ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ROLAND GUY

Hydrodynamique en théorie unitaire pentadimensionnelle

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 10, nº 1-2 (1956), p. 91-117

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1956_3_10_1-2_91_0>

HYDRODYNAMIQUE EN THEORIE UNITAIRE PENTADIMENSIONNELLE

ROLAND GUY (Zürich)

SOMMAIRE : *On généralise l'hydrodynamique relativiste aux théories unitaires pentadimensionnelles en utilisant la théorie des invariants intégraux. On montre qu'en partant des identités de conservation de la théorie unitaire on peut obtenir une équation de continuité et un système d'équations différentielles pour les lignes de courant, système qui peut être retrouvé par un principe variationnel qui fournit un invariant intégral relatif ω duquel on déduit le tenseur de tourbillon $\Omega_{\alpha\beta}$* [§§ 1, 2, 3].

L'existence dans V_5 (variété riemanienne, élément primitif de la théorie envisagée) d'un groupe d'isométrie globale permet de montrer, X étant l'opérateur de derivation de Lie relatif au vecteur $\vec{\xi}$ générateur infinitésimal du groupe, que $Xp = X\vec{v} = Xr = XF = 0$, p étant la pression propre du fluide envisagé, $\vec{v}$ la vitesse unitaire dans V_5, r la pseudo-densité et F l'indice du fluide. On introduit alors le système caractéristique de la forme invariante $d\,\omega$ et l'on montre que la composante I_0 du vecteur $\vec{I}$ dont $\Omega_{\alpha\beta}$ est le rotationnel, est constante le long de chaque ligne de courant, puis que la condition nécessaire et suffisante pour que le système d'équations différentielles des trajectoires d'isométrie admettent $d\,\omega$ comme forme invariante est que I_0 soit constant sur toute la variété caractéristique [§§ 5, 6].

Dans le cas de mouvements irrotationnels, définis comme etant les mouvements pour lesquels le rang du système caractéristique est nul, on obtient un théorème de Lagrange généralisé et dans le cas de mouvements rotationnels (rang égal à deux) la généralisation des théorèmes classiques de Helmoltz [§§ 7, 8].

On regarde ensuite en utilisant le théorème de « descente » (11) comment les résultats obtenus plus haut se traduisent das $\overline{V}_4$, variété d'interprétation d'espace-temps qui joue pour V_5 un rôle un peu analogue à l'espace de Minkowski pour la relativité générale. On voit alors que la partie hydrodynamique par l'influence de F est partout présente dans les termes ayant une signification électrodynamique et qu'on n'obtient pas, comme en relativité générale, une séparation nette des deux parties qui sont ici inextricablement liées, [§§ 9. 10. 11. 12.].

L'étude, enfin, des mouvements permanents permet d'obtenir les mêmes résultats qu'en relativité générale.

INTRODUCTION. — Les théories unitaires pentadimensionnelles se distinguent par l'« outil mathématique de représentation » suivant qu'on emploie; ou le formalisme d'une variété riemannienne comme Kaluza (1), O, Klein (2), Gonseth-Juvet (3) et récemment Y. Thiry (4) par la méthode du trièdre mobile suggérée par M. Lichnerowicz; ou le formalisme dit projectif comme

Veblen (5), Pauli (6) et dernièrement par P. Jordan (7). Les résultats obtenus par ce dernier et par Thiry sont les mêmes.

En 1922 E. Cartan montrait (8) que les principaux théorèmes de l'hydrodynamique classique pouvaient être obtenus en utilisant la théorie des invariants intégraux. Très élégamment, M. Lichnerowicz, dans deux mémoires (9), (10), utilisa cette méthode pour élaborer une hydrodynamique en relativité générale. On trouvera un exposé systématique de ces questions dans son beau livre (11) consacré aux théories relativistes. Nous nous proposons dans ce mémoire de montrer que cette généralisation peut être poursuivie et étendue au formalisme des théories unitaires pentadimensionnelles. Nous le ferons dans le cadre de la méthode du trièdre mobile et nous utiliserons le livre de M. Lichnerowicz auquel nous emprunterons les notations, conventions et résultats.

Dans la variété différentiable V_5 à 5 dimensions, munie de la métrique riemannienne de type hyperbolique normal:

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \,, \tag{a}$$

nous utiliserons le tenseur d'impulsion-énergie:

$$\Theta_{\alpha\beta} = r\, v_\alpha\, v_\beta - p\, \gamma_{\alpha\beta} \tag{b}$$

où p est la pression propre et r la pseudo-densité, $\vec{v}$ le vecteur unité orienté $d\,\sigma^2 < 0$.

$$[\gamma^{\alpha\beta}\, v_\alpha\, v_\beta = -1] \tag{c}$$

Les équations du cas unitaire intérieur s'écrivent:

$$S_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta} \tag{d}$$

le premier membre $S_{\alpha\beta}$ satisfaisant aux identités de conservation, on a nécessairement, D_α étant le symbole de dérivation covariante:

$$D_\alpha\, \Theta_{\alpha\beta} = 0 \tag{e}$$

§ 1. — Les équations de conservation.

On montre comment à partir de (e) on peut obtenir tout d'abord une équation de continuité, puis un système différentiel auquel obéissent les lignes de courant.

a) *Equation de continuité.* — Introduisons le vecteur $\vec{K}$ par

1-1 $$r\, K_\beta = D_\alpha (p\, \gamma^\alpha_\beta)$$

en différentiant, puis en utilisant le théorème de Ricci et le fait que $D_\alpha p = \partial_\alpha p$ et que $\gamma^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$, il vient:

1-2 $$r\, K_\beta = \partial_\beta p$$

D'autre part en différentiant totalement

1-3 $$\gamma_{\alpha\beta}\, v_\alpha\, v_\beta = -1$$

$$D\,(\gamma^{\alpha\beta}\, v_\alpha\, v_\beta) = v_\alpha\, v_\beta\, D\, \gamma^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}\, v_\alpha\, D\, v_\beta + \gamma^{\alpha\beta}\, v_\beta\, D\, v_\alpha = 0$$
$$= v^\beta\, D\, v_\beta + v^\alpha\, D\, v_\alpha = 0$$

ou en composantes

1-4 $$v^\alpha\, D_\gamma\, v_\alpha = 0\,.$$

Multiplions maintenant les deux membres de (a) par $\gamma^{\mu\alpha}$

$$\gamma^{\mu\alpha}\, \Theta_{\mu\beta} = \Theta^{\,\alpha}_{\beta} = r\, v^\alpha\, v_\beta - \gamma^\alpha_\beta\, p$$

et, puisque multiplication contractée et dérivation sont commutables, en utilisant 1-1 ainsi que (e):

1-5 $$D_\alpha\, (r\, v^\alpha\, v_\beta| = r\, K_\beta\,.$$

Effectuons la dérivation du premier membre

1-6 $$v_\beta\, D_\alpha\, (r\, v^\alpha) + r\, v^\alpha\, D_\alpha\, v_\beta = \nu\, K_\beta\,,$$

puis multiplions par v^β:

$$v^\beta\, v_\beta\, D_\alpha\, (r\, v^\alpha) + r\, v^\beta\, v^\alpha\, D_\alpha\, v_\beta = \nu\, K_\beta\, v^\beta = v^\beta\, \partial_\beta\, p\,.$$

Mais $v^\beta\, v_\beta = -1$ et d'après 1-4 $v^\beta\, D_\alpha\, v_\beta = 0$, d'où:

1-7 $$D_\alpha\, (r\, v^\alpha) = -\, v^\alpha\, \partial_\alpha\, p\,.$$

Cette équation joue le rôle d'*équation de continuité.*

b) Système d'équations aux lignes de courant. — Dans 1·7 remplaçons $D_\alpha (r v^\alpha)$ par sa valeur déduite de 1-6

$$- r v_\beta \; v^\alpha K_\alpha + r v^\alpha D_\alpha v_\beta = r K_\beta \cdot$$

d'où

$$v^\alpha D_\alpha v_\beta = v^\alpha v_\beta K_\alpha + K_\beta = \frac{1}{r} (\partial_\beta p + v^\alpha v_\beta \partial_\alpha p)$$

mais $\partial_\beta p = \gamma^\alpha_\beta \partial_\alpha p$, ce qui donne:

1-8 $$v^\alpha D_\alpha v_\beta = (\gamma^{\,\alpha}_{\,\beta} + v^\alpha v_\beta) \frac{\partial_\alpha p}{r} \, .$$

C'est le système d'équations aux *lignes de courant.*
Posons:

$$F = - \exp \int_{p_0}^{p} \frac{d\,p}{\varrho + p}$$

ainsi

$$Lg\, F = - \int_{p_0}^{p} \frac{d\,p}{\varrho + p} \, .$$

Nous supposerons que nous sommes dans le cas adiabatique et qu'il existe une équation d'état liant ϱ densité propre du fluide à p , $\varrho = \varphi(p)$, dans ce cas:

1-10 $$\partial \;\; Lg\, F = \frac{\partial_\alpha F}{F} = - \frac{\partial_\alpha p}{\varrho + p}$$

$\vec{K}$ est donc le gradient de $- \displaystyle\int_{p_0}^{p} \frac{d\,p}{\varphi(p) + p}$

§ 2. — Principe d'extremum.

