

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GINO ARRIGHI

## **Sostituzioni lineari e calcolo operatorio**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série*, tome 10,  
n° 3-4 (1956), p. 147-153

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1956\\_3\\_10\\_3-4\\_147\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1956_3_10_3-4_147_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SOSTITUZIONI LINEARI E CALCOLO OPERATORIO

di GINO ARRIGHI (Lucca)

§ 1. — La trattazione dell'argomento che è oggetto di queste pagine si riallaccia ad un nostro precedente lavoro <sup>(1)</sup> al quale rimandiamo il lettore per conoscenza dell'indirizzo e delle formule delle quali ora ci varremo, precisando che ci riferiremo alla Parte II e non alla I dove si tratta della generalizzazione d'una formula di Sylvester <sup>(2)</sup>. Nel § 2 tratteremo delle funzioni  $\varphi(\Theta)$ , con  $\Theta$  sostituzione lineare in uno spazio lineare complesso ad  $n$  dimensioni, corrispondenti alle funzioni analitiche  $\varphi(z)$ ; mostreremo quindi per  $\varphi(\Theta)$ , il godimento di proprietà analoghe a quelle delle funzioni di matrici. Nel § 3, in ordine a ricerche del Giorgi attorno al *calcolo operatorio funzionale* <sup>(3)</sup> e relativamente ad uno spazio funzionale ad  $n$  dimensioni nel quale  $\Delta = \frac{d}{dt}$  è una sostituzione lineare, introdurremo le  $\varphi(\Delta)$  mediante una funzione di una matrice avente forma canonica di Jordan. Nel § 4 tratteremo delle *equazioni differenziali generalizzate* mostrandone una applicazione nello spazio bidimensionale di Steinmetz e nell'ultimo § mostreremo brevemente la estensione agli spazi funzionali ad infinite dimensioni, di taluni procedimenti trattati nei precedenti paragrafi; qui si pone

---

<sup>(1)</sup> ARRIGHI G. *Sulle funzioni polidrome di matrici*, in «Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze Fisiche e Matematiche» Serie III. Vol. VIII. Fasc. III-IV (1954).

<sup>(2)</sup> ARRIGHI G. *Lur la formule de Buchheim*, in «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences» 1956, per Semestre. (T. 242, N. 26).

<sup>(3)</sup> GIORGI G. *Metodi moderni di calcolo operatorio funzionale*, in «Seminario Matematico e Fisico di Milano». Vol. VIII, 1934. ID. *Questioni sul calcolo operatorio funzionale*, in «Conferenze di Fisica e Matematica tenute presso la R. Università e R. Scuola di Ingegneria di Torino» 1936.

implicitamente in evidenza la importanza delle serie

$$\sum_1^{\infty} P_s e^{e_s t}$$

dove  $P_s$  è un polinomio nella variabile  $t$ .

§ 2. — Sia  $S$  uno spazio lineare complesso ad  $n$  dimensioni e si dica base l' $n$ -complesso orizzontale (simbolico)  $b$  formato con  $n$  elementi di  $S$  arbitrariamente scelti, ma linearmente indipendenti e ordinati.

Un qualunque elemento  $u$  di  $S$  sarà individuato dall' $n$ -complesso orizzontale  $x$  formato con la sue coordinate (complesse) rispetto alla base  $b$  scelta, in guisa da aversi

$$u = x b_{-1}.$$

Se  $\Theta$  è una sostituzione lineare per gli elementi di  $S$ , per la quale cioè

$$\begin{aligned} \Theta u &= \Theta (x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n) = x_1 \Theta b_1 + x_2 \Theta b_2 + \dots + x_n \Theta b_n = \\ &= x_1 (a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \dots + a_{1n} b_n) + x_2 (a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \dots + a_{2n} b_n) + \dots \\ &+ x_n (a_{n1} b_1 + a_{n2} b_2 + \dots + a_{nn} b_n), \end{aligned}$$

potremo scrivere

$$(1) \quad \Theta u = \Theta x b_{-1} = x A b_{-1}$$

dove  $A$  è una matrice di ordine  $n$  della quale sarà

$$[(e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}), (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, \dots, e_{k_2}^{(2)}) \dots (e_1^{(s)}, e_2^{(s)}, \dots, e_{k_s}^{(s)}) \dots (e_1^{(m)}, e_2^{(m)}, \dots, e_{k_m}^{(m)})]$$

la caratteristica di Segre e  $C$  la forma canonica di Jordan.

Con  $C = T^{-1} A T$ , dalla (1), segue

$$(2) \quad \Theta u = x T \cdot T^{-1} A T \cdot T^{-1} b_{-1} = y C b_{-1}^*$$

dove  $y = x T$ ,  $b_{-1}^* = T^{-1} b_{-1}$ .

