ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ENRICO MAGENES

Sul teorema dell'alternativa nei problemi misti per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 9, nº 3-4 (1955), p. 161-200

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_3-4_161_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUL TEOREMA DELL'ALTERNATIVA NEI PROBLEMI MISTI PER LE EQUAZIONI LINEARI ELLITTICHE DEL SECONDO ORDINE

di ENRICO MAGENES (Modena) (1)

Il presente lavoro fa seguito ad una memoria [25] (2) pubblicata recentemente su questi stessi Annali e riguardante lo studio dei cosiddetti problemi misti per l'equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico, assegnata in un dominio $\mathcal{D}$

$$E(u) \equiv \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h}^{1,m} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + c\, u = f. \tag{I}$$

In quella memoria avevo considerato il problema misto, consistente nel ricercare una soluzione u della (I), per la quale sia data su una parte $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ della frontiera la u stessa e sulla rimanente parte $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ la sua derivata conormale $\frac{du}{d\nu}$, in ipotesi sulla (I) di unicità per il problema stesso.

In questo nuovo lavoro riprendo il problema in condizioni più generali, pervenendo ad un teorema dell'alternativa nella forma più completa.

L'interesse e l'attualità dei problemi misti presso i cultori di equazioni alle derivate parziali, appare più che mai evidente in questi ultimi anni. Non è il caso che richiami qui ancora i risultati precedenti alla memoria [25], per i quali rinvio alla introduzione e alla bibliografia della [25] stessa (3).

(1) La maggior parte dei risultati del presente lavoro (sostanzialmente i § 1, 2, 3, 4), insieme ad una esposizione e ad un esame critico dei principali risultati sui problemi misti, fino a quel tempo noti, furono oggetto di una conferenza che ebbi l'onore di tenere all'Istituto Matematico dell'Università di Genova il 10 dicembre 1954.

(2) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia finale.

(3) Nella bibliografia finale del presente lavoro mi limiterò dunque a richiamare quelli dei lavori già citati in [25] che dovrò adoperare esplicitamente. Desidero però aggiungere la citazione di lavori, precedenti a [25], di cui ero involontariamente all'oscuro al momen-

Nel frattempo sono stati però pubblicati o annunciati altri numerosi e notevoli lavori in proposito, soprattutto da G. CIMMINO, G. FICHERA, J. L. LIONS, C. MIRANDA, L. NIRENBERG e L. BERS, G. STAMPACCHIA.

Al problema inteso in senso ordinario, precisamente alla ricerca di soluzioni continue in tutto $\mathcal{D}$ e di classe 1 in $(\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}) + \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ si sono rivolti con procedimenti diversi C. MIRANDA [29] e G. FICHERA [13] (4). Il MIRANDA è pervenuto al teorema dell'alternativa in ipotesi assai generali sui coefficienti dell'equazione, ma imponendo alcune limitazioni sulla frontiera del dominio $\mathcal{D}$ (5), se m è > 2. Il FICHERA è invece riuscito ad ottenere in ipotesi classiche sui coefficienti l'esistenza della soluzione senza più alcuna restrizione sul dominio e sul numero m delle variabili. Nel caso $m = 2$ anche L. NIRENBERG e L. BERS hanno annunciato [2] notevoli risultati per il problema ordinario, validi anche per equazioni non lineari.

Problemi misti generalizzati (relativamente al modo di assumere i dati al contorno e alla classe in cui ricercare le soluzioni) sono stati studiati da J. L. LIONS ([23] e [24]) (6), attraverso la teoria delle distribuzioni, e da G. STAMPACCHIA [34], attraverso procedimenti di calcolo delle variazioni notevoli soprattutto perchè permettono di considerare anche equazioni *non lineari* di tipo ellittico. Sempre relativamente a problemi « generalizzati » G. FICHERA mi ha recentementè comunicato di aver potuto trattare il problema, secondo l'impostazione da Lui precedentemente data in [11], anche

to della pubblicazione di [25]; precisamente si tratta di lavori di U. DINI [7], G. C. EVANS e R. N. HASKELL [9], H. HORNICH [20] e [21], L. LICHTENSTEIN [22], H. VILLAT [36] e M. J. VISIK [37]. Di essi la più parte tratta equazioni di tipo particolare (equazioni di LAPLACE) oppure si limita al teorema di unicità in ipotesi classiche (v. [7]). Il risultato più importante per la sua generalità e completezza è quello annunciato senza dimostrazione dal VISIK in una nota preventiva dei DOKLADY [37], di cui ho potuto finora avere notizia solo attraverso la recensione del Math. Reviews e del Zentralblat; si tratta comunque di una impostazione del problema misto diversa da quella di [25] e del presente lavoro.

(4) Il problema ordinario presenta indubbiamente le difficoltà maggiori; già è assai delicata la determinazione della classe di funzioni più opportuna in cui il problema può essere risolto. La classe « optimum » sembra essere proprio quella delle funzioni continue in $\mathcal{D}$ e di classe 1 in $(\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}) + \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$, una ulteriore restrizione (per es. imponendo alle derivate prime di essere continue in tutto $\mathcal{D}$) comportando delle condizioni di compatibilità di carattere quantitativo sui dati (si vedano in proposito i lavori di G. FICHERA A. LIENARD, N. MUSCHELISVILI e A. SIGNORINI citati in [25]).

(5) Si tratta di imporre la condizione che nei punti di separazione su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ delle due parti $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ e $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ esse facciano tra di loro un angolo; una condizione analoga era stata posta anche dal GIRAUD [16] il quale aveva però addirittura imposto che $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ fosse trasversale, rispetto a $E(u)$, ad $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$.

(6) I risultati del LIONS sono stati annunciati in alcune recentissime note dei Comptes Rendues de l'Acad. des Sciences.

nel caso non autoaggiunto, mediante un nuovo procedimento, non più legato all'autoaggiunzione della (I) (v. [14]). Una impostazione generalizzata del problema è infine quella proposta già da tempo [4] e recentemente ripresa [5] da G. CIMMINO, sulla quale avremo occasione di ritornare.

Questo notevole complesso di lavori sta indubbiamente a dimostrare l'attualità del problema. Spero quindi che possano interessare anche i risultati che qui esporrò.

Essi si inquadrano nell'ordine di idee già introdotto in [25] e che qui viene ulteriormente approfondito. Si tratta di una nuova impostazione del problema misto generalizzato

$$\text{(II)} \quad E(u) = f \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}, \quad u = \mu \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_1\mathfrak{D}, \quad \frac{du}{d\nu} = \delta \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_2\mathfrak{D}$$

(f hölderiana in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e di quadrato sommabile in $\mathfrak{D}$, μ e δ di quadrato sommabile rispettivamente su $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$) in cui i dati al contorno sono assunti «puntualmente» su $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$, mentre su $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ vengono assunti «in media», in un senso analogo a quello che G. CIMMINO ha posto alla base della Sua trattazione del problema di DIRICHLET generalizzato (v. ad es. [3] e [4]).

Per precisare questi concetti riferiamoci al caso piano ($m = 2$), come faremo sempre nel corso del presente lavoro per motivi di semplicità, e a un dominio $\mathfrak{D}$ semplicemente connesso supponendo $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ (e quindi $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$) costituito da un solo arco di curva, anche se non si avrebbe difficoltà ad estendere il metodo e i risultati al caso di più variabili e a condizioni più generali sia sul dominio che su $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$.(7).

La convergenza in media di u ai valori μ su $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ va allora precisata nel modo seguente: si consideri un sistema di curve γ_r sufficientemente regolari, dipendenti dal parametro r, convergenti a $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ per $r \to 0$, aventi gli estremi su $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$, «trasversali» ad $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ in detti punti rispetto ad $E(u)$, e per il resto interne a $\mathfrak{D}$; riferiti sia $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ che γ_r allo stesso parametro t ($t_1 \leq t \leq t_2$) si ha

$$\text{(III)} \qquad \lim_{r \to 0} \int_{t_1}^{t_2} \{u[\gamma_r(t)] - \mu(t)\}^2 \, dt = 0 .$$

(7) $\mathfrak{D}$ potrebbe essere anche più volte connesso e $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ costituiti da un numero finito di varietà sufficientemente regolari. Si osservi anche che la condizione $\frac{du}{d\nu} = \delta$ su $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ può, senza alcuna complicazione di sorta, sostituirsi con una condizione del tipo $\frac{du}{d\nu} + hu = \delta$, con h funzione opportunamente regolare su $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$.

L'altra condizione al contorno sarà intesa invece nel senso che per quasi — tutti i punti M di $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ sia

$$\text{(IV)} \qquad \lim_{P \to M \,(\text{su } n_M)} \frac{d\, u(P)}{d\, \nu_M} = \delta(M) \qquad (n_M \text{ normale interna a } \mathcal{F}\mathcal{D} \text{ in } M).$$

Imporremo alla soluzione u le ulteriori condizioni di essere di quadrato sommabile in $\mathcal{D}$ e di soddisfare ad una opportuna relazione, sostanzialmente che la u sia rappresentabile nell'intorno di ogni punto M di $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ mediante la funzione di NEUMANN in detto intorno dell'operatore $E(u) - \lambda u$ (con $\lambda > 0$ e sufficientemente grande) (v. con precisione la III°) del n. 13).

Precisate così le condizioni al contorno e la classe nella quale va ricercata la soluzione, riusciremo a dimostrare (§ 2, 3, 5) il teorema dell'alternativa per il problema (II) nella sua forma più completa: uguaglianza del numero delle autosoluzioni linearmente indipendenti del problema omogeneo associato a (II) e del relativo problema omogeno aggiunto

$$E^*(v) = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}, \quad v = 0 \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_1 \mathcal{D}, \quad \frac{d\, v}{d\, \nu} - b\, v = 0 \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_2 \mathcal{D},$$

generalizzato anch'esso nello stesso senso; condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza della soluzione espressa come ortogonalità dei termini noti f, μ e δ alle autosoluzioni v del problema aggiunto omogeneo, precisamente

$$\text{(V)} \qquad \iint_{\mathcal{D}} f\, v\, d\, x_1\, d\, x_2 - \int_{\mathcal{F}_1 \mathcal{D}} \mu \left(\frac{d\, v}{d\, \nu} - b\, v \right) d\, s + \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \delta\, v\, d\, s = 0 .$$

Il teorema di unicità verrà poi dimostrato (§ 4) in ipotesi sulla (I), che sono sostanzialmente quelle nelle quali esso viene conseguito d'abitudine, se la soluzione è di classe 1 in $\mathcal{D}$, attraverso la formula di GREEN.

Nel n. 18 verranno infine messe in evidenza le ulteriori condizioni di regolarità, di cui la soluzione da noi trovata gode nelle ipotesi che i dati μ, δ e f siano maggiormente regolari (ad es. se μ è continua su $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$, δ è hölderiana su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$, f è continua in $\mathcal{D}$, la u risulta continua in $\mathcal{D} - \overline{\mathcal{F}_1 \mathcal{D} \cdot \mathcal{F}_2 \mathcal{D}}$ e di classe 1 in $(\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}) + \mathcal{F}_2 \mathcal{D})$.

Questa l'impostazione che noi daremo al problema misto e i risultati che otteremo. Vale la pena di fare alcune considerazioni su di essi anche in relazione alle impostazioni date al problema dagli altri Autori.

