Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Antonio Chiffi

Analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 9, nº 3-4 (1955), p. 247-281

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_3-4_247_0>

ANALISI ESISTENZIALE E QUANTITATIVA DEI PROBLEMI DI PROPAGAZIONE [1]

di ANTONIO CHIFFI (Pisa)

INTRODUZIONE

1. — Nello studio dei fenomeni dinamici la fisica matematica pone, tra gli altri, il seguente generale problema:

In uno spazio euclideo S_{m+1}, ad $m+1$ dimensioni, consideriamo un cilindro semi-indefinito (S), costituito dai punti $Q \equiv (P, t)$, tali che sia $t \geq 0$ e P appartenga ad un dominio limitato D di uno spazio S_m, le cui coordinate di punto indichiamo con $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Si ricerca una funzione $u(P, t)$, definita in (S) e soddisfacente ivi, con le sue derivate prime e seconde, ad opportune condizioni di regolarità, la quale verifichi (in un certo senso) una data equazione differenziale:

$$L[u] = -E[u] + a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{h=1}^{m} 2\,a_h \frac{\partial^2 u}{\partial x_h\,\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + c\,u = f \tag{1}$$

con:

$$E[u] = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_i a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,k} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum_k d_k \frac{\partial u}{\partial x_k};$$

dove i coefficienti a, a_i, b, b_i, c ed il termine noto f sono funzioni definite in (S), mentre i coefficienti a_{ik} sono funzioni soltanto del punto P; inoltre $E[\ ]$ sia del tipo ellittico positivo ed $a > 0$. La funzione incognita deve soddisfare inoltre alle « *condizioni iniziali* »:

$$u(P, 0) = g(P) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(P, 0) = g_1(P) \tag{2}$$

---

[1] Lavoro eseguito per l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo nell'Istituto Matematico dell'Università di Pisa.

ed alle «*condizioni al contorno*» :

(3) $$u(P, t) = q(P, t), \text{ con } P \in FD.$$

Per un tale problema si pongono, come di consueto, le questioni di esistenza, di unicità e di calcolo approssimato della eventuale soluzione con un procedimento che sia praticamente attuabile. A tutt'oggi non è stata data una soddisfacente risposta alle dette questioni, almeno per il problema formulato in modo così generale.

2. — I metodi classici, che si basano sulla considerazione di particolari trasformate della soluzione, sono di portata assai limitata.

Negli ultimi venticinque anni le ricerche, effettuate principalmente presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, hanno portato alla costruzione di nuovi metodi (2), i quali, mentre si prestano assai bene al calcolo della soluzione, qualora essa esista, in problemi ben più generali che quello testè posto, lasciano insoluta la questione esistenziale.

Più tardi S. FAEDO (3) ha applicato al problema che ci interessa i metodi diretti del calcolo funzionale, pervenendo ad un efficace metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa, da lui detto *metodo dei momenti*. Questo consiste nel costruire, con un ben determinato procedimento, una successione di funzioni $\{u_n\}$, che, nel caso che nella (1) compaiano due sole variabili indipendenti, x_1 e t, si dimostrano essere ugualmente continue ed ugualmente limitate e convergenti uniformemente alla soluzione del problema. Si dimostra che ciò accade pure per le successioni di alcune delle derivate delle u_n, pervenendo così a teoremi di esistenza nella classe delle funzioni continue in (S) con le loro derivate prime e seconde. La eguale continuità segue dalla equilimitatezza degli integrali :

$$\int_D \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)^2 d\,x_1 \,; \qquad \int_D \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 d\,x_1$$

mediante criteri stabiliti dallo stesso S. FAEDO (4), che discendono direttamente dai classici criteri di TONELLI (5).

---

(2) M. PICONE. *Nuovi contributi all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione.* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Soc. R. Napoli, s. IV, vol. V, 1936.

Questioni di mat. applicata, trattate al 1º congresso di mat. appl. Zanichelli, Bologna, 1940.

(3) S. FAEDO. *Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione.* Annali della Sc. Normale Sup. di Pisa, S. III, vol. I, 1949, pag. 1-40.

(4) S. FAEDO. *Alcuni nuovi criteri di eguale continuità per funzioni di più variabili.* Rend. di mat., Roma, s. V, vol. VI, 1947.

(5) L. TONELLI. *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* Annali della Sc. Normale Superiore di Pisa, S. II, vol. II, 1933.

Se si passa al caso generale in $m+1$ variabili indipendenti, dalla equilimitatezza dell'integrale

$$\int_D \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 \right\} d\, P$$

non segue affatto la eguale continuità delle u_n, a meno che queste funzioni non siano di forma molto particolare o non si abbandoni il classico concetto di convergenza uniforme (6). Queste idee furono riprese da vari autori e sviluppate a fondo da G. STAMPACCHIA (7).

Nell'applicare il metodo dei momenti al caso generale viene naturale allora di servirsi, anzicchè dei classici risultati di TONELLI, di quelli di STAMPACCHIA, anche se, operando in questo modo, si dovrà necessariamente pervenire a criteri di esistenza in insiemi di funzioni più generali, che non quello delle funzioni continue con le loro derivate prime e seconde e a criteri di convergenza talvolta più larga che quella uniforme. Nelle pagine che seguono queste previsioni saranno confermate.

3. — Nel § 1 del presente lavoro si enunciano le proprietà di una certa classe di funzioni quasi continue che indichiamo con $\mathcal{C}^2$; si specificano le proprietà di regolarità del dominio D. Si pone il problema I: *ricerca delle funzioni che soddisfano quasi ovunque in* (S) *alle* (1), (2) *e* (3) *e che appartengono all'insieme* $\mathfrak{J}$ *delle funzioni di classe* $\mathcal{C}^2$ *con alcune delle loro derivate.* Si richiamano concetti e risultati già noti di analisi funzionale.

Nel § 2 si dimostra un teorema di unicità e, nel § 3, un teorema di esistenza per il problema I, sotto larghe ipotesi di regolarità per i dati del problema. Si dà poi, solo per i casi $m=2$ ed $m=3$, un secondo teorema di esistenza, dove si stabilisce che, nelle stesse ipotesi del precedente teorema, la soluzione è continua in (S) con la sua derivata rispetto a t.

Si passa nel § 4 ai teoremi di convergenza delle successioni di funzioni $\{u_n\}$ costruite col metodo dei momenti e di alcune delle loro derivate, verso la soluzione del problema e le sue corrispondenti derivate. Essa è di un tipo quasi uniforme, detto da G. STAMPACCHIA *quasi uniforme in modo regolare*, dalla quale, nelle nostre ipotesi, segue la convergenza in media.

(6) L. TONELLI, loc. cit. (5), pag. 108 e 126-130.

(7) G. STAMPACCHIA. *Sopra una classe di funzioni in due variabili.* Giornale di mat. di Battaglini, Napoli, vol. 79, 1950.

Sopra una classe di funzioni in n variabili. Ricerche di matematica, Napoli, vol. I, 1952.

Le suddette memorie saranno indicate nel seguito con [A] e [B] rispettivamente.

I teoremi di convergenza avrebbero, come si vedrà nel seguito, significato nelle pratiche applicazioni, solo se si sapesse costruire il sistema delle autosoluzioni del problema differenziale :

$$E[\varphi] + \lambda \varphi = 0 \qquad \text{in } D$$

$$\varphi = 0 \qquad \text{su } FD,$$

dove $E[\ ]$ è l'operatore che compare in (1). Ma tali autosoluzioni sono, salvo casi particolari, di difficile, se non impossibile costruzione. Nel § 5 si dà un teorema generale di convergenza per il metodo dei momenti applicato al nostro problema usando, anzicchè il suddetto sistema di autosoluzioni, un qualunque sistema di funzioni definite in D ed ivi soddisfacenti soltanto ad opportune condizioni di completezza.

§ 1. - GENERALITÀ.

1. — Definizioni e proposizioni sui domini.

Consideriamo nel cilindro (S) la parte limitata dagli iperpiani $t = 0$ e $t = T$, che chiameremo (S_T). La sua proiezione sull'iperpiano $t = 0$ è il dominio D stesso, mentre diremo $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(m)}$, le sue proiezioni sugli iperpiani $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; ... ; $x_m = 0$, rispettivamente. Indicheremo poi con $D_{\bar{t}}$, $S_{\bar{x}_1}$, ... , $S_{\bar{x}_m}$ le intersezioni di (S_T) con gli iperpiani : $t = \bar{t}$; $x_1 = \bar{x}_1$; ... ; $x_m = \bar{x}_m$ rispettivamente. Diremo $D_{\bar{x}_1 \dots \bar{x}_m}$ l'intersezione di (S_T) con la retta definita dal sistema di equazioni : $x_1 = \bar{x}_1$; $x_2 = \bar{x}_2$; ... ; $x_m = \bar{x}_m$ e parimenti $S^{(i)}_{\bar{t}, \bar{x}_1, \dots \bar{x}_{i-1} \bar{x}_{i+1}, \dots \bar{x}_m}$ l'intersezione di (S_T) con la retta di equazioni : $t = \bar{t}$; $x_1 = \bar{x}_1$; ... ; $x_{i-1} = \bar{x}_{i-1}$; $x_{i+1} = \bar{x}_{i+1}$; ... ; $x_m = \bar{x}_m$.

