ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

UGO BARBUTI

Contributi al problema della stabilità per i sistemi differenziali lineari ordinari

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 10, nº 3-4 (1956), p. 185-215
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1956_3_10_3-4_185_0>

CONTRIBUTI AL PROBLEMA DELLA STABILITÀ PER I SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI ORDINARI

di Ugo Barbuti (Pisa)

C'è un orientamento della ricerca nel quale il problema della stabilità ([1]), relativo ai sistemi lineari viene posto nei termini che seguono. È dato il sistema:

$$(\beta) \qquad \dot{y} = L(t)\, y\,, \qquad \left(\dot{y} = \frac{d\,y}{d\,t}\right)$$

ove $L(t) = [l_{ik}(t)]$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ è una matrice definita in $(0, +\infty)$, così come la matrice-colonna (o vettor-colonna) $y(t) = [y_k(t)]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, le cui soluzioni si sanno stabili ([2]) in senso ordinario (o di Liapounov); considerato il sistema:

$$(\alpha) \qquad \dot{x} = (L(t) + \Lambda(t))\, x\,,$$

ove $\Lambda(t) = [\lambda_{ik}(t)]$, definita nel medesimo intervallo, appare una perturbazione del sistema (β), *si chiedono a* $\Lambda(t)$ condizioni atte a conservare la stabilità per il sistema (α). Per meglio precisare i termini e la natura del nostro problema noi converremo di dire che la perturbazione $\Lambda(t)$ è *irrilevante* appunto se i due sistemi (α) e (β) sono insieme stabili.

Se $\Lambda(t)$ è piccola, nel senso che i suoi elementi riescono assolutamente integrabili in $(0, +\infty)$, allora la irrilevanza di $\Lambda(t)$ è assicurata nelle ipotesi del seguente teorema, dovuto ([3]) a D. Caligo (Cfr. [2]).

([1]) Per la materia a cui questo lavoro si riferisce si veda, ad es., l'opera citata in [1].

([2]) È noto che affinchè le soluzioni di (β) siano stabili in $(0, +\infty)$ occorre e basta che esse siano limitate nel medesimo intervallo.

([3]) La dimostrazione di questo teorema può facilmente conseguirsi utilizzando, ad es., la nota formula di Lagrange ed il così detto « lemma di Gronwall generalizzato ». Si veda, ad es. R. Bellmann in [1] a p. 35.

Sia $L(t)$ *integrabile in ogni parte finita di* $(0, +\infty)$, *sia* $Y(t))$ *la matrice fondamentale principale* [4] *del sistema* (β), *e, si supponga che :*

$$\| Y(t)\, Y^{-1}(\vartheta) \| \,{}^{(5)} < c\,, \tag{1}$$

con $0 \leq \vartheta \leq t$, c *costante e* Y^{-1} *la inversa di* Y*; se allora* $A(t)$ *è assolutamente integrabile, in* $(0, +\infty)$, *ogni soluzione del sistema* (α) *è limitata nello stesso intervallo.*

La condizione (1) equivale alla stabiltà uniforme [6] del sistema (β) e la tesi del teorema precedente, può essere meglio precisata, come R. Conti ha osservato in una sua recente memoria [3], affermando che anche il sistema (α) è uniformemente stabile. Nelle condizioni del teorema precedente la perturbazione $A(t)$ conserva per il sistema (α), dunque, più della semplice stabilità: la stabilità uniforme.

Se $A(t)$ è piccola nel senso che $A(t) \to 0$, per $t \to +\infty$, la condizione (1) del teorema precedente non assicura, come è ben noto, la irrilevanza di $A(t)$, neppure [7] nella eventualità che $L(t)$ sia costante.

Nel caso che $L(t)$ sia costante e $A(t) \to 0$, caso che prenderemo in esame nel presente lavoro, la irrilevanza di $A(t)$ è assicurata se questa matrice è a variazione limitata in $(0, +\infty)$ e se le radici delle equazioni algebriche $|L - \varrho I| = 0$, $|L + A(t) - \varrho I| = 0$ soddisfano ad alcune condizioni, che riguardano le loro parti reali e le loro molteplicità; ciò può dedursi da un ben noto teorema di L. Cesari, provato nella memoria [7].

Sempre nel caso suddetto, ferme restando le ipotesi accennate sulle radici caratteristiche delle matrici L e $L + A(t)$, la irrilevanza della perturbazione $A(t)$ è pure assicurata, supponendo $A(t)$ derivabile e $\dot{A}(t)$ a variazione limitata in $(0, +\infty)$, in casi speciali, come, ad es., nella equazione:

$$x'' + (l + \lambda(t))\, x = 0 \qquad (l \text{ costante positiva}) \tag{α^0}$$

da un teorema di L. A. Gusarov [8] od anche da un teorema, che estende quello di questo autore e che è stato da me provato in [9]. Per quest'ulti-

---

(4) $Y(t)$ è un sistema fondamentale di soluzioni di (β) con la condizione $Y(0) = I$, essendo I la matrice identica.

(5) Il simbolo $\| A \|$, norma della matrice $A \equiv [a_{ik}]$, è definito con $\| A \| = \Sigma\, | a_{ik} |$.

(6) È ben noto che la soluzione $\bar{y}(t)$ si dice uniformemente stabile (Liapounov) se ad ogni $\sigma > 0$ è possibile coordinare un δ, in modo che, per tutte le soluzioni $y(t)$, per le quali è, per un certo t^0, $\| \bar{y}(t^0) - y(t^0) \| < \delta$ si ha $\| y(t) - y(t) \| < \sigma$, con $t \geq t^0$. Si può provare che la (1) è condizione necessaria e sufficiente per la stabilità uniforme; si prova pure che, nel caso lineare, la stabilità di una soluzione implica quella di tutte le soluzioni.

(7) Si vedano, ad es. i lavori [4], [5], [6].

mo teorema la irrilevanza di $A(t)$ nella equazione dei moti armonici è ottenuta, supponendo (8) $\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$, con $\lambda_2(t)$ e $\lambda_1'(t)$ a variazione limitata in $(0, +\infty)$.

Questi risultati, nel caso speciale accennato, pongono la questione di ricercare se essi possano estendersi al caso generale, in modo da ottenere criteri di stabilità che contengano anche i teoremi di L. Cesari. In questo lavoro è affrontato questo problema, nel caso già detto di $L(t)$ costante, $A(t)$ infinitesima e supponendo tutte semplici le radici caratteristiche della matrice L. Il risultato centrale quì ottenuto è rappresentato dal teorema del n^0 5, che estende notevolmente la proposizione di Gusarov e che è conseguito con una analisi, in verità, alquanto minuta, battendo la medesima via seguita da L. Cesari. Nel n^0 15 si è studiato il sistema (a), supponendo che $L(t)$ abbia le proprietà del teorema del n^0 5 e la perturbazione $A(t)$ sia a variazione limitata; si è ottenuto così un criterio di irrilevanza rispetto a matrici costanti, che comprende i detti teoremi nelle condizioni dichiarate. Nei n. 17, 18 sono studiati casi di instabilità ed è esposto un esempio, di interesse critico, atto a chiarire la natura ed il valore di talune nuove ipotesi che ricorrono nei nuovi teoremi di stabilità (9).

Alcune definizioni e lemmi preliminari.

1. Consideriamo una funzione reale o complessa $f(t)$ della variabile reale t sull'intervallo $(t^0, +\infty)$. Useremo in avanti, per semplicità di linguaggio, le locuzioni che seguono. Diremo della classe $\mathcal{C}_0$, su $(t_0, +\infty)$, ogni funzione $f(t)$ assolutamente integrabile (eventualmente nel senso di Lebesgue); sarà detta della classe $\mathcal{C}_1$, su $(t^0, +\infty)$, ogni funzione a variazione limitata appunto su $(t^0, +\infty)$. Diremo poi della classe $\mathcal{C}_2$, su $(t^0, +\infty)$, le funzioni assolutamente continue (10), per le quali esiste finito il $\lim f(t)$, per $t \to +\infty$ e la cui derivata $f'(t)$ (che esiste quasi ovunque) ammette la decomposizione:

$$f'(t) = \overline{f}(t) + f^*(t) \qquad (t \geq t^0), \tag{2}$$

ove $\overline{f}(t)$ è assolutamente continua e della classe $\mathcal{C}_1$, mentre $f^*(t) \in \mathcal{C}_0$. (11).

---

(8) Si veda a p. 87 in loc. cit. in [9].

(9) Questi teoremi assicurano la stabilità uniforme.

(10) L'assoluta continuità sarà sempre intesa in ogni parte finita di $(t^0, +\infty)$.

(11) Il simbolo $f^*(t) \in \mathcal{C}_0$ significa che $f^*(t)$ appartiene ad $\mathcal{C}_0$. Appartengono alla classe $\mathcal{C}_2$ le funzioni per le quali si ha: 1^0) sono assolutamente continue ed esiste finito il $\lim f(t)$ per $t \to +\infty$, 2^0) $f'(t)$ è assolutamente continua e della classe $\mathcal{C}_1$ (in tal caso può farsi $f^*(t) = 0$). Più in generale appartengono alla classe $\mathcal{C}_2$ (Cfr. n^0 2) anche quelle funzioni che soddisfano alla condizione 1^0) ed hanno derivata della classe $\mathcal{C}_1$, ma non di necessità assolutamente continua.

2. Consideriamo le funzioni delle classi $\mathcal{C}_1$ ed $\mathcal{C}_2$ per mettere in evidenza alcune loro proprietà di cui dovremo servirci.

E' ben noto che se $f(t) \in \mathcal{C}_1$ allora esiste finito il $\lim f(t)$ per $t \to +\infty$ e inoltre $f'(t) \in \mathcal{C}_0$ (12). Le funzioni $f(t) \in \mathcal{C}_2$ godono delle proprietà espresse dai lemmi che seguono.

LEMMA. I. *Se $f(t) \in \mathcal{C}_2$, su $(t_0, +\infty)$, e $\bar{f}(t)$ è la prima funzione della decomposizione* (2), *si ha :*

$$\lim_{t \to +\infty} \bar{f}(t) = 0 \quad e \quad \bar{f}^2(t), \bar{f}'(t) \in \mathcal{C}_0 \quad su \quad (t^0, +\infty).$$

La funzione $\bar{f}(t)$ tende ad un limite finito per $t \to +\infty$, per essere della classe $\mathcal{C}_1$; tale limite è poi zero perchè, in caso contrario, non potrebbe esistere finito il $\lim f(t)$, come facilmente si vede. Essendo $\bar{f}(t) \in \mathcal{C}_1$ è subito visto che $\bar{f}'(t) \in \mathcal{C}_0$ (si veda la nota (12)). Per mostrare, infine, che $\bar{f}^2(t) \in \mathcal{C}_0$ osserviamo che basterà supporre $\bar{f}(t)$ reale, giacchè, posto $\bar{f}(t) = \bar{u}(t) + i\bar{v}(t)$, si ha $|\bar{f}^2(t)| = \bar{u}^2(t) + \bar{v}^2(t)$. Si noti allora che il prodotto $f(t)\bar{f}(t)$ è assolutamente continuo, e, tenendo conto della decomposizione (2), si ha :

$$\int_{t^0}^{t} \bar{f}^2(\tau)\, d\tau = [f(\tau)\bar{f}(\tau)]_{t^0}^{t} - \int_{t^0}^{t} \bar{f}(\tau) f^*(\tau)\, d\tau - \int_{t^0}^{t} f(\tau)\bar{f}'(\tau)\, d\tau .$$

(12) Si ricordi che se $f(t) = u(t) + iv(t)$ è a variazione limitata su (t^0, t) si ha :

$$\int_{t^0}^{t} |f'(\tau)|\, d\tau \leq \int_{t^0}^{t} |u'(\tau)|\, d\tau + \int_{t^0}^{t} |v'(\tau)|\, d\tau \leq V(u; t^0, t) + V(v; t^0, t)$$

ove le V indicano le variazioni totali delle $u(\tau), v(\tau)$ su (t^0, t), le quali sono limitate per essere $u(t), v(t) \in \mathcal{C}_1$. Si osservi anche che se $f(t)$ è assolutamente continua (tali riescono le $u(t), v(t)$) si ha : *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(t) \in \mathcal{C}_1$ è che $f'(t) \in \mathcal{C}_0$*. In queste condizioni si ha infatti (Cfr., ad es., [10] a p. 152)

$$\int_{t_0}^{t} |u'(\tau)|\, d\tau = V(u; t_0, t), \quad \int_{t^0}^{t} |v'(\tau)|\, d\tau = V(v; t^0, t)$$

e da ciò segue subito l'affermazione fatta.

