ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

GIORGIO DALL'AGLIO

**Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 10, nº 1-2 (1956), p. 35-74

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1956_3_10_1-2_35_0>

# SUGLI ESTREMI DEI MOMENTI DELLE FUNZIONI DI RIPARTIZIONE DOPPIA

di GIORGIO DALL'AGLIO (Pisa)

In una nota pubblicata nel 1951 (1) M. Fréchet studiò la classe delle funzioni di ripartizione a due variabili $\Phi(x, y)$ aventi per funzioni di ripartizione marginali due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ assegnate. Tale classe è stata perciò chiamata la classe di Fréchet.

Il problema studiato in questa nota è la ricerca degli estremi, nella classe di Fréchet, del momento di ordine $\alpha$ rispetto ad una retta $r$ del piano, dato dall'integrale di Stieltjes

$$M_r^\alpha[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |y - m x - p|^\alpha \, d\,\Phi(x, y).$$

La ricerca di tali estremi è fatta anzitutto nel caso, particolarmente importante, del momento di ordine 1, poi per $\alpha$ reale maggiore di 1. I risultati sono diversi nei due casi: per $\alpha = 1$, si trova una classe di funzioni massimanti. Per $\alpha > 1$ invece la funzione massimante è unica, e così la funzione minimante.

## Generalità.

Date due funzioni di ripartizione arbitrarie $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$, funzioni reali non decrescenti che soddisfano alle condizioni

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) &= \lim_{y\to+\infty} \Psi(y) = 1, \\ \lim_{x\to-\infty} \Phi(x) &= \lim_{y\to-\infty} \Psi(y) = 0 \end{aligned}$$

(1) MAURICE FRÉCHET: « *Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données* » Annales de l'Université de Lyon, Sc. IV (1951).

una funzione $\Phi(x\,y)$ sarà una funzione di ripartizione doppia (a due variabili) avente per distribuzioni marginali $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ se soddisfa alle condizioni

$$(2)\qquad \Delta^{(2)}\Phi(xy)=\Phi(x_1 y_1)-\Phi(x_1 y_2)-\Phi(x_2 y_1)+\Phi(x_2 y_2)\geq 0 \quad \text{per } x_2>x_1,\ y_2>y_1$$

$$(3)\qquad \begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x\,y)=\Psi(y) & \lim\limits_{y\to+\infty}\Phi(x\,y)=\Phi(x) \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x\,y)=0 & \lim\limits_{y\to-\infty}\Phi(x\,y)=0 \end{array}$$

Notiamo subito che dalla (2) e dalle (3) segue la non decrescenza della $\Phi(x\,y)$ rispetto a ciascuna delle variabili.

Richiamiamo ora alcuni dei risultati ottenuti da Fréchet nella nota citata.

Per ogni coppia di funzioni di ripartizione $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ esiste sempre una classe $\Gamma(\Phi\,,\ \Psi)$ di funzioni doppie che hanno distribuzioni marginali $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$. Tale classe, se non contiene una sola funzione, ne contiene infinite.

Per ogni funzione $\Phi(x\,y)$ di $\Gamma(\Phi\,,\ \Psi)$, valgono le disuguaglianze (2).

$$(4)\qquad \Phi(x\,y)\geq \text{man}\,[\Phi(x)+\Psi(y)-1\,,\ 0]$$

$$(5)\qquad \Phi(x\,y)\leq \min\,[\Phi(x)\,,\ \Psi(y)]$$

Inoltre le funzioni

$$(6)\qquad \Phi_0(x\,y)=\max\,[\Phi(x)+\Psi(y)-1\,,\ 0]$$

$$(7)\qquad \Phi_1(x\,y)=\min\,[\Phi(x)\,,\ \Psi(y)]$$

sono esse stesse funzioni di $\Gamma(\Phi\,,\ \Psi)$ e sono quindi in $\Gamma(\Phi\,,\Psi)$ rispettivamente la funzione minima e la funzione massima.

---

(2) La seconda disuguaglianza discende immediatamente dalla non decrescenza della $\Phi(x\,y)$ rispetto a $x$ e a $y$. La prima è dimostrata da Fréchet ricorrendo alla nozione di probabilità. La dimostrazione analitica è però immediata: dati due punti $(x\,,y)$ e $(x',\ y')$ con $x'>x$, $y'>y$, per la (2) è $\Phi(x\,y)-\Phi(x\,y')-\Phi(x'\,y)+\Phi(x'\,y')\geq 0$ e, facendo tendere successivamente $x'$ e $y'$ a $+\infty$, si ottiene:

$$\Phi(x\,y)\geq\Phi(x)+\Psi(y)-1.$$

Dalla non decrescenza di $\Phi(x\,y)$ si ha inoltre che $\Phi(x\,y)$ è sempre maggiore o uguale a zero. Di qui la (4).

Consideriamo ora il momento $M_r^{\alpha}(\Phi)$ rispetto ad una retta del piano non parallela ad uno degli assi. Posta l'equazione della retta nella forma

$$y = m\,x + p \qquad (m \neq 0),$$

la distanza di un punto $(x, y)$ dalla retta è data, a meno di un fattore costante, da $|y - m\,x - p|$; il differenziale $d\,\Phi(x\,y)$ rappresenta la probabilità che le variabili casuali cadano nel rettangolo coordinato di vertici opposti $(x, y)$ e $(x + d\,x, y + d\,y)$. L'integrale di Stieltjes

$$M_r^{\alpha}[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |y - m\,x - p|^{\alpha}\, d\,\Phi(x\,y)$$

ci darà quindi il momento di ordine $\alpha$, rispetto alla retta $r$, della distribuzione probabilistica rappresentata dalla $\Phi(x\,y)$.

Per lo studio dell'integrale di Stieltjes scritto sopra è necessario ricorrere ad una formula di integrazione per parti che riporto dal trattato di Picone e Viola (3), par. 86:

Se $f(x\,y)$ è una funzione continua e variazione finita e $g(x\,y)$ una funzione a variazione finita su un rettangolo $R$: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, vale la trasformazione

$$(8) \qquad \iint_R f(x\,y)\, d\,g(x\,y) = \underset{x}{\Delta}{}_{a-}^{b+}\, \underset{y}{\Delta}{}_{c-}^{d+}\, f(x\,y)\, g(x\,y) - \underset{x}{\Delta}{}_{a-}^{b+} \int_c^d g(x\,y)\, d_y f(x\,y) -$$

$$- \underset{y}{\Delta}{}_{c-}^{d+} \int_a^b g(x\,y)\, d_x f(x\,y) + \iint_R g(x\,y)\, d\,f(x\,y)\,.$$

In questa formula, ricordando la consueta notazione

$$f(x^+, y) = \lim_{\xi \to x+0} f(\xi, y)$$

si è posto

$$\underset{x}{\Delta}{}_{a-}^{b+}\, F(x\,y) = F(b^+, y) - F(a^-, y).$$

---

(3) MAURO PICONE e TULLIO VIOLA: *Lezioni sulla moderna teoria dell'integrazione.* Ed. Scientifiche Einaudi 1953. La formula era già contenuta in T. VIOLA «*Sulla formula di integrazione per parti nell'integrazione doppia secondo Stieltjes*» Giornale di Mat. di Battaglini (4) 80 (1950).

Il problema studiato è la ricerca in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ delle funzioni per cui $M_r^{\alpha}[\Phi]$ assume rispettivamente il valore minimo e il valore massimo. Per affrontare il problema variazionale è opportuno sostituire alle condizioni (1) le

$$\begin{gathered}\lim_{x\to+\infty}[1-\Phi(x)]\,x^{\gamma}=\lim_{y\to+\infty}[1-\Psi(y)]\,y^{\gamma}=0\\ \lim_{x\to-\infty}\Phi(x)\,x^{\gamma}=\lim_{y\to-\infty}\Psi(y)\,y^{\gamma}=0\end{gathered}\tag{9}$$

essendo $\gamma$ un numero reale maggiore di $\alpha$.

Tratterò anzitutto il caso del momento di ordine uno, che indicherò semplicemente con

$$M_r[\Phi]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|y-m\,x-p|\,d\,\Phi(x\,y).$$

La ricerca si presenta più agevole e porta a risultati diversi che nel caso, trattato successivamente, di $\alpha>1$.

Sia nel primo che nel secondo caso, è necessario distinguere la trattazione a seconda che il coefficiente angolare della retta $r$ sia positivo o negativo. La differenza di segno porta infatti a risultati opposti. Cominciamo, perciò dallo studio del momento $M_r[\Phi]$ rispetto ad una retta con coefficiente angolare positivo.

## § 1. MOMENTO DI ORDINE 1 RISPETTO AD UNA RETTA CON COEFFICIENTE ANGOLARE POSITIVO.

### 1. Altra espressione di $M_r[\Phi]$.

Poichè, come vedremo, il problema, per $m>0$, si può riportare con un cambiamento di variabili, al momento rispetto alla retta $y=x$ ci limitiamo allo studio dell'integrale

$$M_r[\Phi]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|y-x|\,d\,\Phi(x\,y).$$

Per risolvere il problema proposto, ridurremo anzitutto l'integrale $M_r[\Phi]$ ad un integrale di Lebesgue.

Essendo positive la funzione integranda e la variazione doppia della $\Phi(x\,y)$, il valore dell'integrale $M_r[\Phi]$ si ottiene come limite dell'integrale esteso ad un insieme $I_h$, essendo $\{I_h\}$ una qualunque successione di insiemi misurabili che invada il piano. Consideriamo perciò i quadrati, a lati paralleli agli assi, di centro l'origine e lato $2h$.

Integrando per parti mediante la (8) abbiamo:

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} |y-x|\, d\,\Phi(x\,y) = \underset{x}{\Delta_{-h^-}^{h^+}}\ \underset{y}{\Delta_{-h^-}^{h^+}}\ |y-x|\ \Phi(x\,y) -$$

$$- \underset{x}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} \int_{-h}^{h} \Phi(x\,y)\, d_y\, |y-x| - \underset{y}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} \int_{-h}^{h} \Phi(x\,y)\, d_x\, |y-x| +$$

$$+ \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \Phi(x\,y)\, d\, |y-x|\,.$$

Calcoliamo ora successivamente i termini del secondo membro.

$$\underset{x}{\Delta_{-h^-}^{h^+}}\ \underset{y}{\Delta_{-h^-}^{h^+}}\ |y-x|\ \Phi(x\,y) = -\,2\,h\,[\Phi(-\,h^-,\,h^+) + \Phi(h^+,\,-\,h^-)]$$

$$\underset{x}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} \int_{-h}^{h} \Phi(x\,y)\, d_y\, |y-x| = \int_{-h}^{h} \Phi(h^+,y)\, d_y\, |h-y| - \int_{-h}^{h} \Phi(-\,h^-,y)\, d_y\, |-h-y| =$$

$$= \int_{-h}^{h} \Phi(h^+,\,y)\, d_y\, (h-y) - \int_{-h}^{h} \Phi(-\,h^-,\,y)\, d_y\, (h+y) =$$

$$= -\int_{-h}^{h} \Phi(h^+,\,y)\, d\,y - \int_{-h}^{h} \Phi(-\,h^-,\,y)\, d\,y.$$

Analogamente

$$\underset{y}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} \int_{-h}^{h} \Phi(x\,y)\, d_x\, |y-x| = -\int_{-h}^{h} \Phi(x,\,h^+)\, d\,x - \int_{-h}^{h} \Phi(x,\,-\,h^-)\, d\,x\,.$$

L'integrale di Stieltjes:

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \Phi(x\,y)\, d\, |y-x|$$

esteso al quadrato $R$, si può ottenere come limite dell'integrale esteso ad un qualunque insieme chiuso $C$ contenuto in $R$, in cui la $\Phi\,(x\,y)$ è continua [4]

$$\iint_R \Phi\,(x\,y)\,d\,|y-x| = \lim_{C\to R}\iint_C \Phi\,(x\,y)\,d\,|y-x|\,.$$

Per calcolare l'integrale di Riemann-Stieltjes

$$\iint_C \Phi\,(x\,y)\,d\,|y-x| \tag{10}$$

occorre considerare una qualunque scomposizione coordinata ai lati di $R$ e scegliere quei rettangoli $r$ che contengono punti di $C$; scelto in ciascuno di questi un punto $(x_r\,,\,y_r)$, si fa la somma

$$\Sigma_r\,\Phi\,(x_r\,,\,y_r)\,V_r\,|y-x| \tag{11}$$

dove con $V_r\,|y-x|$ si indica la variazione doppia di $|y-x|$ su $r$. Il limite di questa somma, al tendere allo zero del diametro del massimo rettangolo della scomposizione coordinata dà l'integrale (10).