Non essendoci motivo di confusione, questi ultimi simboli li sostituiremo con la scrittura abbreviata D_m e $S^{(i)}_{t, m-1}$ rispettivamente ; come pure indicheremo con $x^{(m-1)}$ le variabili $(x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_m)$ e con $x^{(m)}$ le variabili $(x_1, \dots x_m)$. Indicheremo infine con $I^{(0)}, I^{(1)}, \dots, I^{(m)}$, le proiezioni di un insieme I di S_{m+1} rispettivamente sugli iperpiani : $t = 0$; $x_1 = 0$; ... ... ; $x_m = 0$. In ciò che segue l'insieme (S_T) è sempre considerato chiuso, cioè costituito dai punti ad esso interni e dalla sua frontiera.

Diremo che il dominio limitato D è *regolare*, se la sua frontiera Γ si compone di varietà tali che le coordinate dei loro punti siano funzioni di $m - 1$ parametri locali, continue con le loro derivate prime e seconde.

2. — Definizioni sulle funzioni.

Diremo che una funzione $f(P, t) = f(x_1, \dots x_m, t)$ definita in (S_T), appartiene alla classe $\mathcal{C}^2$, se gode delle seguenti proprietà (8):

α) per quasi tutti i punti P di D e per quasi tutti i punti $P^{(i)}$ di $S^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots m)$, $f(P, t)$ sia funzione assolutamente continua nell'intervallo chiuso D_m, considerata come funzione soltanto di t e assolutamente continua negli intervalli chiusi $S^{(i)}_{t, m-1}$, considerata come funzione soltanto di x_i;

β) le derivate parziali prime: $\dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, che esistono finite quasi ovunque in (S_T), siano ivi a quadrato sommabile.

Da α) e β) si deduce che (9):

γ) la funzione f è a quadrato sommabile in (S_T) e, comunque si fissi t, esiste l'integrale:

$$\int_{D_t} f^2 \, d\, x^{(m)}$$

che risulta funzione continua di t.

Diremo che una funzione, definita in (S), è ivi della classe $\mathcal{C}^2$, se lo è in (S_T), per ogni T.

Una funzione $f(P, t)$, che verifichi la α) e per la quale le derivate: $\dfrac{\partial f}{\partial t}; \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ risultino soltanto sommabili in (S_T), si dice che appartiene alla classe $\mathcal{C}$.

Per le funzioni della classe $\mathcal{C}$ valgono le formule di GREEN (10).

3. — Posizione dei problemi I e II.

Indichiamo con $\mathcal{J}$ l'insieme delle funzioni $u(P, t)$ definite in (S) ed ivi della classe $\mathcal{C}^2$ insieme alle derivate: $\dfrac{\partial u}{\partial t}; \dfrac{\partial u}{\partial x_i}; \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}$ $(i = 1, \dots m)$.

---

(8) G. STAMPACCHIA, [B], n. 2, pag. 34.

(9) G. STAMPACCHIA, [B], n. 2, pag. 35.

(10) Cfr. G. STAMPACCHIA, [B]. Richiamiamole esplicitamente:

Se $F_0, F_1, \dots F_m$ sono $m + 1$ funzioni della classe $\mathcal{C}$ e se il dominio D è regolare, per ogni T si ha:

$$\int_{(S_t)} \left\{ \frac{\partial F_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right\} d\, t\, d\, x^{(m)} = - \int_{F(S_t)} \left\{ F\, d\, x^{(m)} + \sum_{i=1}^{m} F_i\, d\, t\, d\, x^{(m-1)} \right\}.$$

Diremo *problema I* la ricerca delle funzioni appartenenti all'insieme $\mathcal{I}$, che soddisfano quasi ovunque in (S) alla equazione (1) ed alle condizioni (2) e (3).

Perchè il problema abbia senso occorre che le (1), (2) e (3) siano compatibili sulla frontiera Γ di D, per $t=0$.

E' noto come dal problema I si può passare, con semplici cambiamenti di variabili, al problema (che diremo problema II):

$$L[v]=F \tag{1'}$$

$$v(P,0)=\frac{\partial v}{\partial t}(P,0)=0 \tag{4}$$

$$v(P,t)=0 \qquad \text{per } P\in FD. \tag{5}$$

Ciò è possibile se si può prolungare la funzione $q(P,t)$ che compare nella (3), in tutto (S); in modo che questa nuova funzione $z(P,t)$ abbia le proprietà di continuità e derivabilità che specificheremo [11].

Allora, posto: $v=u-w$, con

$$w(P,t)=z(P,t)+g(P)-z(P,0)+t\left[g_1(P)-\frac{\partial z}{\partial t}(P,0)\right],$$

il problema I si muta nell'equivalente problema II, dove nella (1') è $F=f-L[w]$. Operando in questo modo si dovranno ammettere sui secondi membri delle (2) e (3) proprietà di continuità e derivabilità non richieste in modo naturale dal problema.

4. — Ulteriori definizioni e proposizioni sulle funzioni.

Avvertiamo che, quando si parla di misura di un insieme, la si intende nel senso di LEBESGUE.

Una funzione $f(P,t)$, definita in (S_T), si dice che è ivi quasi continua in modo regolare [12], *se, fissato un numero positivo ε ad arbitrio, si può determinare*

---

(11) Cfr. COURANT-HILBERT. *Methods of Mathematical Physics*. Interscience Publishers, New York, 1953, pag. 277. Circa la possibilità di un tale prolungamento, confronta: C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali del tipo ellittico*, Springer, 1955; § 16, pag. 36.

(12) G. STAMPACCHIA: [B], n. 1, pag. 33 e [A], n. 1, pag. 72.

un insieme I di (S_T), per cui è:

$$\text{mis}\, I^{(0)} + \text{mis}\, I^{(1)} + \ldots + \text{mis}\, I^{(m)} < \varepsilon$$

e la $f(P, t)$ sia continua in $(S_T) - I$.

Si ha che, se una funzione è quasi continua in modo regolare e limitata, per ogni t esiste l'integrale:

$$\int\limits_{D_t} f(P, t)\, d\, x^{(m)}$$

come pure, per ogni x_i, gli integrali:

$$\int\limits_{S_{x_i}} f(P, t)\, d\, t\, d\, x^{(m-1)} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

e sono tutti funzioni continue di t e x_i rispettivamente (13).

Si dice che le funzioni di una successione $\{f_n(P, t)\}$ definite in (S) e che per comodità possiamo supporre della classe $\mathcal{C}^2$, sono egualmente quasi continue in modo regolare (14) *in (S_T), se, fissati ad arbitrio due numeri $\varepsilon > 0$ e $\omega > 0$, si può dividere (S_T) in un numero finito di insiemi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ e, per ogni n, determinare un insieme I_n tale che:*

$$\text{mis}\, I_n^{(0)} + \text{mis}\, I_n^{(1)} + \ldots + \text{mis}\, I_n^{(m)} < \varepsilon$$

e l'oscillazione di f_n risulti minore di ω in ciascuno degli insiemi $Q_1, \ldots, Q_N$, quando si prescinda dai punti di I_n.

Si dice che le funzioni di una successione $\{f_n(P, t)\}$ sono ugualmente quasi limitate in modo regolare (15) *in (S_T) se, fissato un numero $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero $H > 0$ e, per ogni n, un insieme I_n, tale che:*

$$\text{mis}\, I_n^{(0)} + \text{mis}\, I_n^{(1)} + \ldots + \text{mis}\, I_n^{(m)} < \varepsilon$$

e si abbia. in $(S_T) - I_n$:

$$|f_n(P, t)| < H.$$

---

(13) v. [B], n. ', pag. 34.
(14) v. [B], n. 3, pag. 40 e [A], n. 4, pag. 179.
(15) v. [B], n. 3, pag. 40.

Sussiste il seguente criterio di eguale quasi limitatezza in modo regolare (16):

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni egualmente quasi continue in modo regolare. Se, fissato un numero $h > 0$, è possibile determinare un numero positivo H tale che esista un insieme E_n, con almeno uno tra gli insiemi $E_n^{(0)}, E_n^{(1)}, \ldots, E_n^{(m)}$ avente misura maggiore di h, in modo che in E si abbia:

$$|f_n(P, t)| < H,$$

le funzioni sono egualmente quasi limitate in modo regolare.

Si dice che una successione di funzioni $\{f_n(P, t)\}$, definite in (S_T), converge quasi uniformemente in modo regolare (17) *in (S_T), se ad ogni numero positivo ε è possibile far corrispondere un insieme I di (S_T), tale che:*

$$\text{mis}\, I^{(0)} + \text{mis}\, I^{(1)} + \ldots + \text{mis}\, I^{(m)} < \varepsilon$$

e la successione converga uniformemente in $(S_T) - I$.

Una successione di funzioni convergente quasi uniformemente in modo regolare in (S_T), converge uniformemente in D_m per quasi tutti i punti $(x^{(m)})$ di D; in $S_{t,m-1}^{(1)}$ per quasi tutti i punti $(t, x^{(m-1)})$ di $S^{(1)}$, etc. (18).

Sussiste il seguente (19):

TEOREMA I. *Sia $\{f_n(P, t)\}$ una successione di funzioni della classe $\mathfrak{A}^2$, definite in (S_T) e, per ogni n, si abbia:*

$$\int_{(S_T)} \left\{ \left(\frac{\partial f_n}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)^2 \right\} d\,t\,d\,x^{(m)} < A \tag{6}$$

con A costante positiva. Se il dominio D è regolare (più in generale se soddisfa alla condizione di BANACH-VITALI) *e le funzioni della successione sono egualmente quasi limitate in modo regolare, si può dalla successione data estrarne una parziale che converga quasi uniformemente in modo regolare in (S_T).*

OSSERVAZIONE. Dalla dimostrazione del precedente teorema si ricava pure che da una successione di funzioni, soddisfacente a tutte le ipotesi ivi dette ad eccezione della eguale quasi limitatezza in modo regolare, si può estrarre una successione di funzioni egualmente quasi continue in modo regolare in tutto (S_T).