Poichè $\bar{f}(t) \to 0$, per $t \to +\infty$, mentre $f^*(t), \bar{f}'(t) \in \mathcal{C}_0$, esiste finito il limite del secondo membro della precedente per $t \to +\infty$; onde $\bar{f}^2(t) \in \mathcal{C}_0$ ed il lemma è provato.

COROLLARIO I. — *Se $f(t), g(t) \in \mathcal{C}_2$, su $(t^0, +\infty)$, ed $\bar{f}(t), \bar{g}(t)$ sono le prime funzioni della decomposizione* (2), *si ha $\bar{f}(t)\,\bar{g}(t) \in \mathcal{C}_0$.*

Ciò discende immediatamente dal lemma I, tenendo conto della disuguaglianza:

$$|\bar{f}(t)\,\bar{g}(t)| \leq \frac{1}{2}\{|\bar{f}^2(t)| + |\bar{g}^2(t)|\} .$$

COROLLARIO II. — *Se $f(t), g(t) \in \mathcal{C}_2$ su $(t^0, +\infty)$, allora $f(t)\,\bar{g}(t) \in \mathcal{C}_1$ sul medesimo intervallo.*

Il prodotto $h(t) = f(t)\,\bar{g}(t)$ è assolutamente continuo, inoltre $h'(t) \in \mathcal{C}_0$, come si vede facilmente, tenendo conto della decomposizione (2) per $f'(t)$, del lemma I e del suo corollario I; ciò prova che $h(t) \in \mathcal{C}_1$ (Cfr. la nota (12)).

LEMMA II. — *Se $f(t), g(t) \in$ è $\mathcal{C}_2$, su $(t^0, +\infty)$, ciò accade per la loro somma ed il loro prodotto; se poi $|g(t)| \geq N > 0$, per $t \geq t^0$, allora anche $f(t)/g(t)$ appartiene ad $\mathcal{C}_2$ sul medesimo intervallo.*

La cosa è evidente per la somma. Per il prodotto si noti che, posto $h(t) = f(t)\,g(t)$, riesce $h(t)$ assolutamente continua ed esiste finito il lim $h(t)$ per $t \to +\infty$; inoltre, tenendo conto della decomposizione (2) per $f'(t)$ e $g'(t)$, si ha:

$$h'(t) = \bar{h}(t) + h^*(t) ,$$

ove abbiam posto:

$$\bar{h}(t) = \bar{f}(t)\,g(t) + f(t)\,\bar{g}(t)$$

$$h^*(t) = f^*(t)\,g(t) + f(t)\,g^*(t)$$

È allora evidente che intanto $h^*(t) \in \mathcal{C}_0$ per essere tali $f^*(t), g^*(t)$; mentre $\bar{h}(t)$ è assolutamente continua ed appartiene alla classe $\mathcal{C}_1$ per il corollorio II (lemma I).

Per il quoziente si noti che, posto $h(t) = 1/g(t)$, $h(t)$, riesce, nelle nostre ipotesi, assolutamente continua ed esiste finito il lim $h(t)$. Si ha inoltre, tenendo ancora conto della decomposizione (2) per $g'(t)$:

$$h'(t) = \bar{h}(t) + h^*(t) ,$$

ove abbiam posto:

$$\overline{h}'(t) = -\frac{\overline{g}(t)}{g^2(t)}; \qquad h^*(t) = -\frac{g^*(t)}{g^2(t)}$$

È subito visto che, per essere

$$|h^*(t)| = \left|\frac{g^*(t)}{g^2(t)}\right| \leq \frac{|g^*(t)|}{N^2}, \qquad (t \geq t^0)$$

si ha $h^*(t) \in \mathcal{C}^0$; mentre $\overline{h}(t)$ risulta assolutamente continua e si ha:

$$\overline{h}'(t) = -\frac{\overline{g}'(t)\, g^2(t) - 2\, g(t)\, (\overline{g}(t) + g^*(t))\, \overline{g}(t)}{g^4(t)}$$

Da quest' ultima si ricava subito, per il lemma I e la ipotesi fatta, che $\overline{h}'(t) \in \mathcal{C}_0$; ciò basta ad assicurare, nelle nostre condizioni, che $\overline{h}'(t) \in \mathcal{C}_1$ (Cfr. nota (12)).

3. Una particolare sottoclasse della classe $\mathcal{C}_2$ è rappresentata dalle funzioni $f(t)$, assolutamente continue, per le quali esiste finito il lim $f(t)$ per $t \to +\infty$ e la cui derivata $f'(t)$ è della classe $\mathcal{C}_1$. Ciò si desume subito dal seguente lemma, che ci sarà nolevolmente utile nel seguito.

LEMMA III. — *Se $f(t) \in \mathcal{C}_1$, su $(t^0, +\infty)$, allora esistono una funzione assolutamente continua $f_1(t)$, tale che $f_1(t)$ e $f_1'(t) \in \mathcal{C}_1$, ed una funzione $f_2(t) \in \mathcal{C}_0$ nello stesso tratto, per cui è:*

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \text{ (13)}$$

Consideriamo un $\delta > 0$, la successione di punti $t^0 + r\,\delta$ $(r = 1, 2, \dots, n)$ ed indichiamo con $f_1(t)$ la funzione che è eguale a $f(t)$ (14) nei punti $t_0 + r\,\delta$ e varia linearmente tra due consecutivi di essi. Se scriviamo con G. Ascoli (15) $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, risulta $f_1(t)$ assolutamente continua e della classe $\mathcal{C}_1$, mentre $f_2(t) \in \mathcal{C}_0$.

---

(13) La dimostrazione di questo lemma basta farla nel caso che $f(t)$ sia reale. Essa si fonda su di una osservazione di Guido Ascoli ([11], p. 200) ed è già stata data da me in [9], p. 87; tuttavia la riportiamo quì per comodità di lettura.

(14) Nei punti ove $f(t)$ non è definita le attribuiremo il valore $f(t+0)$.

(15) Cfr. La nota (13).

Si vede poi facilmente che $f_1'(t)$ (che esiste quasi ovunque) appartiene pure ad $\mathfrak{A}_1$. Infatti $f_1(t)$ ha derivata (costante) per ogni t tale che $t^0 + (r-1)\delta < t < t^0 + r\delta$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ e ne manca nei punti $t^0 + r\delta$. Definiamo convenzionalmente $f_1'(t^0 + r\delta) = 0$; in ogni tratto $(t^0 + (r-1)\delta, t^0 + r\delta)$ si ha, per la variazione totale V_r di $f_1'(t)$:

$$V_r = 2\,|f_1'(t_r)| = 2\,|f_1(t^0 + r\delta) - f_1(t^0 + (r-1)\delta)| : \delta \leq$$

$$\leq 2\frac{\overline{V}_r}{\delta},$$

ove abbiam indicato con $\overline{V}_r$ la variazione totale nel medesimo tratto di $f(t)$ e t_r è un qualunque valore tale che $t^0 + (r-1)\delta < t_r < t^0 + r\delta$. Perciò considerato un qualunque tratto (t^0, t), detto n l'intero tale che $t^0 + (n-1)\delta \leq \leq t < t^0 + n\delta$ e $V(t)$ la variazione totale di $f_1'(t)$ in (t^0, t), si ha:

$$V(t) = \sum_1^n{}_r V_r \leq \frac{2}{\delta}\sum_1^n \overline{V}_r \qquad .$$

Al tendere di $t \to +\infty$, tenderà anche $n \to \infty$ e il secondo membro della disuguaglianza ora scritta risulta per ipotesi limitata; ciò che dimostra che anche $V(t)$ è limitata, cioè il nostro lemma.

Altri lemmi.

4. Ci saranno utili anche le seguenti proposizioni.

Lemma IV. — *Se nella equazione*:

$$F(\varrho, t) = \varrho^n + c_1(t)\,\varrho^{n-1} + \ldots + c_n(t) = 0 \tag{3}$$

le funzioni $c_r(t) \in \mathfrak{A}_2$, *su* $(t_0, +\infty)$, $(r = 1, 2, \ldots, n)$, *e, posto* $\gamma_r = \lim c_r(t)$, *per* $t \to +\infty$, *la equazione numerica*:

$$\varrho^n + \gamma_1\,\varrho^{n-1} + \ldots + \gamma_n = 0 \tag{4}$$

ha le sue radici σ_k *tutte semplici* $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *allora esiste un* $t' \geq t^0$ *tale che, su* $(t', +\infty)$, *le radici* $\varrho_k(t)$ *della* (3) *sono tutte semplici e della classe* $\mathfrak{A}_2$.

Si ponga $M = \min.\, |\sigma_j - \sigma_h|$ $(j \neq h;\ j, h = 1, 2, \ldots, n)$; sarà $M > 0$. Si consideri un m tale che $0 < m < M$; si potrà determinare un $t' \geq t^0$ tale da avere, per $t \geq t'$:

$$|\varrho_j(t) - \varrho_h(t)| > m \qquad (j \neq h;\ j, h = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

Si osservi ora che se $t \geq t'$ è certo $F_\varrho(\varrho_k(t), t) \neq 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ perchè, se esistesse un $t'' \geq t'$ ed un intero i $(1 \leq i \leq n)$ per cui fosse $F_\varrho(\varrho_i(t''), t'') = 0$, la radice $\varrho_i(t'')$ della equazione ottenuta da (3), per $t = t''$, non sarebbe semplice contro la (5). Anzi potremo affermare di più e cioè che esiste un $m' > 0$ per il quale è:

$$(6) \qquad |F_\varrho(\varrho_k(t), t)| > m' \qquad (t \geq t'; k = 1, 2, \dots, n)$$

Infatti, poichè $F_\varrho(\varrho_k(t), t)$ tende ad un limite finito per $t \to +\infty$ (16), tale limite è, per ogni k, differente da zero, perchè, se esistesse al solito un intero i per il quale esso fosse nullo, non sarebbe semplice, per motivi di continuità, la radice σ_i della (4). La (6) prova intanto che sono tutte semplici le radici $\varrho_k(t)$ della (3) su $(t', +\infty)$.