Nous voulons montrer maintenant que les lignes de courant, c'est à dire les trajectoires du vecteur $\vec{v}$ orientées ($d\,\sigma^2 < 0$) dans l'espace, réalisent l'extremum de

2-1 $$\tau = \int_{x_0}^{x} F\, d\,\sigma$$

Evaluons 2-1 sur un arc de courbe C de V_5 orientée $d\sigma^2 < 0$ joignant les points x_0 et x_1. Représentons pour cela C à l'aide d'un paramètre quelconque u et posons:

2-2 $$\dot{x}^\alpha = \frac{d x^\alpha}{d u}$$

alors

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta\, du^2$$

et

$$\tau = \int_{u_0}^{u_1} F(\gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta)^{1/2}\, du$$

La parenthèse de l'intégrant est une fonction homogène par rapport aux $\dot{x}^u$. Posons:

2-3 $$f^2 = F^2\, \gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta$$

et calculons $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$. En dérivant partiellement f et en se rappelant que F n'est fonction que des x^α et non pas des $\dot{x}^\alpha$ de même que $\gamma_{\alpha\beta}$,

$$2 f \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\alpha} = 2\, F^2\, \gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\beta$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{F^2\, \gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\beta}{F^2\, (\gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta)^{1/2}}$$

de même

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha\, F\, (\gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta)^{1/2} + \frac{F\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta\, \partial_\alpha \gamma_{\alpha\beta}}{(\gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta)^{1/2}}\ .$$

Prenons comme paramètre l'abscisse curviligne imaginaire σ, alors $(\gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta)^{1/2} = 1$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha\, F + \frac{1}{2}\, F\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta\, \partial_\alpha\, \gamma_{\alpha\beta}$$

2-4 $$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\alpha} = F\, \gamma_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\beta$$

Le vecteur $i\ v^\alpha = \frac{d\,x^\alpha}{d\sigma}$ définit localement un champ de vecteurs, ainsi:

2-5 $$\frac{\partial f}{\partial\, x^\alpha} = \partial_\alpha F - \frac{1}{2} F\, v^\alpha\, v^\beta\, \partial_\alpha\, \gamma_{\alpha\beta}$$

2-4 nous donne

2-6 $$\frac{\partial f}{\partial\, \dot{x}^\alpha} = i\, F\, v_\alpha\,.$$

Du fait que $\gamma_{\alpha\varrho} = \gamma_{\varrho\alpha}$ et de la sommation en α et ϱ, on aura par multiplication contractée du symbole de Christoffel par $v^\alpha\, v^\varrho$

$$[\alpha\, \beta\,, \varrho]\, v^\alpha\, v^\varrho = \frac{1}{2}\, v^\alpha\, v^\varrho\, [\partial_\alpha\, \gamma_{\beta\varrho} + \partial_\beta\, \gamma_{\varrho\alpha} - \partial_\varrho\, \gamma_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}\, \partial_\beta\, \gamma_{\varrho\alpha}\, v^\alpha\, v^\varrho\,.$$

Ainsi 2-5 peut s'écrire en remplaçant α par β et β par ϱ:

2-7 $$\frac{\partial f}{\partial\, x^\beta} = -\, F\, [\alpha\, \beta\,, \varrho]\, v^\alpha\, v^\varrho + \partial_\beta\, F\,.$$

Or on sait que la variation d'une intégrale étendue à une courbe variant au sein d'une famille est donnée par

2-8 $$\delta\, \tau = [\omega\, (\delta)]_{x_0}^{x_1} - \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} P_\alpha\, \delta\, x^\alpha\, d\, \sigma$$

où

2-9 $$\omega\, (\delta) = \frac{\partial f}{\partial\, \dot{x}^\alpha}\, \delta\, x^\alpha$$

et

2-10 $$P_\beta = \frac{d}{d\, \sigma}\, \frac{\partial f}{\partial\, \dot{x}^\beta} - \frac{\partial f}{\partial\, x^\beta}$$

En remplaçant dans 2-10 $\frac{\partial f}{\partial\, \dot{x}^\beta}$ et $\frac{\partial f}{\partial\, x^\beta}$ par leur expression tirée de 2-6 et 2-7,

$$P_\beta = \frac{d}{d\sigma}\, i\, F\, v_\beta + F\, [\alpha\, \beta\,, \varrho]\, v^\alpha\, v^\varrho - \partial_\beta\, F$$

et en dérivant totalement le premier terme du deuxième membre

$$P_\beta = i\, v_\beta\, \frac{dF}{d\sigma} + i\, F\, \frac{dv_\beta}{d\sigma} + F\, [\alpha\, \beta\,, \varrho]\, v^\alpha\, v^\varrho - \partial_\beta\, F$$

Comme

$$\frac{dF}{d\sigma} = \partial_\gamma F \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = i\, v^\gamma\, \partial_\gamma F$$

et

$$\frac{dv_\beta}{d\sigma} = \partial_\gamma v_\beta \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = i\, v^\gamma\, \partial_\gamma v_\beta$$

alors

$$P_\beta = -\, v_\beta\, v^\gamma\, \partial_\gamma F - F\, v^\gamma\, \partial_\gamma v_\beta + F\,[\alpha\,\beta\,,\varrho]\, v^\alpha v^\varrho - \partial_\beta F$$

ou encore en se rappelant que $\gamma^\alpha_\beta\, \partial_\alpha F = \partial_\beta F$

$$P_\beta = -\, F\,[v^\alpha\,(\partial_\alpha v_\beta - [\alpha\,\beta\,,\varrho]\, v^\varrho) + \frac{\partial_\beta F}{F}\,(\gamma^\alpha_\beta + v^\alpha\, v_\beta)]$$

en multipliant $[\alpha\,\beta\,,\varrho]$ par $\gamma^{\varrho\lambda}\gamma_{\lambda\varrho}$, on voit facilement que le premier terme de la parenthèse carrée est égal à $v^\alpha D_\alpha v_\beta$, ainsi P_β peut s'écrire:

2-11 $$P_\beta = -\, F\,[v^\alpha\, D_\alpha\, v_\beta + \frac{\partial_\alpha F}{F}\,(\gamma^\alpha_\beta + v^\alpha v_\beta)].$$

Si on applique 2-8 à extrêmités fixes: $\delta\, \vec{x}_1 = \delta\, \vec{x}_0 = 0$, alors

$$\delta\,\tau = -\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} (P_\alpha\, \delta\, x^\alpha)\, d\sigma = 0.$$

Pour que τ soit extremum, il faut et il suffit que le vecteur unitaire de C soit tel que le vecteur d'Euler $\vec{P}$ de composantes P_β soit nul, c'est à dire, en se souvemant que d'après 1-10 $\dfrac{\partial_\alpha F}{F} = -\dfrac{\partial_\alpha p}{p}$, que

2-12 $$v^\alpha\, D_\alpha\, v_\beta = \frac{\partial_\alpha p}{p}\,(\gamma^\alpha_\beta + v^\alpha\, v_\beta)$$

qui est identique à 1-8.

