ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ENRICO MAGENES

Su alcune recenti impostazioni dei problemi al contorno, in particolare misti, per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 10, nº 1-2 (1956), p. 75-84

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1956_3_10_1-2_75_0>

SU ALCUNE RECENTI IMPOSTAZIONI DEI PROBLEMI AL CONTORNO, IN PARTICOLARE MISTI, PER LE EQUAZIONI LINEARI ELLITTICHE DEL SECONDO ORDINE

di ENRICO MAGENES (Genova)

Assai di recente in questi stessi Annali, [8] e [9], (1) ho proposto e studiato un'impostazione generalizzata del cosidetto problema misto per le equazioni lineari a derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine, pervenendo per detto problema al teorema dell'alternativa nella sua forma più completa.

Nel presente lavoro desidero mettere brevemente in evidenza (v. n. 1) ulteriori proprietà della classe in cui la soluzione viene trovata in [8] e [9], proprietà che caratterizzano da un nuovo punto di vista detta classe.

Dimostrerò anzitutto (v. n. 1, lemma II) un risultato sui cosidetti potenziali generalizzati di semplice strato con densità di quadrato sommabile; da esso scende la nuova caratterizzazione suaccennata. Questo risultato sui potenziali è inoltre suscettibile di applicazioni notevoli ai problemi al contorno per le equazioni ellittiche; ad es. (v. n. 3) esso permette di collegare tra di loro le classi di funzioni nelle quali i problemi al contorno (uniformi e misti) per le equazioni ellittiche sono stati considerati da L. AMERIO [1] e G. CIMMINO [3].

Ulteriori considerazioni sul problema misto connesse con [9] e con un lavoro di L. MYRBERG [12] vengono svolte nel n. 2, generalizzando un risultato dello stesso MYRBERG.

Solo per motivi di semplicità l'esposizione del presente lavoro, come quella di [8] e [9], viene fatta nel caso di due variabili, ma l'estensione al caso di funzioni di più variabili è facilmente ottenibile in modo analogo.

---

(1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

1. — Per motivi di brevità mi riferirò alla nomenclatura e al simbolismo di [9], alla quale rinvio il lettore. In [9] assegnata l'equazione

$$E(u) \equiv \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h}^{1,2} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + c\, u = f \qquad (a_{hk} = a_{kh}) \tag{1}$$

nel dominio piano $\mathfrak{D}$ si è considerato il problema misto

$$E(u) = f \quad \text{in } \mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}; \quad u = \mu \quad \text{su } \mathcal{F}_1\mathfrak{D}; \quad \frac{d\,u}{d\,\nu} = \delta \quad \text{su } \mathcal{F}_2\mathfrak{D} \tag{2}$$ (2)

dove $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ sono le porzioni di $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ in cui si è suddiviso la frontiera $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ di $\mathfrak{D}$ (v. n. 1 di [9]), μ e δ sono funzioni di quadrato sommabile rispettivamente su $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$. Il problema (2) è stato in [9] completamente risolto, pervenendo al teorema dell'alternativa in una opportuna classe di funzioni che viene ivi indicata con Ω_λ (n. 13 di [9]); ricordiamo che una funzione $u(P)$ appartiene ad Ω_λ se

I°) *converge «in media» sul sistema di curve* $\{\gamma_r\}$ *ad una funzione* μ *di quadrato sommabile su* $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ *nel senso precisato nel* n. 3 *di* [9];

II°) *è di quadrato sommabile in* $\mathfrak{D}$ *e di classe* 2 *in* $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$; *il suo* $E(u)$ *è una funzione* f *hölderiana in* $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ *e di quadrato sommabile in* $\mathfrak{D}$;