Si osserverà subito una eterogeneità nel modo di assumere i dati su $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ e su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$. La (III) infatti porta come conseguenza (v. n. 18) che per quasi-tutti i punti M di $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$ risulta

$$\text{(VI)} \qquad \lim_{P \to M \, (\text{su } n_M)} u(P) = \mu(M) ;$$

la (VI) è una condizione dello stesso tipo della (IV), circa il modo di assumere i dati. Ma dalla (VI) non consegue la (III); la convergenza «in media» dice dunque di più della convergenza quasi-dappertutto lungo la normale.

Orbene, questa diversità nel modo di assumere i dati su $\mathcal{F}_1$ e su $\mathcal{F}_2$ è assai importante. È infatti in virtù della (III) e della (IV), opportunamente completata dall'ulteriore condizione III°) del n. 13 già citata, che è possibile utilizzare procedimenti analoghi a quelli che il CIMMINO ha sviluppato, sfruttando anche un'idea introdotta da R. CACCIOPPOLI nello studio dell'equazione di POISSON su una superficie chiusa (v. questi stessi Annali, s. II, Vol. VII, 1938, pp. 177-187), per il problema generalizzato di DIRICHLET (v. ad es. [3] e [4]) e costruire così in modo completo la teoria del problema (II).

La nostra impostazione differisce dunque, proprio per la presenza della (III) e della (IV), da quella proposta dallo stesso CIMMINO [5], nella quale viene imposta non solo alla funzione ma anche alla derivata conormale di convergere in media su un opportuno sistema di curve approssimante la frontiera $\mathcal{F}\mathcal{D}$ dall'interno.

Una seconda osservazione interessante consiste nel rilevare che la classe di funzioni in cui noi ricercheremo la soluzione contiene senz'altro la classe «optimum» (v. la nota (4)) delle funzioni continue in $\mathcal{D}$ e di classe 1 in $(\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}) + \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$; ciò non avviene invece per altre impostazioni generalizzate del problema, quali ad esempio quelle date dal CIMMINO, dal FICHERA, dal LIONS e dallo STAMPACCHIA.

Ritengo anche essere rilevabile il fatto che nel presente lavoro l'operatore $E(u)$ è di tipo ellittico generale anche non autoaggiunto e che viene stabilito, il teorema dell'alternativa nella forma più completa, dando esplicitamente le condizioni di compatibilità mediante le (V).

Infine vale la pena di svolgere alcune considerazioni sulla impostazione della condizione al contorno $\dfrac{du}{d\nu} = \delta$ su $\mathcal{F}_2$. In [25] si era considerata questa condizione nella sua accezione più ristretta, imponendo alla (IV) di essere verificata per *ogni* M di $\mathcal{F}_2$ e alla $u(P)$ di essere di classe 1 in $(\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}) + \mathcal{F}_2 \mathcal{D}$. Nel presente lavoro si è voluto generalizzare tale condizione, imponendo che la (IV) fosse verificata solo *quasi-dappertutto* su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$, cioè a meno di un insieme I di misura nulla su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$. È stato però necessario introdurre accanto alla (IV) una ulteriore condizione sulla soluzione (la III°) del n. 13).

L'introduzione di tale condizione non stupisce, poichè l'essere la (IV) verificata quasi-dappertutto su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ non è una condizione «tipica» per il nostro problema, nel senso che, comunque si particolarizzi l'equazione (I), può mancare il teorema di unicità anche in classi di soluzioni abbastanza ristrette; ciò è stato di recente dimostrato riferendosi addirittura all'equazione $\Delta_2 u = 0$ da L. MYRBERG [30] e E. DE GIORGI [6] (8). Ed invero anche nelle trattazioni del problema generalizzato date ad es. dal FICHERA e dallo STAMPACCHIA, accanto al verificarsi della (IV) quasi-dappertutto su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$, compare una ulteriore condizione sulla $u(P)$, quale il fatto che la $u(P)$ renda minimo un certo integrale [34] o che soddisfi a due opportune relazioni integrali di GREEN [11] (9). La nostra condizione III°) del n. 13 fa in un certo senso le veci di tali condizioni. Tutte queste condizioni però non sono tanto limitazioni sui dati assegnati su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ o sul modo di assumere tali dati, quanto condizioni restrittive per la soluzione, che si esprimono attraverso anche ai valori della u in $\mathcal{D}$.

Quando si voglia dar rilievo soprattutto al primo punto di vista, ponendosi cioè in sostanza il problema di caratterizzare l'insieme I sul quale può non essere verificata la (IV) (si noti che nella impostazione data in [25] l'insieme I era vuoto), il suggerimento che mi sembra essenziale viene dal notevole risultato che il MYRBERG ha ottenuto nel caso dell'equazione $\Delta_2 u = 0$ in due variabili [30]. Esso suggerisce di imporre all'insieme I di essere di «capacità» nulla (e quindi di misura nulla); ritengo dunque che, nelle ipotesi fatte su f, μ, δ, la teoria del problema generalizzato (II) sia da svolgere nella classe delle funzioni $u(P)$ soluzioni di $E(u) = f$ in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$, di quadrato sommabile in $\mathcal{D}$ e soddisfacenti alla (III) e alla (IV), quest'ultima a meno di un insieme I di capacità nulla su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$, senza alcuna ulteriore condizione restrittiva; ed il problema è tuttora aperto.

Prima di concludere questa introduzione, desidero porre anche in rilievo che nel § 6 del presente lavoro vengono estesi i risultati ottenuti per il problema (II) al problema misto del tipo di DIRICHLET — derivata obliqua regolare, in cui cioè alla derivazione secondo la conormale ν su $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ viene sostituita la derivazione lungo un asse obliquo regolare qualunque, problema di cui (II) è un caso particolare. L'estensione è possibile in virtù dei risultati sui problemi di derivata obliqua regolare da me recentemente otte-

---

(8) Il MYRBERG considera soluzioni limitate in $\mathcal{D}$ e verificanti la (VI) quasi-dappertutto su $\mathcal{F}_1 \mathcal{D}$, il DE GIORGI addirittura soluzioni continue con derivate prime di quadrato sommabile in $\mathcal{D}$.

(9) Sulle relazioni tra la condizione di STAMPACCHIA e quella di FICHERA in ordine al teorema di unicità si veda la recente nota di STAMPACCHIA [35].

nuti e attualmente in corso di stampa [26]. Tale estensione mi sembra notevole, poichè in detto problema si presentano oltre alle difficoltà proprie dei problemi misti anche quelle dei problemi di derivata obliqua ([10]).

§ 1. - Preliminari.

1. — Si consideri l'equazione

$$E(u) \equiv \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \, \partial x_k} + \sum_{h}^{1,2} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + c\, u = f \tag{1}$$

i coefficienti a_{hk}, b_h, c, f essendo funzioni del punto P definite in un campo A del piano euclideo (x_1, x_2), risultando in tutto A $a_{12} = a_{21}$. Supponiamo che i coefficienti a_{hk}, b_h, c siano rispettivamente in A di classe $2H$, $1H$, $0H$, ([11]) e che l'equazione sia di tipo ellittico positivo in A, essendo inoltre uguale ad 1 il determinante della matrice $\| a_{hk} \|$.

L'operatore $E(u)$ ammette allora l'operatore aggiunto

$$E^*(v) = \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial^2 v}{\partial x_h \, \partial x_k} + \sum_{h}^{1,2} b_h^* \frac{\partial v}{\partial x_h} + c^* v$$

$$b_h^* = - b_h - 2 \sum_{k}^{1,2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k} \qquad c^* = \sum_{h,k}^{1,2} \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_h \, \partial x_k} - \sum_{h}^{1,2} \frac{\partial b_h}{\partial x_h} + c .$$

Sia $\mathcal{D}$ un dominio regolare limitato, contenuto in A, la cui frontiera $\mathcal{F}\mathcal{D}$ sia costituita da una curva semplice chiusa di classe 2 in ogni suo

---

([10]) Per il problema inteso in senso ordinario, in quanto esso può farsi rientrare nel problema più generale della derivata obliqua, si vedano le indicazioni bibliografiche date in [28] e nel volume di Muskhelisvili citato in [25]; e per il problema generalizzato si veda J. L. Lions [23], [24] e M. I. Visik [37]. Anche i recenti risultati di G. Fichera sul problema di Dirichlet-Neumann [v. 13], [14] si lasciano estendere, in virtù anche di [26], ai problemi di Dirichlet derivata obliqua regolare.

([11]) Secondo una nomenclatura abituale, diremo che una funzione è di classe r in un insieme se essa è ivi continua insieme alle sue derivate parziali d'ordine $\leq r$; diremo che è di classe $r\,H$, se, inoltre, le derivate d'ordine $\leq r$ soddisfano ad una condizione di Hölder; diremo analogamente che una curva continua è di classe r o $r\,H$ in un suo punto M, se risulta definita in un intorno di M da una rappresentazione parametrica con funzioni di classe r o $r\,H$.

punto; e sia

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases} \qquad a_1 \leq t \leq a_2$$

una rappresentazione parametrica regolare di $\mathcal{F}\mathfrak{D}$. Mediante i punti $Q_1 \equiv [x_1(t_1), x_2(t_1)]$ e $Q_2 \equiv [x_1(t_2), x_2(t_2)]$ $(a_1 < t_1 < t_2 < a_2)$ dividiamo $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ in due sottoarchi aperti e privi di estremi $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$; $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ sia il sottoarco che si ottiene dalla (2) per $t_1 < t < t_2$, $\overline{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}}$ e $\overline{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}}$ gli stessi archi cui si siano aggiunti gli estremi Q_1 e Q_2.

Si ponga

$$b = \sum_h^{1,2} \left(b_h - \sum_k^{1,2} \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k} \right) \cos(x_h, n)$$

dove n è la normale a $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ orientata verso l'interno di D; si indichi poi con ν la direzione conormale a $\mathcal{F}\mathfrak{D}$, orientata pure verso l'interno.