§ 3. — L'invariant intégral relatif.

On sait d'après la théorie des invariants intégraux que $\int \omega$ est un invariant intégral relatif pour le système d'équations différentielles aux extrêmales $P_\alpha = 0$, $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}$, on en déduit alors que le système différentiel aux lignes de courant admet l'intégral relatif

$$\int_C \omega = \int F\, v_\alpha\, \delta\, x^\alpha \tag{3-1}$$

où C est une courbe fermée non tangente aux lignes de courant [1].

Introduisons le vecteur $I_\alpha = F\, v_\alpha$, comme F est un scalaire, on aura $I^\alpha = F\, v^\alpha$

Soit maintenant la métrique de Riemann:

$$\overset{*}{d\sigma}{}^2 = F^2\, d\sigma \tag{3-2}$$

conforme à la métrique $d\sigma^2$. D'aprés la signification même de $\vec{P}$, pour la métrique $\overset{*}{d\sigma}{}^2$, les lignes de courant satisfont aux équations des lignes géodésiques $P_\alpha = 0$ orientées $\overset{*}{d\sigma}{}^2 < 0$. En introduisant le vecteur $\vec{\overset{*}{I}}$ de la variété riemannienne définie par $\overset{*}{d\sigma}{}^2$ qui admet les mêmes composantes covariantes $\overset{*}{I}_\alpha = I_\alpha$, les équations 2-11 prendront la forme:

$$\overset{*}{I}{}^\alpha\, \overset{*}{D}_\alpha\, \overset{*}{I}{}^\beta = 0 \tag{3-3}$$

où

$$\overset{*}{I}{}^\alpha = \overset{*}{\gamma}{}^{\alpha\beta}\, \overset{*}{I}_\beta = F^{-2}\, \gamma^{\alpha\beta}\, I_\beta$$

et où la dérivée covariante $\overset{*}{D}_\alpha$ est calculée au moyen de la connexion

$$\overset{*}{\Gamma}{}^\varrho_{\alpha\beta} = \overset{*}{\gamma}{}^{\varrho\sigma}\, [\alpha\, \beta, \overset{*}{\sigma}] = F^{-2}\, \gamma^{\varrho\sigma}\, \{F^2\, [\alpha\, \beta, \sigma] + F\, (\gamma_{\beta\sigma}\, \partial_\alpha F + \gamma_{\alpha\sigma}\, \partial_\beta F - \gamma_{\alpha\beta}\, \partial_\sigma F)\}$$

§ 4. — La forme invariante $d\,\omega$ et le tenseur de tourbillon.

De l'invariant intégral relatif ω on en déduit de suite un invariant absolu. Comme on sait, il suffit de prendre la différentielle extérieure de ω,

---

[1] Nous prenons $\omega\,(\delta) = F v_\alpha\, \delta x^\alpha$ plutôt que $i\ F v_\alpha\, \delta x^\alpha$ pour avoir un invariant réel. Cela ne présente aucun inconvénient, car cette expression a les mêmes propriétés d'invariance relativement au système differentiel que $i\ F v_\alpha\, \delta x^\alpha$

qui, en coordonnées locales s'écrit:

4-1 $$d\omega = dI_\beta \wedge dx^\beta = \frac{1}{2}(\partial_\alpha I_\beta - \partial_\beta I_\alpha)\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

A la forme $d\omega$ est donc associé un tenseur antisymétrique:

4-2 $$\Omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha I_\beta - \partial_\beta I_\alpha$$

le rotationnel de I_α, auquel on donne le nom de *tenseur de tourbillon.*

§ 5. — Propriétes déduites de l'existence du groupe d'isométrie.

Montrons maintenant que, de l'existence d'un groupe d'isométrie globale et des conditions a) et b) faites sur la variété riemannienne ([2]), X étant l'opérateur de dérivation de Lie relatif au vecteur $\vec{\xi}$ générateur infinitésimal du groupe, on a

5-2 $$Xp = 0\,,\ X\vec{v} = 0\,,\ Xr = 0\,,\ XF = 0\,.$$

Soient les équations du champ du cas intérieur

5-3 $$S_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta}$$

avec $\Theta_{\alpha\beta}$ dont l'expression est donnée par (b) et où $S_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de V_5.

On suppose connues les données de Cauchy sur une certaine surface Σ de V_5 engendrée par des trajectoires dont l'équation est, en coordonnés adaptées: $x^4 = 0$ et qui n'est pas tangente au cône élémentaire de V_5 $(\gamma^{44} \neq 0)$. On connaît donc sur Σ les potentiels $\gamma_{\alpha\beta}\ (u)$, $u = 1, 2, 3$ et leurs dérivées premières $\partial_4\, \gamma_{\alpha\beta}\, (x^u)$.

Supposons pour un moment qu'on connaisse p sur Σ. Par multiplication contractée, on obtient de 5-3

5-4 $$S^4_\lambda = \gamma^{\beta 4}\, S_{\lambda\beta} = r\, v_\lambda\, v^4 - \gamma^4_\lambda\, p$$

Or

$$r\, v_\lambda\, v^4\, v_\mu\, v^4\, \gamma^{\lambda\mu} = (r\, v^4)^2\, v_\lambda\, v_\mu\, \gamma^{\lambda\mu} = -\,(r\, v^4)^2$$

([2]) voir [11] II § 11 p. 181

car $v_\lambda v_\mu \gamma^{\lambda\mu} = -1$, ce qui donne, en utilisant 5-4:

5-5 $$(r\, v^4)^2 = -\gamma^{\lambda\mu} (S^4_\lambda + p\,\gamma^4_\lambda)(S^4_\mu + p\,\gamma^4_\mu).$$

Le premier membre est positif

$$(\Omega^4)^2 (p) = -\gamma^{\lambda\mu} (S^4_\lambda + p\,\gamma^4_\mu)(S^4_\mu + p\,\gamma^4_\mu) > 0$$

ce qui donne

5-6 $$r\, v^4 = \pm\, \Omega^4 (p)$$

D'autre part, à l'aide de 5-4 et de 5-6, on a

5-7 $$v_\lambda = \frac{S^4_\lambda + p\,\gamma^4_\lambda}{r\, v^4} = \frac{S^4_\lambda + p\,\gamma^4_\lambda}{\pm\, \Omega^4 (p)}$$

par multiplication contractée, il vient

5-8 $$v_\lambda\, \gamma^{4\lambda} = v^4 = \frac{S^{44} + p\,\gamma^{44}}{\pm\, \Omega^4 (p)}$$

d'où par 5-6

5-9 $$p = \frac{(\pm\, \Omega^4)(\pm\, \Omega^4)}{S^{44} + p\,\gamma^{44}} = \frac{(\Omega^4)^2}{S^{44} + p\,\gamma^{44}}\,.$$

Mais on a $r = \varrho + p$.
La valeur de S^4_λ est connue sur Σ; par l'équation d'état $p = \varphi(\varrho)$, la dernière équation 5-9 nous donne p sur Σ. A l'aide de 5-7 et de 5-8, on en déduit la valeur de v_λ. D'après 5-9, on peut écrire à l'aide de 5-5:

5-10 $$(\varrho + p)(S^{44} + p\,\gamma^{44}) = -\gamma^{\lambda\mu} (S^4_\lambda + p\,\gamma^4_\lambda)(S^4_\mu + p\,\gamma^4_\mu).$$

Or du fait que les $\gamma_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas de x^0: $\partial_0 \gamma_{\alpha\beta}(u) = 0$ et $\partial_0 S^4_\lambda = 0$. Dérivons 5-10 par rapport à x^0:

$$(\varphi'(p) + 1)(S^{44} + p\,\gamma^{44})\,\partial_0 p + (\varrho + p)\,\partial_0 p\,\gamma^{44} = -2\,\partial_0 p\,(S^{44} + p\,\gamma^{44})$$

où:

$$[(S^{44} + p\,\gamma^{44})(\varphi'(p) + 3) + (\varrho + p)\,\gamma^{44}]\,\partial_0 p = 0$$

ou encore:

$$[\gamma^{44} - (3 - \varphi') \frac{S^{44} + p\,\gamma^{44}}{r}]\,\partial_0 p = 0$$

Avec 5-9 et 5-6, il vient:

$$[\gamma^{44} - (3 - \psi')\,(v^4)^2]\,\partial_0 p = 0$$

Si le crochet est différent de zéro, c'est à dire si la surface n'est pas front d'onde hydrodynamique — c'est le rôle que jouent les surfaces dont le crochet est nul et qui est l'une des variétés exceptionnelles du problème de Cauchy dans le cas que nous étudions — alors on en déduit que: $\partial_0 p = 0$; par $\varrho = \varphi(p)$ on a $\partial_0 \varrho = \varphi'(p)\,\partial_0 p = 0$, de même par 5-7, on a aussi $\partial_0 v_\lambda = 0$ et encore pour $\partial_0 r = \partial_0 (\varrho + p) = 0$.
Ainsi

$$X F = \partial_0 F = - X \exp \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho + p} = 0,$$

ce qui démontre les propriétés 5-2.