---

(16) v. [B], n. 4, pag. 47.
(17) v. [B], n. 3, pag. 39 e [A], n. 3, pag. 174.
(18) v. [B], n. 3, pag. 39.
(19) v. [B], n. 6, pag. 53.

Sussiste pure il seguente teorema di convergenza in media [20]:

TEOREMA II. *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni della classe* $\mathcal{C}^2$, *definite in* (S_T), *egualmente quasi limitate in modo regolare e, per ogni* n, *si abbia la* (6). *Se la successione converge quasi uniformemente in modo regolare, essa converge in media di ordine 2 su* (S_T) *e su ciascuno degli iperpiani* $D_{\bar{t}}$, $S^{(1)}_{\bar{x}_1}, \dots, S^{(m)}_{\bar{x}_m}$, *qualunque siano i valori* $\bar{t}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$, *tali che gli iperpiani* $t = \bar{t}, x_1 = \bar{x}_1, \dots,$ *intersechino il dominio* (S_T).

Nel citato teorema di STAMPACCHIA si afferma invero che è possibile estrarre una sottosuccessione di funzioni che ha la proprietà della convergenza in media. Ma ivi non si fa l'ipotesi della convergenza quasi uniforme in modo regolare della successione $\{f_n\}$.

Ed infine si ha il seguente teorema di chiusura [21]:

TEOREMA III. *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni della classe* $\mathcal{C}^2$, *definite in* (S_T). *Se le funzioni sono egualmente quasi limitate in modo regolare e se, per ogni* n, *sussiste la* (6), *ogni funzione limite, nel senso della convergenza quasi uniforme in modo regolare, appartiene alla classe* $\mathcal{C}^2$.

§ 2. - UNICITÀ DELLA SOLUZIONE.

Teorema di unicità.

Se i coefficienti a_{ik} $(i, k = 1, \dots m)$ *della equazione* (1) *sono funzioni continue in* D *con le loro derivate parziali prime; se i coefficienti* a, a_i, b_i, c *e* b *sono funzioni continue in* (S) *assieme alle derivate:* $\frac{\partial a}{\partial t}, \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$; *se l'espressione differenziale* $E[\ ]$ *è del tipo ellittico positivo; se è in* (S):

$$a > 0$$

e il dominio D *è regolare, allora il problema 1 ha al più una soluzione.*

Siano u e $\bar{u}$ due distinte funzioni dell'insieme $\mathcal{J}$ che risolvono il problema I. Allora $v = u - \bar{u}$ risolve il problema omogeneo:

$$L[v] = 0 \tag{1''}$$

$$v(P, 0) = \frac{\partial v}{\partial t}(P, 0) = 0 \tag{4}$$

---

[20] v. [B], n. 4, pag. 46 e [A], n. 3, pag. 177.

[21] v. [B], n. 4, pag. 46.

$$v(P, t) = 0, \qquad \text{per } P \in FD. \tag{5}$$

Moltiplicando la $(1'')$ per $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ si ha, quasi ovunque in (S):

$$L[v]\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

e si ha immediatamente:

$$\begin{aligned}0 = 2L[v]\frac{\partial v}{\partial t} = &\left\{(a v_t^2)_t + \sum_{i,k}(a_{ik} v_{x_i} v_{x_k})_t\right\} + \\ &+ \left\{2\sum_{i=1}^{m}(a_i v_t^2)_{x_i} - 2\sum_{i,k}(a_{ik} v_{x_i} v_t)_{x_k}\right\} + \\ &+ \left\{-(a)^t v_t^2 - 2\sum_i (a_i)_{x_i} v_t^2 + 2\sum_{i,k}(a_{ik})_{x_i} v_{x_k} v_t + \right. \\ &\left. + 2b v_t^2 + 2c v v_t + 2\sum_i (b_i - d_i) v_{x_i} v_t\right\} = \\ &= A_t + B + C;\end{aligned}$$

dove l'apice in basso indica la derivazione rispetto alla variabile indicata ed A_t, B e C indicano rispettivamente i tre gruppi di termini contenuti nelle tre coppie di parentesi.

Integrando su (S_T) si ha:

$$0 = -2\int_{(S_T)} L[v]\, v_t\, dP\, dt = -\int_{(S_T)} A_t\, dP\, dt - \int_{(S_T)} B\, dP\, dt - \int_{(S_T)} C\, dP\, dt. \tag{7}$$

Applichiamo la formula di GREEN al primo e secondo integrale nell'ultimo membro della equazione scritta, tenendo presente che ci troviamo nel campo della sua applicabilità. Posto:

$$K(t) = \int_D \left\{a v_t^2 + \sum_{i,k} a_{ik} v_{x_i} v_{x_k}\right\} dP, \tag{8}$$

tenuto conto che il secondo termine che compare nell'ultimo membro della (7) si annulla e indicato con $R(T)$ il terzo termine che ivi compare, la stessa uguaglianza si può così scrivere:

$$K(T) - R(T) = 0.$$

Nella (8) compare sotto il segno di integrale una forma quadratica definita positiva, considerando le $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x_i}$ come variabili. Si ha allora la disuguaglianza:

$$K(t) \geq m(t)\, K^*(t)$$

avendo posto:

$$K^*(t) = \int_D \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \right\} d\, P$$

e la $m(t)$ è una funzione che si può scegliere continua, positiva e non crescente. Si ha invece:

$$R(T) = \int_0^T d\, t \int_D \left\{ \left[-a_t - 2 \sum_i (a_i)_{x_i} + 2\, b \right] v_t^2 + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_k \left[\sum_i (a_{ik})_{x_i} + b_k - d_k \right] v_{x_k} v_t + 2\, c\, v\, v_t \right\} d\, P$$

È intanto:

$$2\, |v_{x_k} v_t| \leq v_{x_k}^2 + v_t^2\,; \qquad 2\, |v\, v_t| \leq v^2 + v_t^2\,;$$

$$\int_{(S_T)} |c| \cdot [v^2 + v_t^2]\, d\, P\, d\, t \leq \bar{c}(T)\, T^2 \operatorname{mis} D \int_{(S_T)} v_t^2\, d\, P\, d\, t + \int_{(S_T)} |c|\, v_t^2\, d\, P\, d\, t\,;$$

dove con $\bar{c}(T)$ si è indicato il massimo di $|c|$ in (S_T) e con $\operatorname{mis} D$ la misura del dominio D. Detta $M(T)$ una funzione positiva di T, continua, non decrescente e non minore in (S_T) della funzione:

$$\left| -a_t - 2 \sum_i (a_i)_{x_i} + 2\, b \right| +$$

$$+ \sum_k \left| \sum_i (a_{ik})_{x_i} + b_k - d_k \right| + \bar{c}(T)\, T^2 \operatorname{mis} D + c\,,$$

si ha:

$$|R(T)| \leq M(T) \int_0^T K^*(t)\, d\, t$$

e, in definitiva:

$$0 \leq m(T)\, K^*(T) \leq M(T) \int_0^T K^*(t)\, d\, t\,.$$

Analogamente a questa disuguaglianza sussiste, per ogni $t < T$, l'altra:

$$0 \leq m(t)\, K^*(t) \leq M(t) \int_0^t K^*(t)\, d\, t$$

e infine:

$$0 \leq m(T)\, K^*(t) \leq M(T) \int_0^t K^*(t)\, d\, t\,.$$

Da questa segue, per un lemma di GRONWALL (22):

$$\int_0^t K^*(t)\, d\, t = 0$$

e perciò si ha, quasi ovunque in (S):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \qquad\qquad (i = 1, \dots, m),$$

da cui, per la proprietà α) delle funzioni $\mathcal{C}^2$, segue $v = 0$ quasi ovunque in (S).

§ 3. — TEOREMI DI ESISTENZA.

1. — Teorema I di esistenza.

Se i coefficienti $a_{ik}(P)$ $(i, k = 1, \dots, m)$ *dell'operatore* $E[\ ]$, *che compare nella* (1), *sono funzioni continue in* D, *con le loro derivate parziali prime e seconde per* $m = 2$ *e* $m = 3$, *mentre, per* $m > 3$, *sono lipschitziane con le loro derivate parziali di ordine* 2ν, *dove* ν *è il massimo intero contenuto in*

(22) Cfr. G. SANSONE. *Equazioni differenziali nel campo reale*. Bologna, Zanichelli, 1941. Cap. I, § 5.