2. — Sia

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = x_1(t, r) \\ x_2 = x_2(t, r) \end{cases}$$

una trasformazione biunivoca e bicontinua del rettangolo $R \equiv [0 \leq r \leq r_1; t_1 \leq t \leq t_2]$ del piano (t, r) nel dominio $\mathfrak{D}$ del piano (x_1, x_2), tale che

I) *per ogni r le* (3) *diano una rappresentazione parametrica regolare di una curva regolare γ_r, la quale coincide con l'arco $\overline{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}}$ per $r = 0$*

II) *per r sufficientemente piccolo $(0 \leq r \leq r_0)$ $(r_0 < r_1)$ gli estremi di γ_r, $Q_{i,r} \equiv [x_1(t_i, r), x_2(t_i, r)]$ $(i = 1, 2)$ (e solo essi) siano punti di $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ e precisamente dati da*

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1(t_1, r) = x_1(t_1 - r) & x_1(t_2, r) = x_1(t_2 + r) \\ x_2(t_1, r) = x_2(t_1 - r) & x_2(t_2, r) = x_2(t_2 + r) \end{cases}$$

III) *esistano e siano generalmente continue e limitate le derivate parziali della $x_i(t, r)$ rispetto a t è r, $x_{i,r}$ e $x_{i,t}$ $(i = 1, 2)$, in R e siano tali che $x_{1,t}\, x_{2,r} - x_{1,r}\, x_{2,t} > 0$; inoltre siano verificate per $0 < r \leq r_0$ le relazioni*

$$(5)\qquad [a_{22}(Q_{i,r})\, x_{1,t}(t_i, r) - a_{12}(Q_{i,r})\, x_{2,t}(t_i, r)]\, x_{1,r}(t_i, r) -$$
$$- [a_{21}(Q_{i,r})\, x_{1,t}(t_i, r) - a_{11}(Q_{i,r})\, x_{2,t}(t_i, r)]\, x_{2,r}(t_i, r) = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

Si introducano ora le funzioni α e β definite per ogni (t, r) di R mediante le

$$x_{i,r} = \alpha(a_{21}\, x_{1,t} - a_{11}\, x_{2,t}) + \beta\, x_{1,t}\,; \quad x_{2,r} = \alpha(a_{22}\, x_{1,t} - a_{12}\, x_{2,t}) + \beta\, x_{2,t}$$

cioè

$$\alpha = \frac{x_{1,t}\, x_{2,r} - x_{1,r}\, x_{2,t}}{a_{22}\, x_{1,t}^2 - (a_{12} + a_{21})\, x_{1,t}\, x_{2,t} + a_{11}\, x_{2,t}^2}$$

$$\beta = \frac{(a_{22}\, x_{1,t} - a_{12}\, x_{2,t})\, x_{1,r} - (a_{21}\, x_{1,t} - a_{11}\, x_{2,t})\, x_{2,r}}{a_{22}\, x_{1,t}^2 - (a_{12} + a_{21})\, x_{1,t}\, x_{2,t} + a_{11}'\, x_{2,t}^2}$$

gli a_{hk} intendendosi calcolati per $x_1 = x_1(t, r)$ $x_2 = x_2(t, r)$.

Sia infine $P(t, r)$ una funzione « peso » soddisfacente alle condizioni

a) $P(t, r)$ *è limitata e maggiore di una costante positiva in* R *e tale che il prodotto* $P\alpha$, *considerato attraverso l'inversa della* (3) *come funzione di* (x_1, x_2), *sia di classe* 2 *in* $\mathfrak{D} - \mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ *e limitata in* $\mathfrak{D}$;

b) per ogni r *tale che* $0 < r \leq r_0$ *esista quasi-ovunque in* (t_1, t_2) *e sia ivi limitata la derivata* $(P\beta)_t$; *per gli stessi* r *e per quasi-tutti i* t *di* (t_1, t_2) *esista la derivata* P_r *e sia limitata nell'intorno di ogni tale* r *al variare di* t *in* (t_1, t_2);

c) esista un numero L *tale che per* $0 < r \leq r_0$, $t_1 < t < t_2$ *siano soddisfatte le*

$$(E^*(P\alpha) + c\, P\alpha)(x_{1,t}\, x_{2,r} - x_{1,r}\, x_{2,t}) \leq L\, P$$

$$P_r - (P\beta)_t + \left[\frac{d\,P\alpha}{d\,\nu_r} - b\, P\alpha\right] \sqrt{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2} \leq L\, P$$

d) nei punti di $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ *sia*

$$\frac{d\,(P\alpha)}{d\,\nu} - b\, P\alpha \leq 0$$

e) esista un numero $\bar{\lambda} > 0$ *tale che in* $\mathfrak{D}$-$\mathcal{F}\mathfrak{D}$ *risulti*

$$E^*(P\alpha) + c\, P\alpha - \bar{\lambda}\, P\alpha \leq 0\,.$$

3. — Se $\mu(t)$ è una funzione di quadrato sommabile in (t_1, t_2) e $u(x_1, x_2)$ è una funzione definita in $\mathfrak{D}$ e di quadrato sommabile su ogni γ_r, diremo che $u(x_1, x_2)$ *converge « in media » sul sistema delle curve* γ_r (*rappresentate dalle* (3)) *alla funzione* μ *se risulta*

$$\lim_{r \to 0} \int_{t_1}^{t_2} P(t, r)\, \{u\,[x_1(t, r),\, x_2(t, r)] - \mu(t)\}^2\, d\,t = 0 \tag{6}$$

dove $P(t, r)$ è la funzione «peso» di cui nel n. 2. Si osservi subito che poichè $P(t, r)$ è limitata e maggiore di una costante positiva in R la (6) equivale alla

$$\lim_{r \to 0} \int_{t_1}^{t_2} \{ u [x_1(t, r), x_2(t, r)] - \mu(t) \}^2 \, dt = 0 \tag{7}$$

4. — Le considerazioni del n. 2 sono in sostanza rivolte a stabilire nella sua generalità il concetto di convergenza «in media» su un sistema di curve di cui dicevamo nell'introduzione. Se l'enunciazione di esse risulta formalmente complessa, ciò è dovuto al fatto che si è voluto appunto stabilire detto concetto nella maggior generalità, sia per quanto riguarda il sistema delle curve γ_r che per la funzione «peso» $P(t, r)$. E si osservi che, volendo, le condizioni I), II), III), a), b), c), d), e) si potrebbero ulteriormente generalizzare, come apparirà chiaro dal seguito, senza alterare la validità del procedimento che esporremo; in particolare le (5) che geometricamente esprimono la «trasversalità» di γ_r a $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ (cioè il fatto che γ_r abbia in $Q_{1,r}$ e $Q_{2,r}$ tangente avente la stessa direzione della conormale a $\mathcal{F}_2 \mathcal{D}$ negli stessi punti), potrebbero essere sostituite dalle

$$\begin{aligned} &[a_{22}(Q_{i,r})\, x_{1,t}(t_i, r) - a_{1,2}(Q_{i,r})\, x_{2,t}(t_i, r)]\, x_{1,r}(t_i, r) - \\ &- [a_{21}(Q_{i,r})\, x_{1,t}(t_i, r) - a_{11}(Q_{i,r})\, x_{2,t}(t_i, r)]\, x_{2,r}(t_i, r) \begin{cases} \geq 0 \text{ se } i = 1 \\ \leq 0 \text{ se } i = 2 \end{cases} \end{aligned} \tag{5'}$$

e così pure la d) e la e) potrebbero essere soppresse per la dimostrazione del teorema di convergenza e di quello di esistenza dei successivi § 2 e 3, intervenendo solo la d) a proposito del teorema di unicità (§ 4) e la e) a proposito del teorema dell'alternativa (§ 5).

Ma ciò ha in sostanza poco interesse; l'importante è invece osservare che *la costruzione di un sistema di curve γ_r e di una funzione peso $P(t, r)$ che permettano l'applicazione del procedimento che esporremo (in particolare soddisfino alle* I), II), III), a), b), c), d), e)) *è sempre possibile per ogni operatore $E(u)$ di tipo ellittico e con grande arbitrarietà. Praticamente si può dare ad arbitrio il sistema γ_r di curve, purchè siano sufficientemente regolari e verifichino le* (5) *o le* (5') *e costruire poi la funzione $P(t, r)$ che risulti più opportuna,* perchè, in virtù dell'equivalenza della (6) con la (7), la convergenza «in media» di una funzione $u(x_1, x_2)$ non dipende dalla $P(t, r)$.

Per esempio se $E(u)$ è autoaggiunto e c è ≤ 0 in $\mathcal{D}$ basta prendere $P = \dfrac{1}{\alpha}$. Si vedano in proposito anche le considerazioni del n. 4 di [25].

5. — Sia ora $u(x_1, x_2)$ una funzione di classe 2 in $\mathfrak{D}$; si consideri per $0 < r \leq r_0$ la funzione di r

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t, r)\, u^2 [x_1(t, r), x_2(t, r)]\, dt$$

e la si derivi rispetto ad r.

Indicati con $\mathfrak{D}_r$ il dominio regolare delimitato da γ_r e dall'arco di $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ avente per estremi $Q_{1,r}$ e $Q_{2,r}$, con $\mathcal{F}\mathfrak{D}_r$ la frontiera di $\mathfrak{D}_r$, $\overline{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}_r}$ la parte di $\mathcal{F}\mathfrak{D}_r$ costituita da γ_r stessa, con $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}_r$ l'arco $\mathcal{F}\mathfrak{D}_r - \overline{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}_r}$ e infine con ν_r la conormale a $\mathcal{F}\mathfrak{D}_r$ orientata verso l'interno di $\mathfrak{D}_r$, si può ottenere, in modo del tutto analogo a quanto si è visto nel n. 3, β) di [25], applicando la formula di GREEN, la seguente identità

$$(8) \quad \frac{d}{dr}\int_{t_1}^{t_2} P u^2\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ P_r - (P\beta)_t + \left[\frac{d(P\alpha)}{d\nu_r} - b P\alpha\right] \sqrt{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2} \right\} u^2\, dt -$$
$$- 2\int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}_r} P\alpha u \frac{du}{d\nu}\, ds + \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}_r} \left[\frac{d(P\alpha)}{d\nu} - b P\alpha\right] u^2\, ds -$$
$$- 2\iint_{\mathfrak{D}_r} P\alpha \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h}\frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx_1\, dx_2 + \iint_{\mathfrak{D}_r} [E^*(P\alpha) + c P\alpha]\, u^2\, dx_1\, dx_2 -$$
$$- 2\iint_{\mathfrak{D}_r} P\alpha u\, E(u)\, dx_1\, dx_2$$

Dalla (8) integrando tra r_1 e r_2 con $0 < r_1 < r_2 \leq r_0$ si ottiene la

$$(9) \quad \left[\int_{t_1}^{t_2} P u^2\, dt\right]_{r_1}^{r_2} = \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{t_1}^{t_2} \left\{ P_r - (P\beta)_t + \left[\frac{dP\alpha}{d\nu_r} - b P\alpha\right] \sqrt{x_{1,t}^2 + x_{2,t}^2} \right\} u^2\, dt -$$
$$- 2\int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}_r} P\alpha u \frac{du}{d\nu}\, ds + \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}_r} \left[\frac{dP\alpha}{d\nu} - b P\alpha\right] u^2\, ds -$$
$$- 2\int_{r_1}^{r_2} dr \iint_{\mathfrak{D}_r} P\alpha \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h}\frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx_1\, dx_2 + \int_{r_1}^{r_2} dr \iint_{\mathfrak{D}_r} [E^*(P\alpha) + c P\alpha]\, u^2\, dx_1\, dx_2 -$$
$$- 2\int_{r_1}^{r_2} dr \iint_{\mathfrak{D}_r} P\alpha u\, E(u)\, dx_1\, dx_2$$

Ricordiamo ancora che, come conseguenza della formula di GREEN, se u è una funzione di classe 2 in $\mathfrak{D}$, in condizioni opportune di regolarità per la funzione v e nell'ipotesi

$$v = 0 \qquad \text{su } \mathcal{F}_1 \mathfrak{D} \tag{10}$$

vale la seguente relazione

$$2\int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}} v u \frac{d u}{d \nu} d s - \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \left(\frac{d v}{d \nu} - b v\right) u^2 d s - \iint_{\mathfrak{D}} [E^*(v) + c v] u^2 d x_1 d x_2 + \\ + 2 \iint_{\mathfrak{D}} v \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} d x_1 d x_2 + 2 \iint_{\mathfrak{D}} v u E(u) d x_1 d x_2 = 0. \tag{11}$$

In particolare per quanto diremo ci basterà osservare che la (11) vale *se v appartiene alla classe V delle funzioni v tali che v sia continua e non positiva in $\mathfrak{D}$, con derivate prime continue in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e limitate in $\mathfrak{D}$, con derivate seconde continue in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e tali che $E^*(v) + c v$ risulti limitato in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e inoltre v soddisfi alla* (10) *e alla condizione* $\dfrac{d v}{d \nu} - b v \geq 0$ *su* $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$.