§ 6. — Le système caractéristique de la forme $d\,\omega$.

Ainsi que nous l'avons vu, le système différentiel aux lignes de courant admet $d\omega$ comme forme invariante ou comme invariant intégral absolu. Or on sait qu'il peut exister d'autres systèmes d'équations différentielles qui admettent $d\omega$ comme forme invariante et qui sont indépendants entre eux. Ce sont ceux qui admettent des intégrales premières communes. Si r est le nombre de ces intégrales y_i et que n est le nombre de variablesde la forme $d\omega$, un théorème connu de la théorie des invariants intégraux dit qu'il y aura $n - r$ systèmes admettant $d\omega$ comme forme invariante. Il faut donc chercher toutes ces intégrales premières. On le fait en intégrant le système caractéristique de la forme qui serait, si $y_1, \ldots y_r$ étaient intégrales premières:

$$dy_1 = 0 = dy_2 = 0 = \quad = dy_r = 0,$$

qui est un système d'équations de Pfaff.

Or pour une forme différentielle extérieure fermée, c'est à dire une forme dont la différentielle extérieure est nulle ($d\,(d\omega) = 0$), le système caractéristique de la forme se réduit au système associé de la forme $d\omega$, c'est à dire au système que l'on obtient en égalant à zéro les dérivées partielles de la forme par aux rapport n variables,

$$\frac{\partial\,(d\omega)}{\partial\,x^\alpha} = 0\,,$$

ce qui donne par 4-1:

6-1 $$\Omega_{\alpha\beta}\,dx^\beta = 0$$

Le nombre r des intégrales premières sera donné en définitive par le rang de ce système d'équations, c'est à dire par le nombre de vecteurs associés au système 6 1 linéairement indépendants.

Dans notre cas $n = 5$, on est donc amené à étudier le rang d'un système de 5 équations à 5 inconnues. Or le rang de ce système est aussi égal à la classe de la forme $d\omega$, c'est à dire au nombre minimum de variables au moyen desquelles $d\omega$ puisse s'exprimer. Or on sait également qu'une forme quadratique extérieure, tout comme une forme algébrique, peut se ramener à une forme canonique dont le nombre de variables est pair. Le rang de $d\omega$ dans V_5 doit être certainement inférieur à 5, sinon on aurait $n - r = 5 - 5 = 0$ système admettant $d\omega$ comme forme invariante. Or, comme on l'a vu, les lignes de courant sont solution d'un système admettant $d\omega$ comme forme invariante. Donc $\vec{I}$ est solution du système 6-1 et le rang de 6-1 doit être au moins égal à 4. r doit être différent de 3 et de 1. Il peut ainsi être égal, comme nous le montre le raisonnement que nous venons de faire, à 2 ou 0. Si $r = 2$, on aura 3 systèmes indépendants qui admettront $d\omega$ comme forme invariante.

Envisageons maintenant la variété riemannienne conforme à V_5 munie de la métrique $d\overset{*}{\sigma}{}^2$, elle admet le même groupe d'isométrie, et comme le vecteur $\vec{I}$ est défini par $\overset{*}{I}_\alpha = I_\alpha = Fv_\alpha$, des propriétés de 5-2, on en déduit également que $X\,\overset{*}{I} = 0$.

Les lignes de courant sont les trajectoires d'un champ de vecteurs admettant une transformation infinitésimale X. D'autre part le système admet comme nous l'avons vu la forme invariante $d\omega$. Par un raisonnement classique de la théorie des invariants intégraux on déduit une nouvelle forme invariante

$$d\omega\,(\vec{\xi}\,, \vec{dx}) = \xi^\alpha\,\partial_\alpha\,\overset{*}{I}_\beta - \xi^\beta\,d\,\overset{*}{I}_\beta$$

et comme en coordonnées adaptées $\xi^i = 0\,,\ \xi^0 = 1\,,$ on a

$$d\omega\,(\vec{\xi}\,, \vec{dx}) = -\,d\,I_0$$

Dire que dI_0 est un invariant pour 3-1, c'est dire que I_0 est une intégrale première du système aux lignes de courant. *Ainsi la composante $I_0^* = I_0$ du vecteur $\vec{I}$ conserve une valeur constante le long de chaque ligne de courant.*

On peut remarquer qu'on peut écrire I_0 au moyen d'une fonction scalaire G dans un système quelconque de coordonnées:

$$G = \xi^\alpha I_\alpha$$

ce qui donne en coordonnées adaptées $G = I_0$.
Evaluons la différentielle de G, dans le systeme adapté, on a

$$d\,G = d\,I_0 = \partial_i\, I_0\, dx^i$$

et comme $\Omega_{i0} = \partial_i\, I_0 - \partial_0\, I_i = \partial_i\, I_0$, car $\partial_0\, I = 0$,

$$d\,G = \Omega_{i0}\, dx^i,$$

ce qui peut encore s'écrire en introduisant le vecteur $\vec{\xi}$

$$d\,G = \Omega_{\alpha\beta}\, \xi^\beta\, dx^\alpha$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $G = I_0$ soit constant sur tout V_5 est évidemment

$$\Omega_{\alpha\beta}\, \xi^\beta = 0$$

C'est à dire que le système d'équations des trajectoires de groupe admette $d\omega$ comme forme invariante, puisqu'alors les trajectoires de groupe seraient dans la variété caractéristique.

Pour que le système d'équations des trajectoires du groupe d'isométrie admette $d\omega$ comme forme invariante, il faut et il suffit que I_0 soit constant sur toute la variété, c'est à dire que

$$I_0 = F\, v_0 = C^{te}.$$

Nous dirons, si le système caractéristique 6-1 est de *rang* 2 que le mouvement considéré est *rotationnel.* Alors, comme nous l'avons vu, $d\omega$ admet des variétés caractéristiques à trois dimensions engendrées d'une part par les lignes de courant, d'autre part par les trajectoires d'isométries, enfin par les trajectoires d'un vecteur q'on appellera le *vecteur de tourbillon.*

Si le système caractéristique est de *rang O,* c'est à dire si le tenseur $\Omega_{\alpha\beta}$ est identiquement nul, le mouvement sera dit *irrotationnel,*

§ 7. — Mouvements irrotationnels, théorème de Lagrange [3] generalisé.

Le tenseur de tourbillon est nul identiquement $\Omega_{\alpha\beta} = 0$. Si on se limite alors à un domaine simplement connexe de V_5, le fait que $\Omega_{\alpha\beta} = 0$ se traduit par l'existence d'une fonction ψ telle que $\vec{I}$ soit le gradient de celle-ci:

$$I_\alpha = \partial_\alpha \psi$$

et l'on sait que cela se traduit par l'existence d'une famille d'hypersurfaces $\psi = C^{te}$ et réciproquement. Donc pour que le mouvement soit irrotationnel, il faut et il suffit que

$$I_\alpha = \partial_\alpha \psi \, .$$

Mais on peut dire plus, et ceci généralise la propriété de « permanence » du théorème de Lagrange : *Pour que le mouvement envisagé soit irrotationnel, il faut et il soffit que les lignes de courant soient orthogonales à une même hypersurface* (locale).