Se $r$ è tutto situato nel semipiano $x \geq y$ $(x \leq y)$, si ha $V_r\,|y-x| = 0$; perciò sono da considerare solo i termini della (11) che corrispondono a rettangoli $r$ aventi punti su entrambi i semipiani. Poichè la $\Phi\,(x\,y)$ è continua su $C$ e quindi integrabile nel senso dl Riemann-Stieltjes, per calcolare il limite della somma (11) possiamo considerare una scomposizione coordinata tale che gli $r$ abbiano tutti una diagonale sulla retta $y=x$; scegliendo $(x_r\,,\,y_r)$ su tale diagonale, si ha al limite

$$\iint_C \Phi\,(x\,y)\,d\,|y-x| = -\int_{C'} \Phi\,(x\,y)\,d\,x$$

dove $C'$ indica l'intersezione di $C$ con la retta $y=x$. Al tendere di $C$ a $R$, $C'$ tende all'intersezione $\gamma$ di $R$ con la retta $y=x$ avendo la $\Phi\,(x\,y)$ su $\gamma$ al più un'infinità numerabile di discontinuità. Si ha poi

$$\iint_R \Phi\,(x\,y)\,d\,|y-x| = -2\int_\gamma \Phi\,(x,\,y)\,d\,x = -2\int_{-h}^{h} \Phi\,(x\,,\,x)\,d\,x.$$

[4] Essendo $\Phi\,(x\,y)$ a variazione finita e $|y-x|$ assolutamente continua, si potrebbe dimostrare che l'integrale esteso a $R$ è esso stesso un integrale di Riemann-Stieltjes, e quindi ottenibile direttamente con il procedimento usato per calcolare l'integrale (10). Il procedimento adoperato è invece più generale.

Otteniamo perciò

$$(12) \quad \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} |y-x|\, d\,\Phi(x\,y) = -2\,h\,[\Phi(-h^-, h^+) + \Phi(h^+, -h^-) +$$

$$+ \int_{-h}^{h} \Phi(h^+, y)\, d\,y + \int_{-h}^{h} \Phi(-h^-, y)\, d\,y +$$

$$+ \int_{-h}^{h} \Phi(x, h^+)\, dy + \int_{-h}^{h} \Phi(x, -h^-)\, d\,x - 2\int_{-h}^{h} \Phi(x\,x)\, d\,x\,.$$

Per le (9), essendo in ogni punto $\Phi(x\,y) \leq \Phi(x)$ e $\Phi(x\,y) \leq \Psi(y)$, si annulla, al tendere di $h$ a $+\infty$, il primo termine del secondo membro della (12). Si annullano inoltre al limite i due integrali

$$\int_{-h}^{h} \Phi(-h^-, y)\, d\,y \qquad \int_{-h}^{h} \Phi(x, -h^-)\, d\,x\,.$$

È infatti (prendiamo, ad es., il primo)

$$\int_{-h}^{h} \Phi(-h^-, y)\, dy \leq \int_{-h}^{h} \Phi(-h^-)\, d\,y = \Phi(-h^-)\, 2\,h \rightarrow 0.$$

Si ha ancora, per la (4)

$$\Psi(y) - \Phi(h^+, y) \leq 1 - \Phi(h^+)$$

e quindi

$$\int_{-h}^{h} \Psi(y)\, dy - \int_{-h}^{h} \Phi(h^+, y)\, d\,y = \int_{-h}^{h} [\Psi(y) - \Phi(h^+, y)]\, d\,y \leq$$

$$\leq [1 - \Phi(h^+)] \int_{-h}^{h} d\,y = [1 - \Phi(h^+)]\, 2\,h \rightarrow 0.$$

La (12) diviene perciò:

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} |y-x|\, d\,\Phi(x\,y) = \int_{-h}^{h} [\Psi(x) - \Phi(x\,x)]\, dx + \int_{-h}^{h} [\Phi(x) - \Phi(x\,x)]\, dx + \varepsilon\left(\frac{1}{h}\right),$$

e passando al limite sulla successione considerata,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |y - x| \, d\, \Phi(x\, y) = \tag{13}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi(x) - \Phi(x\,,\, x)] + [\Psi(x) - \Phi(x, x)] \, dx\,.$$

Come si vedrà nel par. 4, mediante le (9) si dimostra che il valore di $M_r[\Phi]$ nella classe $\Gamma(\Phi\,,\,\Psi)$ è sempre finito. Cerchiamone ora gli estremi.

## 2. Il minimo dell' integrale $M_r[\Phi]$ e la classe delle funzioni minimanti.

La riduzione dell'integrale $M_r[\Phi]$ alla forma (13) ne rende agevole la la ricerca degli estremi. Cerchiamo anzitutto il minimo.

TEOREMA I. *Date due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ non decrescenti soddisfacenti alle* (9), *esiste una classe $\Gamma_1(\Phi\,,\,\Psi)$ di funzioni della classe $\Gamma(\Phi\,,\,\Psi)$ per le quali il momento $M_r[\Phi]$ rispetto alla retta $y = x$ assume il valore minimo; tale valore è dato da*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\,\Phi(x) - \Psi(x)|\, dx\,.$$

*La classe $\Gamma_1(\Phi\,,\,\Psi)$ è costituita dalle funzioni di $\Gamma(\Phi,\,\Psi)$ che soddisfano alla condizione*

$$\Phi(x\,x) = \min\,[\Phi(x)\,,\,\Psi(x)] \tag{14}$$

*Essa ha una funzione massima $\Phi_1(x\,y)$ e una funzione minima $\Phi_{1,0}(x\,y)$; se queste non coincidono $\Gamma_1(\Phi,\,\Psi)$ contiene infinite funzioni distinte.*

Dimostriamo la prima parte dell'enunciato.

Nel secondo membro della (13) la funzione integranda è la somma di due termini entrambi positivi. Poichè in ciascuno di essi compare, col segno meno, la funzione $\Phi(xy)$ calcolata sulla retta $y = x$, il minimo dell'integrale $M_r[\Phi]$ si ha per le funzioni $\Phi(x\,y)$ che assumono in ogni punto della retta $y = x$ il massimo valore. Tale valore, per la (5), è dato da

$$\Phi(x\,x) = \min\,[\Phi(x)\,,\,\Psi(x)] \tag{14}$$

Per tali funzioni l'integrale $M_r\,[\Phi]$ diventa

$$M_r\,[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\,\Phi(x) - \Psi(x)|\,dx$$

e, per le (9), ha valore finito.

Una prima funzione minimante è data immediatamente dalla (7)

$$\Phi_1(x\,y) = \min\,[\Phi(x)\,,\,\Psi(x)].$$

Tale funzione però non è in generale l'unica minimante. Ciò si può arguire dal fatto che per rendere minimo $M_r\,[\Phi]$ basta imporre alla funzione $\Phi(x\,y)$ di essere massima sulla retta $y = x$, mentre la funzione $\Phi_1(x\,y)$ è massima su tutto il piano. Per dimostrarlo poi basta un esempio dato dalle funzioni

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{per } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases} \qquad \Psi(y) \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{per } 0 < y \leq 1 \\ 1 & \text{per } y > 1\,. \end{cases}$$

Esse soddisfano alle condizioni del teorema I. Un calcolo immediato mostra che le condizioni (4) e (5) e di non decrescenza, assieme alla (14), determinano le funzioni $\Phi(x\,y)$ minimanti in modo unico su tutto il piano, tranne i punti del quadrato $Q$: $-1 < x \leq 0\,,\ \ 0 < y \leq 1\,.$ D'altra parte si vede facilmente che ogni funzione così definita fuori di $Q$ e che assume in $Q$ un valore costante arbitrario tra 0 e $\dfrac{1}{2}$ appartiene a $\Gamma(\Phi, \Psi)$ ed è minimante per $M_r\,[\Phi]$.

Si ha perciò una classe $\Gamma_1(\Phi\,,\,\Psi)$ di funzioni di $\Gamma(\Phi\,,\,\Psi)$ minimanti $M_r\,[\Phi]$: essa è data ovviamente dalle funzioni di $\Gamma(\Phi\,,\,\Psi)$ che verificano la (14).

Passiamo ora a dimostrare l'ultima parte dell'enunciato. La funzione

$$(7) \qquad \Phi(x\,y) = \min\,[\Phi(x)\,,\ \Psi(y)]$$

massima per la classe $\Gamma(\Phi\,,\,\Psi)$, lo è anche per la classe $\Gamma_1(\Phi\,,\,\Psi)$. Un esame più approfondito permette di trovare in $\Gamma_1(\Phi\,,\,\Psi)$ anche una funzione minima.

Indichiamo con $\inf\limits_{(a,\,b)}\,[f(x)]$ l'estremo inferiore dei valori che la funzione $f(x)$ assume nell'intervallo chiuso $(a\,,\,b)$. Indichiamo poi con $\inf\limits_{(a,\,b)}{}_0\,[f(x)]$ il maggiore tra i due numeri $\inf\limits_{(a,\,b)} [f(x)]$ e $0$. Conserviamo la notazione, con analogo significato, se $a = b$. Con tali notazioni la funzione minima di $\Gamma_1(\Phi\,,\,\Psi)$ è data da

$$\Phi_{1,0}(x\,,\,y) = \Phi(x) - \inf_{(x,\,y)}{}_0\,[\Phi(z) - \Psi(z)] \qquad \text{per } x \leq y$$

$$\Phi_{1,0}(x\,,\,y) = \Psi(y) - \inf_{(y,\,x)}{}_0\,[\Psi(z) - \Phi(z)] \qquad \text{per } x \geq y$$

Per $x = y$ le due definizioni date coincidono e risulta $\Phi_{1,0}(xy) = \min[\Phi(x), \Psi(y)]$. La (14) è così soddisfatta. Resta da dimostrare che la $\Phi_{1,0}(x\,y)$ appartiene a $\Gamma(\Phi\,,\,\Psi)$, cioè che soddisfa alle condizioni (2) e (3). Per la (3) la verifica è immediata: basta notare che da un certo punto in poi la $\Phi_{1,0}(x\,y)$ si esprime mediante una delle due forme (ad es. per $x \to +\infty$ da $x = y$ in poi conserva la seconda forma) e sfruttare le (9). Più lunga e difficile è la verifica della (2). Nel considerare la variazione doppia, data la diversa forma che la funzione assume nei due semipiani, bisogna distinguere diversi casi a seconda della posizione dei vertici del rettangolo su cui si calcola la variazione rispetto alla retta $x = y$.

Esaminiamo ad esempio il caso che i punti $(x_1\,,\,y_1)$, $(x_1\,,\,y_2)$, $(x_2\,,\,y_2)$ si trovino nel semipiano $x \leq y$ e per il punto $(x_2\,,\,y_1)$ sia $x > y$. È allora $x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2$, e la variazione doppia è data da

$$\Delta^{(2)}\,\Phi_{1,0}(x\,,\,y) = \Phi(x_1) - \inf_{(x_1 y_1)}{}_0\,[\Phi(z) - \Psi(z)] - \Phi(x_1) + \inf_{(x_1 y_2)}{}_0\,[\Phi(z) - \Psi(z)] +$$
$$+ \Phi(x_2) - \inf_{(x_2 y_2)}{}_0\,[\Phi(z) - \Psi(z)] - \Psi(y_1) + \inf_{(y_1 x_2)}{}_0\,[\Psi(z) - \Phi(z)]\,.$$

Se è $\inf\limits_{(y_1 x_2)}{}_0\,[\Psi(z) - \Phi(z)] > 0$ allora è, per $y_1 \leq z \leq x_2$, $\Phi(z) < \Psi(z)$ e ne segue, per la definizione,

$$\inf_{(x_1 y_1)}{}_0\,[\Phi(z) - \Psi(z)] = \inf_{(x_2 y_2)}{}_0\,[\Phi(z) - \Psi(z)] = 0\,.$$

Inoltre, sempre per $y_1 \leq z \leq x_2$,

$$\Psi(y_1) - \Phi(x_2) \leq \Psi(z) - \Phi(z)$$
$$\Psi(y_1) - \Phi(x_2) \leq \inf_{(y_1 x_2)}{}_0\,[\Psi(z) - \Phi(z)]$$

da cui

$$\Delta^{(2)}\,\Phi_{1,0}(x\,,\,y) \geq 0\,.$$

Se invece è $\inf_0\,[\Psi(z) - \Phi(z)] = 0$, rimane

$$\Delta^{(2)}\,\Phi_{1,0}(x\,y) = \inf_{(x_1 y_2)}{}_0\,[\Phi(z) - \Psi(z)] - \inf_{(x_1 y_1)}{}_0\,[\Phi(z) - \Psi(z)] -$$
$$- \inf_{(x_2 y_2)}{}_0\,[\Phi(z) - \Psi(z)] + \Phi(x_2) - \Psi(y_1).$$