$\frac{m}{4}$; *se tutti gli altri coefficienti e il termine noto sono funzioni continue in* (S) *assieme alle loro derivate parziali prime e seconde rispetto a* t *e possiedono, per* $t=0$, *in* D, *le altre derivate parziali prime continue; se le derivate:* $\frac{\partial a_i}{\partial x_k}$ $(i, k = 1, \dots, m)$ *sono funzioni continue in* (S); *se* g *e* g_1 *sono funzioni continue con le loro derivate parziali fino a quelle del terzo ordine; se la funzione* $z(P, t)$ *introdotta nel* § 1, *n.* 3 *si è potuta costruire in modo da risultare continua in* (S), *con le sue derivate parziali fino a quelle del quarto ordine rispetto a* t, *fino a quelle del secondo ordine rispetto alle variabili* $x_1, \dots, x_m$; *seconde, terze e quarte miste fatte al più due volte rispetto alle variabili* $x_1, \dots, x_m$, *mentre le derivate terze rispetto alle stesse variabili siano continue per* $t=0$; *se il dominio* D *è regolare; se sono soddisfatte le condizioni di compatibilità su* FD *per* $t=0$:

$$q = g; \qquad \frac{\partial q}{\partial t} = g_1;$$

$$-E[g] + a\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \sum_h 2a_h \frac{\partial g_1}{\partial x_h} + b\frac{\partial q}{\partial t} + \sum_k b_k \frac{\partial g}{\partial x_k} + cg = f;$$

se l'operatore $E[\ ]$ *è del tipo ellittico positivo in tutto* D *e se è in* (S):

$$a > 0$$

allora il problema I *ha una ed una sola soluzione.*

2. — Il metodo dei momenti.

Diciamo $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ le autosoluzioni e λ i corrispondenti autovalori relativi al problema differenziale omogeneo autoaggiunto:

$$\begin{aligned} &E[\varphi] + \lambda\varphi = 0 && \text{in } D \\ &\varphi = 0 && \text{per } P \in FD, \end{aligned}$$

dove $E[\ ]$ è l'operatore che compare nella (1).

Nelle ipotesi del teorema di esistenza è noto [23] che gli autovalori esistono, sono una infinità numerabile $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ e sono tutti reali e posi-

[23] Ora e nel seguito ci dovremo servire di taluni risultati classici relativi alla teoria delle equazioni differenziali e integrali. Per noi è sufficiente citare gli *Appunti di Analisi Superiore* di M. PICONE, Napoli, 1940. Per una bibliografia sull'argomento cfr. C. MIRANDA, loc. cit. [11].

tivi; le corrispondenti autosoluzioni sono a due a due ortogonali (e normali) e costituiscono un sistema di funzioni completo per l'approssimazione lineare in media delle funzioni quasi continue in D, ivi a quadrato sommabile. Inoltre le autosoluzioni sono continue in D, assieme alle loro derivate prime, seconde, terze e quarte.

Poniamo:

$$v_n(P, t) = \sum_{i=1}^{n} c_{in}(t)\, \varphi_i(P) \tag{9}$$

e imponiamo alle funzioni $c_{in}(t)$ di soddisfare al sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine:

$$\int_D \{ L[v_n] - F \} \varphi_s \, d P = 0 \qquad (s = 1, \dots n) \tag{10}$$

ed alle condizioni iniziali:

$$c_{in}(0) = c'_{in}(0) = 0 \,. \tag{11}$$

La funzione v_n così determinata si dirà la n-esima approssimazione del metodo dei momenti per il problema II (Cfr. § 1, n. 3). Nelle ipotesi in cui ci siamo posti, le v_n esistono e sono univocamente determinate. Infatti il sistema (10) si può ridurre a forma normale in quanto il coefficiente δ_{is} di $c''_{in}(t)$ nella s-esima equazione è il determinante di GRAM delle funzioni $\sqrt{a}\, \varphi_i$, linearmente indipendenti, essendolo le $\{\varphi_i\}$ ed $a > 0$.

3. — Per dimostrare il teorema I di esistenza applicheremo il metodo dei momenti al problema II. Per questo problema le condizioni di compatibilità diventano:

$$F(x_1, \dots, x_m, 0) = 0$$

su FD.

4. — **Lemma I.**

Nelle ipotesi del teorema I di esistenza si può costruire la funzione $C_1(t)$ continua, non negativa e non decrescente, tale che sia in tutto (S):

$$\int_D \left\{ \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right)^2 \right\} d P \leq C_1(t) \,. \tag{12}$$

Moltiplichiamo le (10) per $c'_{sn}(t)$, sommiamo membro a membro e poniamo: $F_n = \int_D F \frac{\partial v_n}{\partial t} d P$:

$$\int_D L[v_n] \frac{\partial v_n}{\partial t} dP = F_n. \tag{13}$$

Eseguiamo sul primo membro della (13) trasformazioni analoghe a quelle eseguite nella dimostrazione del teorema di unicità, § 2, sulla espressione:

$$\int_{(S_T)} L[v] \frac{\partial v}{\partial t} d P d t$$

avendo solo cura di sostituire v_n a v e tenendo conto che l'integrazione è estesa solo al dominio D. Dette poi $R_n(t)$, $K_n(t)$ e $K_n^*(t)$ le stesse funzioni $R(t)$, $K(t)$ e $K^*(t)$ introdotte nel § 2, avendo sostituito sempre v_n a v, e tenendo conto che nella prima l'integrazione è estesa solo al campo D e non in tutto (S_T), si perviene ad una equazione del tipo:

$$\frac{1}{2} K'_n(t) + R_n(t) = F_n(t). \tag{14}$$

Le funzioni dette soddisfano alle disuguaglianze:

$$K_n(t) \geq m(t) K_n^*(t)$$

$$R_n(t) \leq M(t) K_n^*(t),$$

dove $m(t)$ e $M(t)$ sono le stesse funzioni definite nel § 2, teorema di unicità. La funzione $\vartheta_n(t)$ così definita:

$$\vartheta_n(t) = \begin{cases} \dfrac{2 R_n(t)}{K_n(t)} & \text{per } K_n(t) \neq 0 \\ 0 & \text{per } K_n(t) = 0, \end{cases}$$

è quasi continua e limitata dalla funzione continua $\gamma(t) = \dfrac{2 M(t)}{m(t)}$ e la equazione (14) si muta nella equazione differenziale:

$$K'_n(t) + \vartheta_n(t) K_n(t) = 2 F_n(t)$$

che, integrata e tenendo conto che è $K_n(0) = 0$, dà:

$$0 \leq K_n^*(t) \leq \frac{1}{m(t)} K_n(t) \leq \frac{2\, e^{\int_0^t \gamma\, dt}}{m(t)} \int_0^t |\, F_n(t) \,|\, d\, t$$

e, applicando la disuguaglianza di SCHWARZ, si ha:

$$K_n^*(t) \leq \frac{2\, e^{\int_0^t \gamma\, dt}}{m(t)} \left(t \int_{(S_T)} F^2\, d\, P\, d\, t \right)^{1/2} \left(K_n^*(t) \right)^{1/2}$$

ed infine:

$$K^*(t) \leq \frac{4\, t\, e^{\int_0^t \gamma\, dt}}{m^2(t)} \int_{(S_T)} F^2\, d\, P\, d\, t\,,$$

per cui risulta dimostrata la (12).

5. — **Lemma II.**

Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema I di esistenza, si può costruire la funzione continua, non negativa e non decrescente $C_2(t)$ *tale che sia in* (S):

$$\int_D \left\{ \left(\frac{\partial\, v_n}{\partial\, t} \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial\, x_i\, \partial\, t} \right)^2 \right\} d\, P \leq C_2(t)\,. \tag{16}$$

Si derivino una volta rispetto a t le (10), si moltiplichino per $c''_{sn}(t)$ e si sommino membro a membro.

Anche questa volta, posto:

$$K_n(t) = \int_D \left\{ a \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial\, t^2} \right)^2 + \sum_{i,k}^m a_{ik} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i\, \partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial\, x_k\, \partial t} \right\} d\, P\,,$$

si ha che $K_n(t)$ soddisfa ad una equazione differenziale del tipo:

$$\frac{1}{2} K_n'(t) + R_n(t) = \lambda_n(t)$$

da cui si trae, col noto procedimento, l'equivalente:

$$K_n'(t) + \vartheta_n(t)\,K_n(t) = 2\,\lambda_n(t)\,, \tag{17}$$

dove la funzione quasi continua $\vartheta_n(t)$ soddisfa alla disuguaglianza: $\vartheta_u(t) \leq \gamma(t)$, con $\gamma(t)$ funzione continua. Il termine $\lambda_n(t)$ è del tipo:

$$\int_D B_n \frac{\partial^2 v_u}{\partial t^2}\, dP$$

e, non contenendo, B_n che le derivate prime di v_n, si può maggiorare per il lemma precedente, indipendentemente da n, l'espressione:

$$\int_D B_n^2\, dP.$$

La disuguaglianza (16) può ora ottenersi con lo stesso procedimento usato da S. FAEDO, alle pagine 22 e 23 dell'opera citata in (3), dove si conseguono maggiorazioni analoghe (24).

---

(24) Accenniamo brevemente al modo in cui si imposta il calcolo. Si maggiora prima, indipendentemente da n, l'espressione:

$$K_n(0) = \int_D a(P,0)\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2_{t=0} dP.$$

Le (10), per $t=0$, danno:

$$\int_D a(P,0)\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)_{t=0} \varphi_s(P,0)\, dP = \int_D F(P,0)\, dP \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Moltiplicando queste uguaglianze per $c''_{sn}(0)$ e sommandole membro a membro, si ha:

$$\int_D a(P,0)\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2_{t=0} dP = \int_D F(P,0)\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)_{t=0} dP. \tag{19}$$

Dalla ovvia disuguaglianza:

$$\int_D \left\{\frac{F}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\,\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right\}^2_{t=0} dP \geq 0,$$

6. — Lemma III.