On a vu que dans la métrique $d\overset{*}{\sigma}{}^2$ conforme à la métrique $d\sigma^2$ les lignes de courant étaient géodésiques orientées $d\overset{*}{\sigma}{}^2 < 0$ de la variété riemannienne définie par cette métrique. Alors il résulte de l'existence et de l'etude des coordonnées de Gauss [4] que si les lignes de courant sont orthogonales à une hypersurface, elles sont trajectoires orthogonales de la famille de surfaces obtenues en portant à partir de S sur les lignes de courant un arc $\overset{*}{\sigma}$ constant. Alors d'après le précédent théorème, le mouvement est irrotationnel.

§ 8. — Mouvements rotationnels. Théorèmes de Helmoltz.

Nous avons désigné les trajectoires, solution du troisième système $d\omega$ comme forme invariante *lignes de tourbillon.* Nous allons énoncer pour ces trajectoires des théorèmes qui généralisent ceux de l'hydrodynamique classique dûs à Helmoltz.

A. — Soit un cycle Γ à une dimension non tangent à une ligne de tourbillon. Les lignes de tourbillon issues de chaque point de Γ engendre une variété à deux dimensions qu'on appellera tube de tourbillon C. Le

(3) S'il existe à un instant un potentiel des vitesses, il existe à tout instant.

(4) (11)1, § 26, p. 59.

fait d'admettre l'invariant intégral

$$\int_{\Gamma} \omega$$

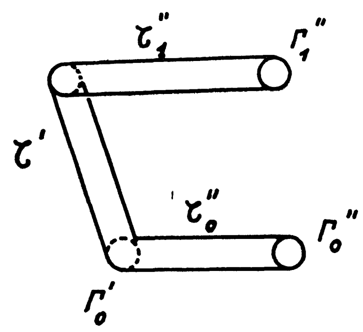
veut dire, si Γ_0 est un cycle homotope sur C à Γ, qu'on a

8-1 $$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_0} \omega$$

Comme ω est ici la circulation du vecteur courant, on peut énoncer le *théorème : La circulation du vecteur courant le long d'un cycle Γ à une dimension reste invariant si on déforme Γ sur le tube de tourbillon C défini par Γ.*

On peut énoncer de théorèmes semblables si on considère, à la place de cycles sur un tube de tourbillon, des tubes de lignes de courant ou de trajectoires d'isométrie.

B. — Construisons alors sur un tube C' formé par une congruence de courbes solution de S' (lignes de courant) deux cycles homotopes Γ'_0 et Γ'_1, et, sur chacun de ces cycles un tube de lignes de la congruence solution de S'' (lignes de tourbillon) qui forment deux tubes C''_0 et C''_1. Soient encore sur C''_0 un cycle Γ''_0 et sur C''_1 un cycle Γ''_1, on aura du fait que $d\omega$ est formé invariante de S''



$$\int_{\Gamma'_1} \omega = \int_{\Gamma''_1} \omega \qquad \text{et} \qquad \int_{\Gamma'_0} \omega = \int_{\Gamma''_0} \omega$$

et du fait que $d\omega$ est forme invariante pour S'

$$\int_{\Gamma'_0} \omega = \int_{\Gamma'_1} \omega$$

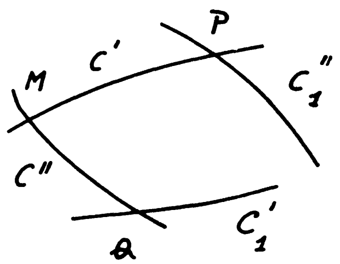
ce qui permet d'écrire:

$$\int_{\Gamma_0''} \omega = \int_{\Gamma_1''} \omega$$

Remarquons que Γ_0'' et Γ_1'' ne sont pas deux cycles pris sur un même tube de lignes solutions de S''.

Si alors on appelle *moment d'un tube de tourbillon* la valeur de $\int \omega$ commune à tous les cycles homotopes sur un même tube, on peut énoncer; *deux tubes de tourbillon construits sur deux cycles d'un même tube de courant ont même moment.* Il y a permanence ou conservation de moment ou intensité d'un tube.

C. — Soient encore C' et C'' des trajectoires de S' et de S'' respectivement. Menons par un point quelconque M de l'espace V_5 la trajectoire C' et la trajectoire C'' passant par ce point. Prenons sur C' un point quelconque P et sur C'' un point quelconque Q. Construisons la trajectoire C_1'' qui passe par P et la trajectoire C_1' qui passe par Q. *Ces deux nouvelles trajectoires C_1' et C_1'' se coupent.*



En effet, soient $y_1, \ldots y_{5-2}$, les intégrales premières communes aux deux systèmes considérés, si $a_1, \ldots a_{5-2}$ sont les valeurs numériques de ces deux intégrales au point M, leurs valeurs numériques seront les mêmes en P et en Q, de même sur C_1' et sur C_1''. Alors les courbes C', C'', C_1', C_1'', sont sur le même variété à 3 dimensions

$$y_1 = a_1, \; y_2 = a_2, \; y_3 = a_3,$$

donc C_1' et C_1'' se coupent. Si S' est le système aux lignes de courant et S'' le système aux lignes de tourbillon, la propriété que nous venons de démontrer peut s'exprimer en disant *qu'une ligne de V_5 qui est de tourbillon à un instant dans un mouvement rotationnel reste de tourbillon.*

D. — Chaque variété caractéristique peut être engendrée de la manière suivante: on part d'un point M de V_5 et l'on mène une trajectoire de l'un quelconque des systèmes admettant $d\omega$ comme forme invariante, puis, sur cette trajectoire on mène par l'un de ses points une trajectoire d'un autre quelconque des systèmes admettant la même forme invariante. e.-t. c. On engendre de cette façon toute la variété et on n'en sort jamais.

§ 9. — Le principe d'extremum dans V_4.

Nous allons appliquer la méthode de descente [5] qui permet de passer d'une fonction $\mathcal{L}'$ de V_{n+1} a une fonction L' de V_n telle que les extrêmales de $\int \mathcal{L}$ se projettent sur les extrêmales de $\int L'$. Nous allons donc chercher à déterminer la fonction L' qui permet d'obtenir des extrêmales telles (dans V_4) que les extrêmales de

8-1 $$\int \mathcal{L}'^2 = \int H^2 \gamma_{\lambda\mu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu = \int H^2 \mathcal{L}^2 \qquad (\mathcal{L}^2 = \gamma_{\lambda\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\lambda)$$

se projettent sur celles de $\int L'$

La procédé de descente nous conduit à former ([6.7])

8-2 $$\partial_{\dot{0}} \mathcal{L}' = h'$$

Mais

$$\partial_{\dot{0}} \mathcal{L}'^2 = 2 \mathcal{L}' \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}' = 2 \mathcal{L}' h' = 2 \mathcal{L} H h'$$

or $\partial_{\dot{0}} \mathcal{L}' = H \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}$ et si on a $\partial_{\dot{0}} \mathcal{L} = h$ comme dans [6.7]

$$\partial_{\dot{0}} \mathcal{L}' = H h$$

d'où en comparant avec 8-2

8-3 $$h' = H h$$

Alors d'après 8-1 et 8-3,

$$\frac{1}{2} H^2 \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}^2 \equiv H^2 (\gamma_{0\alpha} \dot{x}^\alpha) = \mathcal{L} H h' = \mathcal{L} H^2 h = \frac{1}{2} \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}'^2$$

---

[5] voir (II) p 158. Les numéros d'équations entre crochet indiquent des équations de ce livre.

et en simplifiant

8-4 $$\gamma_{0\alpha}\,\dot{x}^{\alpha} = \gamma_{00}\,\dot{x}^{0} + \gamma_{0i}\,\dot{x}^{i} = \mathcal{L}\,h = \frac{1}{2}\,\partial_{\dot 0}\,\mathcal{L}^2$$

relation qui est la même que si on avait pris $\mathcal{L}$ ([8.1]).