III°) *per ogni punto* M *di* $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ *e per quasi-tutti i* ϱ *di* $(o, r(M))$ *soddisfa alla relazione*

$$u(P) = \int_{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}} \frac{du(Q)}{d\,\nu^*} N_{\lambda,\varrho}(P, Q)\, d\,s_Q + \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}} \delta(Q)\, N_{\lambda,\varrho}(P, Q)\, d\,s_Q - \tag{3}$$

$$- \iint_{\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}} [f(Q) - \lambda\, u(Q)]\, N_{\lambda,\varrho}(P, Q)\, d\,Q$$

con δ funzione di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$, il significato dei simboli di (3) essendo precisato nei n. 11 e 16 di [9]; sottolineiamo qui il fatto che λ è positivo e sufficientemente grande, tra l'altro maggiore di $\max\limits_{\mathfrak{D}} c$ e di $\max\limits_{\mathfrak{D}} c^*$

---

(2) Con $\dfrac{d\,u}{d\,\nu}$ indichiamo quella che impropriamente è di solito chiamata «derivata conormale», precisamente

$$\frac{d\,u}{d\,\nu} = \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(x_h, n)$$

In [9] (n. 13) si è già osservato che dalla III°) segue l'esistenza del limite

$$(4) \qquad \lim_{P \to M\,(\text{su } n_M)} \frac{du\,(P)}{d\,\nu_M} = \delta\,(M)$$

per quasi-tutti gli M di $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$.

Vogliamo ora dimostrare come sia possibile *sostituire alla* III°) *una nuova condizione che insieme alle* I°) *e* II°) *individua ugualmente la classe* Ω_λ; questa condizione è già stata in sostanza messa in evidenza anche in [9] per quella sottoclasse di Ω_λ che abbiamo ivi indicata con $\Omega_{\lambda,0}$ (v. condizione IV°) del n. 14). Essa consiste nell'imporre anche alla derivata conormale $\frac{d\,u}{d\,\nu}$ di convergere «in media» su un certo sistema di curve al valore assegnato δ e precisamente in questo senso:

γ) *preso un qualunque sottoarco proprio* $\mathcal{C}$ *di* $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$, *avente cioè entrambi gli estremi interni a* $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$, *e il cui punto generico* $M\,(t)$ *nella rappresentazione parametrica assegnata di* $\mathcal{F} \mathfrak{D}$ *si ottenga per t variabile tra* t' *e* t'', *e considerato il sistema di curve ad esso «parallele»* $\{\mathcal{C}_\tau\}$ *costruito prendendo per ogni punto* $M\,(t)$ *di* $\mathcal{C}$ *sulla normale interna un punto* $M_\tau\,(t)$ *a distanza* τ *da* $M\,(t)$ *stesso, per* τ *variabile in un intorno destro opportuno dello zero, allora si abbia*

$$(4) \qquad \lim_{\tau \to 0} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{d\,u\,(M_\tau\,(t))}{d\,\nu} - \delta\,(t) \right]^2 d\,t = 0$$

dove $\frac{d\,u\,(M_\tau\,(t))}{d\,\nu}$ *indica la derivata conormale a* $\mathcal{C}_\tau$ *nel punto* $M_\tau\,(t)$.

Premettiamo anzitutto i seguenti lemmi:

LEMMA I: *Sia T un dominio limitato contenuto in* $\mathfrak{D}$, *opportunamente regolare; per fissare le idee si supponga T delimitato da una curva di classe 2, e si consideri il potenziale di dominio*

$$(5) \qquad w\,(P) = \iint_T F_\lambda\,(P\,,\,Q)\,z\,(Q)\,d\,Q$$

con densità $z\,(Q)$ *hölderiana in* $T - \mathcal{F}\,T$ *e di quadrato sommabile in* T *e dove* $F_\lambda\,(P\,,\,Q)$ *è la cosidetta soluzione fondamentale principale dell'equazione* $E\,(u) - \lambda\,u = 0$; *allora la derivata conormale* $\frac{dw}{d\,\nu}$ *converge «in media» a una funzione di quadrato sommabile su* $\mathcal{F}\,T$ *sul sistema* $\{\mathcal{F}_\tau\}$ *di curve «parallele»* *a $\mathcal{F}T$, ottenute prendendo per ogni punto M di $\mathcal{F}T$ sulla normale interna un punto M_τ a distanza τ da M, in un senso del tutto analogo a quello considerato a proposito di γ).*

Questo lemma è sostanzialmente noto; esso segue infatti da una generalizzazione di un noto teorema di LICHTENSTEIN e FRIEDRICHS (v. [11 teor. 13, IV]) e da un teorema di G. FICHERA [5, teor. XXXII].