Essendoci in $(y_1, x_2)$ almeno un punto $z$ in cui è $\Phi(z) \geq \Psi(z)$, segue

$$\Phi(x_2) - \Psi(y_1) \geq 0 .$$

È inoltre

$$\Phi(x_2) - \Psi(y_1) \geq \Phi(x_2) - \Psi(x_2) \geq \inf_{(x_2\, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)]$$

$$\Phi(x_2) - \Psi(y_1) \geq \Phi(y_1) - \Psi(y_1) \geq \inf_{(x_1\, y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)]$$

e quindi

$$\Phi(x_2) - \Psi(y_1) \geq \inf_{0\,(x_1\, y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] ; \quad \Phi(x_2) - \Psi(y_1) \geq \inf_{0\,(x_1\, y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)].$$

Allora se

$$\inf_{0\,(x_1 y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = \inf_{0\,(x_1 y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)] \text{ o } \inf_{0\,(x_1 y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = \inf_{0\,(x_2 y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)]$$

la disuguaglianza è immediatamente verificata; in caso contrario

$$\inf_{0\,(x_1 y_1)} [\Phi(z) - \Psi(z)] \text{ e } \inf_{0\,(x_2 y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)]$$

sono maggiori di zero, e

$$\inf_{0\,(x_1 y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = \inf_{0\,(y_1 x_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)].$$

Allora da

$$\Phi(y_1) - \Psi(x_2) \leq \Phi(z) - \Psi(z)$$

verificata per $y_1 \leq z \leq x_2$, segue

$$\Phi(y_1) - \Psi(x_2) \leq \inf_{0\,(y_1 x_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = \inf_{0\,(x_1 y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)]$$

e quindi

$$\Phi(x_2) - \Psi(y_1) + \inf_{0\,(x_1 y_2)} [\Phi(z) - \Psi(z)] \geq \Phi(x_2) - \Psi(y_1) + \Phi(y_1) - \Psi(x_2) \geq$$

$$\geq \inf_{0\,(x_2 y_2)} [\Phi(z) - \psi(z)] + \inf_{0\,(x_1 y_1)} [\Phi(z) - \psi(z)] ,$$

cioè $\Delta^{(2)} \Phi_{1,0}(x\, y) \geq 0$.

Dopo aver in modo analogo verificato anche gli altri casi che si presentano, resta dimostrato che $\Phi_{1,0}(x\, y)$ appartiene a $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$. Dimostriamo ora che in ogni punto essa assume il minimo valore compatibile con le condizioni della classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$. Supponiamo per assurdo che in un punto $(x, y)$ (prendiamo ad es. $x < y$) sia:

$$\Phi(x\, y) = \Phi(x) - \inf_{0\,(x\, y)} [\Phi(z) - \Psi(z)] - d \qquad (d > 0)$$

Se in un punto $x_1$ con $x \leq x_1 \leq y$ è $\Phi(x_1) \leq \Psi(x_1)$, e quindi $\inf_{0\,(x\,y)} [\Phi(z) - \Psi(z)] = 0$, si ha, per $y \geq x_1$, $\Phi(x_1, y) = \Phi(x_1)$ per cui è

$$\Phi(x\,y) - \Phi(x_1, y) - \Phi(x\,y_1) + \Phi(x_1\,y_1) = \Phi(x) - d - \Phi(x_1) - \\ - \Phi(x\,y_1) + \Phi(x_1) \to - d\,.$$

E al limite per $y_1 \to +\infty$ la variazione risulta negativa.

In caso contrario è

$$\inf_{(x,\,y)} [\Phi(z) - \Psi(z)] \geq 0$$

esiste allora nell'intervallo $(x, y)$ almeno un punto $x_1$ in cui è

$$\Phi(x_1) - \Psi(x_1) \leq \inf_{0\,(xy)} [\Phi(z) - \Psi(z)] + d' \quad \text{dove } d' < d.$$

È allora

$$\Phi(x\,x_1) + \Phi(x_1\,y_1) - \Phi(x_1\,y_1) - \Phi(x\,, x_1) \leq \\ \leq \Phi(x\,y) + \Phi(x_1\,y_1) - \Phi(x\,, y_1) - \Phi(x_1\,x_1) = \\ = \Phi(x) - \inf_{0\,(x\,y)} [\Phi(z) - \Psi(z)] - d + \Phi(x_1\,y_1) - \Phi(x\,y_1) - \Psi(x_1).$$

e facendo tendere $y_1$ a $+\infty$, si ottiene

$$\Phi(x) - \inf_{0\,(xy)} [\Phi(z) - \Psi(z)] - d + \Phi(x_1) - \Phi(x) - \Psi(x_1) \leq d' - d < 0$$

cioè la variazione doppia al primo membro risulta, contrariamente all'ipotesi, negativa.

La $\Phi_{1,0}(x, y)$ è quindi la funzione minima in $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$. Ricordando la funzione massima definita dalla (5) si ha per le funzioni di $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ in ogni punto

$$\Phi_{1,0}(x, y) \leq \Phi(x\,y) \leq \Phi_1(x\,y).$$

Se le funzioni $\Phi_{1,0}(x\,y)$ e $\Phi_1(x\,y)$ sono distinte, esistono infinite altre funzioni. Infatti (v. Fréchet) date due funzioni $\Phi'(x\,y)$ e $\Phi''(x\,y)$ della classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ appartiene anche alla classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ ogni funzione $\Phi_\lambda(x, y)$ del tipo

$$\Phi_\lambda(x\,y) = \frac{\Phi'(x\,y) + \lambda\,\Phi''(x\,y)}{1 + \lambda} \quad \text{con } \lambda \text{ reale positivo.}$$

Se in particolare $\Phi'(x\,y)$ e $\Phi''(x\,y)$ appartengono alla classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$, mediante la (14) si vede subito che anche le $\Phi_\lambda(x\,y)$ vi appartengono.

Quindi appartengono a $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ le funzioni del tipo

$$\Phi_\lambda(x\,y) = \frac{\Phi_{1,0}(x\,y) + \lambda\,\Phi_1(x\,y)}{1 + \lambda}.$$

E con ciò il teorema risulta dimostrato.

## 3. Il massimo di $M_r\,[\Phi]$.

Per la ricerca delle funzioni che rendono massimo l'integrale $M_r\,[\Phi]$ si possono fare delle considerazioni del tutto analoghe a quelle del numero precedente. Si giunge così ad affermare:

TEOREMA II. *Nelle ipotesi del teorema I esiste una classe $\Gamma_2(\Phi\,,\,\Psi)$ di funzioni della classe $\Gamma(\Phi\,,\,\Psi)$ per cui il momento $M_r\,[\Phi]$ rispetto alla retta $y = x$ assume il valore massimo (sempre finito)*

$$\int_{-\infty}^{a}[\Phi(x) + \Psi(x)]\,dx + \int_{a}^{+\infty}[1 - \Phi(x)] + [1 - \Psi(x)]\,dx. \tag{15}$$

*La classe $\Gamma_2(\Phi\,,\,\Psi)$ è costituita dalle funzioni di $\Gamma(\Phi,\,\Psi)$ che soddisfano alla condizione*

$$\Phi\,(x\,x) = \max\,[\Phi(x) + \Psi(x) - 1\,,\;0]\,. \tag{16}$$

Per la dimostrazione partiamo ancora dalla (13): si trova immediatamente che le funzioni massime sono tutte e sole le funzioni della classe $\Gamma(\Phi,\,\Psi)$ che assumono in ciascun punto della retta $x = y$ il valore minimo, che è dato appunto, per la (7), dalla

$$\Phi\,(x\,x) = \max\,[\Phi(x) + \Psi(x) - 1{,}0]\,. \tag{16}$$

Per calcolare il valore che $M_r\,[\Phi]$ assume sotto questa condizione, notiamo che dalla non decrescenza di $\Phi(x)$ e $\Psi(x)$ segue la non decrescenza di $\Phi(x) + \Psi(x) - 1$. Chiamando allora $a$ l'estremo superiore degli $x$ per cui è $\Phi(x) + \Psi(x) - 1 \leq 0$, per tutte le funzioni $\Phi\,(x\,y)$ che verificano la (16) si ha

$$M_r\,[\Phi] = \int_{-\infty}^{a}[\Phi(x) + \Psi(x)]\,dx + \int_{a}^{+\infty}[1 - \Phi(x)] + [1 - \Psi(x)]\,dx \tag{15}$$

dove, per le condizioni (9) i due integrali al secondo membro sono finiti.

Una funzione di $\Gamma(\Phi\,,\,\Psi)$ che soddisfa alla (15) è la

$$\Phi_0\,(x\,y) = \max\,[\Phi(x) + \Psi(y) - 1{,}0] \tag{6}$$

che, essendo minima in $\Gamma(\Phi\,,\,\Psi)$, è anche minima in $\Gamma_2(\Phi\,,\,\Psi)$.

Come per il minimo, tale funzione non è in generale unica. Un esempio è dato dalle funzioni:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{per } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{per } x > 2 \end{cases} \qquad \Psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{per } 1 < y \leq 2 \\ \frac{2}{3} & \text{per } 2 < y \leq 3 \\ 1 & \text{per } y > 3 . \end{cases}$$

Semplici considerazioni, come per la classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ mostrano che ogni funzione definita dalla (6) fuori del quadrato $Q: 0 < x \leq 1, \; 2 < y \leq 3$, e che ha in $Q$ un valore costante arbitrario tra 0 e 1/3 soddisfa al problema.

L'enunciato è così dimostrato. Mentre però nella classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ esistevano una funzione massima ad una minima in ogni punto, ciò non accade nella classe $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$. Essa ha, come abbiamo visto, una funzione minima ogni punto; ma le seguenti considerazioni mostrano che $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ non ha in una funzione massima.

Detto ancora $a$ l'estremo superiore degli $x$ per cui $\Phi(x) + \Psi(x) - 1 \leq 0$ le rette $x = a$, $y = a$ dividono il piano in quattro quadranti. Nei punti $(x, y)$ con $x \leq a$, $y \leq a$ è evidentemente, per le condizioni di non decrescenza, $\Phi(xy) = 0$. Nei punti con $x > a$, $y > a$ (supponiamo ad es. $x > y$) è

$$\Phi(x) + \Psi(y) - 1 \geq \Phi(y) + \Psi(y) - 1 > 0$$

deve essere inoltre

$$-\Phi(x, y) + \Phi(y, y) + \Phi(x, y') - \Phi(y, y') \geq 0 \qquad y' > y$$

da cui, facendo tendere $y'$ a $+\infty$, si ottiene:

$$-\Phi(x\,y) + \Phi(y) + \Psi(y) - 1 + \Phi(x) - \Phi(y) \geq 0$$

che con la (4) dà

$$\Phi(x\,y) = \Phi(x) + \Psi(y) - 1.$$

Le funzioni minimanti restano perciò indeterminate solo nei punti del II e del IV quadrante. In essi soddisfano manifestamente alle

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\Phi(x, y) \leq \min[\Phi(x), \; \Phi(a^-) + \Psi(y) - 1] && \text{per il II} \\ &\Phi(x, y) \leq \min[\Psi(y), \; \Phi(x) + \Phi(a^-) - 1] && \text{per il IV quadrante.} \end{aligned}$$

Ora la funzione definita dalle (17) con il segno $=$ non è in generale una funzione di ripartizione, perchè non verifica la (2). D'altra parte esistono per ogni punto $(x, y)$ funzioni di $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ che assumono in quel punto il valore massimo dato dalle (17). Chiariamo ciò con un esempio, dato da funzioni costanti a tratti già usate altre volte. Sia

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{per } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{per } x > 2 \end{cases} \qquad \Psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{per } 0 < y \leq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{per } 1 < y \leq 2 \\ 1 & \text{per } y > 2 \end{cases}$$

La (16) e le condizioni di non decrescenza determinano le $\Phi(xy)$ su tutto il piano tranne i punti dei due quadrati $Q_1: 0 < x \leq 1,\ 1 < y \leq 2$ e $Q_2: 1 < x \leq 2,\ 0 < y \leq 1$. In essi le (17) danno $\Phi(xy) \leq \frac{1}{3}$ e si vede immediatamente che la funzione definita uguale a $\frac{1}{3}$ in $Q_1$ e $Q_2$ non è funzione di ripartizione, mentre sono funzioni di ripartizione, appartenenti a $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$, quella ottenuta ponendo

$$\Phi(xy) = 0 \quad \text{in} \quad Q_1 \qquad \Phi(xy) = \frac{1}{3} \text{ in } Q_2$$

e l'altra

$$\Phi(xy) = \frac{1}{3} \quad \text{in} \quad Q_1 \qquad \Phi(xy) = 0 \text{ in } Q_2$$