Proviamo ora che sul medesimo intervallo $\varrho_k(t) \in \mathcal{C}_2$, per ogni k. Per questo si osservi che, essendo i coefficienti $c_r(t)$ della (3) assolutamente continui, tali riescono le $\varrho_k(t)$, per ogni k, (17) e, inoltre è chiaro che $\lim \varrho_k(t) = \sigma_k$, per ogni k. Le $\varrho_k(t)$ riescono poi derivabili (quasi ovunque) e si ha quasi ovunque:

$$(7) \qquad \varrho'_k(t) = -\frac{F_t(\varrho_k(t), t)}{F_\varrho(\varrho_k(t), t)} \qquad (t \geq t').$$

Tenendo conto che per le $c'_r(t)$ vale la decomposizione (2), posto $c'_r(t) = \bar{c}_r(t) + c^*_r(t)$, la (7) si scrive:

$$(7') \qquad \varrho'_k(t) = \bar{\varrho}_k(t) + \varrho^*_k(t),$$

ove abbiam posto:

$$(7'') \qquad \bar{\varrho}_k(t) = -\frac{\bar{F}(\varrho_k(t), t)}{F_\varrho(\varrho_k(t), t)}, \quad \varrho^*_k(t) = -\frac{F^*(\varrho_k(t), t)}{F_\varrho(\varrho_k(t), t)}$$

e

$$(7''') \qquad \begin{cases} \bar{F}(\varrho, t) = \bar{c}_1(t)\varrho^{n-1} + \bar{c}_2(t)\varrho^{n-2} + \dots + \bar{c}_n(t) \\ F^*(\varrho, t) = c^*_1(t)\varrho^{n-1} + c^*_2(t)\varrho^{n-2} + \dots + c^*_n(t) \end{cases}$$

---

(16) Si ricordi che le radici di una equazione algebrica sono funzioni continue dei coefficienti della medesima.

(17) Si può dimostrare la cosa, ripetendo un ragionamento di L. Cesari in loc. cit. a p. 169.

Poichè le $c_r^*(t)$ $(r=1,2,\dots,n)$ appartengono ad $\mathfrak{A}_0$, su $(t',+\infty)$, tenendo conto delle (6), si ha:

$$|\varrho_k^*(t)| < \frac{|F^*(\varrho_k(t),t)|}{m'} \leq \frac{L}{m'} \sum_{1r}^{n} |c_r^*(t)|, \qquad (t \geq t')$$

essendo L una costante positiva opportuna. Da quest'ultima disuguaglianza segue intanto che $\varrho_k^*(t) \in \mathfrak{A}_0$.

Si osservi poi che le $\bar{\varrho}_k(t)$ sono assolutamente continue e si può provare anche che $\bar{\varrho}_k(t) \in \mathfrak{A}_1$. Per questo basterà mostrare (Cfr. nota (12)) che $\bar{\varrho}_k'(t)$ (che esiste quasi ovunque) appartiene ad $\mathfrak{A}_0$. Dalla prima delle (7''), derivando, si ha, quasi ovunque, per $t \geq t'$:

$$\bar{\varrho}_k'(t) = -\frac{[\bar{F}_\varrho \varrho_k' + \bar{F}_t] F_\varrho - \bar{F}[F_{\varrho\varrho} \varrho_k' + F_{\varrho t}]}{F_\varrho^2}$$

essendo le $F_\varrho, \bar{F}$, etc. calcolate per $\varrho = \varrho_k(t)$. Tenendo conto delle (7), si ottiene:

$$\bar{\varrho}_k'(t) = \frac{F_t \bar{F}_\varrho}{F_\varrho^2} - \frac{\bar{F}_t}{F_\varrho} - \frac{\bar{F} F_{\varrho\varrho} F_t}{F_\varrho^3} + \frac{\bar{F} F_{\varrho t}}{F_\varrho^2}$$

ove, al solito, le $F_\varrho, \bar{F}$, etc. sono calcolate per $\varrho = \varrho_k(t)$. Poichè è $F_t = \bar{F} + F^*$, si ha ancora:

$$\bar{\varrho}_k'(t) = \frac{\bar{F}\bar{F}_\varrho + F^* \bar{F}_\varrho}{F_\varrho^2} - \frac{\bar{F}_t}{F_\varrho} - \frac{\bar{F}^2 F_{\varrho\varrho} + \bar{F} F_{\varrho\varrho} F^*}{F_\varrho^3} + \frac{\bar{F} F_{\varrho t}}{F_\varrho^2};$$

da cui, sempre per $t \geq t'$, tenendo conto delle (6), si ottiene:

$$|\bar{\varrho}_k'(t)| \leq \frac{1}{m'} |\bar{F}_t| + \frac{1}{m'^2} [|\bar{F}\bar{F}_\varrho| + |F^* \bar{F}_\varrho| + |\bar{F} F_{\varrho t}|] +$$
$$+ \frac{1}{m'^3} [|\bar{F}^2 F_{\varrho\varrho}| + |\bar{F} F_{\varrho\varrho} F^*|]$$

Poichè $\varrho_k(t) \to \sigma_k$ per $t \to +\infty$, riuscirà, per le (7'''), $F^*(\varrho_k(t),t) \in \mathfrak{A}_0$, come pure $\bar{F}_t(\varrho_k(t),t)$ per il lemma I e così ancora $\bar{F}(\varrho_k(t),t)\bar{F}_\varrho(\varrho_k(t),t)$ e $\bar{F}^2(\varrho_k(t),t)$ per il lemma I e il suo corollario I, nonchè il prodotto $\bar{F}(\varrho_k(t),t) \,.\, F_{\varrho t}(\varrho_k(t),t)$, come facilmente si vede, calcolando $F_{\varrho t}$, tenendo conto della già usata decomposizione delle $c_r'(t)$ ed ancora del lemma I, e del suo corollario I; alla medesima classe apparterrà, per la disuguaglianza precedente, $\overline{\varrho}'_k(t)$, per ogni k, vale a dire $\overline{\varrho}_k\ (t) \in \mathcal{A}_1$ e, perciò, la (7′) realizza per $\varrho_k(t)$ la decomposizione (2).

LEMMA V. — *Si abbia ancora la equazione* (3) *del lemma precedente* (*nella quale supponiamo solamente che* $\lim c_r(t) = \gamma_r$ e *verificata, inoltre, la medesima ipotesi sulla* (4)) *e si consideri la seguente :*

$$(3') \qquad \varphi(\varrho, t) = \varrho^n + (c_1(t) + \varepsilon_1(t))\,\varrho^{n-1} + \dots + (c_n(t) + \varepsilon_n(t)) = 0\,,$$

ove le funzioni $\varepsilon_r(t) \in \mathcal{A}_0$, *su* $(t^0, +\infty)$, $(r = 1, 2, \dots, n)$ *e sono infinitesime per* $t \to +\infty$.

In queste condizioni, detta $\underline{\varrho}_k\,(t)$ *la radice della* (3′) *corrispondente alla* $\varrho_k\,(t)$ (*vale a dire quella ben determinata e unica per cui è* $\underline{\varrho}_k(t) - \varrho_k(t) \to 0$, *per* $t \to +\infty$), *e, posto* $r_k(t) = \underline{\varrho}_k(t) - \varrho_k(t)$, *esiste un intervallo* $(t'', +\infty)$ *sul quale* $r_k(t) \in \mathcal{A}_0$ *per ogni* k.

Come abbiamo già notato le radici $\varrho_k(t) \to \sigma_k$ per $t \to +\infty$, lo stesso accade per le $\underline{\varrho}_k(t)$. Supposto ancora M avere il significato del lemma precedente, si consideri nel piano complesso ϱ un cerchio col centro in σ_k e raggio $R < M/2$. Si potrà determinare un $t'' \geq t^0$, tale da avere se $t \geq t''$:

$$|\varrho_k(t) - \sigma_k| < R\,, \qquad |\underline{\varrho}_k(t) - \sigma_k| < R$$
$$(k = 1, 2, \dots, n)\,,$$

per modo che, se ϱ varia sulla circonferenza $\mathcal{C}_k$, col centro in σ_k e raggio $M/2$, sarà $|F(\varrho, t)| > N$ e $|\varphi(\varrho, t)| > N$, sempre se $t \geq t''$, essendo N una costante positiva opportuna. Ciò posto, fissato un valore di t ($\geq t''$), avremo :

$$\varrho_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_k} \frac{F_\varrho(\varrho, t)}{F(\varrho, t)}\,\varrho\, d\varrho\,; \qquad \underline{\varrho}_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_k} \frac{\varphi_\varrho(\varrho, t)}{\varphi(\varrho, t)}\,\varrho\, d\varrho$$

Si ha d'altra parte:

$$\varphi(\varrho, t) = F(\varrho, t) + \lambda(\varrho, t)$$

$$\varphi_\varrho(\varrho, t) = F_\varrho(\varrho, t) + \lambda_\varrho(\varrho, t)\,,$$

ove si è posto:

$$\lambda(\varrho, t) = \varepsilon_1(t)\,\varrho^{n-1} + \dots + \varepsilon_n(t)$$

e riesce:

$$\lambda_\varrho(\varrho, t) = (n-1)\,\varepsilon_1(t)\,\varrho^{n-2} + \dots + \varepsilon_{n-1}(t)$$

Avremo allora

$$(8) \qquad r_k(t) = \underline{\varrho}_k(t) - \varrho_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_k} \frac{\lambda_\varrho(\varrho, t)\, F(\varrho, t) - F_\varrho(\varrho, t)\, \lambda(\varrho, t)}{F(\varrho, t)\, \varphi(\varrho, t)}\, \varrho\, d\varrho$$

e da questa, passando ai moduli:

$$|r_k(t)| < \frac{1}{2\pi N^2} \int_{\mathcal{C}_k} [\, |\lambda_\varrho(\varrho, t)\, F(\varrho, t)| + |F_\varrho(\varrho, t)\, \lambda(\varrho, t)|\,]\, |\varrho|\, |d\varrho|$$

Tenuto conto ora che le $c_r(t)$ hanno limite finito per $t \to +\infty$, del significato delle $\lambda(\varrho, t)$, $\lambda_\varrho(\varrho, t)$, si ricava infine dalla precedente:

$$|r_k(t)| < L \sum_1^n{}_r\, |\varepsilon_r(t)| \qquad (t \geq t''; \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

ove L è una costante opportuna. Da quest'ultima disuguaglianza segue subito, per le ipotesi fatte, la tesi.

OSSERVAZIONE.

È opportuno osservare che: *Se nel lemma precedente si suppone (in più delle ipotesi ammesse) che le funzioni* $c_r(t)$, $\varepsilon_r(t)$ *siano assolutamente continue e* $\varepsilon_r'(t) \in \mathcal{C}_0$ *allora* $r_k(t)$ *riesce, per ogni* k, *quasi ovunque derivabile e si ha (oltre la tesi già conseguita)* $r_k'(t) \in \mathcal{C}_0$, *per ogni* k. [18]

---

[18] Questa osservazione può giustificarsi osservando che nelle nostre ipotesi si può nelle (8) derivare sotto il segno d'integrale; in tal modo, chiamando per semplicità $P(\varrho, t) / Q(\varrho, t)$ la funzione sotto il segno di integrale nelle (8), avremo quasi ovunque:

$$h_r'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_k} \frac{P_t(\varrho, t)\, Q(\varrho, t) - P(\varrho, t)\, Q_t(\varrho, t)}{Q^2(\varrho, t)}\, d\varrho$$

e si riconosce facilmente per le ipotesi fatte sulle $\varepsilon_r(t)$, $\varepsilon_r(t)$ $(r = 1, 2, \dots, n)$ che le funzioni $P_t(\varrho, t)$, $P(\varrho, t)$ appartengono alla classe $\mathcal{C}_0$; perciò, ripetendo il ragionemento fatto, si ha $r_k'(t) \in \mathcal{C}_0$.

Teorema I.