LEMMA II: *Nelle stesse ipotesi sul dominio T anche il potenziale di semplice strato*

$$v(P) = \int_{\mathcal{F}T} F_\lambda(P, Q)\, \zeta(Q)\, d s_Q \tag{6}$$

con densità $\zeta(Q)$ di quadrato sommabile su $\mathcal{F}T$ ha derivata conormale che converge « in media » sul sistema $\{\mathcal{F}_\tau\}$ a una funzione di quadrato sommabile su $\mathcal{F}T$ nel senso stabilito nel lemma I.

Infatti recentemente si è dimostrato in [10], che il potenziale di doppio strato

$$\int_{\mathcal{F}T} \frac{d}{d\nu_Q} F_\lambda(P, Q)\, \zeta(Q)\, d s_Q$$

con momento $Z(Q)$ di quadrato sommabile su $\mathcal{F}T$ converge « in media » sul sistema $\{\mathcal{F}_\tau\}$ a una funzione di quadrato sommabile su $\mathcal{F}T$. Per ottenere il lemma II basterà allora ricordare le relazioni di analogia che intercorrono tra potenziale di doppio strato e derivata conormale del potenziale di semplice strato; precisamente che per Q su $\mathcal{F}T$ e P appartenente a n_Q la differenza tra la derivata secondo ν_Q fatta rispetto a Q e quella fatta rispetto a P è dell'ordine di $O\left((\log. \frac{K}{\overline{PQ}}\right)$(3) (v. ad es. [11 pag. 33]).

Ciò premesso dimostriamo che ogni funzione $u(P)$ di Ω_λ soddisfa anche alla condizione γ).

Si osservi infatti che la (3) afferma sostanzialmente che $u(P)$ è nell'intorno $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ rappresentabile mediante un potenziale di dominio ed uno di semplice strato; si può addirittura, come conseguenza di ben noti risultati sulla traduzione in equazioni integrali del problema di NEUMANN (v. ad es. [11,

(3) Si ricordi che $y = O(x)$ significa che y/x è limitato.

n. 22 e dimostrazione del teor. 31, VII]), sostituire alla (3) la rappresentazione equivalente

$$u(P) = 2 \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}} F_\lambda(P, Q)\, \zeta(Q)\, d s_Q - \iint_{\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}} F_\lambda(P, Q)\, z(Q)\, d Q \tag{5}$$

dove $F_\lambda(P, Q)$ è ancora la soluzione fondamentale principale della equazione $E(u) - \lambda u = 0$ e $\zeta(Q)$ e $z(Q)$ sono funzioni di quadrato sommabile rispettivamente su $\mathcal{F}\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ e su $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ e $z(Q)$ è hölderiana all'interno di $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$. Dai lemmi I e II segue allora che ogni $u(P)$ di Ω_λ soddisfa alla γ).

Viceversa una funzione che soddisfi alle I⁰), II⁰) e γ) soddisfa anche alla III⁰); ciò segue immediatamente dal fatto che per il dominio $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ e l'operatore $E(u) - \lambda u$ vale il teorema di unicità per il problema di NEUMANN anche nella classe delle funzioni che soddisfano alle I⁰), II⁰) e γ; e detto teorema di unicità si dimostra facilmente mediante un opportuno uso della formula di GREEN, dopo aver osservato che dalla convergenza « in media » su $\{\mathcal{C}_\tau\}$ della derivata conormale segue, nelle nostre ipotesi, anche quella della funzione u.

Possiamo dunque concludere che *la classe Ω_λ coincide con la classe, che indicheremo d'ora innanzi con Ω, delle funzioni verificanti le* I⁰), II⁰) *e* γ); e tutti i risultati di [9] valgono in Ω.

Mi sembra che la nuova caratterizzazione che viene così data della classe Ω_λ sia particolarmente interessante; in sostanza si è messo in rilievo una nuova impostazione del problema misto generalizzato, in cui *la soluzione è individuata esclusivamente dal soddisfare all'equazione $E(u) = f$ in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e dal modo di assumere i dati al contorno.* E si osservi che così viene anche eliminata nella stessa definizione quella apparente dipendenza di Ω_λ dal parametro λ.