## 4. Il momento $M_r[\Phi]$ rispetto ad una retta qualunque con coefficiente angolare positivo.

I teoremi dei numeri 2 e 3 si possono facilmente generalizzare ad una retta qualsiasi data dall'equazione $y = mx + p$ con $m > 0$. Si ottiene:

TEOREMA III. *Date due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ non decrescenti soddisfacenti alle (9) e una retta $r$ con coefficiente angolare positivo, esiste una classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ di funzioni della classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ per le quali il momento $M_r[\Phi]$ rispetto ad $r$ assume il valore minimo; tale valore è dato da*

$$m \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x) - \Psi(mx + p)|\, dx .$$

*La classe $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ è costituita dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla condizione*

$$\Phi(x, m x + p) = \min [\Phi(x), \Psi(m x + p)] \tag{14'}$$

*Essa ha una funzione massima $\Phi_1(x, y)$ e una funzione minima $\Phi_{1,0}(x y)$.*

TEOREMA IV. *Nelle ipotesi del teorema III, esiste una classe $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ di funzioni della classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ per cui l'integrale $M_r[\Phi]$ assume il valore massimo, sempre finito,*

$$m \int_{-\infty}^{a} [\Phi(x) - \Psi(m x + p)]\, d x + m \int_{a}^{+\infty} [1 - \Phi(x)] + [1 - \Psi(m x + p)]\, d x. \tag{15'}$$

*La classe $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ è costituita dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla condizione.*

$$\Phi(x, m x + p) = \max [\Phi(x) + \Psi(m x + p) - 1, 0]. \tag{16'}$$

La dimostrazione si fa mediante un cambiamento di variabili. Il momento sia calcolato rispetto alla retta $r$ di equazione

$$y = m x + p \qquad (m > 0)$$

Poniamo

$$\begin{aligned} x' &= m x + p \\ y' &= y \end{aligned} \tag{18}$$

La funzione $\Phi(x)$ diventerà $\Phi\left(\dfrac{x' - p}{m}\right)$, e questa, considerata come funzione di $x'$ è ancora una funzione di ripartizione che chiameremo $\Phi'(x')$. Se poniamo

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi\left(\frac{x' - p}{m}\right) = \Phi'(x') \\ \Psi(y) &= \Psi(y') \\ \Phi(x y) &= \Phi\left(\frac{x' - p}{m}, y'\right) = \Phi'(x', y') \end{aligned} \tag{19}$$

$\Phi'(x'\,y')$ è una nuova funzione di ripartizione doppia che ha per distribuzioni marginali $\Phi'(x)$ e $\Psi(y')$ [4].

D'altra parte nel piano $(x'\,y')$ l'equazione della retta $r$ diviene $y' = x'$ e l'integrale da studiare è

$$M_r[\Phi'] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |y' - x'|\, d\,\Phi'(x'\,y')$$

Per esso valgono il teorema I e il teorema II. Perciò passando mediante le (18) e (19) dal piano $(x'\,y')$ al piano $(x\,y)$, si può affermare che esiste una classe $\Gamma_1(\Phi\,,\,\Psi)$ di funzioni $\Phi(x\,y)$ minimanti ed una classe $\Gamma_2(\Phi\,,\,\Psi)$ di funzioni massimanti il momento $M_r[\Phi]$.

Notando che è

$$\Phi'(x'\,x') = \Phi\left(\frac{x'-p}{m}\,,\,x'\right) = \Phi(x\,,\,m\,x+p)$$

le condizioni (14) e (15) si trasformano nelle

$$\Phi(x\,,\,m\,x+p) = \max\,[\Phi(x)\,,\,\Psi(m\,x+p)] \tag{14'}$$

$$\Phi(x\,,\,mx+p) = \min\,[\Phi(x) + \Psi(m\,x+p) - 1\,,\,0]. \tag{15'}$$

Le funzioni minima e massima della classe $\Gamma_1(\Phi\,,\,\Psi)$ sono ora

$$\begin{cases} \Phi'_{1,0}(x'\,y') = \Phi'(x') - \inf\limits_{(x'\,y')}{}_0\,[\Phi'(z) - \Psi(z)] & \text{per} \quad x' \leq y' \\ \Phi'_{1,0}(x'\,y') = \Psi(y') - \inf\limits_{(y'\,x')}{}_0\,[\Phi'(z) - \Psi(z)] & \text{per} \quad x' \geq y' \end{cases}$$

$$\Phi'_1(x'\,y') = \min\,[\Phi'(x')\,,\,\Psi(y')]$$

---

[4] La condizione $m > 0$ è essenziale perchè ciò accada. Essendo $m > 0$ da $x'_2 > x'_1$ segue $x_2 > x_1$ e quindi

$$\Phi'(x'_2) = \Phi(x_2) \geq \Phi(x_1) = \Phi'(x'_1)$$

e la $\Phi'(x')$ è non decrescente e inoltre:

$$\lim_{x'\to+\infty}[1 - \Phi'(x')]\,x'^{\gamma} = \lim_{x\to+\infty}[1 - \Phi(x)]\,(m\,x+p)^{\gamma} = \lim_{x\to+\infty}[1 - \Phi(x)]\,x^{\gamma}\left(m + \frac{p}{x}\right)^{\gamma} = 0$$

$$\lim_{x'\to-\infty}\Phi'(y')\,x'^{\gamma} = \lim_{x\to-\infty}\Phi(x)\,(m\,x+p)^{\gamma} = \lim_{x\to-\infty}\Phi(x)\,x^{\gamma}\left(m + \frac{p}{x}\right)^{\gamma} = 0$$

e sono quindi verificate le (9). Analogamente si dimostrano con calcoli immediati le altre affermazioni.

cioè nel piano $(x\,y)$

$$\begin{cases} \Phi_{1,0}(x\,y) = \Phi(x) - \inf_{0\,(mx+p,y)} \left[\Phi\left(\dfrac{2-p}{m}\right),\ \psi(z)\right] & y \geq m\,x + p \\ \Phi_{1,0}(x\,y) = \Psi(y) - \inf_{0\,(y,mx+p)} \left[\Phi\left(\dfrac{2-p}{m}\right),\ \Psi(z)\right] & y \leq m\,x + p \end{cases}$$

Il teorema III è così dimostrato. Procedendo analogamente per il massimo, si dimostra immediatamente anche il teorema IV. Anche per il massimo del momento rispetto alla retta $r$ valgono le considerazioi fatte per la retta $y = x$: la classe $\Gamma_2(\Phi\,,\ \Psi)$ ha una funzione minima ma non ha una funzione massima, come si vede subito adattando alla nuova retta l'esempio del numero 3.

## § 2. Momento di ordine 1 rispetto ad una retta con coefficiente angolare negativo

### 1. Altra espressione di $M_r[\Phi]$.

Per le rette con coefficiente angolare $m < 0$ bisogna modificare leggermente tutto il procedimento. Come già per $m > 0$, restringiamo da principio lo studio alla retta $y = -x$. Abbiamo cioè il momento

$$M_r[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |y + x|\, d\,\Phi(x\,y)$$

Possiamo ancora servirci della successione di quadrati che hanno per centro l'origine e lato $2\,h$. Applicando la formula di integrazione per parti (8) si ha:

$$(20) \quad \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} |y + x|\, d\Phi(xy) = \underset{x}{\Delta_{-h}^{h+}}\,\underset{y}{\Delta_{-h}^{h+}} |y + x|\,\Phi(x\,y) - \underset{x}{\Delta_{-h}^{h+}} \int_{-h}^{h} \Phi(xy)\, d_y\,|y + x| -$$

$$- \underset{y}{\Delta_{-h}^{h+}} \int_{-h}^{h} \Phi(x\,y)\, d_x\,|y + x| + \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \Phi(x\,y)\, d\,|y + x|\,.$$

$$\mathop{\Delta_{-h^-}^{h^+}}_{x}\mathop{\Delta_{-h^-}^{h^+}}_{y} |y+x|\, \Phi(x\,y) = 2\,h\,\Phi(h^+,\, h^+) + 2\,h\,\Phi(-h^-, -h^-)\,.$$

$$\mathop{\Delta_{-h^-}^{h^+}}_{x}\int_{-h}^{h}\Phi(xy)\,d_y\,|y+x| = \int_{-h}^{h}\Phi(h^+, y)\,d_y\,|h+y| - \int_{-h}^{h}\Phi(-h^-, y)\,d_y\,|-h+y| =$$

$$= \int_{-h}^{h}\Phi(h^+, y)\,dy + \int_{-h}^{h}\Phi(-h^-, y)\,dy$$

$$\mathop{\Delta_{-h^-}^{h^+}}_{y}\int_{-h}^{h}\Phi(x\,y)\,d_x\,|y+x| = \int_{-h}^{h}\Phi(x,\, h^+)\,dx + \int_{-h}^{h}\Phi(x\,, -h^-)\,dx\,.$$

Per il calcolo dell'integrale doppio si segue lo stesso procedimento del paragrafo 2. L'unica differenza è data dal segno che si ottiene. Infatti nel caso della retta $y = x$ la variazione $V_r\,|y - x|$ su un quadrato avente per diagonale la retta stessa risultava negativa, mentre nel caso della retta $y = -x$ la $|y + x|$ si annulla nei vertici che danno il contributo negativo, e la $V_r\,|y + x|$ risulta positiva. Si ottiene quindi

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}\Phi(x\,y)\,d\,|y+x| = 2\int_{\gamma}\Phi(xy)\,dx = 2\int_{-h}^{h}\Phi(x\,, -x)\,dx$$

e la (20) diventa

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}|y+x|\,d\Phi(xy) = 2\,h\,\Phi(h^+, h^+) + 2h\,\Phi(-h^-, -h^-) - \int_{-h}^{h}\Phi(h^+\,, y)\,dy -$$

$$-\int_{-h}^{h}\Phi(-h^-, y)\,dy - \int_{-h}^{h}\Phi(x, h^+)\,dx - \int_{-h}^{h}\Phi(x, -h^-)\,dx + \int_{-h}^{h}\Phi(x\,, -x)\,dx$$

che, con le considerazioni di pag. 41 si può scrivere

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}|y+x|\,d\Phi(xy) = 2h - \int_{-h}^{h}\Psi(y)\,dy - \int_{-h}^{h}\Phi(x)dx + 2\int_{-h}^{h}\Phi(x, -x)\,dx + \varepsilon\left(\frac{1}{h}\right) =$$

$$= \int_{-h}^{h}dx - \int_{-h}^{h}\Psi(x)\,dx - \int_{-h}^{h}\Phi(x)\,dx + 2\int_{-h}^{h}\Phi(x, -x)\,dx + \varepsilon\left(\frac{1}{h}\right) =$$

$$= \int_{-h}^{h}[1 - \Phi(x) - \Psi(-x) + 2\,\Phi(x, -x)]\,dx + \varepsilon\left(\frac{1}{h}\right)$$

da cui, passando al limite per $h \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |y+x|\, d\,\Phi(x\,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \Phi(x) - \Psi(-x) + 2\,\Phi(x, -x)]\, dx. \tag{21}$$

## 2. Gli estremi del momento rispetto alla retta $y = -x$.

Mediante la (21) si dimostrano facilmente i teoremi:

TEOREMA V. *Nelle ipotesi del teorema I il momentò $M_r[\Phi]$ rispetto alla $y = -x$ ha in $\Gamma(\Phi\,\Psi)$ una classe $\Gamma_1'(\Phi,\psi)$ di funzioni minimanti. Tale classe è data dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \psi)$ che soddisfano alla*

$$\Phi(x, -x) = \max[\Phi(x) + \Psi(-x) - 1, 0] \tag{22}$$

*e il minimo di $M_r[\Phi]$ è dato da*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(x) + \Psi(-x) - 1|\, dx.$$

*La classe $\Gamma_1'(\Phi, \Psi)$ ha una funzione minima $\Phi_0(x\,y)$ e una funzione massima $\Phi_{1,0}(x\,y)$.*

TEOREMA VI. *Nelle ipotesi del teorema I il momento $M_r[\Phi]$ rispetto alla retta $y = -x$ ha in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una classe $\Gamma_2'(\Phi, \Psi)$ di funzioni massimanti. Tale classe è data dalle fuuzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla condizione*

$$\Phi(x, -x) = \min[\Phi(x), \Psi(-x)] \tag{23}$$

*e il massimo di $M_r(\Phi)$ è dato dal valore (sempre finito)*

$$\int_{-\infty}^{b} \{[1 - \Psi(-x)] + \Phi(x)\}\, dx + \int_{b}^{+\infty} \{[1 - \Phi(x)] + \Psi(-x)\}\, dx.$$

La dimostrazione di questi teoremi si conduce analogamente a quelle del paragrafo 1. Scritto infatti $M_r[\Phi]$ nella forma (21) si nota che la funzione integranda è non negativa: infatti è

$$\Phi(x, -x) \geq \max[\Phi(x) + \Psi(-x) - 1, 0]$$

e la funzione integranda è allora maggiore o uguale a

$$1 - \Phi(x) - \Psi(-x) + 2 \max [\Phi(x) + \Psi(-x) - 1, 0] = |1 - \Phi(x) - \Psi(-x)|$$

Quindi per avere il minimo occorre e basta rendere minima in ogni punto la funzione $\Phi(x, -x)$, il che per la (4) si ottiene ponendo

$$\Phi(x, -x) = \max [\Phi(x) + \Psi(-x) - 1 , 0] \tag{22}$$

e questa condizione, per le considerazioni fatte sopra dà a $M_r\, [\Phi]$ il valore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |1 - \Phi(x) - \Psi(-x)| \, dx .$$

Tale valore è finito nelle nostre ipotesi: basta infatti, fissato un numero reale arbitrario $a$, scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |1 - \Phi(x) - \Psi(-x)| \, dx \leq \int_{-\infty}^{a} \{[1 - \Psi(x)] + \Phi(x)\} + $$
$$+ \int_{a}^{+\infty} \{[1 - \Phi(x)] + \Psi(-x)\} \, dx$$

per vedere che le (9) assicurano l'esistenza dell'integrale.