5. Consideriamo la matrice $A(t) = [a_{ik}(t)]$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ nella quale gli elementi $a_{ik}(t)$ sono definiti in $(0, +\infty)$ ed hanno derivata, quasi ovunque, limitata nello stesso intervallo. Supponiamo anche che esista finito il $\lim A(t) = L$, $L = [l_{ik}]$, per $t \to +\infty$, e, che la equazione $|L - \varrho I| = 0$ abbia radici σ_k tutte semplici; diciamo infine $\varrho_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ le radici della equazione $|A(t) - \varrho I| = 0$. In queste condizioni è *possibile costruire* [19] una matrice $S(t)$, su di un intervallo $(t', +\infty)$, il cui determinante si mantiene su di esso in modulo maggiore di una costante positiva ed i cui elementi $s_{ik}(t)$ *si ottengono razionalmente con le funzioni* $a_{ik}(t)$, $\varrho_k(t)$ (e sono limitati sullo stesso intervallo), la quale matrice *trasforma*, per similitudine, la $A(t)$ alla sua *forma canonica*, si ha cioè:

$$S^{-1}(t)\, A(t)\, S(t) = C(t),$$

ove $C(t)$ è diagonale, e, nel nostro caso, si ha precisamente: $C(t) = [c_{ik}(t)]$ con $c_{ik}(t) = \varrho_k(t)$ se $i = k$ e $c_{ik}(t) = 0$ se $i \neq k$, essendo le $\varrho_k(t)$ prese in un ordine qualunque.

Ciò premesso, noi diremo che la matrice $A(t)$ *soddisfa* la condizione H, su $(t', +\infty)$, *se, detti* $d_{kk}(t)$ *gli elementi sulla diagonale principale del prodotto* $S^{-1}(t)\, \dot{S}(t)$, *si ha:*

$$\left|\mathcal{R} \int_{t'}^{t} d_{kk}(\tau)\, d\tau \right| < c_1 \qquad (t \geq t' ;\ c_1 \text{ costante})$$

ove $\mathcal{R}$ *indica la parte reale dell'integrale.*

La condizione H è certo verificata se le $a_{ik}(t)$ sono costanti, e, più in generale, se queste funzioni appartengono alla classe $\mathcal{C}_1$; in tali circostanze, infatti, le funzioni $\varrho_k(t)$ possono pensarsi tutte della stessa classe $\mathcal{C}_1$ su $(t', +\infty)$[20] e tali riescono sul medesimo tratto le $s_{ik}(t)$ per essere, come abbiamo avvertito, espressioni razionali nelle $a_{ik}(t)$, $\varrho_k(t)$; ciò porta che $s'_{ik}(t) \in \mathcal{C}_0$ e quindi anche che $d_{kk}(t) \in \mathcal{C}_0$. Può accadere che la condione H sia verificata anche in altri casi. Esaminiamo il seguente esempio:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f(t) & 0 \end{bmatrix},$$

---

[19] Si veda L. Cesari in loc. cit. ed anche i numeri 10, 11 seguenti.

[20] Cfr. L. Cesari in loc. cit. a p. 167.

ove $f(t)$ è reale, continua con la sua derivata ed è $0 < a^2 \leq f(t)$ per $t \geq 0$ e $f(t) \to l$ per $t \to +\infty$. In questo caso le radici caratteristiche di $A(t)$ sono $if(t)$ e $-if(t)$ e le funzioni $d_{kk}(t)$, essendo espressioni lineari omogenee nelle $s'_{ik}(t)$ (con coefficienti razionali nelle $a_{ik}(t)\,\varrho_k(t)$) e queste derivate, a loro volta, espressioni lineari omogenee nelle $a'_{ik}(t)$, $\varrho'_k(t)$ (sempre con coefficienti razionali nelle medesime), saranno in definitiva somme (con un numero finito di addendi) di espressioni del tipo $q(f(t))f'(t)$, ove q è simbolo di funzione razionale. La espressione $q(f(t))f'(t)$ avrà la sua parte reale del tipo seguente: $p(f(t))f'(t)$ ove $p(u)$ è funzione razionale. Avremo anche:

$$\int_{t'}^{t} p(f(\tau))f'(\tau)\,d\tau = p_1(f(t)) - p_1(f(t')),$$

ove $p_1(u)$ è primitiva della funzione razionale $p(u)$ e conterrà in generale una espressione razionale in u, con denominatore in modulo maggiore di una costante positiva per $u = f(t)$, la funzione arc tang e log, e, quest'ultima con argomento ancora in modulo maggiore di una costante positiva e limitato sempre per $u = f(t)$. Da ciò segue che è verificata per la $A(t)$ la condizione H.

6. Ciò premesso possiamo enunciare il seguente teorema di stabilità ([21]).

TEOREMA I: *Supponiamo che per il sistema*

$$(a') \qquad \dot{x} = A(t)\,x \qquad (t \geq 0\,;\ A(t) = [a_{ik}(t)])$$

siano verificate le seguenti ipotesi:

I) *Le funzioni* $a_{ik}(t) \in \mathcal{C}_2$ *su* $(0, +\infty)$.

II) *Posto ancora* $l_{ik} = \lim a_{ik}(t)$ *per* $t \to +\infty$, $L = [l_{ik}]$, *la equazione* $|L - \varrho I| = 0$ *abbia radici* σ_k *tutte semplici, e, per le radici* $\varrho_k(t)$ *della equazione* $|A(t) - \varrho I| = 0$, *si abbia:*

$$\mathcal{R}\int_{\theta}^{t} \varrho_k(\tau)\,d\tau < c_2 \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

con $0 \leq \theta \leq t$ e c_2 *costante* ([22]).

III) *La matrice* $A(t)$ *soddisfi la condizione* H, su $(0, +\infty)$. ([23]).

In queste condizioni gli integrali di (a') *sono tutti limitati.*

([21]) Questo teorema assicura più precisamente la uniforme stabilità, si veda la nota (29).

([22]) Questa condizione è certo verificata se $\mathcal{R}\,\varrho_k(t) \leq 0$.

([23]) La ipotesi III) non è conseguenza della I) come vedremo nei n. 17, 18.

Dimostrazione del Teorema I.

7. Osserviamo preliminarmente che se $S(t) = [s_{ik}(t)]$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ è una matrice funzione di t in $(0, +\infty)$, assolutamente continua, limitata in questo intervallo e tale che il suo determinante abbia in $(0, +\infty)$ modulo maggiore di una costante positiva, allora, eseguendo per il vettor-colonna $x(t)$ la sostituzione:

$$x(t) = S(t)\, y(t), \tag{9}$$

ove $y(t)$ è un vettor-colonna di componenti $y_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots n)$, il sistema (a') si muta nel seguente:

$$\dot{y} = B(t)\, y, \tag{10}$$

ove $B(t) = S^{-1}(t)\, A(t)\, S(t) - S^{-1}(t)\, \dot{S}(t)$ e la matrice $S^{-1}(t)$ è la inversa della S. Da questa trasformazione deriva subito, essendo $S(t)$ limitata con la sua inversa in $(0, +\infty)$, che la condizione necessaria e sufficiente perchè le soluzioni di (a') siano limitate in $(0, +\infty)$ è che lo siano quelle di (10).

8. Le sostituzioni (9) che ci interessano sono quelle, già utilizzate da L. Cesari ([24]), che danno la forma canonica di $A(t)$ e di cui abbiamo parlato nel n. 5. Per adattarle al nostro caso osserviamo intanto che, poichè le radici σ_k della equazione $|L - \varrho I| = 0$ sono tutte distinte ed i coefficienti del polinomio $|A(t) - \varrho I|$ appartengono (lemma II) alla classe $\mathcal{C}_2$, esisterà un intervallo $(t_1, +\infty)$ $(t_1 \geq 0)$ (lemma IV) nel quale ogni radice $\varrho_k(t)$ della equazione $|A(t) - \varrho I) = 0$ sarà semplice ed apparterrà ad $\mathcal{C}_2$. Noi supporremo, senza con ciò alterare la generalità del nostro ragionamento, che sia $t_1 = 0$. In tale intervallo potremo supporre che sia

$$|\varrho_j(t) - \varrho_h(t)| \geq m \qquad (j \neq h\,; j, h = 1, 2, \dots, n) \tag{11}$$

con $0 < m < M = \min. |\sigma_j - \sigma_h|$.

In queste condizioni esiste (come abbiamo già detto al n. 5) una matrice $S(t)$, su di un intervallo $(t_2, +\infty)$ $(t_2 \geq 0)$, il cui determinante si mantiene in modulo maggiore di una costante positiva ed i cui elementi si ottengono razionalmente dalle funzioni $a_{ik}(t), \varrho_k(t)$ e sono limitati nello stesso intervallo, la quale matrice conduce la $A(t)$ alla forma canonica $C(t)$ (si veda il n. 5). Potremo al solito supporre $t_2 = 0$. È opportuno osservare

---

([24]) in loc. cit.

che, nelle nostre ipotesi, la matrice $S(t)$ avrà elementi che appartengono ad $\mathcal{C}_2$, su $(0, +\infty)$, perchè costruiti razionalmente (lemma II) con le funzioni $a_{ik}(t), \varrho_k(t) \in \mathcal{C}_2$. Se dunque noi trasformiamo il sistema (α') mediante la (9), ove $S(t)$ è la matrice ora menzionata, avremo che la $B(t)$ del sistema (10) prenderà la forma:

$$B(t) = C(t) - S^{-1}(t)\,\dot{S}(t),$$

Se teniamo ora conto che $S(t) \in \mathcal{C}_2$, varrà per la matrice $\dot{S}(t)$ una decomposizione del tipo (2) e cioè:

$$\dot{S}(t) = \overline{S}(t) + S^*(t)$$

ove $\overline{S}(t) = [\overline{s}_{ik}(t)]$ è assolutamente continua ed appartenente ad $\mathcal{C}_1$, mentre $S^*(t) = [s_{ik}^*(t)] \in \mathcal{C}_0$. La $B(t)$ si potrà allora scrivere nella forma seguente:

$$B(t) = C(t) - S^{-1}(t)\,\overline{S}(t) + F(t)$$

con $F(t) \in \mathcal{C}_0$. Se poi diciamo $\overline{D}(t) = [\overline{d}_{ik}(t)]$ la matrice che ha tutti gli elementi nulli tranne quelli della diagonale principale, che sono eguali a quelli di egual posto della matrice $S^{-1}(t)\,\overline{S}(t)$, avremo:

$$B(t) = C(t) - S^{-1}(t)\,\overline{S}(t) + \overline{D}(t) - \overline{D}(t) + F(t)$$

e posto:

$$E(t) = C(t) - S^{-1}(t)\,\overline{S}(t) + \overline{D}(t) \tag{12}$$

la $E(t)$ riuscirà assolutamente continua ed il sistema (10) assumerà la forma:

$$\dot{y} = (E(t) - \overline{D}(t) + F(t))\,y \tag{10'}$$ [25]

9. Vogliamo ora indicare alcune proprietà delle matrici $E(t), \overline{D}(t)$ che figurano nella (10′) sulle quali sostanzialmente si fonda l'analisi successiva.

a) *Le funzioni* $e_{ik}(t), i \neq k$, *di* $E(t)$ *sono infinitesime per* $t \to +\infty$ *e inoltre i prodotti del tipo* $e_{ik}(t)\,e_{jh}(t) \in \mathcal{C}_0$ *se valgono entrambe le condizioni* $i \neq k, j \neq h$.

Infatti per (12) le $e_{ik}(t), i \neq k$, sono espressioni lineari omogenee nelle $\overline{s}_{ik}(t)$ i cui coefficienti, essendo razionali nelle $s_{ik}(t)$ e limitati in $(0, +\infty)$,

---

[25] Con la (10′) abbiamo dato alla matrice $C(t) - S^{-1}(t)\,\overline{S}(t)$ la forma $E(t) - \overline{D}(t)$, che meglio si presta a seguire su di essa gli effetti di una successiva riduzione a forma canonica.

appartengono alla classe $\mathfrak{A}_2$; onde la proprietà su enunciata deriva dal lemma I e dal suo corollario I.

b) *Le funzioni* $e_{ik}(t)$ *sono quasi ovunque derivabili e si ha* $e'_{ik}(t) \in \mathfrak{A}_0$ *se* $i \neq k$.

