di C' e in ciascuno di questi lo stesso angolo di direzione di C', e appartenente all'intorno $(\varrho)^2$ di C', non si esca dalla classe $K^{(2)}$. Sia A_λ il campo (limitato) costituito dai punti di A che distano non più di ϱ da almeno un punto di C'. Indichiamo con ϱ' il minore dei numeri ϱ, R (ove $R, \eta, H, N_1, N_2, N_3$ sono i numeri che, per ipotesi, corrispondono ad A_λ), tenendo presente che è $\varrho' < 1$.

Per la continuità di $F_x, F_{x'}, F_{\theta'}$ esiste un $\Delta > 0$ in modo che in ogni punto (x, y) di A_λ, per ogni coppia x', y' normalizzata, per $|\varphi_1| \leq \varrho'$, $|\theta'| \leq (1+\eta) H$ valgono le disuguaglianze

$$(5) \qquad \begin{cases} |F_x(x, y, x'+\varphi_1, y', \theta')| \leq \Delta \\ |F_{x'}(x, y, x'+\varphi_1, y', \theta')| \leq \Delta \\ |F_{\theta'}(x, y, x'+\varphi_1, y', \theta')| \leq \Delta . \end{cases}$$

D'altra parte, dalla terza delle (2) per $|\theta'| \geq H \geq 1$ segue a maggior ragione

$$(6) \quad |F_{\theta'}(x+\varphi_0, y, x'+\varphi_1, y', \widetilde{\theta'})| \leq N_1 |F(x, y, x', y', \theta')| + N_2 |\theta'| + N_3 .$$

Pertanto, in virtù delle (2) e siccome $C_0^{(2)}$ è una curva ordinaria $C^{(2)}$, ciascuna delle funzioni

$$F_x(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)); \quad F_{x'}(\ldots) - 2\,x'(s)\,\theta'(s)\,F_{\theta'}(\ldots); \quad y'(s)\,F_{\theta'}(\ldots)$$

risulta integrabile sull'intervallo (s_1', s_2').

Chiamato E il pseudointervallo costituito da quei valori s di (s_1', s_2'), per i quali esiste finita la curvatura $\theta'(s)$ e inoltre l'integrale

$$\int_{s_1'}^{s} y'(t)\,F_{\theta'}(x(t), y(t), x'(t), y'(t), \theta'(t))\,dt$$

ammette come derivata la funzione integranda e ricordato che è $m(E) = s'_2 - s'_1$, consideriamo tre valori qualunque p_0, p_1, p_2 di E con $p_0 < p_1 < p_2$ e un $\delta > 0$ con $2\delta < p_1 - p_0$, $2\delta < p_2 - p_1$. Presi tre numeri reali qualunque A_0, A_1, A_2, con

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| > 0, \qquad |A_0| \leq 1, \; |A_1| \leq 1, \; |A_2| \leq 1$$

e tali che

$$(7) \quad A_0 + A_1 + A_2 = 0, \quad (2p_0 + \delta) A_0 + (2p_1 - \delta) A_1 + (2p_2 - \delta) A_2 = 0,$$

definiamo in $(0, L)$ una funzione $\omega(s)$ con

$$\begin{aligned} \omega(s) &= A_0, & (p_0 \leq s \leq p_0 + \delta), \\ \omega(s) &= A_1, & (p_1 - \delta \leq s \leq p_1), \\ \omega(s) &= A_2, & (p_2 - \delta \leq s \leq p_2), \\ \omega(s) &= 0, & \text{per ogni altro } s. \end{aligned}$$

Posto

$$\Omega(s) = \int_0^s ds \int_0^s \omega(s)\, ds = \int_0^s (s-t)\, \omega(t)\, dt,$$

per $0 \leq s \leq L$ risulta

$$(8) \qquad |\Omega''(s)| \leq 1, \quad |\Omega'(s)| \leq p_2 - p_0, \qquad |\Omega(s)| \leq \frac{(p_2 - p_0)^2}{2},$$

e anche, in virtù delle (7),

$$(9) \qquad \Omega(s) = \Omega'(s) = 0, \quad \text{per } 0 \leq s \leq p_0, \quad p_2 \leq s \leq L.$$