Le même procédé de descente conduit à éliminer $\dot{x}^0$ entre 8-3 et

8-5 $$L' - h\,\dot{x}^0$$

Pour cela décomposons $\mathcal{L}'^2$

$$\mathcal{L}'^2 = H^2\,[\gamma_{00}^2\,(dx^0)^2 + 2\,\gamma_{i0}\,dx^i\,dx^j + \gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j] = H^2\,\mathcal{L}^2,$$

en prenant dx^0 comme variable directrice; on obtient:

8-6 $$\mathcal{L}'^2 = H^2\left[\frac{1}{\gamma_{00}}\left[\frac{1}{2}\,\partial_{\dot 0}\,\mathcal{L}^2\right]\right]^2 + \Phi^2$$

avec

8-7 $$\Phi^2 = g_{ij}\,\dot{x}^j\,\dot{x}^i, \qquad g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{0i}\,\gamma_{0j}}{\gamma_{00}},$$

8-4 et 8-6 nous permettent d'écrire tout d'abord

8-8 $$\dot{x}^0 = \frac{h}{\gamma_{00}}\,\mathcal{L} - \frac{\gamma_{0i}\,\dot{x}^i}{\gamma_{00}}$$

puis

$$\mathcal{L}^2 = \frac{h^2}{\gamma_{00}}\,\mathcal{L}^2 + \Phi^2$$

La résolution des équations de la théorie par approximations indique [6] qu'il faut prendre comme variété d'interprétation de V_5 non pas V_4, variété quotient de V_5 par la relation d'équivalence définie par le groupe d'isométrie, dont la métrique est $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, mais une métrique conforme:

$$\overline{ds^2} = \xi\,ds^2.$$

On introduit alors $\overline{ds^2} = ds^2\,\xi$ dans l'équation ci-dessus et on pose $h = i\,\alpha$

---

[6] Voir Hennequin. F. (12)

(α réel), ainsi $\overline{\Phi}^2 = \frac{1}{\xi} \Phi^2$ et

9-9 $$\mathcal{L} \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\gamma_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \overline{\Phi}$$

Par 9-5 et 9-8

$$L' - H \mathcal{L} - i \alpha \dot{x}^0 = \mathcal{L}\left(H + \frac{\alpha^2}{\gamma_{00}}\right) + i \alpha \frac{\gamma_{0i} \dot{x}^i}{\gamma_{00}}$$

d'où en exprimant $\mathcal{L}$ par 9-9:

$$L' = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \overline{\Phi} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\gamma_{00}}}} \left(H + \frac{\alpha^2}{\gamma_{00}}\right) + i \alpha \gamma_{0i} \dot{x}^i$$

On peut aussi introduire la forme potentiel-vecteur $\varphi = \varphi_i \, dx^i$ $(\overline{\varphi_i} = \varphi_i)$, en remplaçant γ_{0i} par $\beta \gamma_{0i} \varphi_i$ et $\overline{\Phi}$ par $\frac{d\overline{s}}{d\sigma}$ alors

9-10 $$L' \, d\sigma = \left(H + \frac{\alpha^2}{\gamma_{00}}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\gamma_{00}}}} \frac{d\overline{s}}{\sqrt{\xi}} + i \alpha \beta \varphi \, .$$

Remarquons que si $H = 1$,

$$L' \, d\sigma = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\gamma_{00}}} \frac{d\overline{s}}{\sqrt{\xi}} + i \alpha \beta \varphi$$

puis en multipliant par i et en changeant de signe

$$- i L' \, d\sigma = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\xi^2} - 1} \, \frac{d\overline{s}}{\sqrt{\xi}} + \alpha \beta \varphi$$

qui est la forme obtenue par M.me Hennequin.

§ 10. — L'invariant intégral de L'.

D'après le théorème du procédé de descente, L' admet l'invariant intégral relatif:

10-1 $$\overline{\omega} = \partial_{\dot{k}} \, L' \, dx^k$$

qui est égal à l'invariant intégral relatif de $\mathcal{L}'$ puisque $\partial_{\dot{k}} \mathcal{L} = \partial_{\dot{k}} L'$, ainsi:

$$\bar{\omega} = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}' \, dx^k$$

Or au § 2, notre problème de variation nous avait conduit à poser $\mathcal{L}' = f$ et $H = F$, ainsi d'après 2-6 $\partial_{\dot{k}} f = i' F v_k$, et nous prendrons comme dans le § 3:

10-2 $$\bar{\omega} = F v_k \, dx^k .$$

Mais v_k est la composante covariante du vecteur de V_5: $i\,v^k = \dfrac{dx^k}{d\sigma}$, nous allons l'exprimer en fonction du vecteur unitaire $\vec{\bar{u}} = \dfrac{d\vec{x}}{d\bar{s}}$ de $\bar{V}_4$, douée de la métrique $\dfrac{d\bar{s}^2}{\xi} = ds^2$. Par 9-9, on a:

$$\frac{d\bar{s}}{d\sigma} = \sqrt{\xi}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}},$$

alors:

10-3 $$v^i = \frac{1}{i}\frac{dx^k}{d\sigma} = \frac{1}{i}\frac{dx^i}{d\bar{s}}\frac{d\bar{s}}{d\sigma} = \frac{1}{i}\sqrt{\xi}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}}\,\bar{u}^i = i\sqrt{\xi}\sqrt{\frac{\alpha^2}{\xi^2} - 1}\,\bar{u}^i.$$

10-3 nous donne $i\,v_0 = \gamma_{0\mu}\, i\, v^\mu = \mathcal{L} h$, en prenant σ comme paramètre, $\mathcal{L} = 1$, donc $i\,v_0 = i\,\alpha$ ou $v_0 = \alpha$, alors

$$v^0 = \frac{\alpha - \gamma_{0i}\, v^i}{\gamma_{00}}$$

et

$$v_i = \gamma_{i\alpha}\, v^\alpha = \gamma_{i0}\, v^0 + \gamma_{ij}\, v^j$$

mais [18-5] nous donne $\gamma_{ij} = g_{ij} + \beta\,\gamma_{0i}\,\varphi_j$ avec $\gamma_{0i} = \beta\,\varphi\,\gamma_{00}$ [18-1], ainsi:

10-4 $$v_i = \frac{1}{\gamma_{00}}(\beta\,\varphi_i\,\gamma_{00}\,\alpha - \beta\,\gamma_{00}\,\varphi_i\,\gamma_{0i}\, v^i + \beta\,\gamma_{00}\,\varphi_j\, v^j\,\gamma_{0i} + \gamma_{00}\, g_{ij}\, v^j = \alpha\,\beta\,\varphi_i + g_{ij} v^j.$$

D'autre part [14.5] donne pour βh

$$\beta h = k\sqrt{1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}}} \quad \text{ou} \quad -i\,\alpha\,\beta = k\sqrt{\frac{\alpha^2}{\xi} - 1}.$$

10-4 devient en remplaçant v^j par sa valeur donnée par 10-3 et g_{ij} par $\frac{1}{\xi} g_{ij}$

$$v_i = i\sqrt{\frac{\alpha^2}{\xi^2} - 1}\left(k\,\varphi_i + \bar{g}_{ij}\frac{\sqrt{\xi}}{\xi}\bar{u}^j\right)$$

Mais $\bar{u}_i$ est un vecteur de $\bar{V}_4$, $\bar{g}_{ij}$ définit la métrique de $\bar{V}_4$. Ainsi on a $\bar{g}_{ij}\,\bar{u}^j = \bar{u}_i$, finalement:

10-5 $$v_i = i\sqrt{\frac{\alpha^2}{\xi^2} - 1}\left(k\,\varphi_i + \frac{\sqrt{\xi}}{\xi}\bar{u}_i\right)$$

ce qui, par 10-2, donne pour l'invariant intégral de L':

10-6 $$\bar{\omega} = i\,F\sqrt{\frac{\alpha^2}{\xi^2} - 1}\left(k\,\varphi_i + \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{\xi}}\right)dx^i$$

ou en posant

$$\mu = i\sqrt{\frac{\alpha^2}{\xi^2} - 1} \quad \text{et} \quad \bar{G}_i = k\,\varphi_i + \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{\xi}}$$

$$\bar{\omega} = F\,\mu\,\bar{G}_i$$

§ 11. — Le tenseur de tourbillon $\Omega_{\alpha\beta}$ dans $\bar{V}_4$.

Nous allons également voir comment s'exprime $\Omega_{\alpha\beta}$ en fonction d'élements de $\bar{V}_4$.