Nelle ipotesi del teorema di esistenza, si può costruire la funzione continua, non negativa e non decrescente, $C_3(t)$ tale che sia in (S):

$$\int_D \left\{ \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^2 \partial x_i}\right)^2 \right\} d\,P \leq C_3(t). \tag{20}$$

La dimostrazione si sviluppa come nel lemma precedente. Si derivano le (10) due volte rispetto al tempo, si moltiplicano per $c_{sn}'''(t)$ e si sommano

---

si trae, per la (19):

$$\int_D \left[\frac{F^2}{a} + a\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 - 2F\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right]_{t=0} d\,P = \int_D \left[\frac{F^2}{a} - a\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2\right]_{t=0} d\,P \geq 0$$

ed infine:

$$\int_D a(P,0)\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2_{t=0} d\,P \leq \int_D \frac{F^2(P,0)}{a(P,0)}\,d\,P.$$

La dimostrazione così prosegue: si integra la (17), ottenendo:

$$0 \leq K_n(t) = K_n(0)\, e^{-\int_0^t \vartheta_n\,dt} + 2\int_0^t \lambda_n(\tau)\, e^{-\int_\tau^t \vartheta_n\,dt}\, d\tau \leq e^{\int_0^t \gamma\,dt}\left[K_n(0) + 2\int_0^t |\lambda_n(t)|\,dt\right].$$

Analogamente a quanto si è fatto nel lemma precedente, si ha:

$$K_n^*(t) \leq \frac{e^{\int_0^t \gamma\,dt}}{m(t)}\left[K_n(0) + 2\left(t\int_{(S_T)} B_n^2\,d\,P\,d\,t\right)^{1/2}\right]\left\{K_n^*(t)\right\}^{1/2}$$

$$K_n^*(t) \leq \frac{2}{m^2(t)}\, e^{\int_0^t \gamma\,dt}\left[2\,t\int_{(S_T)} B_n^2\,d\,P\,d\,t + m(0)\,K_n(0)\right]$$

da cui si deduce, per le maggiorazioni già conseguite, la (16).

membro a membro. Procedendo con le trasformazioni già indicate, posto:

$$K_n(t) = \int \left\{ a \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3} \right)^2 + \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^2 \partial x_i} \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^2 \partial x_k} \right\} d P ,$$

si perviene parimenti ad una equazione differenziale come la (17) dove $\vartheta_n(t)$ è pure una funzione quasi continua e limitata soddisfacente alla disuguaglianza: $|\vartheta_n(t)| < \gamma(t)$, con $\gamma(t)$ funzione continua, mentre λ_n è del tipo:

$$\lambda_n(t) = \int_D B_n \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3} d P$$

e $\int_D B_n^2 \, d P$ si può maggiorare indipendentemente da n per i lemmi precedenti. Rimane da maggiorare l'espressione: $K_n(0)$, per poi continuare come nel lemma precedente [25].

---

[25] Ecco come si può conseguire la maggiorazione di $K_n(0)$. Si parte dalle (10), dopo aver posto $t = 0$:

$$\int_D a(P, 0) \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)_{t=0} \varphi_s \, d P = \int_D F \varphi_s \, d P . \tag{21}$$

È intanto:

$$- \lambda_s \varphi_s = E[\varphi_s] = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_i a_{ik} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \right).$$

Si integrano per parti le (21) e, ricordando che, per le condizioni di compatibilità, è: $F(P, 0) = 0$ su FD ed anche: $\varphi_i = 0$ su FD, si ha:

$$\int_D a(P, 0) \left\{ \sum_k \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^2 \partial x_k} \left(\sum_i a_{ik} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \right) \right\}_{t=0} d P = \tag{22}$$

$$= \int_D \sum_k \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial a}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right) \left(\sum_i a_{ik} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \right) \right\}_{t=0} d P = \int_D \left(\sum_k \mu_k \sum_i a_{ik} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_i} \right) dP ,$$

avendo posto:

$$\mu_k = \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} - \frac{\partial a}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)_{t=0} .$$

segue

7. — Lemma IV.

Nelle ipotesi del teorema di esistenza si possono costruire le funzioni continue, non negative e non decrescenti $C_4(t)$ e $C_5(t)$ tali che sia in (S):

$$\int_D \left\{ \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \, \partial x_k} \right)^2 \right\} d\,P \leq C_4(t) \tag{24}$$

$$\int_D \left\{ \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x_i \, \partial x_k \, \partial t} \right)^2 \right\} d\,P \leq C_5(t)\,. \tag{25}$$

Ricordando che è:

$$-\lambda_i \varphi_i = E[\varphi_i]$$

Dalle (22), moltiplicandole per $c''_{s n}(t)$ e sommando membro a membro, si ottiene l'uguaglianza:

$$\int_D \left\{ a \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_k \, \partial t^2} \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_i \partial t^2} \right\}_{t=0} d\,P = \int_D \left\{ \sum_{i,k} \mu_k \, a_{ik} \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_i \, \partial t^2} \right\}_{t=0} dP. \tag{23}$$

Partiamo dalla ovvia disuguaglianza:

$$\int_D \left\{ \sum_{i,k} a_{ik} \lambda_i \lambda_k \right\} d\,P \geq 0\,,$$

avendo posto:

$$\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} \, \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_k \, \partial t^2} \right]_{t=0}.$$

Si ha:

$$\int_D \left\{ \sum_{i,k} a_{ik} \lambda_i \lambda_k \right\} d\,P = \int_D \left\{ \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\mu_i \, \mu_k}{a} - 2 \sum_{i,k} a_{ik} \, \mu_k \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_i \partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \, a \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_i \partial t^2} \cdot \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_k \, \partial t^2} \right\}_{t=0} d\,P \geq 0$$

ed infine, tenendo conto della (22):

$$\int_D \left\{ a\,(P\,,0) \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_i \, \partial t^2} \cdot \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_k \, \partial t^2} \right\}_{t=0} d\,P \leq \int_D \left\{ \frac{1}{a\,(P\,,0)} \sum_{i,k} a_{ik} \mu_i \, \mu_k \right\} d\,P\,.$$

segue

e posto:

$$\Phi[v_n] = a \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} + 2 \sum_h a_h \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_h \partial t} + b \frac{\partial v_n}{\partial t} + \sum_k b_k \frac{\partial v_n}{\partial x_k} + c v_n - F$$

le (10), moltiplicate per $-\lambda_s c_{sn}(t)$ e sommate membro a membro, danno l'uguaglianza:

$$\int_D \{E[v_n]\}^2 d P = \int_D \{\Phi[v_n]\}^2 d P$$

e poi la disuglianza:

$$\int_D \{E[v_n]\}^2 d P \leq \int_D \{\Phi[v_n]\}^2 d P \tag{26}$$

e l'integrale a secondo membro si può maggiorare, per mezzo dei lemmi precedenti, indipendentemente da n.

Consideriamo il problema di DIRICLHET:

$$E[\psi] = \bar{f} \text{ in } D; \qquad \psi = 0 \text{ su } FD.$$

R. CACCIOPPOLI ha stabilito [26] importanti disuguaglianze integrali per la soluzione di ben più generali problemi di DIRICHLET e per le sue derivate parziali del primo e secondo ordine nella ipotesi che tale soluzione esista continua in D con le sue derivate prime e seconde e sotto ipotesi per i

---

Poichè nelle espressioni μ_k compare soltanto il termine $\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}$ dipendente da n, si ha subito, tenendo presente la (16), la maggiorazione, indipendentemente da n, del secondo membro dell'uguaglianza scritta. Si ottiene pure, essendo $a > 0$, la maggiorazione di $K_n(0)$, prescindendo dal termine $\int_D a \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2 dP$. Quest'ultima maggiorazione si ottiene subito partendo dalle uguaglianze ottenute dalle (10), dopo averle derivate rispetto a t e posto $t = 0$:

$$\int_D a \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3} \varphi_s \, d P = \int_D \left\{ \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} - 2 \sum_h a_h \frac{\partial^3 v_n}{\partial x_k \partial t^2} - b \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right\}_{t=0} \varphi_s \, d P \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

e ragionando su queste come si è fatto nel lemma II sulle (18).

[26] R. CACCIOPPOLI. *Limitazioni integrali per le soluzioni di una equazione ellittica alle derivate parziali.* Giornale di matematiche di Battaglini, vol. 80, 1951.

coefficienti dell'operatore $E[\ ]$ che rientrano largamente in quelle del teorema di esistenza che abbiamo enunciato. La disuguaglianza che ci interessa si esprime, scrivendo v_n al posto di ψ, nel seguente modo:

$$\int_D \left\{ \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \right\} d P \leq K \int_D \{ E[v_n] \}^2 d P \tag{27}$$

e la costante K dipende dai coefficienti di $E[\ ]$ ed è indipendente da n. Per la (26) si ottiene, da questa, l'altra disuguaglianza:

$$\int_D \left\{ \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \right\} d P \leq K \int_D \{ \Phi[v_n] \}^2 d P$$

ed infine, per i lemmi precedenti, la (24).

La (25) si ottiene operando in modo eguale sulle (10) dopo averle derivate una volta rispetto a t, moltiplicate per $-\lambda_s c'_{sn}(t)$ e sommate membro a membro e considerando le disuguaglianze:

$$\int_D \left\{ \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x_i \partial x_k \partial t} \right)^2 \right\} d P \leq K \int_D \left\{ E\left[\frac{\partial v_n}{\partial t} \right] \right\}^2 d P \leq K \int_D \{ \Phi'[v_n] \}^2 d P$$

invece che le (27) e (26).

8. — Lemma V.