Ciò premesso, consideriamo la curva

$$C_\gamma^{(2)}: \qquad x = x(s) + \gamma\, \Omega(s), \qquad y = y(s), \qquad (0 \leq s \leq L),$$

tenendo presenti le (9) e rilevando che $C_\gamma^{(2)}$ è definita da due funzioni assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine e che esiste un $\gamma_1 > 0$ in modo che, posto

$$D = [(x'(s) + \gamma\, \Omega'(s))^2 + y'^2(s)]^{\frac{3}{2}},$$

per $|\gamma| < \gamma_1$ risulta

(10) $$1 - \frac{\eta}{2} < \frac{1}{D} < 1 + \frac{\eta}{2},$$

$C_\gamma^{(2)}$ appartiene all'intorno $(\varrho')^2$ di $C^{(2)}$ [6] ed è

(11) $$\gamma^2 [\Omega^2(s) + \Omega'^2(s)] < \varrho'^2.$$

È essenziale verificare che si può scegliere un $\gamma_2 > 0$ con $\gamma_2 \leq \gamma_1$ in modo che per ogni $|\gamma| \leq \gamma_2$ esista finito l'integrale

$$\mathcal{J}^{(2)}_{C_\gamma^{(2)}} = \int_0^L F(x(s) + \gamma\,\Omega(s), y(s), x'(s) + \gamma\,\Omega'(s), y'(s), \theta'_\gamma(s))\,ds,$$

ove si è indicata con $\theta'_\gamma(s)$ la curvatura di $C_\gamma^{(2)}$, e pertanto, siccome $y''(s) = x'(s)\,\theta'(s)$, è

(12) $$\theta'_\gamma(s) = \frac{\theta'(s)}{D} + \gamma \frac{x'(s)\,\Omega'(s)}{D}\theta'(s) - \gamma \frac{y'(s)\,\Omega''(s)}{D}, \qquad (p_0 \leq s \leq p_2),$$

mentre

(13) $$\theta'_\gamma(s) = \theta'(s)$$

in ciascuno degli intervalli $(0, p_0)$ e (p_2, L).

Sempre per le (9) e (13) possiamo limitarci a considerare l'intervallo (p_0, p_2), nel quale è

(14) $$F(x(s) + \gamma\,\Omega(s), y(s), x'(s) + \gamma\,\Omega'(s), y'(s), \theta'_\gamma(s)) =$$

$$= F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) +$$

$$+ \gamma\Big[\Omega(s)\,F_x(x(s) + \tau_\gamma\gamma\,\Omega(s), y(s), x'(s) + \tau_\gamma\gamma\,\Omega'(s), y'(s), \theta'(s) + \tau_\gamma(\theta'_\gamma(s) - \theta'(s)) +$$

$$+ \Omega'(s)\,F_{x'}(\ldots) + \frac{\theta'_\gamma(s) - \theta'(s)}{\gamma} F_{\theta'}(\ldots)\Big],$$

con $0 < \tau_\gamma < 1$.

Teniamo presente che il valore $\theta'(s) + \tau_\gamma(\theta'_\gamma(s) - \theta'(s))$ e compreso tra $\theta'(s)$

---

[6] Vedi S. CINQUINI, luogo cit. per primo in [1], n. 5,a) pag. 25.

e $\theta'_\gamma(s)$, scegliamo γ_2 in modo che sia

$$\gamma_2\left(1+\frac{\eta}{2}\right)(p_2-p_0+1)<\frac{\eta}{2},$$

e distinguiamo due casi:

1°) Se è $|\theta'(s)|<H$, dalla (12) usufruendo delle (10) e (8) si ottiene immediatamente per $|\gamma|\leq\gamma_2$, siccome $H\geq 1$,

$$|\theta'_\gamma(s)|<\left(1+\frac{\eta}{2}\right)H+\gamma_2\left(1+\frac{\eta}{2}\right)[(p_2-p_0)H+1]\leq$$

$$\leq\left(1+\frac{\eta}{2}\right)H+\gamma_2\left(1+\frac{\eta}{2}\right)(p_2-p_0+1)H<(1+\eta)H;$$

e quindi, tenuta presente la (11), possiamo affermare che, per ogni s di (p_0, p_2) con $|\theta'(s)|<H$, in virtù delle (5) risulta

$$(15)\quad\begin{cases}|F_x(x(s)+\tau_\gamma\gamma\,\Omega(s),y(s),x'(s)+\tau_\gamma\gamma\,\Omega'(s),y'(s),\theta'(s)+\tau\,(\theta'_\gamma(s)-\theta'(s))|\leq\Delta\\ |F_{x'}(\ldots)|\leq\Delta\\ |F_{\theta'}(\ldots)|\leq\Delta.\end{cases}$$