Dalla (11) si ottiene facilmente, ragionando come nel n. 5, *a*) di [25], la

$$\int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}} \varphi^2 u^2 d s \leq L_\varphi \left\{ \iint_{\mathfrak{D}} u^2 d x_1 d x_2 + \iint_{\mathfrak{D}} [E(u)]^2 d x_1 d x_2 + \right. \\ \left. + \int_{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}} u^2 d s + \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}} \left(\frac{d u}{d \nu}\right)^2 d s \right\} \tag{12}$$

dove φ è una qualunque funzione definita su $\overline{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}}$ annullantesi in Q_1 e Ω_2 non negativa, continua e con derivata (rispetto alla lunghezza d'arco s) generalmente continua e limitata, e L_φ è un numero opportuno dipendente solo da φ e non dalla funzione u. Basta infatti prendere nella (11) la funzione v appartenente a V e inoltre tale che

$$\frac{d v}{d \nu} - b v \geq \varphi^2 \text{ su } \mathcal{F}_2 \mathfrak{D}, \qquad |v| < k \varphi \text{ su } \mathcal{F}_2 \mathfrak{D} \ (k \text{ costante}).$$

Sempre dalla (11) si possono ancora ottenere nuove formule di maggiorazione; se u è di classe 2 in $\mathfrak{D}$ e $v \in V$ si ha

$$(13) \qquad -\iint_{\mathfrak{D}} v \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{d x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} d x_1 \, d x_2 \leq H_v \left\{ \iint_{\mathfrak{D}} u^2 \, d x_1 \, d x_2 + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}} u^2 \, d s + \int_{\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}} v^2 \, u^2 \, d s + \int_{\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}} \left(\frac{d u}{d \nu} \right)^2 d s + \iint_{\mathfrak{D}} [E(u)]^2 \, d x_1 \, d x_2 \right\}$$

con H_v dipendente solo da v e non da u; di qui, applicando anche la (12) con $\varphi = v$ si ottiene pure

$$(14) \qquad -\iint_{\mathfrak{D}} v \sum_{h,k}^{1,2} a_{kh} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k} d x_1 \, d x_2 \leq K_v \left\{ \iint_{\mathfrak{D}} u^2 \, d x_1 \, d x_2 + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}} u^2 \, d s + \int_{\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}} \left(\frac{d u}{d \nu} \right)^2 d s + \iint_{\mathfrak{D}} [E(u)]^2 \, d x_1 \, d x_2 \right\}$$

con K_v dipendente solo da v e non da u.

§ 2. - Il teorema di convergenza.

6. — Premettiamo che d'ora innanzi indicheremo con $\mathcal{L}^2$ lo spazio delle funzioni $u(P)$ di quadrato sommabile in $\mathfrak{D}$, normalizzato ponendo al solito

$$\| u \| = \left\{ \iint_{\mathfrak{D}} u^2 \, d x_1 \, d x_2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dimostriamo poi il seguente:

Teorema di convergenza: *Siano $\{u_n(P)\}$ una successione di funzioni di classe 2 in $\mathfrak{D}$, $\mu(P)$ e $\delta(P)$ funzioni di quadrato sommabile rispettivamente su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ e $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$, $f(P)$ una funzione hölderiana in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e appartenente a $\mathcal{L}^2$. Se risulta*

$$(15) \qquad \lim_{n \to \infty} \left\{ \iint_{\mathfrak{D}} [E(u_n) - f]^2 \, d x_1 \, d x_2 + \int_{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}} (u_n - \mu)^2 \, d s + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}} \left(\frac{d u_n}{d \nu} - \delta \right)^2 d s \right\} = 0$$

e se esiste una costante H per cui

$$\iint_{\mathfrak{D}} u_n^2 \, dx_1 \, dx_2 \leq H \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

allora la successione $\{u_n(P)\}$, o una successione da essa estratta, converge in media in $\mathfrak{D}$ e uniformemente in ogni insieme chiuso interno a $\mathfrak{D}$ verso una funzione $u(P)$ appartenente a $\mathcal{L}^2$, la quale soddisfa in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ all'equazione $E(u) = f$, converge «in media» sul sistema delle curve γ_r alla funzione μ e per quasi-tutti i punti M di $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ verifica l'ulteriore condizione al contorno

$$\lim_{P \to M \,(\text{su } n_M)} \frac{d\,u(P)}{d\,\nu_M} = \delta(M).$$

Incominciamo con l'osservare che, se nella (12) poniamo $u = u_m - u_n$, u_m e u_n essendo due qualunque delle funzioni della successione data, otteniamo, in virtù delle (15) e (16), la limitazione

$$\int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}} \varphi^2 (u_m - u_n)^2 \, ds \leq L'_\varphi \qquad (m, n = 1, 2 \ldots) \tag{17}$$

con L'_φ numero dipendente solo dalla funzione φ.

Inoltre, applicando la (14) ad ogni u_n, se v^* è una qualunque funzione della classe V che sia minore di zero in $\mathfrak{D} - \overline{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}}$, otteniamo in virtù delle (15) e (16)

$$-\iint_{\mathfrak{D}} v^* \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u_n}{\partial x_h} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \, dx_1 \, dx_2 \leq H^* \, (m, n = 1, 2 \ldots) \tag{18}$$

con H^* dipendente solo da v^*.

Si ottiene allora, dalle (18) e (16) e dal fatto che $E(u)$ è un operatore ellittico-positivo in $\mathfrak{D}$, per un noto teorema di F. RELLICH [33], le conververgenze in media in $\mathfrak{D}$ rispetto alla funzione peso v^* di una sottosuccessione della $\{u_n\}$, che indicheremo ancora per semplicità con $\{u_n\}$, ad una funzione $u(P)$ definita in $\mathfrak{D}$; precisamente sarà

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{\mathfrak{D}} v^* (u_n - u)^2 \, d\,x_1 \, d\,x_2 = 0 \tag{19}$$

E si osservi che per essere $v^* < 0$ in $\mathfrak{D} - \overline{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{D}}$ la successione $\{u_n\}$ convergerà in media alla $u(P)$ in ogni dominio $\mathfrak{D}_r$ con $r > 0$.

Applichiamo ora l'uguaglianza (9) alla differenza $u_m - u_n$; facendo in essa tendere r_1 a zero e tenendo presente l'ipotesi che $E(u)$ è ellittico-positivo in $\mathfrak{D}$ e le proprietà a), c), d) di cui gode la funzione «peso» $P(t, r)$ (v. n. 2), si ottiene, posto $r_2 = r$ e

$$u_i[x_1(t, r), x_2(t, r)] = u_i(t, r) \quad (i = m, n),$$

$$(20) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \dot{P}(t, r)[u_m(t, r) - u_n(t, r)]^2 \, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} P(t, 0)[u_m(t, 0) - u_n(t, 0)]^2 \, dt +$$

$$+ L \int_0^r d\varrho \int_{t_1}^{t_2} P(t, \varrho)[u_m(t, \varrho) - u_n(t, \varrho)]^2 \, dt + c \left\{ \int_0^r d\varrho \int_{\mathfrak{F}_2 \mathfrak{D}_\varrho} |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^r d\varrho \iint_{\mathfrak{D}_\varrho} [E^*(P\alpha) + cP\alpha](u_m - u_n)^2 dx_1 \, dx_2 + \int_0^r d\varrho \iint_{\mathfrak{D}_\varrho} |u_m - u_n| \, |E(u_m - u_n)| dx_1 dx_2 \right\}$$

con c costante indipendente da r, m, n e r qualunque tra 0 e r_0 [12].

Si fissi ora un valore r^* tale che $0 < r^* < r_0$ e che

$$L r^* + C L \frac{r^{*2}}{2} < 1$$

dove L è la costante di cui alla c) del n. 2; e si consideri la (20) per ogni r tale che $0 < r \leq r^*$.

L'integrale

$$\int_0^r d\varrho \int_{\mathfrak{F}_2 \mathfrak{D}_\varrho} |u_m - u_n| \left| \frac{d(u_m - u_n)}{d\nu} \right| ds$$

([12]) Si osservi che, se non fosse verificata la condizione d) del n. 2, nel secondo membro della (20) dovrebbe aggiungersi un termine del tipo $\int_0^r d\varrho \int_{\mathfrak{F}_2 \mathfrak{D}_\varrho} (u_m - u_n)^2 ds$; ciò non infirmerebbe però il ragionamento che faremo, il quale, mediante alcune semplici aggiunte e modifiche porterebbe ancora alla disuguaglianza fondamentale (24).

si può, come si è visto nel n. 5, β) di [25] maggiorare mediante

$$\left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \varphi^2 (u_m - u_n)^2 \, d\, s \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left| \frac{d\,(u_m - u_n)}{d\nu} \right|^2 d\, s \right\}^{\frac{1}{2}}$$

dove φ è la funzione introdotta nel n. 5, β) di [25] ([13]).
In virtù della (17) si ha allora

$$\int_0^r d\,\varrho \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}_\varrho} |\, u_m - u_n \,| \left| \frac{d\,(u_m - u_n)}{d\,\nu} \right| d\,s \leq \sqrt{L'_\varphi} \left\{ \int_{\mathcal{F}_2 \mathcal{D}} \left| \frac{d\,(u_m - u_n)}{d\,\nu} \right|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

Si ha pure per $0 < r \leq r^*$

$$\int_0^r d\,\varrho \iint_{\mathcal{D}_\varrho} |\, u_m - u_n \,| \, |E\,(u_m - u_n)\,| \, d\,x_1 \, d\,x_2 \leq \tag{22}$$

$$\leq r^* \left\{ \iint_{\mathcal{D}} (u_m - u_n)^2 \, d\,x_1 \, d\,x_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \iint_{\mathcal{D}} [\,E\,(u_m - u_n)]^2 \, d\,x_1 \, dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

([13]) Richiamiamo per comodità la definizione di detta funzione; riferita la curva $\mathcal{F}\mathcal{D}$ alla lunghezza d'arco s, i punti Q_1 e Q_2 corrispondano ai valori s_1 e s_2 rispettivamente, con $s_2 < s_1$; così pure i punti $Q_{1,r}$ e $Q_{2,r}$ corsispondano ai valori $s_1(r)$ e $s_2(r)$ $(0 < r \leq r_0)$; $s_1(r)$ è decrescente e $s_2(r)$ crescente. Dette $r_1(s)$ e $r_2(s)$ le rispettive funzioni inverse si ha

$$\varphi(s) = \begin{cases} r_2(s) & \text{per} \quad s_2 \leq s \leq s_2(r_0) \\ r_0 & \text{«} \quad s_2(r_0) \leq s \leq s_1(r_0) \\ r_1(s) & \text{«} \quad s_1(r_0) \leq s \leq s_1 \end{cases}$$