Nelle ipotesi del teorema I di esistenza, per ogni $t > 0$ e per ogni intero n sussiste la disuguaglianza:

$$\left| v_n(\xi_1, \ldots, \xi_m, t) + \int_D \Phi[v_n(P, t)]\, G(P; \xi_1, \ldots, \xi_m)\, d P \right| \leq \varepsilon(n)\, M(t) \tag{28}$$

dove $\varepsilon(n)$ è una funzione infinitesima con $\frac{1}{n}$; $M(t)$ è una funzione non negativa e non decrescente che si può costruire per mezzo dei lemmi precedenti; $\Phi[v_n]$ è la medesima espressione considerata nel lemma precedente ed infine la funzione $G(x_1, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ è la funzione di GREEN *relativa al problema omogeneo:*

$$E[\varphi] + \lambda \varphi = 0 \text{ in } D; \qquad \varphi = 0 \text{ su } F D .$$

Partiamo dalla identità:

$$-E[v_n]+\Phi[v_n]=L[v_n]-F$$

moltiplichiamo per $G(P, Q)$ ed integriamo su D:

$$\int_D \{-E[v_n]+\Phi[v_n]\}\, G(P, Q)\, dP=\int_D \{L[v_n]-F\}\, G(P, Q)\, dP .$$

Dalla teoria generale delle equazioni integrali e differenziali è noto che le autofunzioni φ_i e gli autovalori λ_i soddisfano alle equazioni integrali:

$$\varphi_i(Q)=\lambda_i \int_D G(P, Q)\, \varphi_i(P)\, dP .$$

Ma è:

$$E[v_n]=\sum_{i=1}^{n} c_{in}(t)\, E[\varphi_i],$$

per cui è:

$$\int_D \{-E[v_n]\, G(P, Q)\}\, dP=\sum_{i=1}^{n} c_{in}(t)\, \lambda_i \int_D G(P, Q)\, \varphi_i(P)\, dP=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} c_{in}(t)\, \varphi_i(Q)=v_n(Q, t).$$

Si ha allora:

$$v_n(Q, t)+\int_D \Phi[v_n(P, t)]\, G(P, Q)\, dP=\int_D \{L[v_n(P, t)]-F\}\, G(P, Q)\, dP .$$

Per la (10) si ha:

$$\left|\int_D \left\{L[v_n]-F\right\} G\, dP\right|=\left|\int_D \{L[v_n]-F\}\left(G-\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(P)\, \varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right) dP\right| \leq$$

$$\leq\left[\int_D \{L[v_n]-F\}^2\, dP\right]^{1/2}\left[\int_D \left\{G-\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(P)\, \varphi_i(Q)}{\lambda_i}\right\}^2 dP\right]^{1/2},$$

dove $M(t)$ si può costruire in base ai lemmi precedenti ed $\varepsilon(n)$ è un infinitesimo con $\frac{1}{n}$. Da questa disuguaglianza discende subito la (28).

9. — Dimostrazione del teorema di esistenza.

Fissiamo $T > 0$. Consideriamo le disuguaglianze (20) e (25). Da queste si ottiene, trascurando tutti i termini che per ora non hanno interesse, l'altra:

$$\int\!\!\int_{(S_T)} \left\{ \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x_1 \partial t^2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x_1 \partial x_i \partial t} \right)^2 \right\} d P \leq A ,$$

dove A è una costante. Per questa disuguaglianza e per il teorema I del § 1, n. 4 e relativa osservazione, si può dalla successione:

$$\left\{ \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_1 \partial t} \right\}$$

estrarre una sottosuccessione costituita da funzioni egualmente quasi continue in modo regolare in (S_T) considerato chiuso. Queste sono allora egualmente quasi limitate in modo regolare, perchè è:

$$\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_1 \partial t} \right)_{t=0} = 0$$

(vedi criterio di eguale quasi limitatezza in modo regolare, § 1, n. 4). Per il medesimo teorema I del § 1, può estrarsi ancora una sottosuccessione di funzioni:

$$\left\{ \frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial x_1 \partial t} \right\}$$

che converge quasi uniformemente in modo regolare in (S_T) verso una funzione della classe $\mathcal{C}^2$ (teorema III del § 1). Diciamo questa funzione $V_1^{(2)}$.

Con ragionamento analogo e poichè è:

$$\left\{ \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right\} = 0$$

per (P, t) variabile sulla frontiera laterale di (S_T), si può dalla successione $\left\{ \frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial t^2} \right\}$ estrarre una sottosuccessione che converge quasi uniformemente in modo regolare in (S_T) verso una funzione della classe $\mathcal{C}^2$ e così via. Si ottiene in definitiva una successione di indici, che conveniamo di indicare ancora con 1, 2, ..., n, ..., tale che si ha, con convergenza quasi uniforme in modo regolare in (S_T):

$$
(29) \qquad \begin{gathered}
\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_k \partial t} = V_k^{(2)}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = V^{(2)}; \\
\lim_{n\to\infty} \frac{\partial v_n}{\partial x_k} = V_k^{(1)}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial v_n}{\partial t} = V^{(1)}; \\
\lim_{n\to\infty} v_n = v .
\end{gathered}
$$

Scegliamo internamente al dominio D un punto $P \equiv (x_1, \dots x_m)$ tale che in D_m la successione $\left\{ \frac{\partial v_n}{\partial t} \right\}$ converga uniformemente verso $V^{(1)}$, considerata come funzione di t soltanto, per $(x_1, \dots x_m)$ fissati. Siano invece t e t^0 due qualunque punti dell'intervallo chiuso $(0, T)$. Si ha:

$$
v_n(P, t) - v_n(P, t^0) = \int_{t^0}^{t} \frac{\partial v_n}{\partial t} \, dt .
$$

Poichè $\frac{\partial v_n}{\partial t}$ converge uniformemente in D_m per quasi tutti i punti di D è, quasi ovunque in D:

$$
v(P, t) - v(P, t^0) = \int_{t^0}^{t} V^{(1)} \, dt .
$$

La funzione $V^{(1)}$ è continua in D per tali punti P; si ha perciò, per quasi ogni punto P interno a D e qualunque sia t:

$$
\frac{\partial v}{\partial t} = V^{(1)}.
$$

Con minore precisione si può dire che la funzione v è derivabile rispetto a t quasi ovunque in (S_T) ed ivi la $\frac{\partial v}{\partial t}$ coincide con $V^{(1)}$. Ricordiamo che le funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ sono definite in (S_T) a meno di insiemi di misura nulla, nel senso che, fissata una $(m+1)$-upla di assi, si può alterare la definizione della funzione in un insieme di misura nulla, in modo che essa soddisfi alle condizioni α) e β) del § 1 ([27]).

([27]) Cfr. G. STAMPACCHIA. *Problemi al contorno per le equazioni del tipo ellittico.* Annali di matematica, s. IV, vol. III, 1952, pag. 215-216.

La funzione $\frac{\partial v}{\partial t}$ risulta allora, per la sua coincidenza quasi ovunque in (S_T) con $V^{(1)}$, una funzione della classe $\mathcal{C}^2$, intendendo con ciò che si è eseguita la derivata di v là dove si è provato che tale operazione è lecita e si sia definito poi $\frac{\partial v}{\partial t} = V^{(1)}$ in un insieme di misura nulla.

Analogamente si ragiona per le altre successioni che compaiono nella (29). In questo senso si può affermare che è in (S_T), con convergenza quasi uniforme in modo regolare:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v\,;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial v_n}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial v_n}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial x_k}\,;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_k\,\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_k\,\partial t}\,;$$

e che sono a quadrato sommabile in (S_T) le derivate:

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x_i\,\partial t^2}\,; \qquad \frac{\partial^3 v}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial t}\,; \qquad \frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\,; \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_k}\,.$$

Dimostriamo ora che la v definita dall'ultima delle (29) è soluzione del problema II.

Consideriamo l'espressione:

$$v_n(Q\,,t) + \int_D \Phi\,[v_n(P\,,t)]\;G\,(P\,,Q)\;d\,P\,.$$

Poichè G è a quadrato sommabile in D rispetto a $(x_1\,,\dots x_m)$ e $\Phi\,[v_n(P\,,t)]$ converge in media (§ 1, n. 4), si può passare al limite sotto il segno di integrale [28] e si ha, per la (28):

$$v\,(Q\,,t) + \int_D \Phi\,[v\,(P\,,t)]\;G\,(P\,,Q)\;d\,P = 0\,. \tag{30}$$

---

[28] Cfr. G. SANSONE. *Moderna teoria delle funzioni di variabili reali* — vol. II: *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*. Bologna, Zanichelli, 1952, pag. 19.