Segue facilmente dalla suddetta espressione delle $e_{ik}(t), i \neq k$, sempre per il lemma I ed il suo corollario I.

c) *Ogni prodotto* $\varrho'_h(t)\, e_{ik}(t)\, (i, h, k = 1, 2, \dots, n; i \neq k)$ *appartiene ad* $\mathfrak{A}_0$

Segue ancora dalla detta forma delle $e_{ik}(t), i \neq k$, e dall'essere $\dot{\varrho}_k(t) \in \mathfrak{A}_2$ sempre per il corollario I al lemma I.

d) *Gli elementi* $\bar{d}_{kk}(t)$ *della matrice* $\bar{D}(t)$ *sono infinitesimi per* $t \to +\infty$, *tali che* $\bar{d}^2_{kk}(t) \in \mathfrak{A}_0$ *e inoltre esiste una costante* c'_1 *per la quale si ha:*

$$\left| \mathcal{R} \int_0^t \bar{d}_{kk}(\tau)\, d\tau \right| < c'_1 \qquad (t \geq 0; k = 1, 2, \dots, n)$$

Le $\bar{d}_{kk}(t)$ hanno la stessa forma delle $e_{ik}(t)$ e da ciò consegue senz'altro la prima parte della tesi (si veda la proprietà *a*)). La seconda segue facilmente dalla condizione H, che è supposta verificata (ipotesi III)) sul tratto $(0, +\infty)$; si osservi a tal fine (ricordando le posizione fatte al n. 8) che:

$$d_{kk}(t) = \bar{d}_{kk}(t) - f_{kk}(t) \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ove $f_{kk}(t) \in \mathfrak{A}_0$ su $(0, +\infty)$.

10. Viene ora in mente di operare sul sistema (10') una sostituzione con matrice canonizzante la $E(t)$, matrice assolutamente continua, e di studiare il sistema che si ottiene con tale sostituzione.

A questo scopo indichiamo con:

$$F(\varrho, t) = \varrho^n + c_1(t)\, \varrho^{n-1} + \dots + c_n(t) = 0,$$

esplicitamente, la equazione caratteristica della matrice $A(t)$, o, ciò che fa lo stesso, della sua forma canonica $C(t)$; la equazione caratteristica della matrice $E(t)$, vale a dire $|E(t) - \varrho I| = 0$, viene ad avere, tenendo conto della (12), la forma:

$$\varphi(\varrho, t) = \varrho^n + c_1(t)\, \varrho^{n-1} + (c_2(t) + \varepsilon_2(t))\, \varrho^{n-2} + \dots + (c_n(t) + \varepsilon_n(t)) = 0,$$

ove le funzioni $\varepsilon_r(t)\, (r = 1, 2, \dots, n)$, essendo somme di prodotti di funzioni $e_{ik}(t), \varrho_k(t)$, ognuno dei quali contiene almeno due fattori $e_{ik}(t), e_{jh}(t), i \neq k, j \neq k$, tenderanno a zero per $t \to +\infty$, apparterranno ad $\mathfrak{A}_0$ (prop. *a*)) e saranno assolutamente continue. Le radici dell'ultima equazione scritta saranno assolutamente continue ([26]) e in più varrà per esse il lemma V, vale a dire esisterà un $t_3 \geq 0$, tale che, detta $\underline{\varrho}_k(t)$ la radice dell'ultima equazione scritta, corrispondente alla $\varrho_k(t)$ e posto $r_k(t) = \underline{\varrho}_k(t) - \varrho_k(t)$, si avrà $r_k(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, e $r_k(t) \in \mathcal{C}_0$ su $(t_3, +\infty)$; noi supporremo al solito $t_3 = 0$. Si avrà anzi che, poichè dalla detta forma delle $\varepsilon_r(t)$ risulta che le funzioni $\varepsilon_r(t)$ medesime sono quasi ovunque derivabili ed inoltre $\varepsilon'_r(t) \in \mathcal{C}$ (prop. *a*), *b*), *c*), si potrà applicare la osservazione fatta di seguito al lemma V e cioè $r_r(t)$ è quasi ovunque derivabile e si ha $r'_k(t) \in \mathcal{C}_0$.

11. Volendo ora determinare le matrici canonizzanti la $E(t)$ consideriamo la matrice $E(t) - \underline{\varrho}_1(t)\, I$, ove $\underline{\varrho}_1(t)$ è una determinata, ma qualunque, delle radici suddette. Una tale matrice ha nullità 1 per t sufficientemente grande. Si osservi anzi che, detto $\xi_1(t)$ il determinante del minore complementare dell'elemento $e_{11} - \underline{\varrho}_1$ in detta matrice, si ha:

$$\xi_1(t) = (\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_1(t))(\varrho_3(t) - \underline{\varrho}_1(t)) \dots (\varrho_n(t) - \underline{\varrho}_1(t)) + \lambda_1(t),$$

con $\lambda_1(t)$ e $\lambda'_1(t)$ appartenenti ad $\mathcal{C}_0$ e $\lambda_1(t)$ infinitesima per $t \to +\infty$. $\lambda_1(t)$ è infatti una somma di prodotti, in ognuno dei quali figurano almeno due fattori $e_{ik}(t)\, e_{jh}(t)$, $i \neq k$, $j \neq h$, oltre gli altri fattori $\varrho_k(t) - \underline{\varrho}_1(t)$, e perciò l'essere $\lambda_1(t)$ infinitesimo e $\lambda_1(t), \lambda'_1(t) \in \mathcal{C}_0$ segue dalle proprietà dette in *a*) *b*). Si ha anche che, tenendo conto che $\underline{\varrho}_1(t) = \varrho_1(t) + r_1(t)$ e che $r_1(t)$ è infinitesimo e $r_1(t), r'_1(t) \in \mathcal{C}_0$:

$$\xi_1(t) = (\varrho_2(t) - \varrho_1(t)) \dots (\varrho_n(t) - \varrho_1(t)) + \lambda(t) \tag{13}$$

ove $\lambda(t)$ è infinitesimo e $\lambda(t)$ e $\lambda'(t) \in \mathcal{C}_0$. Esisterà allora per le (11) un $t_4 \geq 0$, per il quale sarà $|\xi_1(t)| > m'$, se $t \geq t_4$, con $0 < m' < m^{n-1}$; noi supporremo al solito che sia $t_4 = 0$. Se denotiamo con $M_{1k}(\varrho_1(t))$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ i determinanti minori degli elementi della prima riga in $E(t) - \underline{\varrho}_1(t)$ e poniamo $\xi_k(t) = (-1)^{k+1} M_{ik}(\underline{\varrho}_1(t))$, si avrà soddisfatto il sistema:

$$(E(t) - \underline{\varrho}_1(t)\, I)\, \xi(t) = 0 \tag{14}$$

ove $\xi(t)$ è la matrice-colonna di componenti $\xi_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ che sono assolutamente continue. Si osservi che $\xi_2(t), \xi_3(t), \dots, \xi_n(t)$ hanno la forma:

$$\xi_k(t) = (-1)^{k+1} (\varrho_2(t) - \underline{\varrho}_1(t)) \dots (\varrho_{k-1}(t) - \underline{\varrho}_1(t))(\varrho_{k+1}(t) - \underline{\varrho}_1(t)) \dots$$
$$\dots (\varrho_n(t) - \underline{\varrho}_1(t))\, e_{k1}(t) + \mu^*_k(t) \qquad (k = 2, \dots, n)$$

([26]) Cfr. la nota (17).

ove $\mu_k^*(t)$ è al solito una somma di prodotti, ognuno dei quali contiene almeno due fattori $e_{ik}(t), e_{jh}(t), i \neq k, j \neq h$, e, per le proprietà dette in *a*), *b*) riesce $\mu_k^*(t), \mu_k^{*\prime}(t) \in \mathcal{C}_0$. Tenendo ancora conto che $\underline{\varrho}_1(t) = \varrho_1(t) + r_1(t)$, si ha:

$$\text{(15)} \quad \begin{aligned} \xi_k(t) = (-1)^{k+1} (\varrho_2(t) - \varrho_1(t)) \dots (\varrho_{k-1}(t) - \varrho_1(t))(\varrho_{k+1}(t) - \varrho_1(t)) \dots \\ \dots (\varrho_n(t) - \varrho_1(t)) \, e_{k1}(t) + \mu_k(t) \end{aligned}$$

$$(k = 2, 3, \dots, n)$$

ove ancora $\mu_k(l), \mu_k'(t) \in \mathcal{C}_0$. Dalle (15) si ricava poi subito, ricordando le proprietà *b*) e *c*), che le $\xi_k'(t)$ $(k = 2, 3, \dots, n,)$ appartengono ad $\mathcal{C}_0$. Se indichiamo con ζ la matrice-colonna di componenti $\xi_k(t)$ $(k = 2, 3, \dots, n)$ e consideriamo le due matrici:

$$U(\mathrm{t}) = \left[\begin{array}{c|c} \xi_1 & 0 \\ \hline \zeta & I \end{array}\right]; \qquad U^{-1}(t) = \left[\begin{array}{c|c} 1/\xi_1 & 0 \\ \hline -\dfrac{\zeta}{\xi_1} & I \end{array}\right]$$

ove I indica la matrice identica $((n-1) \times (n-1))$ e 0 una matrice nulla, indi scriviamo la $E(t)$ nella forma:

$$E(t) = \left[\begin{array}{c|c} \varrho_1 & \eta_{-1} \\ \hline \eta^{(1)} & E^{(1)} \end{array}\right]$$

ove $\eta^{(1)}, \eta_{-1}, E^{(1)}$ rappresentano evidenti matrici, e, trasformiamo la $E(t)$, per similitudine con la $U(t)$; otterremo, tenendo conto della (14) [27]

$$\text{(16)} \qquad H(t) = U^{-1}(t) \, E(t) \, U(t) = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\varrho}_1 & \eta_{-1}/\xi_1 \\ \hline 0 & E^{(1)} - \dfrac{\zeta}{\xi_1} \eta_{-1} \end{array}\right]$$

ove la matrice $E^{(1)} - \dfrac{\zeta}{\xi_1} \eta_{-1}$, avrà per radici caratteristiche $\underline{\varrho}_2(t), \underline{\varrho}_3(t) \dots,$ $\dots, \underline{\varrho}_n(t)$.

Posto $H = E^{(1)} - \dfrac{\zeta}{\xi_1} \eta_{-1}$, consideriamo il sistema di equazioni:

$$\text{(17)} \qquad (H_{-1}(t) - \underline{\varrho}_1(t) \, I) \, \tau(t) = \frac{\eta}{\xi_1}$$

---

[27] Si tenga conto che le equazioni (14), per il significato delle $\zeta, \eta^{(1)}, \eta_{-1}, E^{(1)}$ si possono scrivere:

$$\begin{cases} (\varrho_1 - \underline{\varrho}_1) \, \xi_1 + \eta_{-1} \zeta = 0 \\ \eta^{(1)} \xi_1 + (E^{(1)} - \underline{\varrho}_1 I) \, \zeta = 0 \end{cases}$$

ove H_{-1} è la trasposta di H e $\tau(t)$ una matrice-colonna incognita di componenti $\tau_k(t)\,(k=2,3,\dots,n)$. Il determinante di questo sistema vale:

$$(\underline{\varrho}_1(t)-\underline{\varrho}_2(t))\,(\underline{\varrho}_1(t)-\underline{\varrho}_3(t))\dots(\underline{\varrho}_1(t)-\underline{\varrho}_n(t))$$

e poichè le $\underline{\varrho}_k(t)$ tendono a σ_k per $t\to+\infty$, esisterà un $t_5\geq 0$, tale da avere, analogamente alle (11), $|\underline{\varrho}_j(t)-\underline{\varrho}_h(t)|\geq m>0\,,j\neq h$, per $t\geq t_5$ e noi supporremo ancora $t_5=0$. Per $t\geq 0$ il determinante del suddetto sistema sarà, dunque, in modulo maggiore di una costante positiva e tale sistema ammetterà una sola soluzione τ. Ricordando poi la regola di Cramer che dà questa soluzione, potremo osservare che le $\tau_k(t)$ $(k=2,3,\dots,n)$ si esprimono linearmente ed omogeneamente tramite le e_{1i} $(i=2,3,\dots,n)$, che figurano in η, con coefficienti che riescono (se ricordiamo che $\underline{\varrho}_1(t)=$ $=\varrho_1(t)+r_1(t)$) funzioni razionali nelle $e_{ik}(t)$, $\varrho_k(t)$, $r_1(t)$ (direttamente o tramite le $\xi_k(t)$ $(k=1,2,\dots,n)$) e limitati in $(0,+\infty)$. Le funzioni $\tau_k(t)$ riescono perciò assolutamente continue e le loro derivate $\tau_k'(t)$ appartengono alla classe $\mathcal{C}_0$ per le proprietà $b)$, $c)$ e per essere $r'(t)\in\mathcal{C}_0$.