Fondamentale per tutto questo è stato il lemma II, cioè sostanzialmente la Nota [10]. E vorrei ancora sottolineare che la caratterizzazione di Ω mediante le I⁰), II⁰) e γ) mette maggiormente in evidenza la generalità dell'impostazione da me data al problema misto: la classe Ω è infatti la più naturale estensione della classe « optimum », in cui il problema ordinario va studiato, cioè quella delle funzioni continue in $\mathfrak{D}$ e con derivate prime continue in $\mathfrak{D} - \overline{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}}$ (si veda a proposito la prefazione di [9] e in particolare la nota (4)); ciò non avviene invece per quelle impostazioni generalizzate del problema che richiedono alla soluzione di avere derivate prime di quadrato sommabile in $\mathfrak{D}$ (v. la bibliografia di [9]).

2. — In questo numero svilupperemo alcune considerazioni che si collegano sempre al problema misto considerato in [9] e in particolare alla parte finale della prefazione di [9]; in essa si era messo in rilievo, riallacciandosi ad un lavoro di L. MYRBERG [12], che quando si voglia interpretare la condi-

zione $\frac{d u}{d \nu} = \delta$ su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ in senso «puntuale», sorge naturale la considerazione di insiemi non solo di misura nulla ma anche di capacità nulla, e veniva suggerito così lo studio del problema misto nella classe delle funzioni soddisfacenti alle I°), II°) e alla ulteriore condizione

$$\lim_{P \to M\,(su\; n_M)} \frac{du\,(P)}{d\,\nu_M} = \delta\,(M) \qquad \text{su} \qquad \mathcal{F}_2\,\mathfrak{D} - \mathfrak{I} \tag{6}$$

dove $\mathfrak{I}$ sia un opportuno insieme di capacità nulla.

Le considerazioni che qui faremo sono appunto un contributo in questo ordine di idee e costituiscono un'estensione del risultato del MYRBERG già citato.

Partiamo da questa osservazione: le condizioni I°), II°) e (6) individueranno una classe ω di funzioni in cui il problema misto sarà ben posto, nei casi in cui da esse segua che la classe ω è contenuta nella Ω. Ebbene ciò avviene ad es. nel caso seguente.

Supponiamo che $\mathfrak{D}$ sia un cerchio di raggio R e che l'equazione da considerare sia la $\Delta_2 u = 0$; e lasciamo su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ e $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ le ipotesi fatte nel n. 1 di [9]; sull'arco $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ si consideri poi un insieme $\mathfrak{I}$ chiuso e di capacità (logaritmica) nulla e si assegni su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ una funzione δ limitata o di quadrato sommabile e inoltre hölderiana sugli archi $\{E\}$ contigui a $\mathfrak{I}$. Assegnata infine su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ una funzione μ di quadrato sommabile, si ricerchi una funzione armonica in $\mathfrak{D} - \mathcal{F} \mathfrak{D}$, convergente «in media» a μ nel senso della I°), con derivate prime continue in $(\mathfrak{D} - \mathcal{F} \mathfrak{D}) + (\mathcal{F}_2 \mathfrak{D} - \mathfrak{I})$, verificante su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D} - \mathfrak{I}$ la $\frac{d u}{d n} = \delta$ e inoltre soddisfacente alla

γ') *per ogni punto M di $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ esiste un intorno circolare tale che nell'intersezione Γ_M di $\mathfrak{D}$ con esso la u sia limitata oppure abbia derivate prime di quadrato sommabile, secondo che δ sia limitata o di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$.*

Ebbene per il problema così impostato *c'è il teorema di esistenza e di unicità*, poichè si può dimostrare che ogni funzione u che verifica le condizioni sopradette appartiene ad Ω.