On avait (4-2)

$$\Omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha I_\beta - \partial_\beta I_\alpha = \partial_\alpha (F v_\beta) - \partial_\beta (F v_\alpha)$$

Alors

$$\Omega_{i0} = -\left[-\alpha\,\partial_i F + \partial_0\left(i\,F\sqrt{\frac{\alpha^2}{\xi^2} - 1}\left(k\,\varphi_i + \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{\xi}}\right)\right)\right]$$

D'après le § 5, $XF = \partial_0 F = 0$, et il en est de même des autres quantités figurant dans la dernière parenthèse, il reste donc

11-1 $$\Omega_{i0} = \alpha\,\partial_i F$$

Ensuite

$$\overline{\Omega}_{ij} = \partial_i \left[F \mu \left(k \, \varphi_i + \frac{\overline{u}_i}{\sqrt{\xi}} \right) \right] - \partial_j \left[F \mu \left(k \, \varphi_i + \frac{\overline{u}_i}{\sqrt{\xi}} \right) \right] .$$

Introduisons les vecteurs

11-2 $$\overline{\Phi}_j = F \mu \, \varphi_j \quad \text{et} \quad \overline{C}_j{}' = F \frac{\mu}{\sqrt{\xi}} \, \overline{u}_j$$

ainsi que les tenseurs

11-3 $$\overline{\Omega}'_{ij} = (\partial_i \, \overline{C}'_j - \partial_j \, \overline{C}'_i)$$

11-4 $$\overline{\mathcal{F}}_{ij} = (\partial_i \, \overline{\Omega}_j - \partial_j \, \overline{\Omega}_i) \, ,$$

d'où

11-5 $$\overline{\Omega}_{ij} = \Omega'_{ij} + k \, \overline{\mathcal{F}}_{ij}$$

Si ξ est une constante (hypothèse de Klein), on voit que l'on peut sortir μ et ξ de $\overline{C}'_i$ et il reste

$$\overline{\Omega}'_{jj} = \frac{\mu}{\sqrt{\xi}} \left(\partial_i \, (F \, \overline{u}_j - \partial_j \, (F \, \overline{u}_i) \right) .$$

Le tenseur qui figure dans la parenthèse est le rotationnel du vecteur courant $\overline{C}_i$ de l'hydrodynamique relativiste classique pour la variété ds^2. D'autre part on aurait

$$\overline{\overline{\mathcal{F}}}_{ij} = \mu \, (\partial_i \, \overline{\Omega}_\gamma - \partial_j \, \overline{\Omega}_i) = \mu \, (\partial_i \, F \, \varphi_j - \partial_j \, F \, \varphi_i)$$

la parenthèse ne se réduit au champ électromagnétique $F_{ij} = \partial_i \, \varphi_\gamma - \partial_\gamma \, \varphi_i$ que si F est constant. Ainsi la partie hydrodynamique, quand elle existe, est liée indissolublement à la partie électromagnétique.

De même qu'en théorie relativiste du fluide chargé (7), on peut écrire pour le vecteur $\vec{I}$:

11-6 $$I_i = k \, \overline{\Phi}_i + \overline{C}'_i \, .$$

(7) Voir [II] Chap VI Ire partie.

§ 12. — Expression du système caractéristique par des elements de $\overline{V}_4$ système caractéristique de la forme $d\overline{\omega}$ de $\overline{V}_4$.

Le système caractéristique de la forme $d\overline{\omega}$ (§ 6) était

12-1 $$\Omega_{\alpha\beta}\, dx^\beta = 0 \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \dots 4)$$

ce qui peut s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_{0\beta}\, dx^\beta = 0 \\ \Omega_{i\beta}\, dx^\beta = 0 \end{array}\right\} \text{ ou } \quad \begin{array}{l} + \Omega_{0j}\, dx^j = - \alpha\, d_\gamma F\, dx^j = 0 \\ \Omega_{i0}\, dx^0 + \Omega_{ij}\, dx^j = 0 \end{array}$$

Exprimons $\overline{\Omega}'_{ij}$ et $\overline{F}_{ij}$ au moyen du vecteur courant $\overline{C}_i = F\overline{u}_i$ et du tenseur champ électromagnétique $\overline{F}_{ij}$ de la variété $\overline{V}_4$. Notons qu'on peut prendre dans $\overline{V}_4$ les mêmes composantes covariantes pour $\overline{F}_{ij}$ que dans la variété $\overline{V}_4$. Mais il n'en n'est plus de même pour $\overline{C}_i$. En effet

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad \text{et} \quad \overline{u}^i = \frac{dx^i}{d\overline{s}} = \frac{dx^i}{\sqrt{\xi}\, ds} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} u^i, \text{donc } \overline{C}^i = F\,\overline{u}^i = \frac{1}{\sqrt{\xi}} C^i$$

D'autre part

$$\overline{u}_i = \overline{g}_{i\gamma}\, \overline{u}^j = \frac{\xi}{\sqrt{\xi}}\, g_{ij}\, u^j = \sqrt{\xi}\, u^i \quad \text{d'où} \quad \overline{C}_i = \sqrt{\xi}\, C_i$$

Posons, comme en relativité générale dans le cas du fluide parfait *) chargé:

$$\overline{\Lambda}_{ij} = \partial_i \overline{C}_j - \partial_j \overline{C}_i$$

pour le tenseur de tourbillon,

$$\overline{\zeta} = k\, \varphi_i + \overline{C}_i$$

pour le vecteur d'impulsion,

$$\overline{\pi}_{ij} = \partial_i \overline{\zeta}_j - \partial_j \overline{\zeta}_i = \overline{\Lambda}_{ij} + k\, F_{ij}$$

pour le rotationnel du vecteur d'impulsion: (F n'est pas la valeur de la forme champ électromagnétique).

11-4 donne

$$\mathcal{F}_{ij} = [\partial_i (\mu\, F\, \varphi_j) - \partial_j (\mu\, F\, \varphi_i)] = [\mu\, F \cdot F_{ij} + \varphi_j\, \partial_j\, (\mu\, F) - \varphi_i\, \partial_j\, (\mu F)]$$

et

$$\overline{\Omega}_{ij} = \left[\partial_i\left(\frac{\mu}{\sqrt{\xi}} F \overline{u}_j\right) - \partial_j\left(\frac{\mu}{\sqrt{\xi}} F \overline{u}_i\right)\right] = \left[\frac{\mu}{\sqrt{\xi}} \overline{\Lambda}_{ij} + F\left(\overline{u}_j\, \partial_i \frac{\mu}{\sqrt{\xi}} - \overline{u}_i\, \partial_j \frac{\mu}{\sqrt{\xi}}\right)\right]$$

d'où pour $\overline{\Omega}_{ij}$

12-3
$$\overline{\Omega}_{ij} = \left[\mu\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} \overline{\Lambda}_{ij} + F k\, F_{ij}\right) + F\left(\overline{u}_j\, \partial_i \frac{\mu}{\sqrt{\xi}} - \overline{u}_j\, \partial_j \frac{\mu}{\sqrt{\xi}}\right) + \right.$$
$$\left. + k\left(\varphi_j\, \partial_i (\mu F) - \varphi_i\, \partial_j (\mu F)\right)\right].$$

Dans le cas de la théorie de Kaluza-Klein où ξ est constant et égal à 1, on a

$$\overline{\Omega}_{ij} = \mu\left[(\Lambda_{ij} + F k\, F_{ij}) + k\left(\varphi_i\, \partial_i F - \varphi_i\, \partial_j F\right)\right] \text{ et } d\overline{s}^2 = ds$$

Si maintenant $F = I$, ou $p = 0$, on est dans le cas matière pure chargée, $\partial_i F = 0$, $\overline{C}_j = C_j$, et $\overline{\zeta} \to k\,\varphi_i + u_i$, qui est le vecteur d'impulsion de la relativité restreinte. Ainsi la première parenthèse de 12-3 fait presque apparaître $\overline{\pi}_{ij}$, à l'exception des facteurs F et $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$. On remarquera encore une fois que la partie électrodynamique subit toujours l'influence de F et qu'il en est d'ailleurs de même dans la théorie de Kaluza-Klein. Par contre on retrouve le cas matière pure chargée, à l'exception du facteur μ.