Infine sempre per $0 < r \leq r^*$ si ha, in virtù anche delle condizioni a) e c) del n. 2,

$$
(23) \qquad \int_0^r d\varrho \iint_{\mathfrak{D}_\varrho} [E^*(P\alpha) + c\,P\alpha]\,(u_m - u_n)^2\,dx_1\,dx_2 =
$$

$$
= \int_0^r d\varrho \iint_{\mathfrak{D}_{r^*}} [E^*(P\alpha) + c\,P\alpha](u_m - u_n)^2 dx_1 dx_2 + \int_0^r d\varrho \iint_{\mathfrak{D}_\varrho - \mathfrak{D}_{r^*}} \frac{E^*(P\alpha) + cP\alpha + |E^*(P\alpha) + cP\alpha|}{2} \cdot
$$

$$
\cdot\,(u_m - u_n)^2\,dx_1\,dx_2 +
$$

$$
+ \int_0^r d\varrho \iint_{\mathfrak{D}_\varrho - \mathfrak{D}_{r^*}} \frac{E^*(P\alpha) + c\,P\alpha - |E^*(P\alpha) + c\,P\alpha|}{2} (u_m - u_n)^2\,dx_1\,dx_2 \leq
$$

$$
\leq r^* \iint_{\mathfrak{D}_r^*} [E^*(P\alpha) + c\,P\alpha)\,(u_m - u_n)^2\,dx_1\,dx_2 +
$$

$$
+ \int_0^r d\varrho \int_0^{r^*} d\sigma \int_{t_1}^{t_2} \frac{E^*(P\alpha) + c\,P\alpha + |E^*(P\alpha) + c\,P\alpha|}{2} (u_m - u_n)^2 (x_{1,t} x_{2,r} - x_{1,r} x_{2,t})\,dt \leq
$$

$$
\leq r^* K^* \iint_{\mathfrak{D}_{r^*}} (u_m - u_n)^2\,dx_1\,dx_2 + L \int_0^r d\varrho \int_\varrho^{r^*} d\sigma \int_{t_1}^{t_2} P(t,\sigma)\,(u_m - u_n)^2\,dt
$$

con K^* costante dipendente solo da $P\alpha$ e da r^*.

In defininitiva, ricordando la (19) e l'osservazione immediatamente successiva, in virtù anche delle (21), (22), (23), (15), (16), si ottiene dalla (20) per $0 < r \leq r^*$

$$
\int_{t_1}^{t_2} P(t,r)\,[u_m(t,r) - u_n(t,r)]^2\,dt \leq \gamma_{m,n} + L \int_0^r d\varrho \int_{t_1}^{t_2} P(t,\varrho)\,[u_m(t,\varrho) -
$$

$$
- u_n(t,\varrho)]^2\,dt + C\,L \int_0^r d\varrho \int_\varrho^{r^*} d\sigma \int_{t_1}^{t_2} P(t,\sigma)\,[u_m(t,\sigma) - u_n(t,\sigma)]^2\,dt
$$

dove è $\lim'_{(m,n)\to\infty} \gamma_{m,n} = 0$ *indipendentemente* da r.

Detto $M_{m,n}$ l'estremo superiore della funzione di r

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t, r)\{u_m(t, r) - u_n(t, r)]^2 \, d\, t$$

nell'intervallo $(0, r^*)$ si ha allora per $0 < r \leq r^*$

$$M_{m,n} \leq \gamma_{m,n} + L\, r^* \, M_{m,n} + C\, L \frac{r^{*2}}{2} M_{m,n}$$

e quindi, poichè $L\, r^* + C\, L \frac{r^{*2}}{2} < 1$, si ha per $0 < r \leq r^*$

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t, r)[u_m(t, r) - u_n(t, r)]^2 \, d\, t \leq M_{m,n} \leq \frac{\gamma_{m,n}}{1 - L\, r^* - C L \frac{r^{*2}}{2}} \tag{24}$$

Questa è la disuguaglianza fondamentale cui volevamo arrivare.

7. Da essa segue subito, ragionando come si è fatto sulla formula (21) di [25], la convergenza in media della $\{u_n\}$ nel dominio $\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_{r^*}$. Si ottiene così per quanto si è già visto, *la convergenza in media della* $\{u_n\}$ *in tutto il dominio* $\mathfrak{D}$ *verso la funzione* $u(P)$.

Possiamo dunque scrivere, a perfezionamento della (19), la

$$\lim_{n \to 0} \iint_{\mathfrak{D}} (u_n - u)^2 \, d\, x_1 \, d\, x_2 = 0 \tag{25}$$

8. — Sempre dalla 24) si ha che la successione $\{u_n(P)\}$ converge in media alla funzione $u(P)$ su ogni curva γ_r per $0 < r \leq r^*$, *uniformemente* rispetto ad r, e di qui, in modo del tutto analogo a quanto si è fatto nel n. 5, δ) di [25], si dimostra che $u(P)$ *converge «in media» sul sistema di curve* γ_r *alla funzione* μ *assegnata su* $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$.

9. — Per studiare poi le proprietà cui la funzione $u(P)$ soddisfa nell'interno di $\mathfrak{D}$, non abbiamo che da ripetere i procedimenti ormai ben noti sui quali si basa la trattazione del problema di DIRICHLET generalizzato del CIMMINO, e per la quale mi riferirò alla rapida esposizione datane da C. MIRANDA [28; n. 29], in parte suggerita dai lavori di B. PINI.

Le funzioni $u_n(P)$ soddisfano alla proprietà di media (v. [28, pag. 90])

$$u_n(P) = \iint_{\mathfrak{D}} \{u_n(Q)\, E_Q^*[H_\varrho(Q, P)] - E[u_n(Q)]\, H_\varrho(Q, P)\} \, d\, Q$$

per ogni punto P interno a $\mathcal{D}$ e per ϱ minore della distanza $d(P)$ di P da $\mathcal{F}\mathcal{D}$, dove con $H_\varrho(Q, P)$ intendesi quella particolare funzione di LEVI definita ponendo

$$H_\varrho(Q,P) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log \left(\sum\limits_{h,k}^{1,2} \alpha_{hk}(y_1, y_2)(x_h - y_h)(x_k - y_k) \right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \dfrac{\overline{PQ}}{\varrho^5}\right]^5 & \text{per } \overline{PQ} \leq \varrho \\ 0 & \text{per } \overline{PQ} > \varrho \end{cases}$$

essendo (x_1, x_2) e (y_1, y_2) le coordinate rispettivamente di Q e P e α_{hk} il complemento algebrico di a_{hk} nella matrice $\| a_{hk} \|$.

Segue di qui (v. [28, pag. 91]) che la $\{u_n\}$ o una sua sottosuccessione che indicheremo ancora con $\{u_n\}$, converge uniformemente in ogni insieme chiuso interno a $\mathcal{D}$ verso la funzione $u(P)$ e che la $u(P)$ è hölderiana in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ e soddisfa alla stessa proprietà di media; cioè

$$u(P) = \iint_{\mathcal{D}} \{u(Q)\, E_Q^* [H_\varrho(Q, P)] - f(Q)\, H_\varrho(Q, P)\}\, dQ \tag{26}$$

per $P \in \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ e $\varrho < d(P)$.

Si osservi esplicitamente a questo punto che finora si è solo adoperata l'ipotesi che $f(P)$ appartenga a L^2. Se $f(P)$ è per di più hölderiana in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$, come noi abbiamo supposto, allora (v. [28, teor. 29, II]) dalla (26) segue *che $u(P)$ è di classe 2 in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ e verifica l'equazione $E(u) = f$.*

10. — Prima ancora di studiare il comportamento della derivata conormale della $u(P)$ sulla parte $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ della frontiera, vogliamo mettere in evidenza altre proprietà di cui gode la funzione $u(P)$.

Se applichiamo alla differenza $u_m - u_n$ la (14) e teniamo presenti la (15) e la (25) otteniamo la convergenza in media in $\mathcal{D}$ rispetto a ogni funzione v di V delle successioni $\left\{\dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}\right\}$ e $\left\{\dfrac{\partial u_n}{\partial x_2}\right\}$ rispettivamente alle derivate $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ e quindi l'esistenza degli integrali

$$\iint_{\mathcal{D}} v \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\, dx_2 \qquad (i = 1, 2)$$

Ne segue per un teorema di G. FICHERA (v. [11, teor. XXXII]) che esiste per quasi-tutti i punti M di $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ il limite

$$\lim_{P \to M (\text{su } u_M)} u(P) = \overline{u}(M)$$

e $\overline{u}(M)$ è di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ rispetto a ogni funzione v di V, cioè esiste l'integrale

$$\int_{\mathcal{D}_2\mathcal{F}} v\,\overline{u}^2\,d\,s$$

11. — Passiamo finalmente allo studio della condizione al contorno $\dfrac{d\,u}{d\,\nu} = \delta$ su $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$.

Si osservi per questo anzitutto che, da quanto si è or ora detto nel precedente n. 10, si deduce la convergenza in media delle successioni $\left\{\dfrac{\partial\,u_n}{\partial\,x_1}\right\}$ e $\left\{\dfrac{\partial\,u_n}{\partial\,x_2}\right\}$ in ogni dominio regolare $\mathcal{D}^*$ il quale sia contenuto in $\mathcal{D}$ e abbia in comune con $\mathcal{D}$ una parte della frontiera e precisamente un sotto arco di $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ avente entrambi gli estremi contenuti in $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ mentre la rimanente parte di frontiera sia interna a $\mathcal{D}$.

Questa proprietà, unitamente alle (15) e (25), permette di dimostrare che per quasi-tutti gli M di $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ vale la relazione

$$\lim_{P\to M(\text{su } u_M)} \frac{d\,u\,(P)}{d\,\nu_M} = \delta\,(M)$$

precisandola anzi maggiormente, ad es. nel modo seguente, cosa che ci tornerà utile in seguito.

Per ogni punto M di $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ sia $r(M)$ la distanza di M da $\overline{\mathcal{F}_1\mathcal{D}}$ e si considerino i cerchi $\Gamma(M\,,\,\varrho)$ di centro M e raggio $\varrho < d\,(M)$. Fissato ϱ si consideri sul sottoarco di $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ di estremi M e $Q_1\,(Q_2)$ nel verso da M a $Q_1\,(Q_2)$ l'ultimo punto di intersezione con $\Gamma(M\,,\,\varrho)$ e lo si indichi con $M_{1,\varrho}\,(M_{2,\varrho})$. Dei due archi aperti di $\Gamma(M\,,\,\varrho)$ determinati da $M_{1,\varrho}$ e $M_{2,\varrho}$ uno è tutto interno a $\Gamma(M\,,\,\varrho)$: sia esso $\mathrm{F}_1\,\Gamma(M\,,\,\varrho)$. Allora la curva formata dal sottoarco di $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ di estremi $M_{1,\varrho}$ e $M_{2,\varrho}$ e da $\mathrm{F}_1\,\Gamma(M\,,\,\varrho)$ costituisce una curva semplice chiusa delimitante un dominio regolare $\mathcal{D}^*_{M,\varrho}$ del tipo menzionato or ora.