Basterà per ciò dimostrare, in virtù del lemma II, che ogni tale u è in ogni insieme Γ_M rappresentabile mediante un potenziale di semplice strato con densità limitata o di quadrato sommabile, cioè del tipo [4].

$$\int_{\mathcal{F}\Gamma_M} \zeta\,(Q) \log \frac{k}{PQ}\, d\, s_Q \qquad \text{(k costante)} \tag{7}$$

---

[4] Si osservi che il lemma II vale anche per il potenziale (7) nonostante che $\log \frac{k}{PQ}$ non sia una soluzione fondamentale principale per $\Delta_2 u = 0$.

Si potrà ovviamente sempre supporre che Γ_M non contenga il centro di $\mathcal{D}$ e sia tale che l'intersezione $\mathcal{F}_2 \Gamma_M$ di $\mathcal{F} \Gamma_M$ con $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ abbia gli estremi appartenenti a $\mathcal{F}_2 \mathcal{D} - \mathcal{I}$. Data allora la funzione $u(P)$, si consideri il potenziale di semplice strato $v(P)$, dato cioè dalla (7), il quale abbia su $\mathcal{F} \Gamma_M$ la stessa derivata normale di $u(P)$; tale potenziale si può come *è* noto, determinare (a meno di una costante), risolvendo una classica equazione integrale lineare nell'incognita $\zeta(Q)$. La differenza $w(P) = u(P) - v(P)$ sarà dunque una funzione armonica in $\Gamma_M - \mathcal{F} \Gamma_M$, limitata o con derivate prime di quadrato sommabile in Γ_M a seconda dell'ipotesi fatta su δ e della γ') e avente inoltre derivata normale nulla in tutti i punti di $\mathcal{F} \Gamma_M$ non appartenenti all'intersezione $\mathcal{F}_2 \Gamma_M \mathcal{I}$. Se operiamo ora una trasformazione di Lord Kelvin di polo il centro di $\mathcal{D}$ e raggio R, la funzione $w(P)$ dà luogo, insieme alla sua trasformata, per il principio di riflessione, ad una funzione, la quale risulta armonica nell'interno del dominio Γ_M^*, somma di Γ_M e del suo trasformato, salvo che nei punti dell'insieme $\mathcal{F}_2 \Gamma_M \cdot \mathcal{I}$, con derivata normale nulla sulla frontiera di Γ_M^* e inoltre limitata o con derivate prime di quadrato sommabile in Γ_M^*; in entrambi i casi, poichè $\mathcal{F}_2 \Gamma_M \cdot \mathcal{I}$ è di capacità nulla, segue (5) che detta funzione deve essere costante in Γ_M^*. Dunque $w(P)$ è costante in Γ_M e $u(P)$ è rappresentabile mediante un integrale del tipo (7).

3. — L'importanza del lemma II si rivela anche in altre questioni relative ai problemi al contorno per le equazioni lineari ellittiche. Qui vogliamo in particolare applicarlo allo studio delle classi di funzioni in cui L. AMERIO [1] e G. CIMMINO [3] hanno considerato detti problemi al contorno.

Abbiamo già richiamato nel n. 16 di [9] la classe di AMERIO, che abbiamo ivi indicato con Γ (6); e abbiamo anche ivi ricordato il risultato di G. FICHERA [6], secondo cui ogni funzione di Γ si può porre nella forma

$$u(P) = 2 \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} F_\lambda(P, Q) \zeta(Q)\, d s_Q - \iint_{\mathcal{D}} F_\lambda(P, Q)\, z(Q)\, d Q \quad .$$

con $\zeta(Q)$ di quadrato sommabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ e $z(Q)$ hölderiana in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ e di quadrato sommabile in $\mathcal{D}$.

---

(5) Nel caso in cui detta funzione sia limitata il risultato è assai noto; nel caso in cui essa ha derivate prime di quadrato sommabile si veda M. BRELOT [2, pag. 398].

(6) Veramente Γ è una sottoclasse della classe in cui AMERIO ha in [1] considerato i problemi al contorno (si veda con precisione oltre a [1] il n. 31 di [11]); noi comunque qui intendiamo riferirci alla sottoclasse Γ, la cui definizione abbiamo dato nel n. 16 di [9].