Una funzione minimante è la funzione minima della classe di Fréchet $\Phi_0(x\,y)$. Essa non è in generale unica, ma esiste tutta una classe $\Gamma_1'(\Phi, \Psi)$ di funzioni minimanti.

La funzione $\Phi_0(x\,y)$, minima in $\Gamma(\Phi, \Psi)$, è minima anche in $\Gamma_1'(\Phi, \Psi)$. Esiste anche in $\Gamma_1'(\Phi, \Psi)$ una funzione massima. Essa è data, con le notazioni del par. 3, da:

$$\Phi_{0,1}(x\,y) = \Phi(x) + \Psi(y) - 1 + \inf_{0\,(-y,x)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] \qquad x \geq -y$$

$$\Phi_{0,1}(x\,y) = \inf_{0\,(x,-y)} [\Phi(z) + \psi(-z) - 1] \qquad x \leq -y$$

per $x = -y$ le due definizioni coincidono e si ritrova la (22).

La $\Phi_{0,1}(x\,y)$ deve soddisfare in ogni punto alla disuguaglianza

$$\Phi(x\,y) \leq \Phi_{0,1}(x\,y) \tag{24}$$

per ogni funzione della classe $\Gamma_1'(\Phi, \Psi)$.

Cominciamo col dimostrare la (24) per i punti $(x, y)$ con $x > -y$. Consideriamo un punto qualunque $(z, -z)$ della retta $y = -x$, con $-y \leq z \leq x$ (5) e il punto ausiliario $(z, y)$. Preso un $x' > z$, è

$$\Phi(z, -z) - \Phi(z, y) + \Phi(x', y) - \Phi(x', -z) \geq 0$$

$$\Phi(z, y) \leq \Phi(z, -z) + \Phi(x', y) - \Phi(x', -z)$$

e facendo tendere $x'$ a $+\infty$,

$$\Phi(z, y) \leq \Phi(z, -z) + \Psi(y) - \Psi(-z) \tag{25}$$

Considerando ora i punti $(z, y)$ e $(x, y)$ e un numero $y' > y$, e facendo tendere $y'$ a $+\infty$, si ottiene

$$\Phi(x\, y) \leq \Phi(z, y) - \Phi(z) + \Phi(x)$$

che, con la (25) dà

$$\begin{aligned} \Phi(x\, y) &\leq \Phi(z, -z) + \Psi(y) - \Psi(-z) - \Phi(z) + \Phi(x) = \\ &= \Phi(z, -z) + \Phi(x) + \Psi(y) - 1 + 1 - \Phi(z) - \Psi(-z) \end{aligned} \tag{26}$$

che vale per ogni $z$ con $-y \leq z \leq x$.

Se esiste una $\bar{z}$ in cui è $\Phi(\bar{z}) + \Psi(\bar{z}) - 1 \geq 0$, sarà:

$$\Phi(\bar{z}, -\bar{z}) = \Phi(\bar{z}) + \Psi(-\bar{z}) - 1$$

e quindi

$$\Phi(x\, y) \leq \Phi(x) + \Psi(y) - 1$$

mentre

$$\inf_{0\,(-y,x)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] = 0$$

e la (24) è dimostrata.

Se invece è sempre, per $-y \leq z \leq x$, $\Phi(z) + \Psi(z) - 1 < 0$ risulta

$$\Phi(z, -z) = 0$$

e si ha per la (26)

$$\Phi(x\, y) \leq \Phi(x) + \Psi(y) - 1 + \inf_{0\,(-y,x)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)]$$

che dimostra ancora la (24).

---

(5) Per $z = -y$ o $z = x$, la dimostrazione è leggermente semplificata non essendoci bisogno di ricorrere al punto ausiliario.

Passando ai punti $(x, y)$ con $x \leq -y$, sempre scegliendo il punto ausiliario $(z, y)$, si ha

$$\Phi(x\,y) \leq \Phi(z, y) \leq \Phi(z, -z) \tag{27}$$

per cui se in un punto $\bar{z}$ è $\Phi(\bar{z}) + \Psi(-\bar{z}) - 1 \leq 0$, è

$$\Phi(\bar{z}, -\bar{z}) = 0, \quad \inf_{0\,(x,-y)} [\Phi(z) + \Psi(z) - 1] = 0$$

e la (24) è soddisfatta. Se invece è sempre $\Phi(z) + \Psi(-z) - 1 > 0$ ne segue

$$\Phi(z, -z) = \Phi(z) + \Psi(-z) - 1$$

e per la (27) si ha

$$\Phi(x\,y) \leq \inf_{(x,-y)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] = \inf_{0\,(x,-y)} [\Phi(z) + \Psi(z) - 1].$$

La (24) è così dimostrata. Bisogna ora dimostrare che la $\Phi_{0,1}(x\,y)$ appartiene alla $\Gamma_1'(\Phi, \Psi)$, e per questo, essendo verificata la (22) e dimostrandosi immediatamente le (3), resta da provare che vale la (2). Come nel par. 1, ciò si ottiene esaminando i diversi modi in cui i quattro vertici del rettangolo su cui si calcola la variazione $\Delta^{(2)}$ si dispongono rispetto alla retta $y = -x$, e calcolando per ciascuno di essi le possibili espressioni di $\Phi_{0,1}(x\,y)$. Limitiamoci a farlo per il caso di meno immediata dimostrazione, quello in cui due punti, (ad es. $(x_1, y_2)$ e $(x_2, y_2)$) stanno nel semipiano $x > -y$. Si ha allora $-y_2 < x_1 < x_2 < -y_1$, e la variazione doppia diventa

$$\Delta^{(2)} \Phi_{0,1}(x\,y) = \inf_{0\,(x_1,-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] - \inf_{0\,(x_2,-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] +$$

$$+ \inf_{0\,(-y_2,x_2)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] - \inf_{0\,(-y_2,x_1)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] + \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Trascurando il caso banale che si annullino i primi quattro termini, sia diverso da zero solo il secondo termine (o il quarto: il procedimento è analogo); allora è

$$\inf_{(x_1,-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] = \inf_{(x_1,x_2)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] \leq 0$$

ed è, per $x_1 \leq z \leq x_2$,

$$\Phi(z) + \Psi(-z) - 1 \geq \Phi(x_1) + \Psi(-x_2) - 1$$

$$\Phi(x_1) + \Psi(-x_2) - 1 \leq 0 .$$

D'altra parte, da $\inf_0\limits_{(x_2,-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] > 0$ segue

$$\inf_0\limits_{(x_2,-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) -] \leq \Phi(x_2) + \Psi(-x_2) - 1$$

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) - \inf_0\limits_{(x_2-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] \geq \Phi(x_2) - \Phi(x_1) -$$
$$- \Phi(x_2) - \Psi(-x_2) + 1 \geq 0\,.$$

Supponiamo ora diversi da zero il secondo e il quarto termine, nulli il primo e il terzo. Sarà:

$$\inf_0\limits_{(x_2,-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] \leq \Phi(x_2) + \Psi(-x_2) - 1$$

$$\inf_0\limits_{(-y_2,x_1)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] \leq 1 - \Phi(x_1) - \Psi(-x_1)$$

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) - \inf_0\limits_{(x_2,-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] -$$
$$- \inf_0\limits_{(-y_2,x_1)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] \geq \Phi(x_2) - \Phi(x_1) - \Phi(x_2) - \Psi(-x_2) + 1 -$$
$$- 1 + \Phi(x_1) + \Psi(-x_1) \geq 0\,.$$

Se infine con si verifica uno dei casi precedenti, sarà diverso da zero il primo o il terzo termine (non possono essere contemporaneamente diversi da zero per la loro definizione). Sia ad es. $\inf_0\limits_{(x_1,-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] \neq 0$. Ciò significa $\Phi(z) + \Psi(-z) - 1 > 0$ per $x_1 \leq z \leq -y_1$, e quindi

$$\inf_0\limits_{(-y_2,x_2)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] = \inf_0\limits_{(-y_2,x_1)} [1 - \Phi(z) - \Psi(-z)] = 0.$$

Se $\inf_0\limits_{(x_1,-y_1)} [\Phi(z) - \Psi(-z) - 1] = \inf_0\limits_{(x_2,-y_2)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1)$ la cosa è immediata. In caso contrario è

$$\inf_0\limits_{(x_1,-y_1)} [\Phi(z) - \Psi(-z) - 1] = \inf_0\limits_{(x_1,\,x_2)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1]$$

e quindi, per $x_1 \leq x \leq x_2$

$$\Phi(z) + \Psi(-z) - 1 \geq \Phi(x_1) + \Psi(-x_2) - 1$$

$$(\inf_0\limits_{(x_1,\,x_2)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] \geq \Phi(x_1) + \Psi(-x_2) - 1$$

$$\inf_0\limits_{(x_1,-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1] + \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \geq \Phi(x_2) - \Phi(x_1) + \Phi(x_1) +$$
$$+ \Psi(-x_2) - 1 \geq \inf_0\limits_{(x_2,-y_1)} [\Phi(z) + \Psi(-z) - 1]$$

cioè, anche in quest'ultimo caso, $\Delta^{(2)}\, \Phi_{0,1}(x\,y) \geq 0$.

Con procedimenti analoghi la dimostrazione può completarsi, ottenendo che la $\Phi_{0,1}(xy)$ è una funzione di $\Gamma_1'(\Phi, \Psi)$. Il teorema V risulta in tal modo dimostrato.

Per ottenere il massimo dell'integrale (21) occorre e basta rendere massima la funzione $\Phi(xy)$ sulla retta $y = -x$, cioè, per la (5), porre la condizione

$$\Phi(x, -x) = \min[\Phi(x), \Psi(-x)] \tag{23}$$

e tale condizione caratterizza la classe $\Gamma_2'(\Phi, \Psi)$ delle funzioni massimanti.

L'integrale (21) diventa allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 - \Phi(x) - \Psi(-x) + 2\min[\Phi(x), \Psi(-x)]\, dx$$

Poichè, al crescere di $x$, $\Phi(x)$ non decresce, mentre $\Psi(-x)$ non cresce, esisterà un punto $b$ tale che

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\leq \Psi(-x) \qquad & x < b \\ \Phi(x) &\geq \Psi(-x) \qquad & x > b \end{aligned}$$

Si ha allora

$$M_r[\Phi] = \int_{-\infty}^{b} \{[1 - \Psi(-x)] + \Phi(x)\}\, dx + \int_{b}^{+\infty} \{[1 - \Phi(x)] + \Psi(-x)\}\, dx$$

e gli integrali al secondo membro hanno, per le (9), valore finito.

Anche il teorema VI è così dimostrato. È opportuno notare che, come per la retta $y = x$, la classe $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$ non ha in generale le due funzioni estreme. Essa ha una funzione massima, la (7), ma non ha necessariamente una funzione minima in ogni punto.