Se consideriamo le matrici:

$$V(t)=\left[\begin{array}{c|c}1&\tau_{-1}\\\hline 0&I\end{array}\right];\qquad V^{-1}(t)=\left[\begin{array}{c|c}1&-\tau_{-1}\\\hline 0&I\end{array}\right]$$

ove τ_{-1} è il trasporto di τ, e, trasformiamo, per similitudine, la $H(t)$ data dalla (16); otterremo, tenendo conto della (17):

$$\text{(18)}\qquad P(t)=V^{-1}(t)\,H(t)\,V(t)=\left[\begin{array}{c|c}1&-\tau_{-1}\\\hline 0&I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\underline{\varrho}_1&\eta_{-1}/\xi_1\\\hline 0&E^{(1)}-\dfrac{\zeta}{\xi_1}\eta_{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}1&\tau_{-1}\\\hline 0&I\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c}\underline{\varrho}_1&0\\\hline 0&E^{(1)}-\dfrac{\zeta}{\xi_1}\eta_{-1}\end{array}\right]$$

ove la matrice $E^{(1)}-\dfrac{\zeta}{\xi_1}\eta_{-1}$ avrà ancora le radici caratteristiche $\underline{\varrho}_2(t)$, $\underline{\varrho}_3(t)$ $\dots$, $\underline{\varrho}_n(t)$.

12. Consideriamo il prodotto:

$$\text{(19)}\qquad W(t)=U(t)\,V(t)=\left[\begin{array}{c|c}\xi_1&0\\\hline\zeta&I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}1&\tau_{-1}\\\hline 0&I\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}\xi_1&\xi_1\tau_{-1}\\\hline\zeta&\zeta\tau_{-1}+I\end{array}\right]$$

il cui determinante vale ξ_1 ($|\xi_1|>m'>0$, se $t\geq 0$; si veda n. 11) ed i cui elementi sono assolutamente continui, ed esaminiamo il sistema che si ottiene, trasformando il sistema (10′) con la sostituzione $y = W(t)\,z$.

Si ottiene con tale trasformazione:

$$\dot z = \{W^{-1}(t)\,E(t)\,W(t) - W^{-1}(t)\,\overline{D}(t)\,W(t) - W^{-1}(t)\,\dot W(t) + \\ + W^{-1}(t)\,F(t)\,W(t)\}\,z\,, \tag{10''}$$

ove W^{-1} è la inversa della W.

La prima equazione del sistema (10″), che vogliamo in primo luogo considerare, si potrà scrivere, tenendo conto che $W^{-1}(t)\,E(t)\,W(t) = P(t)$ (Cfr. le (16) e (18))

$$z_1' = \left\{ [\underline{\varrho}_1(t)\;0\;\dots\;0] - \frac{1}{\xi_1}[W_{11}\;W_{21}\;\dots\;W_{n1}]\,\overline{D}(t)\,W(t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\xi_1}[W_{11}\;W_{21}\;\dots\;W_{n1}]\,\dot W(t) + [\lambda_1^*\;\lambda_2^*\;\dots\;\lambda_n^*]\right\} z$$

ove $W_{11}(t)$, $W_{21}(t)$, ..., $W_{n1}(t)$ sono gli aggiunti degli elementi della prima colonna in $W(t)$ e $\lambda_k^*(t) \in \mathcal{C}_0$; ed è subito visto che le funzioni $W_{i1}(t)$ $(i = 2, 3, \dots, n)$, esprimendosi linearmente ed omogeneamente (si veda la (19)) per le $\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n$, con coefficienti limitati in $(0, +\infty)$ e queste, come è noto, linearmente ed omogeneamente, sempre con coefficienti limitati, mediante le $e_{1i}(t)$ $(i = 2, 3, \dots, n)$, sono in definitiva espressioni lineari omogenee nelle $e_{1i}(t)$ per gli stessi valori di i. Tenendo ora conto che $\overline{D}(t)$ è diagonale, la equazione su scritta prende la forma:

$$z_1' = \left\{ [\underline{\varrho}_1(t)\;0\;\dots\;0] - \frac{1}{\xi_1}[W_{11}\,\overline{d}_{11}\;W_{21}\,\overline{d}_{22}\;\dots\;W_{n1}\,\overline{d}_{nn}]\,W(t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\xi_1}[W_{11}\;W_{21}\;\dots\;W_{n1}]\,\dot W(t) + [\lambda_1^*\;\lambda_2^*\;\dots\;\lambda_n^*]\right\} z$$

Ricordando che $\overline{d}_{kk}^{\,2}(t) \in \mathcal{C}_0$ (Cfr. prop. *d*)), la composizione detta delle $W_{i1}(t)$ $(i = 2, 3, \dots, n)$ e la proprietà *a*), risulta che il prodotto:

$$-\frac{1}{\xi_1}[W_{11}\,\overline{d}_{11}\;W_{21}\,\overline{d}_{22}\;\dots\;W_{n1}\,\overline{d}_{nn}]\,W(t)$$

sarà una matrice riga del tipo:

$$[-W_{11}\,\overline{d}_{11} + \sigma_1^*\;\sigma_2\;\dots\;\sigma_n]$$

ove le $\sigma_1^*, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ appartengono ad $\mathcal{C}_0$. Il prodotto $W_{11}\,\overline{d}_{11}$ si può poi scrivere, tenendo conto della forma dell'aggiunto di ξ_1 in $W(t)$ (Cfr. la (19)) e che il prodotto $\zeta \tau_{-1}$ per la composizione delle matrici ζ, τ appartiene ad $\mathcal{C}_0$, nella seguente forma:

$$- W_{11} \overline{d}_{11} = - \overline{d}_{11} + \text{termini appartenenti ad } \mathcal{C}_0 .$$

Da ciò in definitiva la matrice riga su scritta sarà la:

$$[- \overline{d}_{11} + \sigma_1 \; \sigma_2 \dots \sigma_n] , \tag{20}$$

ove le $\sigma_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ appartengono ad $\mathcal{C}_0$.

Osserviamo ora che la matrice $\dot{W}(t)$ ha tutti i suoi elementi appartenenti ad $\mathcal{C}_0$ (per essere $\dot{\zeta}$ e $\dot{\tau}_{-1} \in \mathcal{C}_0$, per la forma (13) di ξ_1 e per la prop. *c*)), tranne che l'elemento ξ_1', sul quale niente possiamo affermare in proposito; perciò il prodotto:

$$- \frac{1}{\xi_1} [W_{11} \; W_{21} \dots W_{n1}] \, \dot{W}(t)$$

sarà la matrice-riga:

$$\left[- W_{11} \frac{\xi_1'}{\xi_1} + \nu_1^* \; \nu_2 \dots \nu_n \right]$$

ove $\nu_1^*, \nu_2, \dots, \nu_n$ sono della classe $\mathcal{C}_0$. Si ha anche, scrivendo W_{11} nella solita forma:

$$- W_{11} \frac{\xi_1'}{\xi_1} = - \frac{\xi_1'}{\xi_1} + \text{termini appartenenti ad } \mathcal{C}_0 ,$$

la matrice riga ultima scritta prende allora la forma:

$$\left[- \frac{\xi_1'}{\xi_1} + \nu_1 \; \nu_2 \dots \nu_n \right] \tag{21}$$

ove le $\nu_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ sono della classe $\mathcal{C}_0$.

In definitiva la prima equazione del sistema (10″), tenendo presenti le (20 e 21), avrà la forma:

$$z_1' = \left(\varrho_1(t) + r_1(t) - \overline{d}_{11}(t) - \frac{\xi_1'}{\xi_1} \right) z_1 + \sum_1^n \lambda_{ik}(t) \, z_k \tag{22}$$

ove le $\lambda_{ik}(t)$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ appartengono ad $\mathcal{C}_0$.

13. Consideriamo ancora il sistema (10″), del quale abbiamo testè analizzato la struttura della prima equazione, con lo scopo di esaminare le restanti

equazioni. Le funzioni che provengono in (10″) dal prodotto $W^{-1}(t)\,\dot{W}(t)$, per quanto detto su $\dot{W}(t)$, per essere le $\dot{W}_{1k}(t)$ $(k=2,3,\dots,n)$ espressioni lineari omogenee sulle $\xi_k(t)$ $(k=2,3,\dots,n)$ (vedi la 19), tenuto conto della forma (13) di $\xi_1(t)$ e della prop. *c*), appartengono ad $\mathfrak{A}_0$ [28].

Esaminiamo quelle che provengono dal prodotto $W^{-1}(t)\,\overline{D}(t)\,W(t)$. Se diciamo $W^{(1)}(t)$ la matrice ottenuta da $W^{-1}(t)$; togliendo la prima riga, tali funzioni si ottengono col prodotto $W^{(1)}(t)\,\overline{D}(t)\,W(t)$. Si può osservare, tenendo conto della forma (19) di $W(t)$, che si può scrivere: $W^{(1)}(t)=[\chi_1\,|\,I]+$ $+[0\,|\,Q]$, ove χ_1 è una matrice colonna di componenti W_{1k}/ξ_1 $(k=2,3,\dots$ $\dots,n)$, le quali sono espressioni lineari ed omogenee nelle $\xi_k(t)$ $(k=2,\dots$ $\dots,n)$, elementi di ζ, e queste (ved. le (15)) sono somme di espressioni lineari omogenee nelle $e_{k1}(t)$ $(k=2,3,\dots,n)$ con funzioni della classe $\mathfrak{A}_0$, sicchè in definitiva gli elementi di χ_1 sono somme di espressioni lineari omogenee nelle $e_{k1}(t)$ con funzioni di $\mathfrak{A}_0$, I la matrice identica $((n-1)\times$ $\times(n-1))$ e Q una matrice che si trova appartenente ad $\mathfrak{A}_0$, ed ancora $((n-1)\times(n-1))$. Avremo perciò che il prodotto $W^{(1)}(t)\,D(t)$ sarà del tipo:

$$W^{(1)}(t)\,\overline{D}(t)=[\chi_2\,|\,\overline{D}^{(1)}]+T^*$$

ove χ_2 è la matrice-colonna di componenti $\dfrac{W_{1k}}{\xi_1}\,\overline{d}_{11}$ $(k=2,3,\dots,n)$ appartenente ad $\mathfrak{A}_0$ (segue dalle prop. *a*), *d*)), $\overline{D}^{(1)}$ la matrice ottenuta da $\overline{D}$, togliendo la prima riga e la prima colonna e T^* una matrice $((n-1)\times n))$ appartenente ad $\mathfrak{A}_0$. Tenendo ancora conto della forma di $W(t)$ (Cfr. la (19)) e della composizione di ζ, il prodotto $W^{(1)}(t)\,D(t)\,W(t)$, si scriverà poi nella forma:

$$W^{(1)}(t)\,\overline{D}(t)\,W(t)=[\chi\,|\,\overline{D}^{(1)}]+T$$

ove χ e T appartengono ad $\mathfrak{A}_0$.