Orbene, dalle proprietà prima richiamate delle successioni $\left\{\dfrac{\partial\,u_n}{\partial\,x_1}\right\}$ e $\left\{\dfrac{\partial\,u_n}{\partial\,x_2}\right\}$, mediante facili ragionamenti analoghi a quelli del n. 5, ζ) di [25], si può dimostrare l'esistenza di una sottosuccessione della $\{u_n\}$, che per semplicità continueremo a chiamare con $\{u_n\}$, tale che per ogni M di $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ e per quasi-tutti i ϱ di $(0, r\,(M))$ le successioni delle derivate $\left\{\dfrac{\partial\,u_n}{\partial\,x_1}\right\}$ e $\left\{\dfrac{\partial\,u_n}{\partial\,x_2}\right\}$ convergano in media sulla frontiera $\mathcal{F}\mathcal{D}^*_{M,\varrho}$ di $\mathcal{D}^*_{M,\varrho}$.

Sia ora λ un numero positivo, maggiore del $\max_{\mathfrak{D}} c$; per le ipotesi fatte sui coefficienti $a_{h,k}$, b_h e c esiste allora per ogni dominio $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ la funzione di NEUMANN $N_{\lambda,\varrho}(P, Q)$, relativa all'operatore $E(u) - \lambda u$ e alle condizioni al contorno $\frac{du}{d\nu} = 0$ su $\mathcal{F}\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ (14).

Per ogni n e qualunque sia $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$, la funzione $u_n(P)$ soddisfa dunque alla relazione

$$(27) \qquad u_n(P) = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}} \frac{d u_n(Q)}{d \nu^*} N_{\lambda,\varrho}(P, Q)\, d s_Q -$$

$$- \iint_{\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}} \{E[u_n(Q)] - \lambda u_n(Q)\} \cdot N_{\lambda,\varrho}(P, Q)\, d Q$$

per ogni P interno a $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$, avendo indicato con ν^* la conormale interna a $\mathcal{F}\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$. Di qui, per quanto si è ora visto e per le (15) e (25), passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene per ogni M di $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$, per quasi-tutti i ϱ di $(0, r(M))$ e per ogni P interno a $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$

$$(28) \qquad u(P) = \int_{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}} \frac{d u(Q)}{d \nu^*} N_{\lambda,\varrho}(P, Q)\, d s_Q +$$

$$+ \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}} \delta(Q)\, N_{\lambda,\varrho}(P, Q)\, d s_Q - \iint_{\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}} [f(Q) - \lambda u(Q)]\, N_{\lambda,\varrho}(P, Q)\, d Q$$

dove con $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ si intende la parte di $\mathcal{F}\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ contenuta in $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ e con $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ la rimanente parte.

E di qui per le proprietà della funzione di NEUMANN si ottiene per quasi-tutti i punti S di $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$

$$\lim_{P \to S (\text{su } n_S)} \frac{d u(P)}{d \nu_S} = \delta(S)$$

(14) Per tutto quanto ci interesserà relativamente a detta funzione rinvio senz'altro al volume [28]: in particolare si vedano il Cap. II e il n. 22. Il fatto che la curva $\mathcal{F}\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ possa presentare in M_1 e M_2 dei punti angolosi non offre, come è noto (v. ad es. [15]), difficoltà. Del resto, volendo evitare detti punti angolosi, basterebbe sostituire ai domini $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ domini del tipo di quelli introdotti nel n. 5, ζ) di [25]. E questa osservazione interessa particolarmente quando si vogliono estendere i risultati del presente lavoro ad uno spazio a più dimensioni.

Essendo M qualunque su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$, si è così dimostrato che $\frac{d u}{d \nu}$ assume su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ i valori δ nel senso voluto e precisamente per quasi-tutti i punti M di $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ si ha

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M)} \frac{d u(P)}{d \nu} = \delta(M)$$

Ma si ha anche di più, in virtù delle proprietà della funzione di NEUMANN e di noti teoremi sul potenziale generalizzato di semplice strato, che per quasi-tutti i punti M di $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ esiste il limite.

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M)} u(P) = \overline{u}(M)$$

e $\overline{u}(M)$ è di quadrato sommabile in ogni sottoarco completamente interno a $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$. Il teorema è così dimostrato

12. — Abbiamo finora supposto che le funzioni $u_n(P)$ fossero di classe 2 in $\mathfrak{D}$; ma i ragionamenti usati sono validi anche se le funzioni $u_n(P)$ appartengono ad una classe più vasta di funzioni. È infatti immediato verificare che in sostanza per dimostrare il teorema di convergenza basta che le funzioni $u_n(P)$ soddisfino a queste proprietà:

1^0) ogni $u_n(P)$ è di classe 2 in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e appartiene a $\mathcal{L}^2$; anche il suo $E(u_n)$ appartiene a $\mathcal{L}^2$;

2^0) ogni $u_n(P)$ converge in «media» sul sistema delle curve γ_r ad una funzione di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$;

3^0) per quasi-tutti i punti M di $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ esistono finiti i limiti

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M)} u_n(P) = u_n(M) \quad \text{e} \quad \lim_{P \to M (\text{su } n_M)} \frac{d u_n(P)}{d \nu_M} = \frac{d u_n(M)}{d \nu_M}$$

e $\frac{d u_n(M)}{d \nu_M}$ è di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$;

4^0) ogni $u_n(P)$ soddisfa per tutti gli M di $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ e quasi-tutti i ϱ di $(0, r(M))$ alla (27);

5^0) ogni funzione $u_n(P)$ e la differenza $u_m(P) - u_n(P)$ di due qualunque delle $u_n(P)$ soddisfano alla relazione (11), per ogni v di V;

6^0) la differenza $u_m(P) - u_n(P)$ di due qualunque delle $u_n(P)$ soddisfa alla relazione (9) per ogni r_1 e r_2 tali che $0 < r_1 < r_2 \leq r^*$ [15]

---

[15] Si osservi che r^* non dipende dalla successione $\{u_n\}$ che si è considerata nei n. precedenti.

7^0) la successione $\{u_n\}$ verifica le ipotesi (15) e (16).

I ragionamenti dei n. precedenti si ripetono perfettamente con questa sola avvertenza: nel ricavare la (20) dalla (9) si osservi che l'esistenza degli integrali

$$\int_0^r d\varrho \int_{\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}_\varrho} | u_m - u_n | \left| \frac{d (u_m - u_n)}{d \nu} \right| d s$$

è assicurata da ragionamenti che sono sostanzialmente quelli usati per arrivare alla successiva formula (21).

Così ad es. il teorema di convergenza è ancora valido se le $u_n(P)$ sono di classe 1 in $\mathfrak{D}$ ed $E(u_n)$ appartiene a $\mathcal{L}^2$.

13. — Ci sarà utile, prima di concludere le considerazioni sul teorema di convergenza, mettere meglio in evidenza le principali proprietà cui soddisfa la funzione limite $u(P)$:

I^0) *essa converge «in media» sul sistema delle curve γ_r ad una funzione μ di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$;*

II^0) *è di classe 2 in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e appartiene a $\mathcal{L}^2$; il suo $E(u)$ è una funzione f di $\mathcal{L}^2$ hölderiana in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$;*

III^0) *per ogni punto M di $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ e per quasi-tutti i ϱ di $(0, r(M))$ soddisfa alla relazione* (28) *con δ funzione di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$.*

Si osservi che dalla III^0) segue, come si è visto, l'esistenza dei limiti:

$$\lim_{P \to M (\mathrm{su}\ n_M)} u(P) = \bar{u}(M) \qquad \lim_{P \to M (\mathrm{su}\ n_M)} \frac{d\, u(P)}{d \nu_M} = \delta(M)$$

per quasi-tutti gli M di $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ e che $\bar{u}(M)$ è di quadrato sommabile in ogni sottoarco completamente interno a $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$.

Ebbene, noi indicheremo d'ora innanzi con Ω_λ la classe delle funzioni definite in $\mathfrak{D}$, ognuna delle quali soddisfi alle condizioni I^0), II^0), III^0) *sopraddette.*

Una tale classe costituisce ovviamente una varietà lineare dello spazio $\mathcal{L}^2$.

14. — Nella varietà Ω_λ ci sarà utile anche individuare una nuova sottoclasse: quella delle funzioni $u(P)$ di Ω_λ per le quali risulta

$$\mu \equiv 0 \text{ su } \mathcal{F}_1 \mathfrak{D} \quad \text{e} \quad \delta = 0 \text{ su } \mathcal{F}_2 \mathfrak{D}.$$

Indichiamo con $\Omega_{\lambda,0}$ questa nuova varietà anch'essa lineare di $\mathcal{L}^2$. Per ogni $u(P)$ di $\Omega_{\lambda,0}$ consideriamo di nuovo la formula (28).

Detta $w(P)$ la funzione data dall'integrale doppio nella (28), $w(P)$ è un potenziale generalizzato di dominio e quindi, essendo $f(Q)$ e $u(Q)$ di quadrato sommabile in $\mathfrak{D}$, per una generalizzazione di un noto teorema di L. LICHTENSTEIN e K. O. FRIEDRICHS (v. [28, teor. 13, IV]) ha derivate prime e seconde di quadrato sommabile in tutto $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$. Ne segue per un teorema di G. FICHERA [11, teor. XXXII] che esistono per quasi-tutti i punti S di $\mathcal{F}\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ i limiti

$$\lim_{P \to S (\text{su } n^*_S)} w(P) \qquad \lim_{P \to S (\text{su } n^*_S)} \frac{d\, w(P)}{d\, \nu^*_S}$$

e per di più le funzioni $|\, w(S_\tau)\,|^2$ e $\left| \frac{d\, w(S_\tau)}{d\, \nu^*_S} \right|^2$ risultano uniformemente sommabili al variare del parametro τ in un intorno destro opportuno dello zero sul sistema di curve « parallele » alla $\mathcal{F}\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$, ottenute prendendo per ogni punto S di $\mathcal{F}\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ sulla normale interna n^*_S un punto S_τ a distanza τ da S stesso ([16]).

Quanto al primo integrale di (28) esso rappresenta una funzione continua con le derivate prime in ogni punto dell'arco $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$ diverso dagli estremi.

Da queste osservazioni segue allora immediatamente che ogni funzione $u(P)$ di $\Omega_{\lambda,0}$ gode anche di questa proprietà:

IV^0) *non solo esistono i limiti*

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M)} u(P) = \overline{u}(M) \qquad \lim_{P \to M (\text{su } n_M)} \frac{d\, u(P)}{d\, \nu_M} \equiv 0$$

per quasi-tutti gli M *di* $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$, *con* $\overline{u}(M)$ *di quadrato sommabile su ogni sottoarco completamente interno a* $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$, *ma anche, preso un qualunque sottoarco proprio* $\mathcal{C}$ *di* $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$, *avente cioè entrambi gli estremi interni a* $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$, *e considerato il sistema di curve ad esso « parallele »* $\{\mathcal{C}_\tau\}$, *costruito prendendo per ogni punto* M *di* $\mathcal{C}$ *sulla normale interna* n_M *un punto* M_τ *a distanza* τ *da* M *stesso, per* τ *variabile in un intorno destro opportuno dello zero le funzioni* $|\, u(M_\tau)\,|^2$ *e* $\left| \frac{d\, u(M_\tau)}{d\, \nu_M} \right|^2$ *risultano uniformemente sommabili su* $\mathcal{C}_\tau$.