## 3. Il momento $M_r[\Phi]$ rispetto ad una retta qualunque con coefficiente angolare negativo.

I due teoremi del numero precedente si generalizzano immediatamente al caso di una retta qualsiasi con coefficiente angolare negativo. Si ottengono i teoremi

TEOREMA VII. *Date due funzioni non decrescenti* $\Phi(x)$ *e* $\Psi(y)$ *soddisfacenti alle* (9) *ed una retta* $r$ *con coefficiente angolare negativo, il momento*

*$M_r[\Phi]$ ha in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una classe $\Gamma_1'(\Phi, \Psi)$ di funzioni minimanti. Tale classe è data dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla*

$$\Phi(x, m x + p) = \max [\Phi(x) + \Psi(m x + p) - 1, 0] \tag{22'}$$

*e il minimo di $M^r[\Phi]$ è dato da*

$$-m \int_{-\infty}^{+\infty} | \Phi(x) + \Psi(m x + p) - 1 | \, dx .$$

*La classe $\Gamma_1, (\Phi, \Psi)$ ha una funzione minima $\Phi_0(x y)$ e una funzione massima*

TEOREMA VIII. *Nelle ipotesi del teorema VII il momento $M_r[\Phi]$ in $\Gamma(\Phi, \Psi)$ ha una classe $\Gamma_2'(\Phi, \Psi)$ di funzioni massimanti. Tale classe è data dalle funzioni di $\Gamma(\Phi, \Psi)$ che soddisfano alla condizione*

$$\Phi(x, m x + p) = \min [\Phi(x), \Psi(m x + p)] \tag{23'}$$

*e per esse $M_r[\Phi]$ assume il valore, sempre finito,*

$$-m \int_{-\infty}^{b} \{[1 - \Psi(m x + p)\} + \Phi(x)] \, dx - m \int_{b}^{+\infty} \{[1 - \Phi(x)] + \psi(m x + p)\} \, dx .$$

La dimostrazione di tali teoremi è del tutto analoga a quella condotta nel § 1, n. 4, per i teoremi III e IV. Il cambiamento di variabili che ora si sfrutta è dato da

$$x' = -m x - p$$

$$y' = y$$

Essendo $m < 0$, si ha anche ora che, per $x \to +\infty$, anche $x' \to +\infty$ e viceversa. La dimostrazione quindi può procedere in modo analogo.

Con i successivi ampliamenti, si sono trovati gli estremi del momento $M_r[\Phi]$ rispetto a qualunque retta del piano, che non sia parallela ad uno degli assi. Per ciascuna retta si è trovata una classe di funzioni minimanti ed una classe di funzioni massimanti. È opportuno notare quale ruolo giochino in queste classi le funzioni minima $\Phi_0(xy)$ e massima $\Phi_1(xy)$ della classe di Fréchet. Per ogni retta $r$ con coefficiente positivo la $\Phi_1(xy)$ è una funzione minimante, anzi tutte le classi $\Gamma_1(\Phi, \Psi)$ rispetto a rette diverse la hanno come funzione massima, mentre la $\Phi_0(xy)$ è massimante ed è la funzione minima in ogni $\Gamma_2(\Phi, \Psi)$. Quando si passa alle rette con coefficiente negativo, i risultati si invertono: per ogni retta la $\Phi_0(xy)$ è una funzione minimante e la $\Phi_1(xy)$ una funzione massimante, ed entrambe hanno ancora nelle classi $\Gamma_1'(\Phi, \Psi)$ e $\Gamma_2'(\Phi, \Psi)$ le stesse proprietà. Questa inversione dei risultati apparirà in forma più semplice nel caso del momento di ordine $\alpha > 1$.

## § 3. Il momento di ordine $\alpha$.

### 1. Trasformazione dell'integrale $M_r^\alpha[\Phi]$.

Passiamo al momento di ordine $\alpha$, con $\alpha$ numero reale maggiore di 1. Date due funzioni di ripartizione $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ ed una retta $r$ di equazione $y = mx + p$, esso è dato dall'integrale di Stieltjes

$$M_r^\alpha[\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |y - mx - p|^\alpha \, d\,\Phi(xy)$$

dove $\Phi(xy)$ è una funzione della classe di Fréchet $\Gamma(\Phi, \Psi)$.

Supponiamo ancora, per la ricerca degli estremi, che le funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ soddisfino alle (9).

Come già per $\alpha = 1$, il procedimento che seguiremo è quello di ridurre l'integrale $M_r^\alpha[\Phi]$ ad un integrale di Lebesgue, in modo da ottenere una forma particolarmente semplice che, analogamente alla (13) ed alla (21), ci permetta una ricerca immediata degli estremi. Le condizioni (9), oltre a permetterci di ridurre $M_r^\alpha[\Phi]$ a tale forma, ci assicurano, come vedremo nel seguito, che il momento $M_r^\alpha[\Phi]$ ha sempre valore finito.

Anche per $\alpha > 1$ bisogna distinguere due casi, a seconda che la retta $r$ abbia coefficiente angolare positivo o negativo; e ciò per leggere modifiche nella trattazione, e per i risultati addirittura invertiti che, come già accennato, per essi si ottengono. Partiremo anche ora dallo studio del momento rispetto alle bisettrici, (rispettivamente $y = x$ nel primo e $y = -x$ nel secondo caso), che ci permettono una notevole semplificazione dei calcoli, per ricondurci poi mediante un cambiamento di variabili al caso generale.

Cominciando perciò con il momento rispetto alla retta $y = x$, avremo

$$M_r^\alpha [\Phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - x|^\alpha \, d\, \Phi(xy)$$

Seguendo il procedimento già usato, ci limiteremo a calcolare l'integrale nei quadrati di centro l'origine e lato $2h$, passando poi al limite per $h$ tendente a $+\infty$.

Ciò premesso, applichiamo la formula (8) di integrazione per parti

$$\int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} |y - x|^\alpha \, d\, \Phi(xy) = \mathop{\Delta}_{x}{}_{-h^-}^{h^+} \mathop{\Delta}_{y}{}_{-h^-}^{h^+} |y - x| \, \Phi(xy) -$$

$$- \mathop{\Delta}_{x}{}_{-h^-}^{h^+} \int_{-h}^{h} \Phi(xy) \, d_y |y - x|^\alpha - \mathop{\Delta}_{y}{}_{-h^-}^{h^+} \int_{-h}^{h} \Phi(xy) \, d_x |y - x|^\alpha + \tag{28}$$

$$+ \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} \Phi(xy) \, d\, |y - x|^\alpha .$$

Trasformiamo i termini del secondo membro

$$\mathop{\Delta}_{x}{}_{-h^-}^{h^+} \mathop{\Delta}_{y}{}_{-h^-}^{h^+} |y - x|^\alpha \, \Phi(xy) = -(2h)^\alpha [\Phi(h^+, -h^-) + \Phi(-h^-, h^+)]$$

$$\mathop{\Delta}_{x}{}_{-h^-}^{h^+} \int_{-h}^{h} \Phi(xy) \, d_y |y - x|^\alpha = \int_{-h}^{h} \Phi(h^+, y) \, d_y |h - y|^\alpha -$$

$$- \int_{-h}^{h} \Phi(-h^-, y) \, d_y |-h - y|^\alpha =$$

$$= \int_{-h}^{h} \Phi(h^+, y) \, d_y (h - y)^\alpha - \int_{-h}^{h} \Phi(-h^-, y) \, d_y (h + y)^\alpha =$$

$$= - \int_{-h}^{h} \Phi(h^+, y) \, \alpha (h - y)^{\alpha - 1} \, d_y - \int_{-h}^{h} \Phi(-h^-, y) \, \alpha (h + y)^{\alpha - 1} \, dy .$$

Analogamente si trova

$$\mathop{\Delta}_{y}{}^{h^+}_{-h^-} \int_{-h}^{h} \Phi(x\,y)\, d_x\, |y - x|^\alpha = - \int_{-h}^{h} \Phi(x\,,\,h^+)\,\alpha\,(h - x)^{\alpha-1}\,d\,x -$$

$$- \int_{-h}^{h} \Phi(x\,,\,-h^-)\,\alpha\,(h + x)^{\alpha-1}\,d\,x\,.$$

Per calcolare il successivo integrale doppio della (28), spezziamo il campo di integrazione nei due triangoli ottenuti tagliando il quadrato $R$ con la retta $y = x$. In ciascuno di essi la funzione $(y - x)^\alpha$ è di segno costante ed è assolutamente continua. Ricorrendo per l'integrazione alla derivata seconda mista, questa è data da

$$\frac{\partial^2}{\partial\,x\,\partial\,y}\,|y - x|^\alpha = \begin{cases} -\,\alpha\,(\alpha - 1)\,(x - y)^{\alpha-2} & \text{per } x > y \\ -\,\alpha\,(\alpha - 1)\,(y - x)^{\alpha-2} & \text{per } x < y \end{cases}$$

di conseguenza è

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} \Phi(x\,y)\,d\,|y - x|^\alpha = \iint_{T_1} \Phi(x\,y)\,d(x - y)^\alpha + \iint_{T_2} \Phi(x\,y)\,d\,(y - x)^\alpha =$$

$$= - \iint_{T_1} \Phi(x\,y)\,\alpha\,(\alpha - 1)(x - y)^{\alpha-2}\,dx\,dy - \iint_{T_2} \Phi(x\,y)\,\alpha\,(\alpha - 1)\,(y - x)^{\alpha-2}\,dx\,dy =$$

$$= - \int_{-h}^{h} d\,y \int_{y}^{h} \Phi(xy)\,\alpha(\alpha - 1)\,(x - y)^{\alpha-2}\,dx - \int_{-h}^{h} d\,x \int_{x}^{h} \Phi(x\,y)\,\alpha\,(\alpha - 1)\,(y - x)^{\alpha-2}\,d\,y.$$

La (28) si riduce quindi a

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} |y - x|^\alpha\, d\,\Phi(x\,y) = -\,(2\,h)^\alpha\,[\Phi(h^+ - h^-) + \Phi(-\,h^-, h^+)] +$$

$$+ \int_{-h}^{h} \Phi(h^+, y)\,\alpha\,(h - y)^{\alpha-1}\,d\,y + \int_{-h}^{h} \Phi(-\,h^-\,,\,y)\,\alpha\,(h + y)^{\alpha-1}\,d\,y +$$

$$+\int_{-h}^{h} \Phi(x, h^+)\, \alpha\, (h - x)^{\alpha-1}\, d x + \int_{-h}^{h} \Phi(x, - h^-)\, \alpha\, (h + x)^{\alpha-1}\, d x -$$

$$-\int_{-h}^{h} d y \int_{y}^{h} \Phi(x\, y)\, \alpha\, (\alpha - 1)\, (x - y)^{\alpha-2} - \int_{-h}^{h} d x \int_{x}^{h} \Phi(x\, y)\, \alpha\, (\alpha - 1)\, (y - x)^{\alpha-2}\, d y.$$

Per le (9) il termine $-(2\,h)^\alpha\, [\Phi(h^+, -h^-) + \Phi(-h^-, h^+)]$ tende a zero al tendere di $h$ a $+\infty$, e si annullano al limite anche i due integrali

$$\int_{-h}^{h} \Phi(-h^-, y)\, \alpha\, (h + y)^{\alpha-1}\, d y\,, \int_{-h}^{h} \Phi(x, -h^-)\, \alpha\, (h + x)^{\alpha-1}\, d x.$$

Inoltre si ha per la (4) $\Psi(y) - \Phi(h^+, y) \leq 1 - \Phi(h^+)$

$$\int_{-h}^{h} \Psi(y)\, \alpha\, (h - y)^{\alpha-1}\, d y - \int_{h}^{h} \Phi(h^+, y)\, \alpha\, (h - y)^{\alpha-1}\, d y =$$

$$= \int_{-h}^{h} [\Psi(y) - \Phi(h^+, y)]\, \alpha\, (h - y)^{\alpha-1}\, d y \leq$$

$$\leq [1 - \Phi(h^+)] \int_{-h}^{h} \alpha\, (h - y)^{\alpha-1}\, d y = [1 - \Phi(h^+)]\, (2\, h)^\alpha$$

che per le (9) tende a zero per $h \to +\infty$. Si ha cioè

$$\int_{-h}^{h} \Phi(h^+, y)\, \alpha\, (h - y)^{\alpha-1}\, d y = \int_{-h}^{h} \Psi(y)\, \alpha\, (h - y)^{\alpha-1}\, d y + \varepsilon_1 \left(\frac{1}{h}\right)$$

e analogamente

$$\int_{-h}^{h} \Phi(x, h^+)\, \alpha\, (h - x)^{\alpha-1}\, d y = \int_{-h}^{h} \Phi(x)\, \alpha\, (h - x)^{\alpha-1}\, d x + \varepsilon_2 \left(\frac{1}{h}\right).$$