Moltiplichiamo primo e secondo membro per:

$$-\lambda_i \varphi_i(Q) = E[\varphi_i(Q)]$$

e integriamo su D rispetto a $\xi_1, \dots, \xi_m$:

$$\int_D v\, E[\varphi_i]\, d\, Q = \int_D d\, Q \int_D \Phi[v(P, t)]\, G(P, Q)\, E[\varphi_i(Q)]\, d\, P\,;$$

(31) $$\int_D v\, E[\varphi_i]\, d\, Q = \int_D \Phi[v(P, t)] \left(\int_D G(P, Q)\, E[\varphi_i(Q)]\, d\, Q \right) dP.$$

Poichè v e $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ appartengono alla classe $\mathcal{C}^2$ mentre i coefficienti di $E[\ ]$ e la funzione φ_i sono continui con le loro derivate prime e seconde, si può applicare al primo membro dell'eguaglianza scritta la formula di GREEN e si ottiene:

$$\int_D v\, E[\varphi_i]\, d\, Q = \int_D E[v]\, \varphi_i\, d\, Q\,.$$

Per l'integrale:

$$\int_D G(P, Q)\, E[\varphi_i]\, d\, Q\,,$$

che si trova a secondo membro della (31), possiamo invece applicare direttamente i risultati classici sulle equazioni differenziali ed integrali, che portano alla uguaglianza:

$$\int_D G(P, Q)\, E[\varphi_i(Q)]\, d\, Q = \varphi_i(P).$$

Perciò, dalla (31), si ha:

$$\int_D E[v(Q, t)]\, \varphi_i(Q)\, d\, Q = \int_D \Phi[v(P, t)]\, \varphi_i(P)\, d\, P$$

cioè:

$$\int_D \{ E[v] - \Phi[v] \}\, \varphi_i\, d\, P = 0\,;$$

da cui, per la completezza del sistema $\{\varphi_i\}$:

$$E[v] = \Phi[v]$$

quasi ovunque in D, per ogni t.

La v è così soluzione, quasi ovunque in (S_T), della (1'). Ogni v_n soddisfaceva alle (4) e (5) e lo stesso accadrà per la v. Inoltre v appartiene all'insieme $\mathfrak{J}$; perciò è soluzione del problema II. Se $T_1 \neq T_2$ nella parte comune a (S_{T_1}) e (S_{T_2}), la funzione è la medesima per il teorema di unicità. Con il cambiamento di variabile: $u = v + w$, si passa al problema I.

Osservazione. Le ipotesi fatte nel teorema precedente sui coefficienti e sul termine noto della (1) non sono le più generali. Più precisamente sui coefficienti a_i, b_i, b, c, su F e su talune delle loro derivate, possono farsi solo quelle ipotesi che diano significato al sistema (10) ed alle formule di maggiorazione conseguite nei precedenti lemmi (quasi continuità in modo regolare e limitatezza, etc.). Le ipotesi sul termine noto F possono ulteriormente allargarsi. Limitiamoci per semplicità al problema con condizioni omogeuee: (1'), (4) (5) del § 1, n. 3. Se infatti F è a quadrato sommabile in (S_T) con le sue derivate prima e seconda rispetto a t e se, per $t = 0$, è a quadrato sommabile in D con le sue derivate prime rispetto ad $x_1, \dots, x_m$, vale ancora il precedente teorema.

Consideriamo una successione di polinomi definiti in (S_T): $\{\pi_n(P, t)\}$, convergente in media in (S_T) assieme alle successioni delle derivate prime e seconde rispetto a t verso la funzione F e le sue corrispondenti derivate. Le successioni $\left\{\dfrac{\partial \pi_n}{\partial x_i}(P, 0)\right\}$ convergano in media verso $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ in D e si abbia:

$$\int\limits_{(S_T)} \left\{\pi_n^2 + \left(\frac{\partial \pi_n}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \pi_n}{\partial t^2}\right)^2\right\} d\,P\,d\,t + \int\limits_D \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \pi_n}{\partial x_k}\right)^2_{t=0} d\,P \leq \tag{32}$$

$$\leq \int\limits_{(S_T)} \left\{F^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)^2\right\} d\,P\,d\,t + \int\limits_D \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)^2_{t=0} d\,P.$$

Le funzioni v_n, soluzioni in (S_T) delle equazioni differenziali:

$$L[v_n] = \pi_n$$

con condizioni omogenee, soddisfano ancora a limitazioni integrali come le (12), (16), (20), (24) e (25), per la semicontinuità inferiore degli integrali che ivi compaiono [29]. Tali limitazioni risultano, per la (32), indipendenti da n. Ripetendo i ragionamenti fatti nel precedente teorema, si prova quanto asserito.

Analogamente si procede per attenuare le ipotesi su taluni coefficienti della (1), limitatamente a quelli menzionati al principio della presente *osservazione* [30].

10. — Teorema II di esistenza.

Diamo ora, per i casi $m = 2$ e $m = 3$, l'annunciato miglioramento dei risultati del teorema I di esistenza, enunciando il:

TEOREMA II DI ESISTENZA. *Nelle ipotesi del teorema I di esistenza e supponendo che m possa assumere soltanto i valori* 2 e 3, *la soluzione del problema I è continua con la sua derivata rispetto a t.*

Nella citata nota di R. CACCIOPPOLI [31] sono stabilite limitazioni per i coefficienti di HÖLDER della soluzione del generale problema di DIRICHLET, al quale si è fatto cenno nel lemma IV del precedente teorema, in due e tre variabili indipendenti. Si suppone che la soluzione esista e sia continua con le sue derivate prime e seconde e le ipotesi sui coefficienti di $E[\ ]$ rientrano largamente in quelle nelle quali ci siamo posti.

La disuguaglianza di CACCIOPPOLI, già adattata per il nostro problema, così si scrive, per $m = 2$ e $m = 3$:

$$| v_n(P, t) - v_n(P', t) | \leq \overline{PP'}^{1/2} K \int_D \left\{ E[v_n] \right\}^2 dP,$$

dove P e P' sono punti interni a D, $0 \leq t \leq T$ e K è una costante che dipende solo dai coefficienti di $E[\ ]$. Per la (26) si ottiene, da questa, l'altra disuguaglianza:

$$| v_n(P, t) - v_n(P', t) | \leq \overline{PP'}^{1/2} K \int_D \left\{ \Phi[v_n'] \right\}^2 dP,$$

il cui secondo membro si può maggiorare indipendentemente da n.

---

(29) Cfr. G. STAMPACCHIA, loc. cit. (27).

(30) Per quanto detto nella presente osservazione, confronta G. STAMPACCHIA, loc. cit. (27) per le equazioni del tipo ellittico e, per le equazioni del tipo parabolico: E. GAGLIARDO, in una nota che uscirà in uno dei prossimi fascicoli di: Ricerche di matematica, Napoli e i cui risultati sono stati comunicati al 5° Congresso dell'U.M.I.

(31) Loc. cit. (26)

Le funzioni v_n sono perciò egualmente continue rispetto alle variabili $(x_1, \ldots, x_m)$ per ogni t. Per la disuguaglianza (12) che riscriviamo nel modo seguente:

$$\int_D \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 dP \leq C_1(t)$$

e per un teorema di S. FAEDO [32] segue che le funzioni $v_n(P, t)$ sono egualmente continue nell'interno di (S_T). Il citato teorema è dimostrato invero nel caso di funzioni di due variabili indipendenti; ma la dimostrazione non dipende dal numero delle variabili. Le v_n sono nulle su tutta la frontiera di (S_T), eccetto che sul piano (iperpiano) $t = T$; ma le funzioni sono definite anche per $t > T$ e qui valgono ancora disuguaglianze analoghe a quelle stabilite; perciò le v_n sono egualmente continue in tutto (S_T). Per il loro annullarsi simultaneo su parte della frontiera di (S_T), segue che esse sono pure egualmente limitate. Per il teorema di ASCOLI può estrarsi una sottosuccessione di funzioni $\{v_{n_j}\}$ convergenti uniformemente in (S_T) verso una funzione continua $v(P, t)$. In modo del tutto eguale si dimostra che dalla successione $\left\{\frac{\partial v_{n_j}}{\partial t}\right\}$ può estrarsi una sottosuccessione convergente verso una funzione continua $V^{(1)}$ ed è: $V^{(1)} = \frac{\partial v}{\partial t}$, per la convergenza uniforme di quest'ultima successione.

In definitiva per una succesione di indici estratta dalla serie naturale si ha, con convergenza uniforme in (S_T):

$$\lim_{k \to \infty} v_{n_k} = v$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\partial v_{n_k}}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{33}$$

Procedendo ora con i ragionamenti usati per dimostrare il teorema I di esistenza e tornando infine al problema I, si dimostra completamente il presente teorema.

Osservazione I. Che la v fosse, nelle predette ipotesi, continua lo si poteva dedurre anche dalla (30) del § 3 [33].

---

(32) Loc. cit. (4).

(33) Cfr. C. MIRANDA, *loc. cit.*, (11); § 13, III, pag. 25.

Osservazione II. Per $m > 3$ si può asserire che le funzioni v e $\frac{\partial v}{\partial t}$ sono continue in (S_T), per ogni T, se si prescinde da un insieme di punti che ha proiezioni di misura nulla sugli spazi coordinati ad $m - 1$ dimensioni. Vedere, per la dimostrazione, G. STAMPACCHIA, loc. cit. ([27]), pag. 235. Per quanto riguarda l'ipotesi di quasi limitatezza che ivi compare, si osservi che le funzioni delle successioni $\{v_n\}$ e $\left\{\frac{\partial v_n}{\partial t}\right\}$ sono tutte nulle sulla base inferiore e sulla frontiera laterale del cilindro (S_T) e si tenga conto di un criterio di quasi limitatezza di G. STAMPACCHIA, [B], pag. 47.

§ 4. — TEOREMI DI CONVERGENZA.

TEOREMA I. *Nelle ipotesi del teorema I di esistenza le* (29) *non soltanto sussistono per una particolare successione estratta dalla successione di partenza, ma sussistono anche per tutta questa successione.*

Infatti se non si verificasse una delle (29), per esempio la prima, si potrebbe determinare un $\sigma > 0$ ed una successione infinita di indici $\{n_j\}$, tali che, in un insieme non avente misura nulla, si abbia sempre:

$$\left| \frac{\partial^2 v_{n_j}}{\partial x_k \, d\, t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \, d\, t} \right| > \sigma .$$

Partendo da questa successione e ragionando come si è fatto nel suddetto teorema, si verrebbe a costruire una funzione $\bar{v}$ che nel detto insieme è certamente distinta da v ed è soluzione del problema II. Ciò contraddice il teorema di unicità.