Avremo dunque che, tolta la prima equazione (che ha la forma (22)), le rimanenti equazioni del sistema (10″) si potranno scrivere, tenendo conto delle (16) e (18):

$$\begin{bmatrix} z_2' \\ z_3' \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n' \end{bmatrix}=\left(E^{(1)}-\frac{\zeta}{\xi_1}\,\eta_{-1}-\overline{D}^{(1)}\right)\begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}+\psi^* z\,,$$

---

[28] Così come evidentemente quelle che provengono dal prodotto $W^{-1}(t)\,F(t)\,W(t)$ per essere $F(t)\,\iota\,\mathfrak{A}_0$.

ove z è la solita matrice-colonna e ψ^* è una matrice $((n-1) \times n))$ che appartiene ad $\mathcal{C}_0$. Osservando, anzi, che la matrice $\frac{\zeta}{\xi_1}\eta_{-1}$ è della classe $\mathcal{C}_0$, il sistema ultimo scritto prenderà la forma:

$$\begin{bmatrix} z_2' \\ z_3' \\ \vdots \\ z_n' \end{bmatrix} = (E^{(1)} - \overline{D}^{(1)}) \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \psi z$$

ove ψ è una matrice $((n-1) \times n)$ e appartenente ad $\mathcal{C}_0$.

Le matrici $E^{(1)}$, $\overline{D}^{(1)}$ sono ottenute da quelle medesime di partenza $E(t)$, $\overline{D}(t)$ togliendo la prima riga e la prima colonna; esse godranno perciò delle medesime proprietà $a)$, $b)$, $c)$, $d)$, e, poichè con queste proprietà e con quelle delle radici $\varrho_k(t)$ abbiamo potuto raggiungere la forma (22) per la prima equazione, la stessa cosa sarà possibile per la seconda equazione, con una trasformazione analoga alla precedente e che lasci ferma la prima. Tale trasformazione consentirà poi, ripristinando le condizioni iniziali, di fare la stessa cosa per le equazioni successive; sicchè, in fine, usando l'antica notazione x per il vettore incognito, il sistema (α') verrà trasformato nel seguente definitivo sistema:

$$\dot{x} = (G(t) + A(t))\, x, \qquad (t \geq 0) \tag{23}$$

ove $G(t) = [g_{ik}(t)]$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ è diagonale ed i suoi elementi sulla diagonale principale sono dello stesso tipo del coefficiente di z_1, messo in evidenza nella (22), e precisamente:

$$g_{kk}(t) = \varrho_k(t) + r_k(t) - \overline{d}_{kk}(t) - \frac{\xi_k'(t)}{\xi_k(t)} \tag{24}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n;\ \xi_n(t) = 1;\ |\xi_k(t)| > m'' > 0;\ r_k(t) \in \mathcal{C}_0),$$

mentre $A(t)$ appartiene ad $\mathcal{C}_0$.

Si ha d'altra parte che il sistema $\dot{y} = G(t)\, y$ ammette un sistema fondamentale principale nella matrice diagonale $Y(t)$ i cui elementi sulla diagonale principale sono:

$$\exp \int_0^t g_{kk}(\tau)\, d\tau \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Ciò porta che il prodotto $Y(t)\,Y^{-1}(\theta)$ è diagonale e gli elementi sulla diagonale principale sono

$$\exp \int_{\theta}^{t} g_{kk}(\tau)\, d\,\tau \qquad (k=1\,,2\,,\dots,n\,;\,0\leq\theta\leq t)$$

Si ha allora dalla (24):

$$\mathcal{R}\int_{\theta}^{t} g_{kk}(\tau)\,d\tau = \mathcal{R}\int_{\theta}^{t}(\varrho_k(\tau)+r_k(\tau))\,d\,\tau - \mathcal{R}\int_{\theta}^{t}\overline{d}_{kk}(\tau)\,d\,\tau - \mathcal{R}\,[\log \xi_k(\tau)]_{\theta}^{t}\,.$$

Per la ipotesi II) e per essere $r_k(t)\in\mathcal{C}_0$ si può trovare un $c_2'>0$ tale che:

$$\mathcal{R}\int_{\theta}^{t}(\varrho_k(\tau)+r_k(\tau))\,d\,\tau < c_2' \qquad (0\leq\theta\leq t)\,;$$

per la prop. *d*) (che fa seguito alla ipotesi III)) avremo anche che

$$-\mathcal{R}\int_{\theta}^{t}\overline{d}_{kk}(\tau)\,d\,\tau = -\mathcal{R}\int_{0}^{t}\overline{d}_{kk}(\tau)\,d\,\tau + \mathcal{R}\int_{0}^{\theta}\overline{d}_{kk}(\tau)\,d\,\tau < 2\,c_1'$$

$$(0\leq\theta\leq t\,;\,k=1\,,2\,,\dots,n)\,.$$

Essendo, infine, $\xi_k(t)$ limitata ed in modulo maggiore di una costante positiva (Cfr. la (24)), potremo determinare una costante c'' in modo che

$$-\mathcal{R}\,[\log \xi_k(\tau)]_{\theta}^{t} < c''\,.$$

Ne viene allora subito, posto $c=c_2'+2\,c_1'+c''$, verificata la (1), onde per il teorema di D. Caligo ne viene la tesi ([29]).

14. Osserviamo che il ragionamento seguito nella dimostrazione del Teoma I resta valido se nel sistema (a') alla matrice $A(t)$ si aggiunge una matrice $F(t)$ della classe $\mathcal{C}_0$. In altre parole vale il seguente

---

([29]) Applicando la proposizione di D. Caligo si ottiene anzi per la osservazione di R. Conti (in [3] a p. 28) la stabilità uniforme per il sistema (α'); Questa tesi è valida anche per i teoremi seguenti.

COROLLARIO. — *Se per il sistema*

$$(a'') \qquad \dot{x} = (A(t) + F(t))\,x \qquad (t \geq 0)$$

sono valide, nei riguardi della matrice $A(t)$, *le ipotesi I), II), III) del teorema I, e, se* $F(t) \in \mathfrak{C}_0$, *su* $(0, +\infty)$, *allora tutti gli integrali di* (a'') *sono limitati nello stesso intervallo.*

Estensioni del teorema I.

15. Notiamo esplicitamente che il Teorema I (ed il suo corollario) contiene nel caso speciale della equazione (a^0) la proposizione di L. A. Gusarov, perché se $\lambda(t)$ ha derivata a variazione limitata allora essa è della classe $\mathfrak{C}_2$ (lemma III) e risulta verificata la condizione H per le osservazioni fatte al n^0 5. Ci proponiamo ora di conseguire un teorema di stabilità il quale contempli i casi segnalati dal Teorema I e quelli previsti dal criterio di L. Cesari, in analogia a quanto già avviene nel caso della equazione del secondo ordine (Cfr. [9]). Proviamo intanto il seguente teorema.

TEOREMA II. — *Supponiamo che nel sistema :*

$$(a''') \qquad \dot{x} = (L + B(t) + C(t))\,x \qquad (t \geq 0)$$

le matrici $L = [l_{ik}]$, $B(t) = [b_{ik}(t)]$, $C(t) = [c_{ik}(t)]$ *soddisfino le seguenti condizioni :*

I) $B(t)$, $C(t)$ *siano infinitesime per* $t \to +\infty$ *e sia* $B(t) \in \mathfrak{C}_2$, $C(t) \in \mathfrak{C}_1$.

II) *La equazione numerica* $| L - \varrho I | = 0$ *abbia radici semplici e la* $L + B(t) + C(t) - \varrho I | = 0$ *abbia radici* $\varrho_k(t)$ *per le quali sia :*

$$\mathcal{R} \int_\theta^t \varrho_k(\tau)\, d\tau < c_2 \qquad (0 \leq \theta \leq t;\ c_2 \text{ costante};\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

III) *Considerata per la matrice* $C(t)$ *la decomposizione prevista dal lemma III;* $C(t) = C_1(t) + C_2(t)$, *sia soddisfatta per la matrice* $L + B(t) + C_1(t)$ *la condizione* H.

In queste condizioni gli integrali di (a''') *sono limitati.*

Scrivendo, a norma del lemma III:

$$C(t) = C_1(t) + C_2(t),$$

$C_1(t)$ riesce assolutamente continua e inoltre $C_1(t)$ e $\dot{C}_1(t)$ appartengono ad $\mathfrak{A}_1$, mentre $C_2(t) \in \mathfrak{A}_0$. Risulta anzi dal medesimo che $C_1(t)$ e $C_2(t)$ sono infinitesimi per $t \to +\infty$ ([30]). L'avere poi $C_1(t)$ le proprietà dette porta che $C_1(t) \in \mathfrak{A}_2$ (Cfr. n. 3). Ne segue che se scriviamo:

$$L + B(t) + C(t) = L + (B(t) + C_1(t)) + C_2(t),$$

la matrice a primo membro, e, cioè quella del sistema (a'''), risulterà avere la composizione di quella del sistema (a'') del corollario al Teorema I, perchè $L + B(t) + C_1(t) \in \mathfrak{A}_2$ e $C_2(t) \in \mathfrak{A}_0$. Se dunque noi mostriamo che dalle ipotesi fatte seguono quelle del corollario al teorema I avremo dimostrato il nostro Teorema II. Si tratta dunque di provare che nei riguardi della matrice $L + B(t) + C_1(t)$ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema I.

La ipotesi I) è evidentemente verificata. Per la II) si osservi che posto:

$$|L + B(t) + C_1(t) - \varrho I| = \varrho^n + c_1(t)\varrho^{n-1} + \dots + c_n(t) = 0$$

e

$$|L + B(t) + C(t) - \varrho I| = \varrho^n + (c_1(t) + \varepsilon_1(t))^{n-1} + \dots + (c_n(t) + \varepsilon_n(t)) = 0,$$

le funzioni $\varepsilon_r(t)$ riescono appartenenti ad $\mathfrak{A}_0$ $(r = 1, 2, \dots, n)$ e infinitesime per $t \to +\infty$; ciò si deduce facilmente dal fatto che $C_2(t) \in \mathfrak{A}_0$ e $C_2(t) \to 0$. Se allora denotiamo con $\underline{\varrho_k}(t)$ la radice della prima equazione su scritta, corrispondente alla $\varrho_k(t)$, posto al solito $\underline{\varrho_k}(t) = \varrho_k + r_k(t)$ $k = 1, 2, \dots, n)$, le funzioni $r_k(t) \in \mathfrak{A}_0$, per il lemma $\underline{\mathrm{V}}$, e, perciò, esisterà, veduta la îpotesi II del nostro teorema una costante $\overline{c_2}$ tale da avere:

$$\mathcal{R}\int_\theta^t \underline{\varrho_k}(\tau)\,d\tau = \mathcal{R}\int_\theta^t (\varrho_k(\tau) + r_k(\tau))\,d\tau < \overline{c_2} \qquad (0 \leq \theta \leq t;\ k = 1, 2, \dots, n)$$

Con ciò la ipotesi II) del teorema I è verificata nei riguardi della matrice $L + B(t) + C_1(t)$. La ipotesi III) è stata, poi, da noi esplicitamente ammessa in III). Il teorema è così provato.