Rimane perciò

$$(29)\qquad \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}|y-x|^{\alpha}\,d\Phi(xy)=\int_{-h}^{h}\Psi(y)\,\alpha(h-y)^{\alpha-1}dy+\int_{-h}^{h}\Phi(x)\,\alpha\,(h-x)^{\alpha-1}\,dx-$$

$$-\int_{-h}^{h}dy\int_{y}^{h}\Phi(xy)\,\alpha\,(\alpha-1)(x-y)^{\alpha-2}\,dx-\int_{-h}^{h}dx\int_{x}^{h}\Phi(xy)\,\alpha\,(\alpha-1)\,(y-x)^{\alpha-2}\,dy+\varepsilon\left(\frac{1}{h}\right).$$

Esprimiamo ora i primi due integrali al secondo membro della (29) come integrali doppi. Essendo $\alpha>1$ si può scrivere

$$\Psi(y)\;(h-y)^{\alpha-1}=\int_{y}^{h}d_x\;\Psi(y)\,(x-y)^{\alpha-1}=\int_{y}^{h}\Psi\,(y)\,(\alpha-1)\,(x-y)^{\alpha-2}\,d\,x$$

$$\int_{-h}^{h}\Psi\,(y)\,\alpha\,(h-y)^{\alpha-1}\,d\,y=\alpha\,(\alpha-1)\int_{-h}^{h}d\,y\int_{y}^{h}\Psi\,(y)\,(x-y)^{\alpha-2}\,dx.$$

Analogamente si ha

$$\int_{-h}^{h}\Phi\,(x)\,\alpha\,(h-x)^{\alpha-1}\,d\,x=\alpha\,(\alpha-1)\int_{-h}^{h}dx\int_{x}^{h}\Phi\,(x)\,(y-x)^{\alpha-2}\,d\,y$$

e la (29) si può scrivere

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h}|y-x|^{\alpha}\,d\,\Phi\,(xy)=\alpha(\alpha-1)\int_{-h}^{h}dy\int_{y}^{h}[\Psi(y)-\Phi\,(x\,y)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,dx+$$

$$+\,\alpha\,(\alpha-1)\int_{-h}^{h}d\,x\int_{x}^{h}[\Phi(x)-\Phi\,(xy)]\;(y-x)^{\alpha-2}\;dy+\varepsilon\left(\frac{1}{h}\right).$$

Di qui facendo tendere $h$ all'infinito, si ottiene

$$(30)\qquad M_r^{\alpha}\,[\Phi]=\alpha\,(\alpha-1)\int_{-\infty}^{+\infty}d\,y\int_{y}^{+\infty}[\Psi\,(y)-\Phi\,(x\,y)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,dx+$$

$$+\,\alpha\,(\alpha-1)\int_{-\infty}^{+\infty}d\,x\int_{x}^{+\infty}[\Phi\,(x)-\Phi\,(x\,y)]\;(y-x)^{\alpha-2}\;d\,y$$

che è la formula cercata analoga alla (13) del par. 1.

## 2. Gli estremi del momento rispetto ad una retta con coefficiente angolare positivo.

Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA IX. *Date due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ non decrescenti che soddisfano alle* (9), *esistono nella classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una ed una sola funzione minimante e una sola funzione massimante l'integrale $M_r^\alpha[\Phi]$.*

*La funzione minimante è data dalla* (7) *e per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ diventa*

$$(31) \qquad M_r^\alpha[\Phi_1] = \alpha(\alpha-1)\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} \max[\Psi(y) - \Phi(x), 0]\,(x-y)^{\alpha-2}\,dx +$$

$$+ \alpha(\alpha-1)\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \max[\Phi(x) - \Psi(y), 0]\,(y-x)^{\alpha-2}\,dy.$$

*La funzione massimante è data dalla* (6) *e per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ assume il valore finito*

$$(32) \qquad M_r^\alpha[\Phi_0] = \alpha(\alpha-1)\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} \min[1-\Phi(x), \Psi(y)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,dx +$$

$$+ \alpha(\alpha-1)\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \min[1-\Psi(y), \Phi(x)]\,(y-x)^{\alpha-2}\,dy\,.$$

Premettiamo che $M_r^\alpha[\Phi]$ ha sempre valore finito; ciò deriva dal fatto che, come si vedrà nel seguito, il massimo di $M_r^\alpha[\Phi]$ esiste finito per le (9).

Dimostriamo l'enunciato relativo al minimo. Essendo la funzione sotto il segno positiva, bisogna che per ogni $y$ sia minimo l'integrale

$$\int_y^{+\infty} [\Psi(y) - \Phi(x\,y)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,dx$$

e per ogni $x$ minimo l'integrale

$$\int_x^{+\infty} [\Phi(x) - \Phi(x\,y)]\,(y-x)^{\alpha-2}\,dy$$

Per la prima condizione deve essere, per $x > y$, $\Phi(x\,y)$ massima; per la seconda $\Phi(x\,y)$ deve essere massima per $x < y$. In conclusione il minimo di $M_r^\alpha[\Phi]$ è dato dalla

$$\Phi_1(x\,y) \tag{7}$$

La funzione integranda diventa allora

$$\max[\Psi(y) - \Phi(x), 0]\,(x-y)^{\alpha-2} \quad \text{per} \quad y < x$$
$$\max[\Phi(x) - \Psi(y), 0]\,(y-x)^{\alpha-2} \quad \text{per} \quad y > x$$

ed $M_r^\alpha[\Phi]$ assume la forma (31).

Passiamo ora al massimo. Bisognerà rendere la funzione integranda massima in ogni pnnto. La funzione massimante dovrà essere perciò minima in ogni punto, ed è quindi la

$$\Phi_0(x\,y) = \max[\Phi(x) + \Psi(y) - 1, 0]. \tag{6}$$

Se sostituiamo tale funzione nella (30) otteniamo la (32).

Per dimostrare che $M_r^\alpha[\Phi_0]$ ha valore finito prendiamo, ed es., il primo integrale al secondo membro della (32) e spezziamo il semipiano di integrazione mediante due rette $x = a$, $y = b$, con $a$ e $b$ numeri reali arbitrari, $a > b$.

Consideriamo gli insiemi $I_1$ dei punti con $x \leq a$, $I_3$ dei punti con $y \geq b$, $I_2$ dei punti con $x \geq a$, $y \leq b$. Avremo

$$\iint\limits_{I_1} \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,dx\,dy =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{a} dy \int\limits_{y}^{a} \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,dx \leq \int\limits_{-\infty}^{a} dy\, \Psi(y) \int\limits_{y}^{a} (x-y)^{\alpha-2}\,dx.$$

Essendo $\alpha > 1$ la funzione di $x$ $(x-y)^{\alpha-2}$ può anche essere un infinito per $x \to y$, ma è sempre integrabile sull'intervallo $(y, a)$ ed è

$$\int\limits_{y}^{a} (x-y)^{\alpha-2}\,dx = \frac{(a-y)^{\alpha-1}}{\alpha-1}.$$

Ne segue

$$\iint\limits_{I_1} \min[1 - \Phi(x), \Psi(y)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,dx\,dy \leq \int\limits_{-\infty}^{a} \Psi(y)\,\frac{(a-y)^{\alpha-1}}{\alpha-1}\,dy$$

e l'ultimo integrale scritto esiste finito per le (9).

Così per $I_3$ si ha

$$\iint\limits_{I_3} \min[1-\Phi(x),\ \Psi(y)](x-y)^{\alpha-2}dx dy = \int\limits_b^{+\infty} dx \int\limits_b^{x} \min[1-\Phi(x),\ \Psi(y)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,dy \leq$$

$$\leq \int\limits_b^{+\infty} dx\,[1-\Phi(x)] \int\limits_b^{x} (x-y)^{\alpha-2}\,dy = \int\limits_b^{+\infty} [1-\Phi(x)]\,\frac{(x-b)^{\alpha-1}}{\alpha-1}\,dx$$

che, sempre per le (9), esiste finito.

Avendo scelto $a > b$, l'insieme $I_2$ ha distanza positiva dalla retta $y = x$, e quindi la funzione integranda si mantiene in esso limitata. Inoltre essa è, per $\varrho = \sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$, infinitesima di un ordine maggiore di un numero reale maggiore di due, e più precisamente

$$\lim_{\varrho\to\infty} \min[1-\Phi(x),\ \Psi(x)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,(\sqrt{x^2+y^2})^{2+\gamma-\alpha} = 0$$

Infatti è

$$(x-y)^{\alpha-2}\,(\sqrt{x^2+y^2})^{2+\gamma-\alpha} = \frac{(x-y)^{\alpha-2}}{(\sqrt{x^2+y^2})^{\alpha-2}}\,(\sqrt{x^2+y^2})^{\gamma} =$$

$$= \left(\sqrt{1-\frac{2xy}{x^2+y^2}}\right)^{\alpha-2} (\sqrt{x^2+y^2})^{\gamma}$$

$$\min[1-\Phi(x),\ \Psi(y)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,(\sqrt{x^2+y^2})^{2+\gamma-\alpha} =$$

$$= \min[1-\Phi(x),\ \Psi(y)] \left(\sqrt{1-\frac{2xy}{x^2+y^2}}\right)^{\alpha-2} (\sqrt{x^2+y^2})^{\gamma}.$$

Se ora si suppone, come è lecito, di scegliere $a > 0$, $b < 0$, in $I_2$ è

$$2xy < 0 \qquad 0 < \frac{-2xy}{x^2+y^2} \leq 1 \qquad 1 \leq 1 - \frac{2xy}{x^2+y^2} \leq 2$$

Allora sia per $\alpha - 2$ positivo che per $\alpha - 2$ negativo, il fattore è compreso tra due numeri reali positivi e quindi, per le (9) il limite del termine al secondo membro è zero.

Esiste perciò l'integrale esteso a $I_2$, e da

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{y}^{+\infty} \min[1-\Phi(x),\ \Psi(y)]\,(x-y)^{\alpha-2}\,dx \leq \iint\limits_{I_1} + \iint\limits_{I_2} + \iint\limits_{I_3}$$

segue che anche il primo termine della (32) esiste finito. Ripetendo il procedimento per il secondo termine, si ottiene che $M_r^{\alpha}[\Phi_0]$ esiste finito.

Il teorema IX è così dimostrato. Lo si può generalizzare subito nel

TEOREMA X. *Date due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ non decrescenti che soddisfano alla* (9) *ed una retta $r$ di equazione $y = m\,x + p$ con $m > 0$, esistono nella classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una ed una sola funzione minimante e una sola funzione massimante.*

*La funzione minimante è data dalla* (7) *e per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ diventa:*

$$(31') \quad M_r^\alpha[\Phi_1] = m\alpha(\alpha-1)\int_{-\infty}^{+\infty} d\,y \int_{y}^{+\infty} \max\,[\Psi(y) - \Phi(x),\, 0]\,(m\,x + p - y)^{\alpha-2}\,dx +$$

$$+ m\,\alpha\,(\alpha - 1)\int_{-\infty}^{+\infty} d\,x \int_{x}^{+\infty} \max\,[\Phi(x) - \Psi(y),\, 0]\,(y - m\,x - p)^{\alpha-2}\,dy\,.$$

*La funzione massimante è data dalla* (6) *e per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ assume il valore, sempre finito*

$$(32') \quad M_r^\alpha[\Phi] = m\,\alpha\,(\alpha-1)\int_{-\infty}^{+\infty} d\,y \int_{y}^{+\infty} \min\,[1 - \Phi(x),\, \Psi(y)]\,(m\,x + p - y)^{\alpha-2}\,dx +$$

$$+ m\,\alpha\,(\alpha - 1)\int_{-\infty}^{+\infty} d\,x \int_{x}^{+\infty} \min\,[1 - \Psi(y),\, \Phi(x)]\,(y - m\,x - p)^{\alpha-2}\,d\,y\,.$$

Basta fare ancora il cambiamento di variabili (18) e sfruttare le (19) da esso ricavate. Nel nuovo sistema di coordinate la funzione minimante è

$$\Phi_1'(x'\,y') = \min\,[\Phi'(x'),\ \Psi(y')]$$

cioè, per le (19)

$$\Phi_1(x\,y) = \min\,[\Phi(x),\ \Psi(y)].$$

Lo stesso si ottiene per il massimo, e, sempre mediante le (18) e (19), scritta l'espressione di $M_r^\alpha[\Phi_1']$ e di $M_r^\alpha[\Phi_2']$, si ottengono rispettivamente la (31') e la (32').

Il problema per le rette con coefficiente angolare positivo è così completamente risolto.

### 3. Gli estremi del momento rispetto ad una retta con coefficiente angolare negativo.

Rimane da esaminare il momento $M_r^\alpha[\Phi]$ rispetto ad una retta $r$ con coefficiente angolare negativo.