2°) D'altra parte, se è $|\theta'(s)|\geq H\geq 1$, ancora in virtù delle (8) e (10) per $|\gamma|\leq\gamma_2$ è

$$\left|\gamma\frac{x'(s)\,\Omega'(s)}{D}\theta'(s)-\gamma\frac{y'(s)\,\Omega''(s)}{D}\right|<$$

$$<\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\gamma_2[p_2-p_0+1]\,|\theta'(s)|<\frac{\eta}{2}|\theta'(s)|,$$

e siccome

$$\left(1-\frac{\eta}{2}\right)|\theta'(s)|<\frac{|\theta'(s)|}{D}<\left(1+\frac{\eta}{2}\right)|\theta'(s)|,$$

dalla (12) segue

$$(1-\eta)\,|\theta'(s)|<|\theta'_\gamma(s)|<(1+\eta)\,|\theta'(s)|,$$

e quindi anche

$$(16)\qquad(1-\eta)\,|\theta'(s)|<|\theta'(s)+\tau_\gamma(\theta'_\gamma(s)-\theta'(s))|<(1+\eta)\,|\theta'(s)|.$$

In definitiva, tenendo conto delle (8) e (11) e siccome $C_0^{(2)}$ è una curva ordinaria $C^{(2)}$, in virtù delle (2) e (15) possiamo concludere che ciascuno dei prodotti $\Omega(s)\, F_x(...)$, $\Omega'(s)\, F_{x'}(...)$, che figura al secondo membro della (14), è integrabile in (p_0, p_2).

Per provare che di tale proprietà gode anche l'ulteriore prodotto, cominciamo a rilevare che, siccome dalla (12) segue in modo ovvio

$$\frac{\theta'_\gamma(s) - \theta'(s)}{\gamma} = \theta'(s)\left[\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{D} - 1\right) + \frac{x'(s)\,\Omega'(s)}{D}\right] - \frac{y'(s)\,\Omega''(s)}{D},$$

ove

$$\frac{1}{D} - 1 = \frac{1 - D^2}{D(1 + D)} = \frac{1 - [1 + \gamma(2\,\Omega'(s)\,x'(s) + \gamma\,\Omega'^2(s))]^3}{D(1 + D)},$$

risulta

$$(17)\qquad \frac{\theta'_\gamma(s) - \theta'(s)}{\gamma} = \theta'(s)\left[\frac{-6\,x'(s)\,\Omega'(s) + T(\gamma)}{D(1 + D)} + \frac{x'(s)\,\Omega'(s)}{D}\right] - \frac{y'(s)\,\Omega''(s)}{D},$$

ove $T(\gamma)$ è limitato in (p_0, p_2) e infinitesimo per $\gamma \to 0$. Pertanto, essendo per la (10)

$$0 < \frac{1}{D(1 + D)} < \frac{\left(1 + \frac{\eta}{2}\right)^2}{2 + \frac{\eta}{2}},$$

sempre per le (8) è evidente che esistono due numeri positivi M', M'' tali che

$$(18)\qquad \left|\frac{\theta'_\gamma(s) - \theta'(s)}{\gamma}\right| \leq M'\,|\,\theta'(s)\,| + M'', \qquad (p_0 \leq s \leq p_2);$$

e quindi in virtù dell'ultima (2), della (6) e dell'ultima (15) concludiamo che anche il prodotto $\dfrac{\theta'_\gamma(s) - \theta'(s)}{\gamma}\, F_{\theta'}(...)$ è integrabile in (p_0, p_2).

Riassumendo, è così provato che esiste finito l'integrale $\mathcal{I}^{(2)}_{C^{(2)}_\gamma}$.