Tralasciando qui l'eventuale studio negli spazi subordinati a  $S$ , supporremo che la sostituzione  $\Theta$  sia non degenera, nel senso di  $|A| \neq 0$ ; con che, detto  $q$  un  $n$ -complesso lineare non nullo, non può aversi  $q b_{-1}^*$  nullo tenendo conto della espressione di  $b^*$ . Pertanto  $b^*$  potrà essere assunto come nuova base  $e$  in  $y$  si leggeranno le nuove coordinate di  $u$ ; con ciò diremo di avere canonizzato rispetto alla sostituzione  $\Theta$ .

Avremo allora

$$(3) \quad \begin{aligned} \Theta b_1^* &= \varrho_1 b_1^* + b_2^* \\ \Theta b_2^* &= \varrho_1 b_2^* + b_3^* \\ &\dots \dots \dots \\ \Theta b_{e_1^*(1)}^* &= \varrho_1 b_{e_1^*(1)}^* \end{aligned}$$

e così di seguito per tutte le  $\sum_1^m k_s$  matrici componenti di  $C$ , essendo  $\varrho_s (s = 1, 2, \dots, m)$  la  $s^a$  radice caratteristica di  $A$ .

Dalla (2) segue

$$\Theta^2 u = \Theta (y C b_{-1}^*) = y C^2 b_{-1}^*$$

e, per  $P(z)$  polinomio in  $z$ ,

$$P(\Theta) u = y P(C) b_{-1}^*.$$

Generalizzando, nelle ipotesi di esistenza di  $\varphi^*(C)$  funzione di  $C$ , diremo  $\varphi(\Theta)$  l'operatore per gli elementi di  $S$  tale che

$$(4) \quad \varphi(\Theta) u = y \varphi^*(C) b_{-1}^*$$

con  $y$ , e quindi  $u$ , arbitrario.

Per le  $\varphi(\Theta)$  valgono le proprietà

a) Se  $\varphi(z) = k$  (costante);  $\varphi(\Theta) = k$ .

Infatti, per essere  $\varphi^*(C) = k I$ , si ha successivamente

$$\varphi(\Theta) u = y k I b_{-1}^* = k y b_{-1}^* = k u$$

e, per l'arbitrarietà di  $u$ , segue l'asserto.

b) Se  $\varphi(z) = z$ ;  $\varphi(\Theta) = \Theta$ .

Infatti, per essere  $\varphi^*(C) = C$ , si ha successivamente

$$\varphi(\Theta) u = y C b_{-1}^* = \Theta u$$

e per l'arbitrarietà di  $u$ , segue l'asserto.

c) Se  $\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$ ;  $\varphi(\Theta) = \varphi_1(\Theta) + \varphi_2(\Theta)$ .

Infatti, per essere  $\varphi^*(C) = \varphi_1^*(C) + \varphi_2^*(C)$ , si ha successivamente

$$\begin{aligned} \varphi(\Theta) u &= y [\varphi_1^*(C) + \varphi_2^*(C)] b_{-1}^* = y \varphi_1^*(C) b_{-1}^* + y \varphi_2^*(C) b_{-1}^* = \\ &= \varphi_1(\Theta) u + \varphi_2(\Theta) u = [\varphi_1(\Theta) + \varphi_2(\Theta)] u \end{aligned}$$

e, per l'arbitrarietà di  $u$ , segue l'asserto.

d) Se  $\varphi(z) = \varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z)$ ;  $\varphi(\theta) = \varphi_1(\theta) \cdot \varphi_2(\theta) = \varphi_2(\theta) \cdot \varphi_1(\theta)$ .

Infatti, per essere  $\varphi^*(C) = \varphi_1^*(C) \cdot \varphi_2^*(C) = \varphi_2^*(C) \cdot \varphi_1^*(C)$  si ha successivamente

$$\varphi(\theta) u = y [\varphi_1^*(C) \cdot \varphi_2^*(C)] b_{-1}^* = [y \varphi_1^*(C)] [\varphi_2^*(C) b_{-1}^*] = \varphi_1(\theta) \cdot \varphi_2(\theta) u$$

e, per l'arbitrarietà di  $u$ , segue l'asserto.

§ 3. — Essendo  $t$  una variabile (scalare) si consideri l'operatore  $\Delta = \frac{d}{dt}$ ; esso è lineare (circa la commutabilità di  $\Delta$  col prodotto per uno scalare  $m$  si intenda che  $m$  non dipende da  $t$ ) e quindi, conformemente alle ricerche del § precedente, passeremo a considerare uno spazio funzionale ad  $n$  dimensioni per i cui elementi  $\Delta$  è una sostituzione lineare.