Si possono a questo punto ripetere le considerazioni del numero precedente. Abbiamo

$$(33) \quad \iint_R |y+x|^\alpha \, d\Phi = \underset{x}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} \underset{y}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} |y+x|^\alpha \, \Phi(xy) - \underset{x}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} \int_{-h}^{h} \Phi(xy)\, d_y\, |y+x|^\alpha -$$

$$- \underset{y}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} \int_{-h}^{h} \Phi(xy)\, d_x\, |y+x|^\alpha + \iint_R \Phi(xy)\, d\, |y+x|^\alpha$$

e, trasformando i termini al secondo membro e ripetendo le considerazioni del n. 1:

$$\Delta_{-h^-}^{h^+} \underset{y}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} |y+x|^\alpha \, \Phi(xy) = (2h)^\alpha \, \Phi(h^+, h^+) + (2h)^\alpha \, \Phi(-h^-, -h^-) = (2h)^\alpha + \varepsilon_1\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\underset{x}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} \int_{-h}^{h} \Phi(xy)\, d_y\, |y+x|^\alpha = \int_{-h}^{h} \Psi(y)\, \alpha\, (h+y)^{\alpha-1}\, dy + \varepsilon_2\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\underset{y}{\Delta_{-h^-}^{h^+}} \int_{-h}^{h} \Phi(xy)\, d_x\, |y+x|^\alpha = \int_{-h}^{h} \Phi(x)\, \alpha\, (h+x)^{\alpha-1}\, dx + \varepsilon_3\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$\iint_R \Phi(xy)\, d\, |y+x|^\alpha = \int_{-h}^{h} dy \int_{-y}^{h} \Phi(xy)\, \alpha\, (\alpha-1)\, (y+x)^{\alpha-2}\, dx +$$

$$+ \int_{-h}^{h} dy \int_{-h}^{-y} \Phi(xy)\, \alpha\, (\alpha-1)\, (-y-x)^{\alpha-2}\, dx\,.$$

La (33) diventa così

$$\iint_R |y+x|^\alpha \, d\,\Phi(xy) = (2h)^\alpha - \int_{-h}^{h} \Psi(y)\, \alpha\, (h+y)^{\alpha-1}\, dy - \int_{-h}^{h} \Phi(x)\, \alpha\, (h+x)^{\alpha-1}\, dx +$$

$$+ \int_{-h}^{h} dy \int_{y}^{h} \Phi(xy)\alpha(\alpha-1)(y+x)^{\alpha-2} dx + \int_{-h}^{h} dy \int_{-h}^{-y} \Phi(xy)\, \alpha\, (\alpha-1)\, (-x-y)^{\alpha-2}\, dx + \varepsilon\left(\frac{1}{h}\right)$$

Ma con trasformazioni già adoperate, possiamo porre

$$(2\,h)^\alpha = \int_{-h}^{h} d\,y \int_{-y}^{h} \alpha\,(\alpha - 1)\,(x + y)^{\alpha-2}\,dx$$

$$\int_{-h}^{h} \Psi\,(y)\,\alpha\,(h + y)^{\alpha-1}\,dy = \int_{-h}^{h} d\,y \int_{-y}^{h} \Psi\,(y)\,\alpha\,(\alpha - 1)\,(x + y)^{\alpha-2}\,d\,x$$

e analogamente

$$\int_{-h}^{h} \Phi\,(x)\,\alpha\,(h + x)^{\alpha-1}\,d\,x = \int_{-h}^{h} d\,x \int_{-x}^{h} \Phi\,(x)\,\alpha\,(\alpha - 1)\,(x + y)^{\alpha-2}\,d\,y =$$

$$= \int_{-h}^{h} d\,y \int_{-y}^{h} \Phi\,(x)\,\alpha\,(\alpha - 1)\,(x + y)^{\alpha-2}\,d\,x$$

Si ottiene perciò

$$\iint_R |y + x|^\alpha\,d\,\Phi(xy) = \int_{-h}^{h} d\,y \int_{-y}^{h} [1 - \Phi\,(x) - \Psi\,(y) + \Phi\,(x\,y)]\,\alpha\,(\alpha - 1)\,(x + y)^{\alpha-2}\,dx\, +$$

$$+ \int_{-h}^{h} d\,y \int_{-h}^{-y} \Phi\,(x\,y)\,\alpha\,(\alpha - 1)\,(-\,x - y)^{\alpha-2}\,dx + \varepsilon\left(\frac{1}{h}\right)$$

che facendo tendere $h$ a $+\infty$, ci dà

$$(34)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |y+x|^\alpha d\Phi(xy) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-y}^{+\infty} [1 - \Phi(x) - \Psi(y) + \Phi(xy)]\,\alpha(\alpha-1)(x+y)^{\alpha-2}\,dx\, +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\,y \int_{-\infty}^{-y} \Phi\,(x\,y)\,\alpha\,(\alpha - 1)\,(-\,x - y)^{\alpha-2}\,d\,x.$$

Le due funzioni integrande, al secondo membro della (34), sono positive. La seconda è infatti una funzione di ripartizione, mentre la prima è, per la (4), maggiore di

$$(35)\quad 1 - \Phi\,(x) - \Psi(y) + \max\,[\Phi\,(x) + \Psi(y) - 1,\, 0] = \max\,[1 - \Phi\,(x) - \Psi(y),\, 0].$$

Quindi per rendere minimo l'integrale al secondo membro della (34), occorre e basta rendere minima la funzione integranda in ogni punto. La funzione minimante sarà perciò la (6) e l'integrale per la (35) diventa

$$(36)\qquad M_r^\alpha[\Phi_0]=\int_{-\infty}^{+\infty} d\,y\int_{-y}^{+\infty}\max\,[1-\Phi(x)-\Psi(y),0]\,\alpha\,(\alpha-1)\,(y+x)^{\alpha-2}\,dx+$$

$$+\int_{-\infty}^{-\infty} d\,y\int_{-\infty}^{-y}\max\,[\Phi(x)+\psi(y)-1\,,\ 0]\,(\alpha-1)\,\alpha\,(-y-x)^{\alpha-2}\,dx\,.$$

Tale integrale ha sempre valore finito, come apparirà nel seguito, quando si dimostrerà che anche il massimo di $M_r^\alpha[\Phi]$ in $\Gamma(\Phi\,,\,\Psi)$ è sempre finito.

Infatti segue da quanto detto sopra che il massimo di $M_r^\alpha[\Phi]$, se esiste finito, è dato dalla funzione

$$(7)\qquad \Phi_1(x\,y)=\min\,[\Phi(x)\,,\ \Psi(y)]$$

ed è

$$(37)\qquad M_r^\alpha[\Phi_1]=\int_{-\infty}^{+\infty} d\,y\int_{-y}^{+\infty}\min\,[1-\Psi(y),1-\Phi(x)]\,\alpha\,(\alpha-1)\,(y+x)^{\alpha-2}\,dx+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-y}\min\,[\Phi(x),\ \Psi(y)]\,\alpha\,(\alpha-1)\,(-y-x)^{\alpha-2}\,d\,x\,.$$

Dimostriamo che i due integrali al secondo membro della (37) esistono finiti. Il procedimento è lo stesso per entrambi. Prendiamo ad es. il primo. Dividiamo ancora il semipiano su cui è esteso l'integrale con le due rette $x=a\,,\ y=b\ (-b<a]$. Avremo i tre insiemi $I_1\,(x\leq a)$, $I_2\,(x\geq a\,,\ y\geq b)$, $I_3\,(y\leq b)$. Su $I_1$ è

$$\iint_{I_1}\min\,[1-\Psi(y)\,,\ 1-\Phi(x)]\,\alpha\,(\alpha-1)\,(y+x)^{\alpha-2}\,d\,x=$$

$$=\int_{-a}^{+\infty} d\,y\int_{-y}^{a}\min\,[1-\Psi(y)\,,\ 1-\Phi(x)]\,\alpha\,(\alpha-1)\,(y+x)^{\alpha-2}\,d\,x\leq$$

$$\leq\int_{-a}^{+\infty} d\,y\,[1-\Psi(y)]\int_{-y}^{a}\alpha\,(\alpha-1)\,(y+x)^{\alpha-2}\,d\,x=\int_{-a}^{+\infty}\alpha\,[1-\Psi(y)]\,(y+a)^{\alpha-1}\,dy$$

e l'ultimo integrale scritto esiste finito per le (9). Lo stesso ragionamento si può fare per $I_3$, essendo

$$\iint_{I_3} \min\left[1-\Psi(y),\ 1-\Phi(x)\right] \alpha(\alpha-1)(y+x)^{\alpha-2}\, dx =$$

$$= \int_{-b}^{+\infty} dx \int_{-x}^{b} \min\left[1-\Psi(y),\ 1-\Phi(x)\right] \alpha(\alpha-1)(y+x)^{\alpha-2}\, dy \leq$$

$$\leq \int_{-b}^{+\infty} dy\, [1-\Phi(x)] \int_{-x}^{b} \alpha(\alpha-1)(y+x)^{\alpha-2}\, dx = \int_{-b}^{+\infty} [1-\Phi(x)]\, \alpha(b+x)^{\alpha-1}\, dx .$$

Per l'integrale su $I_2$ vale invece una dimostrazione analoga a quella di pag. 68. Anche ora, in conclusione da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-y}^{+\infty} \min\left[1-\psi(y),\ 1-\Phi(x)\right] \alpha(\alpha-1)(y+x)^{\alpha-2}\, dx \leq \iint_{I_1} + \iint_{I_2} + \iint_{I_3}$$

si ottiene che $M_r^\alpha[\Phi_1]$ è finito. Abbiamo con ciò dimostrato il

TEOREMA XI. *Date due funzioni non decrescenti $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$, soddisfacenti alle* (9), *esistono nella classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ una e una sola funzione minimante e una sola funzione massimante il momento $M_r^\alpha[\Phi]$ rispetto alla retta $\hbar = -x$.*

*La funzione minimante è la* (6), *e per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ assume il valore* (36).

*La funzione massimante è la* (7); *per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ ha il valore* (*sempre finito*) *dato dalla* (37).

Col procedimento già usato, sfruttando il cambiamento di variabili di pag. 60, si ottiene:

TEOREMA XII. *Date due funzioni $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$, non decrescenti, soddisfacenti alle* (9), *ed una retta $r$ con coefficiente angolare negativo, il momento $M_r^\alpha[\Phi]$ nella classe $\Gamma(\Phi, \Psi)$ ha una e una sola funzione minimante e una e una sola funzione massimante.*

*La funzione minimante è la* (6). *Per essa $M_r^\alpha[\Phi]$ diventa:*

$$M_r^\alpha[\Phi_0] = -m \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{\frac{y-p}{m}}^{+\infty} \max\left[1-\Phi(x)-\Psi(y),\ 0\right] \alpha(\alpha-1)(y-mx-p)^{\alpha-2}\, dx -$$

$$- m \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\frac{y-p}{m}} \max\left[\Phi(x)+\Psi(y)-1,\ 0\right] \alpha(\alpha-1)(-y+mx+p)^{\alpha-2}\, dx$$

*La funzione massimante è la* (7) *e dà a* $M_r^\alpha[\Phi]$ *il valore, sempre finito*

$$M_r^\alpha[\Phi_1] = -m\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{\frac{y-p}{m}}^{+\infty} \min\left[1-\Psi(y),\, 1-\Phi(x)\right]\alpha(\alpha-1)(y-mx-p)^{\alpha-2}\,dx -$$

$$-\, m\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\frac{y-p}{m}} \min\left[\Phi(x),\ \Psi(y)\right]\alpha(\alpha-1)(-y+mx+p)^{\alpha-2}\,dx.$$

Con i teoremi XI e XII la ricerca degli estremi del momento $M_r^\alpha[\Phi]$ nella classe di Frechet relativa a due funzioni assegnate $\Phi(x)$ e $\psi(y)$ è completata.

Per $\alpha > 1$ tale momento ha un'espressione molto più complessa rispetto al caso $\alpha = 1$. Tale complessità porta però ad una notevole semplicità di risultati, essendo uniche la funzione minimante e la funzione massimante il momento $M_r^\alpha[\Phi]$ rispetto ad una data retta.

Tale semplicità di risultati appare ancora maggiore se si guarda il complesso dei momenti rispetto a rette diverse. Mentre per $\alpha = 1$ si hanno in generale per ogni retta una classe di infinite funzioni minimanti e una classe di infinite funzioni massimanti, e tali classi variano al variare della retta stessa, per $\alpha > 1$ solo due sono le funzioni estremanti, $\Phi_0(xy)$ e $\Phi_1(xy)$. Precisamente, qualunque sia l'ordine e qualunque sia la retta rispetto alla quale si calcola il momento, purchè con coefficiente angolare positivo, la prima è l'unica funzione massimante e la seconda l'unica funzione minimante, mentre per le rette con coefficiente angolare negativo i risultati si invertono.