Dunque ad $u(P)$ si possono applicare i lemmi I e II e si ottiene così che $\frac{du}{d\nu}$ converge «in media» sul sistema $\{\mathcal{F}_\tau\}$ di curve «parallele» a $\mathcal{F}\mathcal{D}$ nel senso ricordato per i lemmi I e II.

Ebbene questa osservazione permette subito di collegare la classe Γ di AMERIO con quella recentemente introdotta da G. CIMMINO [3]. Il CIMMINO ha nei n. 5 e 6 di [3] proposto lo studio dei problemi al contorno per le funzioni armoniche, in cui interviene la derivata normale (ad es. nel problema di NEUMANN e in quello misto) nella classe $\overline{\Sigma_0'}$ delle funzioni armoniche in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ e convergenti «in media» sul sistema $\{\mathcal{F}_\tau\}$ insieme alla loro derivata normale verso valori rispettivamente μ e δ di quadrato sommabile su tutto $\mathcal{F}\mathcal{D}$.

Orbene *tale classe coincide con quella* Γ di AMERIO, che, nel caso particolare dell'equazione $\Delta_2 u = 0$, è caratterizzata dalle funzioni rappresentabili come potenziali logaritmici di semplice strato con densità di quadrato sommabile

$$u(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \zeta(Q) \log \frac{k}{\overline{PQ}} \, d s_Q \qquad \text{(k costante)} \tag{8}$$

Infatti il lemma II (7) e noti risultati sulla teoria del potenziale ci assicurano che ogni funzione del tipo (8) appartiene a $\overline{\Sigma_0'}$. Viceversa ogni funzione di $\overline{\Sigma_0'}$ è della forma (8) e dunque appartiene a Γ; basta per questo osservare che in $\overline{\Sigma_0'}$ vale il teorema di unicità (a meno naturalmente di costanti arbitrarie) per il problema di NEUMANN, come segue immediatamente dal fatto che in $\overline{\Sigma_0'}$ è valida la formula integrale

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} u \frac{du}{dn} \, ds = - \iint_{\mathcal{D}} (\text{grad } u)^2 \, dx_1 \, dx_2 \quad (8)$$

La coincidenza ora dimostrata della classe Γ di AMERIO con quella proposta dal CIMMINO permette naturalmente di ottenere subito la caratterizzazione delle funzioni μ e δ assunte «in media» da una funzione u di $\overline{\Sigma_0'}$ e

(7) Si veda anche quanto è detto nella nota (4).

(8) Si ricordi che per noi n è la normale interna a $\mathcal{D}$.

dalla sua derivata normale; precisamente dai risultati di AMERIO segue che la condizione di compatibilità è la seguente

$$\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \left(\mu \frac{d\,v}{d\,n} - \delta\, v\right) d\,s = 0 \tag{9}$$

v essendo un qualunque polinomio armonico [9]; si ottiene così il risultato previsto dallo stesso CIMMINO nel n. 5 di [3].

Vale la pena poi di aggiungere qualche osservazione ancora a proposito dei problemi al contorno nella classe Γ. Poichè le funzioni di Γ sono dei potenziali del tipo (8) con densità di quadrato sommabile, in Γ si presenta naturale lo studio del problema di NEUMANN. Ma non altrettanto avviene per il problema misto; infatti Γ è in sostanza l'estensione della classe delle funzioni continue in $\mathfrak{D}$ insieme alle loro derivate prime (ogni tale funzione essendo pure rappresentabile con un potenziale (8) con densità sufficientemente regolare); ed è noto [10] che in quest'ultima classe si presentano per i dati μ e δ delle condizioni quantitative di compatibilità, che non compaiono invece nella classe « optimum » per il problema misto ordinario o nella classe Ω considerata nei precedenti numeri. È da presumere che tali condizioni di compatibilità debbano esistere anche se si vuole risolvere il problema misto in Γ. Insomma la classe Γ dei potenziali di semplice strato è sostanzialmente troppo ristretta perchè in essa il problema misto sia naturalmente posto.