Nous n'écrirons pas explicitement le système caractéristique 12-2. Mais nous formerons le système caractéristique de la forme $d\,\overline{\omega}$:

12-4
$$d\overline{\omega} = d\,(F\mu\, \overline{G}_i)\, \Lambda\, dx^j = \frac{1}{2}\left[\partial_i(\mu F \overline{G}_j) - \partial_j(\mu F \overline{G}_i)\right] dx^i\, \Lambda\, dx^j$$

mais ce rotationnel a déjà été calculé, c'est $\overline{\Omega}_{ij}$ donné par 12-3. Ainsi le système caractéristique s'écrira:

12-5
$$\overline{\Omega}_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0$$

Si μ est constant, en tenant compte du fait que $(\partial_j F)\, dx^j = 0$, 12-5 devient:

$$\overline{\Omega}_{ij}\, dx^j = \mu\left[(\overline{\Lambda}_{ij} + F k\, F_{ij}) + \varphi_j\, F\, \partial_i F\right] dx^j = 0$$

système qui ne se réduit pas à la forme caractéristique du schéma fluide parfait chargé mentionné plus haut. Mais d'après la remarque que nous avions faite, on retrouverait par contre le système caractéristique du milieu matière chargée, c'est à dire le cas où il n'y a pas de pression.

§ 13. — Mouvements permanents.

On introduit un champ unitaire stationnaire conformément à la définition donnée (8). Le mouvement d'un milieu dont le tenseur d'energie est $\Theta_{\alpha\beta} = r\, v_\alpha\, v_\beta - p\, \gamma_{\alpha\beta}$ est *permanent* dans un domaine D_5 de V_5 si l'espace riemannien est stationnaire dans D_5. Alors le groupe d'isométrie dont $\vec{\zeta}$ est le vecteur de Killing générateur infinitésimal du groupe laisse invariant $\vec{\xi}$ et φ_i.

On peut alors montrer de la même façon qu'au § 5, en dérivant seulement par rapport à x^4 qu'on a

$$X_1 \vec{v} = 0 = \partial_4 \vec{v} = 0, \quad X_1 p = 0, \quad X_1 F = 0$$

X_1 étant le symbole de dérivation de Lie relatif au vecteur de Killing $\vec{\zeta}$.

Si alors on munit la variété V_5 de la métrique $d\overset{*}{\sigma}$ qui admet le même groupe d'isométrie que l'espace associé à $d\sigma$, il est évident d'après le résultat ci-dessus que le vecteur $\vec{I}$ satisfait aussi à

$$X_1 \vec{I} = 0\,,$$

on en déduit une nouvelle forme invariante pour le système aux lignes de courant:

$$d\omega\,(\vec{\zeta}\,,\; \vec{dx}) = \zeta^\alpha\, \partial_\alpha I_\beta\, dx^\beta - \zeta^\beta\, dI_\beta$$

ce qui donne encore en coordonnées totalement adaptées *), puisque $\zeta^0 = 0$, $\zeta^u = 0$, $\zeta^4 = 1$

13-1 $$d\omega\,(\vec{\zeta},\; \vec{dx}) = -\, d I_4$$

$d I_4$ est un invariant pour le système aux lignes de courant, c'est à dire que c'est une intégrale première de ce système. *Ainsi I_4 conserve une valeur constante le long des lignes de courant.* En coordonnées totalement adaptées I_4 est l'expression d'une fonction scalaire H définie en coordonnées locales par

12-2 $$H = \zeta^\alpha\, I_\alpha$$

Or le tenseur de tourbillon $\Omega_{\alpha\beta}$ ainsi que le vecteur de tourbillon qui est une forme linéaire de $\Omega_{\alpha\beta}$ (puisque solution d'un système linéaire à coeffi-

---

(8) Voir (11) § 39, II

cients $\Omega_{\alpha\beta}$) admettent la même transformation infinitésimale X_1. Il en résulte que le système aux lignes de tourbillon admet relativement à $d\omega$ et à X_1 les mêmes propriétés que le système différentiel aux lignes de courant. Ainsi I_4 ou H est constant le long de chaque ligne de tourbillon. Il en est de même le long des lignes trajectoires d'isométrie définies par le vecteur $\vec{\xi}$ puisque $X_1 \vec{\xi} = 0$ d'après les hypothèses espace stationnaire. Alors on peut dire que H *est constant sur chaque variété caractéristique.* Cherchons maintenant à évaluer la différentielle de H. En coordonnées totalement adaptées, on a

13-3 $$dH = dI_4 = \partial_A I_4 \, dx^A = \Omega_{A4} \, dx^A$$

ou en coordonnées locales

13-4 $$dH = \Omega_{\alpha\beta} \, \zeta^\beta \, dx^\beta$$

Or le système caractéristique s'écrit $\Omega_{\alpha\beta} I^\beta = 0$, ou pour $\alpha = A$ $(A = 1,2,3,)$,

$$\Omega_{AB} \, I^B = \Omega_{A4} \, I^4 + \Omega_{AB} \, I^B = 0$$

d'où en reportant $\Omega_{A4} I^4$ dans la formule 13-3 multipliée par I_4:

$$I^4 \, dH = - \, \Omega_{AB} \, I^B \, dx^A$$

qui est l'extension relativiste d'une formule de *Beltrami* et qui exprime que sur des sections d'espace le gradient de I_4 a pour composantes

$$\partial_A H = - \frac{\Omega_{AB} \, I^B}{I^4} \, .$$

En introduisant la décomposition d'un vecteur de V_5 en espace et en temps et en utilisant le repère naturel associé en un point x aux coordonnées adaptées, la direction de $\vec{\zeta}$ coincide avec le vecteur $\vec{e_4}$, alors si v^2 est la grandeur d'espace (9) du vecteur $i \vec{v} = \frac{\vec{dx}}{d\sigma}$ relativement à la direction de temps $\vec{\zeta}$ dans un système local totalement adapté, $(\gamma_{44} > 0)$, on pose

$$\gamma_{44} = V \, ,$$

alors d'après [2.5, I]

$$- \, v^2 = (\vec{v})^2 - \frac{(v_4)^2}{\gamma_{44}} \, , \quad (v_4 = (\vec{v} \cdot \vec{e_4}), \gamma_{44} = (\vec{e_4})^2)$$

(9) Voir (11) § 2, p 6.

Comme $\vec{v}$ est un vecteur orienté $d\sigma^2 < 0$, il vient

$$-v^2 = -1 - \frac{(v_4)^2}{\gamma_{44}}$$

ou

$$(v_4)^2 = -\gamma_{44}(v^2 - 1) .$$

Comme

$$I_\alpha = F v_\alpha , \quad v_4 = \frac{I_4}{F} , \quad (v_4)^2 = \frac{(I_4)^2}{F^2}$$

d'où, d'après la formule précédente

$$(I_4)^2 = - F^2 \gamma_{44} (v^2 - 1) = F^2 V (1 - v^2) .$$

Alors puisque I_4 est constant le long de la ligne de courant

$$(1 - v^2) V F^2 = C^{te} .$$

qui est une forme qui rappelle le théorème de Bernoulli

BIBLIOGRAPHIE

[1] KALUZA, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. p. 1966, (1921).
[2] O. KLEIN, Z. Phys. 37, p. 895, (1926).
[3] F. GONSETH et G. JUVET, Helv. Phys. Acta, I, p. 421, (1928).
[4] Y. THIRY, J. de Math. 30, p. 265, (1951).
[5] O. VEBLEN, *Projektive Retativitätstheorie*, Springer, Berlin (1933).
[6] W. PAULI, Ann. Phys. p. 305, (1933).
[7] P. JORDAN, Ann. Phys. p. 219, (1947).
[8] E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des invariants intégraux*, Herrmann, Paris (1922).
[9] A. LICHNEROWICZ, Bull. Soc. Math. p. 52, (1941).
[10] A. LICHNEROWICZ, Ann. Ec. Norm. 58, p. 219, (1941).
[11] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, (1955).
[12] F. HENNEQUIN, C. R. Acad. Sc. 239, p. 1464, (1954) et Thèse de Doctorat, Paris, (1956).