([16]) Data la presenza di eventuali punti angolosi in $M_{1,\varrho}$ e $M_{2,\varrho}$ la costruzione di dette curve andrebbe meglio precisata, cosa che si può fare in modo abbastanza ovvio del resto ciò che interessa a noi è la convergenza di $|\, w(P)\,|^2$ e di $\left| \frac{d\, w(P)}{d\, \nu_S} \right|^2$ in un intorno di M e perciò è sufficiente quanto si è detto.

15. — Concluderemo questo paragrafo con alcune considerazioni sulle relazioni esistenti tra le proprietà I^0), II^0), III^0), IV^0), e su ulteriori proprietà della classe $\Omega_{\lambda,0}$.

Anzitutto sarebbe assai facile dimostrare che la III^0) è una conseguenza delle I^0), II^0), IV^0).

Per noi è assai più interessante osservare che dalle I^0), II^0), IV^0), segue anche la formula (9) nel senso che, *se* $u(P)$ *è una funzione che soddisfa alle* I^0), II^0), IV^0), *allora essa verifica anche la formula* (9), dove i valori di u e di $\dfrac{du}{d\nu}$ su $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ vanno presi nel senso stabilito dalle I^0) e IV^0).

Si può infatti arrivare alla (9) considerando per ogni $\bar{r}$ tale $0<\bar{r}<r_0$ un sottoarco $\mathcal{C}$ di $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ avente i punti $Q_{1,\bar{r}}$ e $Q_{2,\bar{r}}$ come punti interni; allora, almeno per τ sufficientemente piccolo, l'arco $\mathcal{C}_\tau$ interseca ogni γ_r con $\bar{r}\leq r\leq r_0$ sia nelle vicinanze di $Q_{1,r}$ che di $Q_{2,r}$; possiamo quindi costruire mediante un sottoarco opportuno $\mathcal{C}_{r,\tau}$ di $\mathcal{C}_\tau$ e un sottoarco pure opportuno $\gamma_{r,\tau}$ di γ_r una curva semplice e chiusa interna a $\mathfrak{D}$, delimitante un dominio $\mathfrak{D}_{r,\tau}$ regolare e tutto interno a $\mathfrak{D}$. Fissato τ, con calcoli analoghi a quelli con i quali si giunge alla (9), si può ottenere per $0<\bar{r}\leq r_1<r_2\leq r_0$

$$
\begin{aligned}
(29)\quad \left[\int_{t_1+t_1(\tau,r)}^{t_2-t_2(\tau,r)} P\,u^2\,d\,t\right]_{r_1}^{r_2} = {} & \int_{r_1}^{r_2} d\,r \int_{t_1+t_1(\tau,r)}^{t_2-t_2(\tau,r)} \left\{P_r-(P\beta)_t+\left[\frac{d\,P\alpha}{d\,\nu_r}-b\,P\alpha\right]\sqrt{x_{1,t}^2+x_{2,t}^2}\right\}u^2\,d\,t\,-\\
& -2\int_{r_1}^{r_2} d\,r \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}_{r,\tau}} P\alpha\,u\frac{d\,u}{d\,\nu}\,d\,s+\int_{r_1}^{r_2} d\,r\int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}_{r,\tau}}\left[\frac{d\,P\alpha}{d\nu}-b\,P\alpha\right]u^2\,d\,s\,-\\
& -2\int_{r_1}^{r_2} d\,r\iint_{\mathfrak{D}_{r,\tau}} P\alpha\sum_{h,k}^{1,2} a_{hk}\frac{\partial u}{\partial x_h}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,d\,x_1\,d\,x_2+\int_{r_1}^{r_2} d\,r\iint_{\mathfrak{D}_{r,\tau}}[E^*(P\alpha)+c\,P\alpha]\,u^2\,d\,x_1\,d\,x_2\,-\\
& -2\int_{r_1}^{r_2} d\,r\iint_{\mathfrak{D}_{r,\tau}} P\alpha\,u\,E(u)\,d\,x_1\,d\,x_2+\int_{r_1}^{r_2}(P\beta\,u^2)_{t=t_2-t_2(\tau,r)}\,d\,r-\int_{r_1}^{r_2}(P\beta\,u^2)_{t=t_1+t_1(\tau,r)}\,d\,r
\end{aligned}
$$

dove $t_1(\tau,r)$ e $t_2(\tau,r)$ sono due opportune funzioni che tendono a zero con τ uniformemente rispetto ad r e il cui significato è ovvio, così come è ormai ovvio il significato degli altri simboli di (29). Dalla (29) facendo tendere τ a zero, in virtù delle ipotesi ammesse su $u(P)$ e delle (5), si ottiene appunto la (9).

Ne segue per il n. 14 che *la formula* (9) *vale anche per le funzioni* $u(P)$ di $\Omega_{\lambda,0}$.

Dimostriamo ora di più che *in* $\Omega_{\lambda,0}$ *vale anche la* (11), dove i valori di u e di $\frac{du}{d\nu}$ su $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ vanno presi nel senso stabilito dalle I°), III°), IV°). Infatti alla (11) si può arrivare con un opportuno passaggio al limite « dall'interno di $\mathcal{D}$ »; precisamente, fissata la funzione v di V per $0 < r < r_0$ si costruisca come è possibile una funzione v_r definita e opportunamente regolare in $\mathcal{D}_r$, nulla su γ_r, e tale che v_r, le sue derivate prime e $E^*(v_r) + c\, v_r$ convergano in $\mathcal{D}$ rispettivamente alla funzione v, alle sue derivate prime e a $E^*(v) + c\, v$, rimanendo sempre equilimitate al variare di r. Si applichi poi a v_r e ad u l'analoga della (11) nel dominio $\mathcal{D}_{r,\tau}$ sopra costruito; si ottiene così

$$2\int_{\mathcal{F}_2\mathcal{D}_{r,\tau}} v_r\, u \frac{du}{d\nu}\, ds - \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_{r,\tau}} \left(\frac{d v_r}{d\nu} - b\, v_r\right) u^2\, ds - \iint_{\mathcal{D}_{r,\tau}} (E^*(v_r) + c\, v_r)\, u^2\, dx_1\, dx_2 +$$

$$+ 2\iint_{\mathcal{D}_{r,\tau}} v_r \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx_1\, dx_2 + 2\iint_{\mathcal{D}_{r,\tau}} v_r\, u\, E(u)\, dx_1\, dx_2 = 0.$$

Di qui passando al limite prima per $\tau \to 0$ e poi per $r \to 0$, tenendo presente che è $\delta = 0$ su $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$, $v \leq 0$ in $\mathcal{D}$, $\frac{dv}{d\nu} - b\, v \geq 0$ su $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$, si ottiene la (11).

Ne segue per le considerazioni del n. 12 che *il teorema di convergenza vale anche se le funzioni* u_n *appartengono a* $\Omega_{\lambda,0}$.

§ 3 - IL TEOREMA DI ESISTENZA.

16. Proponiamoci ora direttamente lo studio del problema misto generalizzato

$$(30) \qquad E(u) = f \text{ in } \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D};\; u = \mu \text{ su } \mathcal{F}_1\mathcal{D};\; \frac{du}{d\nu} = \delta \text{ su } \mathcal{F}_2\mathcal{D}.$$

Supposti μ *e* δ *di quadrato sommabile rispettivamente su* $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ *e* $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$, f *appartenente a* $\mathcal{L}^2$ *e hölderiana in* $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$, *noi ricercheremo la soluzione di* (30) *nella classe* Ω_λ, *precisando così in che senso intenderemo il problema generalizzato* (30).

Ci sarà utile premettere alcuni richiami sui fondamentali risultati di L. AMERIO e G. FICHERA a proposito dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico, onde confrontare la classe di funzioni introdotta dall'AMERIO con la classe Ω_λ da noi introdotta.

Nelle ipotesi fatte sui coefficienti a_{hk}, b_h e c, fissato un dominio $\mathfrak{D}'$ di classe 2 contenuto in A e contenente nel suo interno $\mathfrak{D}$, esiste almeno una soluzione fondamentale $F(P, Q)$ per l'equazione $E(u) = 0$ in $\mathfrak{D}'$.

Indichiamo con Γ la classe delle funzioni $u(P)$ definite in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e soddisfacenti alle condizioni:

i) *u è di classe 2 in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e $E(u)$ è limitato e hölderiano in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$*

ii) *per quasi-tutti i punti M di $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ esistono i limiti*

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M)} u(P) = \mu(M), \quad \lim_{P \to M (\text{su } n_M)} \frac{d\,u(P)}{d\,\nu_M} = \delta(M)$$

e le funzioni $\mu(M)$ e $\delta(M)$ sono di quadrato sommabile su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$.

iii) *si ha*

$$(31) \quad \vartheta\, u(P) = \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \left\{ \mu(Q) \left[\frac{d\,F(P, Q)}{d\,\nu_Q} - b(Q)\, F(P, Q) \right] - \delta(Q)\, F(P, Q) \right\} d\,s_Q -$$

$$- \iint_{\mathfrak{D}} F(P, Q)\, E[u(Q)]\, d\,Q\,.$$

con $\vartheta = 1$ per $P \in \mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e $\vartheta = 0$ per $P \in \mathfrak{D}' - \mathfrak{D}$

In questa classe l'AMERIO ha considerato i problemi al contorno per l'equazione $E(u) = f$, in particolare il problema misto (30), in cui dunque μ è assegnata su $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ e δ su $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$.

Ebbene, *si può dimostrare che la classe Γ è contenuta nella classe Ω_λ.*

Infatti ogni funzione $u(P)$ di Γ si può porre, come ha sostanzialmente dimostrato G. FICHERA (v. [4]), nella forma

$$u(P) = 2 \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} F^*(P, Q)\, \zeta(Q)\, d\,\sigma_Q - \iint_{\mathfrak{D}} F^*(P, Q)\, z(Q)\, d\,Q$$

dove $F^*(P, Q)$ è la cosiddetta soluzione fondamentale principale dell'equazione $E(u) - \lambda u = 0$ e $\zeta(Q)$ e $z(Q)$ sono due opportune funzioni, la prima di quadrato sommabile su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$, la seconda hölderiana in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e di quadrato sommabile in $\mathcal{D}$ (si veda anche per una chiara esposizione in proposito il n. 31 di [28]). Approssimiamo allora in media ζ su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ e z su $\mathcal{D}$, rispettivamente mediante due successioni $\{\zeta_n\}$ e $\{z_n\}$ di funzioni hölderiane rispettivamente su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ e su $\mathcal{D}$. Per note proprietà della teoria del potenziale generalizzato (v. ad es. [28, cap. II)] le funzioni

$$u_n(P) = 2 \int\limits_{\mathcal{F}\mathcal{D}} F^*(P, Q)\, \zeta_n(Q)\, d\sigma_Q - \iint\limits_{\mathcal{D}} F^*(P, Q)\, z_n(Q)\, dQ$$

sono di classe due in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$, di classe uno in $\mathcal{D}$ e il loro $E(u_n)$ risulta limitato in $\mathcal{D}$.

Per la successione $\{u_n(P)\}$ si verificano allora subito tutte le condizioni 1°), 2°), 3°), 4°), 5°), 6°), 7°) del n. 12.

Il teorema di convergenza è dunque applicabile e ci assicura che $u(P)$ appartiene ad Ω_λ.