TEOREMA II. *Nelle ipotesi del teorema I di esistenza i primi membri delle* (29) *convergono ai secondi membri nel senso della convergenza in media di ordine* 2 *in* (S_T) *e, per ogni* t, *su* D_t *e, per ogni* x_i, *su* S_{x_i}.

Ciò segue subito dal teorema II del § 1, n. 4.

TEOREMA III. *Nelle ipotesi del teorema I di esistenza e solo per* $m = 2$ *e* $m = 3$, *non soltanto sussistono le* (33) *per una particolare successione estratta dalla successione di partenza, ma sussistono anche per tutta questa successione.*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema I.

TEOREMA IV. *Le successioni*:

$$\left\{\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i \, \partial x_k}\right\}; \qquad \left\{\frac{\partial^3 v_n}{\partial t \, \partial x_i \, \partial x_k}\right\}; \qquad (i, k = 1, \dots m)$$

convergono in media verso le corrispondenti derivate di v sulla intersezione di (S) con ogni iperpiano $t = cost.$

La funzione $E[v - v_n]$ è a quadrato sommabile. L'uguaglianza di PARSEVAL si può per essa così scrivere:

$$\int_D \{E[v - v_n]\}^2 \, dP = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\int_D E[v - v_n] \varphi_s \, dP \right)^2. \tag{34}$$

Posto:

$$\psi[v] = L[v] + E[v]$$

si ha, per le (10) e per il fatto che la v verifica la (1):

$$\int_D E[v_n] \varphi_s \, dP = \int_D \psi[v_n] \varphi_s \, dP - \int_D F \varphi_s \, dP =$$

$$= \int_D \psi[v_n] \varphi_s \, dP - \int_D \{ -E[v] + \psi[v] \} \varphi_s \, dP \qquad (s = 1, \dots, n).$$

Si ha pure, per $s = n + 1, n + 2, \dots$

$$\int_D E[v_n] \varphi_s \, dP = \int_D \sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i c_{in}(t) \varphi_i \varphi_s) \, dP = 0.$$

La (34) diventa allora:

$$\int_D \{E[v - v_n]\}^2 \, dP =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left(\int_D \psi[v_n - v] \varphi_s \, dP \right)^2 + \sum_{s=n+1}^{\infty} \left(\int_D E[v] \varphi_s \, dP \right)^2 \leq$$

$$\leq \int_D \{\psi[v - v_n]\}^2 \, dP + \sum_{s=n+1}^{\infty} \left(\int_D E[v] \varphi_s \, dP \right)^2.$$

Il primo termine nell'ultimo membro della relazione scritta tende a zero per n tendente all'infinito per il precedente teorema II ed il secondo tende a zero perchè rappresenta il resto della serie dei quadrati dei coefficienti di FOURIER di $E[v]$. Per la disuguaglianza (27) del § 3, ove si sostituisca $v - v_n$ a v_n, segue la tesi.

Analogamente si ragiona per le successioni: $\left\{ \dfrac{\partial^3 v_n}{\partial t \, \partial x_i \, \partial x_k} \right\}$.

§ 5. - Teorema generale di convergenza.

1. — Consideriamo un sistema di funzioni definite nel dominio D: $\{\psi_i(P)\}$, soddisfacente alle seguenti condizioni:

a) sia completo per l'approssimazione lineare in media delle funzioni quasi continue in D, ivi a quadrato sommabile;

b) se la funzione appartiene all'insieme $\mathfrak{J}$ (§ 1, n. 3) si possano determinare le funzioni $h_{i,n}(t)$ tali che, posto:

$$f_n = (P, t) = \sum_{i=1}^{m} h_{in}(t)\, \psi_i(P), \tag{35}$$

il secondo membro dell'uguaglianza scritta converga in media verso la funzione $f(P, t)$ in ogni (S_T) e gli sviluppi che si ottengono derivando termine a termine una o due volte il secondo membro della (35) rispetto a $x_1, \dots, x_m, t$, convergano in media verso le corrispondenti derivate di $f(P, t)$ in (S_T).

2. — Prendiamo in considerazione il problema II (§ 1, n. 3) e consideriamo un sistema di funzioni definite in D; poniamo:

$$v_n(P, t) = \sum_{i=1}^{m} c_{in}(t)\, \psi_i(P)$$

e determiniamo le funzioni $c_{in}(t)$ in modo da soddisfare al sistema differenziale:

$$\int_D \left\{ L[v_n] - F \right\} \psi_s(P)\, dP = 0 \qquad (s = 1, \dots, n) \tag{36}$$

$$c_{in}(0) = c'_{in}(0) = 0.$$

La v_n si dirà la n-esima approssimazione del metodo dei momenti per il problema II, ottenuta usando il sistema $\{\psi_i(P)\}$. Usando il cambiamento di variabili inverso o quello che ci ha fatto per venire al problema II, si ha la successione:

$$u_n(P, t) = v_n + w, \tag{37}$$

cioè la n-esima approssimazione del metodo dei momenti per il problema I, Dimostriamo il:

TEOREMA. *Se si suppone che il problema I abbia soluzione e nelle ipotesi del teorema di unicità, scelto un sistema* $\{\psi_i\}$ *avente le proprietà* a) *e* b) *del numero precedente, la* (37) *e le successioni:*

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \qquad \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \qquad\qquad (i = 1, \ldots, m)$$

ottenute dalla (37) *derivandola termine a termine una volta, convergono in media verso la soluzione* u *del problema I e le sue corrispondenti derivate sia in* (S_T) *per ogni* T*, che su* D_t *per ogni* t*. Se inoltre si suppone che le derivate rispetto a* t *dei coefficienti e del termine noto della* (1) *siano funzioni continue in* (S)*, allora le successioni:*

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_k \, \partial t} \qquad\qquad (k = 1, \ldots, m)$$

convergono in media verso le corrispondenti derivate di u *sia in* (S_T) *per ogni* T*, che su ogni* D_t *per ogni* t.

Consideriamo lo sviluppo (35) relativo alla funzione $v = u - w$:

$$\overline{v}_n = \sum_{i=1}^{n} h_{in}(t)\, \psi_i(P).$$

Moltiplichiamo le (36) per $c'_{in}(t) - h'_{in}(t)$ e sommiamole membro a membro; si ha:

$$\int_D \Big\{ L[v_n] - F \Big\} \frac{\partial (v_n - \overline{v}_n)}{\partial t} \, dP = 0.$$

Questa uguaglianza si può così scrivere:

$$\int_D L[v_n - \overline{v}_n] \frac{\partial (v_n - \overline{v}_n)}{\partial t} \, dP = \int_D L[v - \overline{v}_n] \frac{\partial (v_n - \overline{v}_n)}{\partial t} \, dP.$$

Ragionando su questa uguaglianza come si è ragionato nel lemma I del § 6, n. 4, sulla (10), si perviene, anzichè alla (15), alla disuguaglianza:

$$\int_D \left\{ \left(\frac{\partial (v_n - \overline{v}_n)}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial (v_n - \overline{v}_n)}{\partial x_i} \right)^2 \right\} dP \leq \frac{4\, t\, e^{2\int_0^t \gamma \, dt}}{m^2(t)} \int_{(S_T)} \Big\{ L[v_n - \overline{v}_n] \Big\}^2 dP \, dt.$$

Da questa e dalla disuguaglianza che da questa si ottiene integrandola rispetto a t, segue, per la proprietà b) del sistema $\{\psi_i\}$, che le successioni:

$$\frac{\partial v_n}{\partial t}; \quad \frac{\partial v_n}{\partial x_i}$$

convergono in media verso le corrispondenti derivate della soluzione del problema II, sia in (S_T) per ogni T, che su D_t per ogni t.

Tenendo poi presente che le funzioni $c_{in}(t)$ e $c'_{in}(t)$ sono funzioni continue assieme alla loro derivata prima nell'intervallo chiuso $(0, T)$, si ha, per quasi tutti i punti P:

$$v(P, t) - v_n(P, t) = \int_0^t \frac{\partial (v - v_n)}{\partial t} d\, t$$

$$\int_D \left(v - v_n\right)^2 d\, P \leq T \int_{(S_T)} \left(\frac{\partial (v - v_n)}{\partial t}\right)^2 d\, P\, d\, t.$$

Da questa disuguaglianza e da quella che si ottiene integrando questa rispetto a t, si ha che la successione $\{v_n\}$ converge in media in (S_T) e su ogni iperpiano $t = \text{cost}$ verso la funzione $v(P, t)$.

Se si suppone poi che le derivate dei coefficienti e del termine noto della (1) siano funzioni continue in (S), analogamente a quanto si è fatto poc'anzi, si ha che le successioni:

$$\left\{\frac{\partial^2 v_n}{\partial t}\right\}; \quad \left\{\frac{\partial^2 v_n}{\partial t\, \partial x_i}\right\};$$

convergono in media alle corrispondenti derivate della $v(P, t)$ sia in (S_T) per ogni T, che su D_t per ogni t.

Analoghe conclusioni valgono per le successioni:

$$\left\{\frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i\, \partial x_k}\right\} \qquad (i, k = 1, \ldots, m).$$