Terminiamo osservando che le considerazioni ora fatte a proposito dell'equazione $\Delta_2 u = 0$ si lasciano estendere anche al caso dell'equazione $\Delta_2\, u = f$, considerata anche dal CIMMINO in [3], e in generale all'equazione $E(u) = f$. Si potrà anche supporre f solamente di quadrato sommabile, le soluzioni di $E(u) = f$ essendo allora intese in senso generalizzato; naturalmente si dovranno allora considerare potenziali di dominio con densità $z(Q)$ solamente di quadrato sommabile. Tutto ciò segue da risultati ormai noti di teoria del potenziale (v. [11, cap. II]) [11].

---

(9) In (9) v è un polinomio armonico poichè $\mathfrak{D}$ nelle nostre ipotesi è semplicemente connesso; altrimenti bisogna sostituire altre classi di funzioni armoniche (v. con precisione [1] e [6]).

(10) v. ad es. [4] e [7].

(11) Colgo l'occasione per correggere alcuni errori di stampa che mi sono sfuggiti in [8] e [9].

In [8] è scritto

a pag. 97 riga 6 dall'alto: $\dfrac{\partial a_{hk}}{\partial x_h}$ invece di $\dfrac{\partial a_{hk}}{\partial x_k}$

BIBLIOGRAFIA

1 - L. AMERIO: *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (Amer. Journal of Math. Vol. LXIX 1947 pp. 447-489)

2 - M. BRELOT: *Etude et extension du principe de Dirichlet* (Ann. Inst. Fourier t. V. 1953 1954 pp. 371-419).

3 - G. CIMMINO: *Spazi hilbertiani di funzioni armoniche e questioni connesse* (Atti Convegno sulle equaz. lin. a der. parz. di Trieste agosto 1954 Ed. Cremonese Roma).

4 - G. FICHERA: *Sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l'equazione di Laplace* (B. U. M. I. s. III Vol. VII 1952 pp. 367-377)

5 - G. FICHERA: *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa s. III Vol. IV 1950 pp. 35-99).

6 - G. FICHERA: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni* (Ann. Mat. pura e appl. s. IV t. XXVII 1948 pp. 1 28).

7 - A. LIENARD: *Problème plan de la derivée oblique dans la théorie du potentiel* (Journ Ecole Politec. III 5 7 1938 pp. 35-158 e 177-226).

8 - E. MAGENES: *Sui problemi al contorno misti per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa s. III Vol. VIII 1954 pp. 93-120).

9 - E. MAGENES: *Sul teorema dell'alternativa nei problemi misti per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine* (Ann. Scuola Norm. Pisa s. III Vol IX 1955 pp. 161-200).

10 - E. MAGENES: *Problema generalizzato di Dirichlet e teoria del potenziale* (Rend. Sem. Mat. Padova Vol. 24 1955 pp. 220-229).

11 - C. MIRANDA: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico* (Springer-Berlin 1955).

12 - L. MYRBERG: *Uber die vermischte Randwertaufgabe der harmonischen Funktionen* (Ann. Acc. Fennicae s. A. I. Math. Phys. n. 103 1951).

---

a pag.	103	riga	8	dal basso:	B	invece di β
» »	105	»	6	dall'alto:	$\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2}$	» » $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x_h \partial x_k}$
» »	107	»	8	» :	u^2	» » u_n^2
» »	108	»	5	» : (all'inizio):	$e^{-Mr}\int_{t_1}^{t_2}$	» » $e^{-Mr}\dfrac{d}{dr}\int_{t_1}^{t_2}$
» »	111	»	1	dal basso:	$\mathfrak{D}$	» » ogni insieme chiuso interno a $\mathfrak{D}$
» »	116	»	3	dall'alto:	z	» » Q

Inoltre a pag. 96 va aggiunta l'ipotesi $a_{12} = a_{21}$ sui coefficienti di $E(u)$.

In [9] è scritto

a pag. 179 riga 3 dal basso: 11 invece di 12
» » 184 » 6 dall'alto : 11 » » 12
» » 187 » 5 dal basso: 4 » » 10

Inoltre nella bibliografia di [9] il lavoro di G. FICHERA citato al n. 10 va sostituito col seguente:

G. FICHERA: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni* (Ann. Mat. pura e appl. s. IV - t. XXVII - pp. 1-28).