Inoltre, tenendo ancora conto delle (9) e (13), dalla (14) segue

$$(19)\qquad \frac{\mathcal{I}^{(2)}_{C^{(2)}_\gamma} - \mathcal{I}^{(2)}_{C^{(2)}_0}}{\gamma} = \int_{p_0}^{p_2} \left[\Omega(s)\, F_x(...) + \Omega'(s)\, F_{x'}(...) + \frac{\theta'_\gamma(s) - \theta'(s)}{\gamma}\, F_{\theta'}(...)\right] ds,$$

ove, tenendo presente la (17) ed essendo $\lim\limits_{\gamma \to 0} D = 1$, è evidente che, per

$\gamma \to 0$, la funzione integranda tende a

$$\Omega(s)\, F_x(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) + \Omega'(s)\, F_{x'}(\ldots) -$$
$$- [2\, x'(s)\, \Omega'(s)\, \theta'(s) + y'(s)\, \Omega''(s)]\, F_{\theta'}(\ldots)$$

in ogni punto di E appartenente a (p_0, p_2), vale a dire in quasi tutto (p_0, p_2).

Infine, tenute presenti le (8) e (18), per le (2), (6) e (15) la funzione integranda che figura nel secondo membro della (19) risulta, in valore assoluto, minore di

$$\left[\frac{(p_2 - p_0)^2}{2} + p_2 - p_0 + M' H + M''\right] (N_1 \,|\, F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) \,| +$$
$$+ N_2 \,|\, \theta'(s) \,| + N_3 + \Delta),$$

e quindi si conclude che è

$$\lim_{\gamma \to 0} \frac{\mathcal{J}^{(2)}_{C^{(2)}_\gamma} - \mathcal{J}^{(2)}_{C^{(2)}_0}}{\gamma} =$$
$$= \int_{p_0}^{p_2} \{\Omega(s)\, F_x(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s)) +$$
$$+ \Omega'(s)\, [F_{x'}(\ldots) - 2\, x'(s)\, \theta'(s)\, F_{\theta'}(\ldots)] - \Omega''(s)\, y'(s)\, F_{\theta'}(\ldots)\}\, d\, s\,.$$

Tutto il resto della dimostrazione procede in modo ben noto [7], tenendo conto delle (7).

OSSERVAZIONE I. In virtù della (1) è evidente che nel teorema del presente n⁰. all'ultima delle (2) e (3) si possono sostituire rispettivamente le disuguaglianze

$$(2^*) \quad |\, \widetilde{\theta'}\, F_{\theta'}(x + \varphi_0, y, x' + \varphi_1, y', \widetilde{\theta'}) \,| \leq N_1 \,|\, F(x, y, x', y', \theta') \,| + N_2 \,|\, \theta' \,| + N_3,$$

$$(3^*) \quad |\, \widetilde{\theta'}\, F_{\theta'}(x, y + \varphi_0, x', y' + \varphi_1, \widetilde{\theta'}) \,| \leq N_1 \,|\, F(x, y, x', y', \theta') \,| + N_2 \,|\, \theta' \,| + N_3\,.$$

OSSERVAZIONE II. È pure evidente che il teorema del presente n⁰. è valido anche quando N_3 è, anzichè una costante, una funzione $N_3(s)$ quasi

---

(7) Vedi luoghi cit. in (3).

continua, integrabile e non negativa in (s_1, s_2) e in luogo delle (2) e (3) [nonchè delle (2*), (3*)] sono soddisfatte in quasi tutto (s_1, s_2), per $\varphi_0^2 + \varphi_1^2 \leq R^2$, $|\theta'(s)| \geq H$,

$$(1-\eta)\,|\theta'(s)| \leq |\widetilde{\theta'}| \leq (1+\eta)\,|\theta'(s)|$$

le disuguaglianze

$$|F_x(x(s)+\varphi_0, y(s), x'(s)+\varphi_1, y'(s), \widetilde{\theta'})| \leq$$
$$\leq N_1\,|F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), \theta'(s))| + N_2\,|\theta'(s)| + N_3(s),$$

ecc. ecc., dedotte dalle (2) e (3) [(2*), (3*)] rispettivamente sostituendo a x, y, x', y', θ' i valori $x(s)$, $y(s)$, $x'(s)$, $y'(s)$, $\theta'(s)$ tratti dalle equazioni dell'arco $\overline{C}_0^{(2)}$, e ove si intende che i punti $(x(s)+\varphi_0, y(s))$, $(x(s), y(s)+\varphi_0)$ appartengono ad A.

3 ESEMPI. Terminiamo, rilevando qualche esempio che illustra l'efficacia del teorema del n. 2.

a) Sia

$$F(x, y, x', y', \theta') = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\theta'^4 \lg(1+\theta'^2).$$

Tenuta presente l'Osservazione I del n. 2, verifichiamo che ha luogo la (2*), perchè la verifica delle altre disuguaglianze è più facile o del tutto analoga.