16. È evidente che la tesi del teorema precedente *resta valida* se la matrice del sistema (a''') si suppone della forma:

$$L + B(t) + C(t) + F(t)$$

con L, $B(t)$, $C(t)$ *soddisfaciente alle medesime ipotesi e* $F(t) \in \mathfrak{A}_0$.

([30]) Basta ricordare la costruzione di $C_1(t)$ detta nel lemma III e la ipotesi I).

Osserviamo allora come il teorema di L. Cesari discenda dalla proposizione che può formularsi con la osservazione ora fatta, nelle note condizioni, supponendo $B(t) = 0$ e per le radici $\varrho_k(t)$ della equazione $|L + C(t) - \varrho I| = 0$ si abbia $\mathcal{R}\,\varrho_k(t) \leq 0$. In queste circostanze, infatti, la condizione H è vericata, come abbiamo osservato al n⁰ 5. Va anche notato come in questo nuovo assetto dei teoremi di stabilità giuochi un importante ruolo il lemma III, il quale riconduce la proposizione di L. Cesari al nostro teorema.

Casi di instabilità e osservazioui sui risultati precedenti.

17. Vogliamo osservare come nei teoremi precedenti non si possa del tutto prescindere dalla condizione H. Per questo indicheremo, da prima, alcuni casi di instabilità e esporremo, poi, un esempio nel quale valgono le ipotesi I) e II) del Teorema I, ma non la III), e, per esso, non si ha stabilità.

Si deduce facilmente, sempre dalla proposizione di D. Caligo, il seguente criterio di non stabilità:

Consideriamo i sistemi

$$(\beta) \qquad \dot{y} = L(t)\,y$$

$$(\alpha) \qquad \dot{x} = (L(t) + A(t))\,x \qquad\qquad (t \geq 0)$$

ove $A(t) \in \mathcal{C}_0$. Se il sistema (β) non ha tutti i suoi integrali limitati e se:

$$(25) \qquad \mathcal{R}\int_0^t \mathrm{tr}.(L(\tau) + A(\tau))\,d\tau > N \qquad (t \geq 0),$$

ove tr. indica la traccia della matrice $L(t) + A(t)$ e N è una costante, anche il sistema (α) non ha tutti i suoi integrali limitati.

Sia $X(t)$ un sistema fondamentale principale $(X(0) = I)$ del sistema (α). Proviamo che non tutti gli elementi di $X(t)$ sono limitati in $(0, +\infty)$. Infatti se così fosse, poichè per la nota formula di Jacobi [31] riesce:

$$|X(t)| = |X(0)| \exp \int_0^t \mathrm{tr}.(L(\tau) + A(\tau))\,d\tau,$$

per la ipotesi fatta, il determinante $|X(t)|$ si manterrebbe in modulo maggiore di e^N (si ricordi $|X(0)| = 1$) e sarebbe limitata $X^{-1}(t)$ in $(0, +\infty)$.

---

[31] Cfr., ad es., G. Sansone in [12] a pag. 55.

Sarebbe allora possibile determinare una costante positiva c in modo da avere:

$$\| X(t) X^{-1}(\theta) \| < c \qquad (0 \leq \theta \leq t)$$

Il sistema (β), la cui matrice si ottiene da quella del sistema (α) aggiungendo $-A(t)$, che per ipotesi appartiene ad $\mathcal{C}_0$, avrebbe allora, per il teorema di D. Caligo, soluzioni tutte limitate, ciò che è assurdo.

18. Il criterio di non stabilità ora enunciato porta, ritornando al ragionamento fatto a prova del teorema I, alla conclusione che se il sistema $\dot{y} = G(t) y$ (ove la $G(t)$ figura in (23)) non ha tutte le sue soluzioni limitate in $(0, +\infty)$ e se la $G(t) + A(t)$, che figura sempre in (23), soddisfa alla condizione (25) del criterio precedente, neppure tutte le soluzioni del sistema (23) saranno limitate, quindi neppure quelle del sistema (10'), nè quelle del sistema (α'), essendo i vettori incogniti di questi sistemi legati, a catena, con sostituzioni limitate insieme con le loro inverse.

L'interesse di questa osservazione sta nel fatto che una tale eventualità effettivamente si presenta, come è provato con l'esempio che segue.

Consideriamo il sistema:

$$(26) \qquad \begin{cases} x_1' = i\, x_1 + b(t)\, x_2 \\ x_2' = c(t)\, x_1 - i\, x_2 \end{cases} \qquad (t \geq t_0 > 1)$$

ove

$$(27) \qquad \begin{cases} b(t) = \dfrac{h(t)}{1 + h(t)\, k(t)}; \qquad c(t) = \dfrac{h(t)\, k(t) + 2}{1 + h(t)\, k(t)}\, k(t) \\[2ex] h(t) = \dfrac{\operatorname{sen} \sqrt{t}}{\sqrt[4]{t}}, \qquad k(t) = \dfrac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt[4]{t}} \end{cases}$$

È subito visto, per le (27), che i coefficienti del sistema (26) appartengono alla classe $\mathcal{C}_2$ (Cfr. lemma II) e si ha:

$$b(t) \to 0, \qquad c(t) \to 0 \qquad \text{per } t \to +\infty.$$

Il sistema limite sarà

$$\begin{cases} x_1' = i\, x_1 \\ x_2' = -i\, x_2 \end{cases}$$

La matrice di quest'ultimo sistema ha per radici caratteristiche $i, -i$, mentre la equazione $|A(t) - \varrho I| = 0$, caratteristica della matrice del sistema (26), ha per radici:

$$(28) \qquad \begin{cases} \varrho_1(t) = \quad i\sqrt{1-b(t)\,c(t)} \\ \varrho_2(t) = -\,i\sqrt{1-b(t)\,c(t)}\,, \end{cases}$$

le quali hanno parte reale nulla. Sono così verificate per il sistema (26) le condizioni I), II) del Teorema I. Proveremo che non è verificata però la ipotesi III).

Per ridurre a forma canonica la matrice $A(t)$ del sistema (26) si può utilizzare la matrice canonizzante $S(t)$ seguente:

$$S(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) & \xi_1(t)\,\tau(t) \\ \xi_2(t) & \xi_2(t)\,\tau(t)+1 \end{bmatrix}$$

ove è:

$$(29) \qquad \begin{cases} \xi_1(t) = i + \varrho_1(t)\,; \qquad \xi_2(t) = c(t) \\ \tau(t) = \dfrac{-\,b(t)}{b(t)\,c(t) + (i+\varrho_1(t))^2} \end{cases}$$

ove $\varrho_1(t)$ è la prima delle (28). Se ora calcoliamo gli elementi della diagonale principale del prodotto $S^{-1}(t)\,\dot{S}(t)$, si trova:

$$(30) \qquad \begin{cases} d_{11}(t) = \quad \xi_2\,\tau\,\dfrac{\xi_1'}{\xi_1} - \tau\,\xi_2' + \dfrac{\xi_1'}{\xi_1} \\ d_{22}(t) = -\,\xi_2\,\tau\,\dfrac{\xi_1'}{\xi_1} + \xi_2'\,\tau = \xi_1\,\tau\,D_t\left(\dfrac{\xi_2}{\xi_1}\right), \end{cases}$$

ove abbia tralasciato di scrivere la variabile t da cui le funzioni dipendono e dove D_t è simbolo di derivazione.

Dalle (27) si ha:

$$1 - b(t)\,c(t) = \frac{1}{(1+h(t)\,k(t))^2}$$

da cui, essendo $1 + h(t)\,k(t) > 0$, si ricava:

$$\sqrt{1-b(t)\,c(t)} = \frac{1}{1+h(t)\,k(t)}$$

Dalle (29), tenendo conto della prima delle (28), si ha:

$$\xi_1(t) = i + \varrho_1(t) = i\,(1+\sqrt{1-b(t)\,c(t)}) = i\,\frac{h(t)\,k(t)+2}{1+h(t)\,k(t)}$$

ed anche, con facile calcolo (dalle (29) e (27)):

$$\tau(t) = \frac{1}{2} \frac{h(t)(h(t)k(t)+1)}{h(t)k(t)+2},$$

onde si ha intanto dalle precedenti:

(31) $$\xi_1(t)\,\tau(t) = \frac{i}{2} h(t).$$

Inoltre sempre dalle (29), tenendo conto delle (27):

(32) $$\frac{\xi_2(t)}{\xi_1(t)} = \frac{k(t)}{i}$$

Dalle (31), (32) si ha allora per la seconda delle (30):

(33) $$d_{22}(t) = \xi_1(t)\,\tau(t)\,D_t\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) = \frac{1}{2} h(t)\,k'(t).$$

Dalle (27) si ha d'altra parte:

$$h(t)\,k'(t) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}}{\sqrt[4]{t}}\left(-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\,\sqrt[4]{t}} - \frac{1}{4}\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt[4]{t^5}}\right) =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2\sqrt{t}}{2t} - \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{t}\,\cos\sqrt{t}}{t^{3/2}}$$

e si riconosce perciò facilmente dalle (33) che si ha:

(34) $$\int_{t^0}^{+\infty} d_{22}(t)\,dt = -\infty,$$

onde la ipotesi III) non è verificata. D'altra parte, poichè dalle (30) risulta:

$$d_{11}(t) + d_{22}(t) = \frac{\xi_1'(t)}{\xi_1(t)},$$

ne viene che, partendo dal nostro sistema (26) con le trasformazioni operate nella dimostrazione del Teorema I e tenendo conto delle (24), si ha che, non solamente, vale per il sistema (23) la ipotesi (25), ma anche, tenendo ancora conto della (24) e della (34), che non tutte le soluzioni del sistema $\dot{y} = G(t)\,y$ sone limitate. Possiamo dunque affermare che non sono limitate tutte le soluzioni dell'esempio (26).

Questo esempio mostra anche che il teorema di L. A. Gusarov, così come è stato enunciato dal suo autore (per la equazione (α^0)) non vale, nel caso generale dei coefficienti complessi, già per i sistemi in due incognite.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI CITATE.

[1] - R. BELLMANN: *Stability theory of differential equations*, Mac Graw-Hill Book Co., Inc., (1953).

[2] - D. CALIGO: *Un criterio sufficiente di stabilità etc.*, Atti del II^0 Congr. Un. Mat. Ital , pp. 177-185, (1940).

[3] - R. CONTI: *Sulla stabilità dei sistemi di equazioni etc.* Riv. di Mat. della Un. di Parma, pp. 3-33 (1955).

[4] - G. ASCOLI: *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità*, « Rend. Acc. Lincei » S. VIII, V. X, nota II, pp. 210-213, (1950).

[5] - U. BARBUTI: *Sopra un caso di « risonanza » per la equazione* $x'' + B(t)x = 0$, « Boll. della Un. Mat. Ital. », S. III, pp. 154-159, (1952).

[6] - F. V. ATKINSON: *The asympotic solution of second-order differential equations*, « Ann. di Mat. pura e applic. », S. IV, T. XXXVII, pp. 345-378, (1954).

[7] - L. CESARI: *Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni etc.*, « Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa », S. II, V. IX, pp. 163-186, (1940).

[8] - L. A. GUSAROV: in « Doklady Akad. Nauk S. S. S. R. (N. S.), 69, pp. 217-20, (1949), (in russo).

[9] - U. BARBUTI: *Su alcuui teoremi di stabilità*, « Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa » S. III, V. VIII, pp. 81-91, (1954).

[10] - G. SANSONE: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile reale*, Soc. Ed. Universitaria, Firenze, (1952).

[11] - G. ASCOLI: *Sopra un caso di stabilità etc.*, « Ann. di Mat. pura e appl. », S. IV, T. XVI, pp. 192-206, (1947).

[12] - G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*, V. I, Soc. Ed. Zanichelli, Bologna, (1949).