Supposta compiuta la canonizzazione rispetto a  $\Delta$ , diciamo  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$  le  $n$  funzioni linearmente indipendenti costituenti la base  $b^*$ ; per le (3) sarà

$$\Delta \Psi_1 = \varrho_1 \Psi_1 + \Psi_2$$

$$\Delta \Psi_2 = \varrho_1 \Psi_2 + \Psi_3$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\Delta \Psi_{e(1)} = \varrho_1 \Psi_{e(1)}$$

Venendo ad assumersi

$$\Psi_1 = \frac{t^{e_1^{(1)}-1}}{(e_1^{(1)}-1)!} e^{e_1 t}, \quad \Psi_2 = \frac{t^{e_1^{(1)}-2}}{(e_1^{(1)}-2)!} e^{e_1 t}, \dots, \Psi_{e_1^{(1)}-1} = \frac{t}{1!} e^{e_1 t}, \quad \Psi_{e_1^{(1)}} = e^{e_1 t}$$

e così di seguito corrispondentemente alle altre matrici componenti; quando si consideri che  $k_s$  matrici componenti sono relative alla stessa radice caratteristica  $\varrho_s$ , al fine della lineare indipendenza delle  $n$  funzioni costituenti  $b^*$  dovremo avere che la caratteristica di Segre è del tipo

$$(5) \quad [(\mu_1) (\mu_2) \dots (\mu_3) \dots (\mu_m)]$$

essendo  $\mu_s$  la molteplicità di  $\varrho_s$ . Varrà osservare che lo spazio funzionale vien allora ad essere quello degli integrali di una equazione differenziale lineare omogenea di ordine  $n$  a coefficienti costanti.

Per la (4) si ha

$$\varphi(\Delta) \Phi = y \varphi^*(C) b_{-1}^*$$

dove  $\varphi(\Delta)$  è funzione di  $\Delta$  (e naturalmente non di  $t$ ). Varrà ricordare che la  $C$ , conforme la (5), è composta con  $m$  matrici del tipo

$$(6) \quad \begin{pmatrix} \varrho_s & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \varrho_s & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \varrho_s \end{pmatrix}$$

di ordine  $\mu_s$ , mentre la  $\varphi^*(C)$  è composta con  $m$  matrici del tipo

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \varphi(\varrho_s) & \frac{\varphi'(\varrho_s)}{1!} & \dots & \frac{\varphi^{(\mu_s-1)}(\varrho_s)}{(\mu_s-1)!} \\ 0 & \varphi(\varrho_s) & \dots & \frac{\varphi^{(\mu_s-2)}(\varrho_s)}{(\mu_s-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \varphi(\varrho_s) \end{pmatrix} ;$$

è subito veduto che

$$|\varphi^*(C)| = \prod_1^m [\varphi(\varrho_s)]^{\mu_s}.$$

In questo ordine di idee si consideri che lo spazio funzionale  $S$  è determinato quando siano assegnati  $m (\leq n)$  numeri non nulli  $\varrho_s$  a ciascuno dei quali sia associato un numero intero assoluto  $\mu_s$  in guisa che  $\sum_1^m \mu_s = n$  giacchè allora avremo la base  $b^*$ :

$$\Psi_1 = \frac{t^{\mu_1-1}}{(\mu_1-1)!} e^{e_1 t}, \quad \Psi_2 = \frac{t^{\mu_1-2}}{(\mu_1-2)!} e^{e_2 t}, \dots, \quad \Psi_{\mu_1-1} = \frac{t}{1!} e^{e_1 t}, \quad \Psi_{\mu_1} = e^{e_1 t}$$

è così di seguito per tutti i  $\varrho_s$  tenendosi conto del corrispettivo  $\mu_s$ .

§ 4. — Poniamoci adesso la *equazione differenziale generalizzata*

$$(8) \quad \varphi(\Delta) X(t) = \Phi(t),$$

con

$$(9) \quad \Phi(t) = a b_{-1}^*$$

dove  $a$  è un  $n$ -complesso orizzontale costante (noto), e se ne cerchi la determinazione della funzione incognita  $X(t)$  nello spazio funzionale di cui alla fine del § precedente di base  $b^*$ ; ciò che equivale ad un problema di inversione circa l'operatore  $\varphi(D)$ .

Si metta

$$X(t) = c b_{-1}^*$$

con  $c$   $n$ -complesso orizzontale costante (incognito); per le (8), (9) si ha allora

$$c \varphi^*(C) b_{-1}^* = a b_{-1}^*$$

cui si soddisfa ponendo

$$c \varphi^*(C) = a$$

e, nell'ipotesi di  $|\varphi^*(c)| \neq 0$ , si ha

$$c = a [\varphi^*(C)]^{-1}$$

e quindi

$$(10) \quad X(t) = a [\varphi^*(C)]^{-1} b_{-1}^*$$

che diremo integrale particolare della (8).

Limitando a questo punto la esposizione delle ricerche che attualmente sono oggetto del nostro studio, reputiamo opportuno dedurre un integrale della equazione differenziale generalizzata

$$D^2 X(t) = a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}$$

nello spazio bidimensionale di Steinmetz di cui si fa uso nell'elettrotecnica relativamente alle correnti alternate sinusoidali (esenti da armoniche) di frequenza angolare  $\omega$ .

È qui

$$b^* = (e^{i\omega t} \ e^{-i\omega t}), \quad a = (a_1 \ a_2)$$

e quindi

$$C = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}, \quad \varphi^*(C) = \begin{pmatrix} \sqrt{i\omega} & 0 \\ 0 & \sqrt{-i\omega} \end{pmatrix}, \quad [\varphi^*(C)]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{i\omega}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{-i\omega}} \end{pmatrix}.$$