Essendo $\sqrt{x'^2+y'^2} = 1$, per $|\varphi_1| \leq R < 1$ si ha in modo ovvio

$$\sqrt{(x'+\varphi_1)^2 + y'^2} \leq \sqrt{x'^2+y'^2} + |\varphi_1| < 2\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Pertanto, tenuto presente che

$$F_{\theta'} = \sqrt{x'^2+y'^2}\left[4\,\theta'^3 \lg(1+\theta'^2) + \theta'^4 \frac{2\,\theta'}{1+\theta'^2}\right],$$

e siccome

$$\frac{u^2}{1+u^2} \leq \lg(1+u^2),$$

è

$$|\widetilde{\theta'}\,F_{\theta'}(x+\varphi_0, y, x'+\varphi_1, y', \widetilde{\theta'})| \leq 12\sqrt{x'^2+y'^2}\,\widetilde{\theta'}^4 \lg(1+\widetilde{\theta'}^2),$$

ed essendo, scelto $0 < \eta \leq \dfrac{1}{3}$,

$$\lg(1+(1+\eta)^2\theta'^2) \leq 2\lg(1+\theta'^2),$$

risulta

$$|\tilde{\theta}' F_{\theta'}(x+\varphi_0, y, x'+\varphi_1, y', \tilde{\theta}')| \leq 24\left(\frac{4}{3}\right)^4 \sqrt{x'^2+y'^2}\,\theta'^4 \lg(1+\theta'^2).$$

b) Sia

$$F(x\,, y\,, x', y', \theta') = \sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt[n]{1+\theta'^{2m}}\,,$$

supponendo inizialmente $2\,m < n$.

È

$$|F_{x'}(x+\varphi_0\,, y\,, x'+\varphi_1\,, y', \tilde{\theta}')| \leq \left|\frac{x'+\varphi_1}{\sqrt{(x'+\varphi_1)^2+y'^2}}\right| \sqrt[n]{1+(1+\eta)^{2m}\,\theta'^{2m}} \leq$$

$$\leq (1+\eta)^{\frac{2m}{n}} \sqrt[n]{1+\theta'^{2m}}\,;$$

d'altra parte l'ultima (2) è evidente, perchè $F_{\theta'}$ risulta limitata.

Soggiungiamo che sono pure verificate le (9) di *N.* II, assumendo $\alpha = 1$: tale affermazione è valida anche nel caso $2m = n$.

Infine, se è $2\,m > n$, sono soddisfatte le (8) e (9) di N. II.

c) Sia

$$F(x\,, y\,, x', y', \theta') = \sqrt{x'^2+y'^2}\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} + \theta'^2 \lg(1+\theta'^2)\right].$$

Tenendo presente che le derivate parziali $F_x\,, F_y$ risultano limitate in ogni campo limitato del piano $(x\,, y)$, e che è

$$F_{\theta'} = 2\sqrt{x'^2+y'^2}\,\theta'\left[\lg(1+\theta'^2) + \frac{\theta'^2}{1+\theta'^2}\right],$$

si verifica, come in a), che sono soddisfatte le condizioni del teorema del n. 2.

D'altra parte l'integrale $\mathcal{J}^{(2)}_{C^{(2)}}$ è quasi regolare normale (è $F_{\theta'\theta'} > 0$ per $\theta' \neq 0$, con $F_{\theta'\theta'} = 0$ per $\theta' = 0$); sono verificate: la condizione del 20 a) del nostro lavoro citato per primo in [1] (perchè la funzione $\Phi(u) \equiv \equiv u^2 \lg(1+u^2)$ è non negativa e si annulla soltanto per $u = 0$) e la condizione del n. 23 del lavoro ora citato, perchè per $\sqrt{x^2+y^2} \geq 1$ è

$$F(x\,, y\,, x', y', \theta') \geq \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Infine $|F_{\theta'}|$ tende uniformemente a $+\infty$ sia per $\theta' \to +\infty$, sia per $\theta' \to -\infty$.

Pertanto possiamo concludere (N. II, n. 6, a)) che esiste almeno un'estremale di ordine 2, congiungente due punti qualunque prefissati del piano $(x\,, y)$, in ciascuno dei quali è assegnato l'angolo di direzione.