In particolare dunque *ogni auto-soluzione nella classe Γ del problema omogeneo associato al problema* (30) *e cioè*

$$(32) \qquad E(u) = 0 \text{ in } \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}\,;\ u = 0 \text{ su } \mathcal{F}_1\mathcal{D}\,;\ \frac{du}{d\nu} = 0 \text{ su } \mathcal{F}_2\mathcal{D}$$

è anche autosoluzione nella classe Ω_λ e appartiene addirittura ad $\Omega_{\lambda,0}$.

A proposito del problema (32) sarà bene osservare anche che *il numero delle autosoluzioni di* (32), *appartenenti a $\Omega_{\lambda,0}$, linearmente indipendenti sono in numero finito: $u^{(1)}, u^{(2)} \ldots, u^{(q)}$*; basta pensare che l'insieme di tali autosoluzioni è una varietà lineare di $\mathcal{L}^2$, la quale per il teorema di convergenza del § 2 (valido, come è già visto, anche se le $\{u_n\}$ appartengono ad $\Omega_{\lambda,0}$) è compatta in $\mathcal{L}^2$.

Considerazioni analoghe possono farsi per il cosidetto *problema aggiunto* del problema (30) e cioè per il problema

$$(33) \qquad E^*(v) = f^* \text{ in } \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}\,;\ v = \mu^* \text{ su } \mathcal{F}_1\mathcal{D}\,;\ \frac{dv}{d\nu} - bv = \delta^* \text{ su } \mathcal{F}_2\mathcal{D}$$

il quale può intendersi in senso generalizzato sia nell'impostazione dell'AMERIO che in quella del presente lavoro; si otterranno così una classe Γ^* analoga alla Γ e una classe Ω_λ^* analoga alla Ω_λ.

È ovvio come devono essere precisate per Ω_λ^* tutte le condizioni analoghe a quelle introdotte per Ω_λ nei § 1 e § 2; si osservi solo che il sistema di curve γ_r e la funzione peso $P(t, r)$ ad essa relativi potrebbero anche differire da quelli relativi ad Ω_λ. Inoltre nell'analoga della condizione e) del n. 2, interverrà ora un numero positivo $\overline{\lambda}_*$. Ebbene, noi converremo che *in tutto quanto si è finora detto e si dirà nel seguito il numero λ introdotto nel* n. 11 *sia maggiore dei quattro numeri:* $\max_{\mathfrak{D}} c$, $\max_{\mathfrak{D}} c^*$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}_*$; un tale numero λ considereremo fissato una volta per tutte e con esso costruiremo le classi Ω_λ e Ω_λ^*.

I risultati dei n. precedenti si dimostrano in modo del tutto analogo anche per il problema aggiunto.

La classe Γ^* è quindi contenuta nella Ω_λ^*; in particolare *ogni autosoluzione del «problema omogeneo aggiunto» di* (30), *cioè di*

$$(34)\qquad E^*(v) = 0 \text{ in } \mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}, \quad v = 0 \text{ su } \mathcal{F}_1\mathfrak{D}, \quad \frac{dv}{d\nu} - bv = 0 \text{ su } \mathcal{F}_2\mathfrak{D}$$

appartenente a Γ^* appartiene anche ad Ω_λ^*, anzi alla sottoclasse $\Omega_{\lambda,0}^*$ analoga alla $\Omega_{\lambda,0}$.

Anche per (34) sarà bene osservare che *le autosoluzioni linearmente indipendenti appartenenti ad $\Omega_{\lambda,0}^*$ sono in numero finito:* $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)}$ (in seguito dimostreremo che $p = q$); e ciò si vede in modo analogo a quanto si è fatto per il problema (32).

Ciò premesso, ricordiamo ancora che dai lavori dell'AMERIO si ha il seguente risultato fondamentale: *assegnate tre funzioni f, μ, δ di quadrato sommabile rispettivamente su $\mathfrak{D}$, $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$, $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ esisterà una successione di polinomi $\{u_n\}$ soddisfacenti la* (15), *cioè la*

$$(15)\qquad \lim_{n\to 0}\left\{\iint_{\mathfrak{D}}[E(u_n) - f]^2\,dx_1\,dx_2 + \int_{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}}(u_n - \mu)^2\,ds + \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}}\left(\frac{du_n}{d\nu} - \delta\right)^2 ds\right\} = 0$$

allora e solo allora che sia verificata la condizione

$$(35)\qquad \iint_{\mathfrak{D}} v f\,dx_1\,dx_2 - \int_{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}}\mu\left(\frac{dv}{d\nu} - bv\right)ds + \int_{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}}\delta\,v\,ds = 0$$

per ogni autosoluzione v del problema (34) *appartenente alla classe Γ^*.*

In particolare se il problema (34) ha in Γ^* solo la soluzione $\equiv 0$, ogni terna (f, μ, δ) è approssimabile mediante polinomi secondo la (15); ed è noto che si deve a G. FICHERA l'aver stabilito il detto teorema di unicità per il problema (34) in Γ^* proprio nelle stesse condizioni in cui esso vale nella classe delle soluzioni di classe 1 in tutto $\mathfrak{D}$ (v. con precisione il n. 2 di [25]).

17. — Possiamo ora dimostrare, seguendo un ragionamento del tipo di quello usato dal CIMMINO nella Sua trattazione del problema generalizzato di DIRICHLET (v. [4]), il seguente

TEOREMA DI ESISTENZA: *Condizione sufficiente perchè il problema* (30) *sia risolubile nella classe* Ω_λ, *essendo* f *hölderiana in* $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ *e di quadrato sommabile in* $\mathfrak{D}$, μ *e* δ *di quadrato sommabile rispettivamente su* $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ *e* $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$ *è che* f, μ *e* δ *verifichino le condizioni* (35) *per ogni autosoluzione* v *del problema omogeneo aggiunto* (34) *appartenente alla classe* $\Omega^*_{\lambda,0}$.

Infatti, poichè ogni autosoluzione di (34) appartenente a Γ^* appartiene anche a $\Omega^*_{\lambda,0}$, si ha, dall'ipotesi fatta e da quanto si è ora richiamato dei risultati dell'AMERIO, l'esistenza di una successione di polinomi $\{u_n\}$ verificante la (15).

Se ora gli integrali $\iint_{\mathfrak{D}} u_n^2 \, d\,x_1 \, d\,x_2$ sono equilimitati, non resta che applicare il teorema di convergenza del § 2.

In caso contrario esisterà una sottosuccessione che indicheremo ancora con $\{u_n\}$ per la quale è

$$\lim_{n\to 0} \iint_{\mathfrak{D}} u_n^2 \, d\,x_1 \, d\,x_2 = +\infty .$$

Posto allora

$$u'_n = u_n \Big/ \left\{ \iint_{\mathfrak{D}} u_n^2 \, d\,x_1 \, d\,x_2 \right\}^{1/2}$$

potremo, in virtù sempre del teorema di convergenza del § 2, estrarre dalla successione $\{u'_n\}$ una nuova sottosuccessione convergente verso una autosoluzione u' (soluzione non identicamente nulla) del problema (32) appartenente alla varietà $\Omega_{\lambda,0}$.

Se in tale varietà il problema (32) ha solo la soluzione identicamente nulla, allora siamo arrivati ad un assurdo e gli integrali $\iint_{\mathfrak{D}} u_n^2 \, d\,x_1 \, d\,x_2$ devono dunque essere limitati.

In caso contrario, ricordando che le autosoluzioni di (32) in $\Omega_{\lambda,0}$ linearmente indipendenti sono $u^{(1)}; u^{(2)}, \dots, u^{(q)}$, è possibile, con un semplice ragionamento (si veda [4, pag. 219]) determinare le costanti $c_{n,i}$ in modo che gli integrali

$$\iint_{\mathfrak{D}} \left(u_n + \sum_{i=1}^{q} c_{n,i}\, u^{(i)}\right)^2 d\,x_1\, d\,x_2$$

siano equilimitati. È allora immediato verificare, tenendo presente che le u_n sono polinomi e le $u^{(i)}$ appartengono ad $\Omega_{\lambda,0}$ e ricordando i ragionamenti del n. 15, che per la successione $\left\{u_n + \sum_{i=1}^{q} c_{n,i}\, u^{(i)}\right\}$ sono verificate le proprietà 1⁰) 2⁰), 3⁰), 4⁰), 5⁰) 6⁰) 7⁰) del n. 12; si può quindi applicare il teorema di convergenza del § 2, ottenendo ancora l'esistenza di una soluzione del problema (30) nella classe Ω_λ.

18. — La soluzione $u(P)$ trovata gode di ulteriori proprietà di maggior regolarità se sui dati μ, δ, f si fanno ipotesi più restrittive di quelle finora supposte. Così per esempio, *se f è hölderiana in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ e continua in $\mathfrak{D}$ e δ è hölderiana su $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$*, dalla (28) per note proprietà della teoria dei potenziali di dominio e di semplice strato generalizzati (v. ad es. [28, n. 12, 13, 14]) *segue che la $u(P)$ è di classe 1 in tutto $\mathfrak{D} - \overline{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}}$ e assume quindi «puntualmente» in senso classico la condizione al contorno $\frac{d\,u}{d\,\nu} = \delta$ su $\mathcal{F}_2\mathfrak{D}$.*

Se inoltre la μ è continua su $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ si può dimostrare che *la $u(P)$ è continua in $\mathfrak{D} - \overline{\mathcal{F}_1\mathfrak{D}}.\overline{\mathcal{F}_2\mathfrak{D}}$*, ragionando in modo analogo a quello del n. 6 di [25]; basterà tener presente di adoperare ora la funzione di Green per l'operatore $E(u) - \lambda u$ oppure ricordare che nelle ipotesi fatte sui coefficienti $a_{h,k}, b_h$ e c esiste in virtù di noti risultati di G. Giraud (v. ad es. [28, teor. 21, III]) la funzione di Green anche per l'operatore $E(u)$ in ogni dominio di diametro sufficientemente piccolo (basterà dunque prendere il dominio $\mathfrak{D}_M$, di cui al n. 6 di [25], di diametro sufficientemente piccolo).

Queste stesse considerazioni in virtù della recente Nota [27], permettono di dimostrare che *anche nella sola ipotesi sulla μ che sia di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$, dalla convergenza in media della soluzione $u(P)$ trovata sul sistema delle curve γ_r alla funzione μ_1 segue che per quasi tutti i punti M di $\mathcal{F}_1\mathfrak{D}$ è*

$$\lim_{P \to M (\text{su } n_M)} u(P) = \mu(M).$$

§ 4 - Il teorema di unicità.

19. — Proponiamoci ora di studiare in quali ipotesi il problema (30) ammette nella classe Ω_λ una sola soluzione. Sarà bene considerare dapprima il problema generalizzato in un'altra classe di funzioni, precisamente nella

classe $\mathcal{U}$ delle funzioni $u(P)$ soddisfacenti alle condizioni I^0), II^0), IV^0) introdotte nel § 2, classe $\mathcal{U}$ della quale ci siamo già in sostanza occupati nel n. 15. Vale in essa il seguente

TEOREMA DI UNICITÀ: *Se si possono prendere il sistema di curve γ_r e la funzione peso $P(t, r)$* (introdotte nel n. 2) *in modo che sia verificata la condizione*

$$E^*(P\alpha) + c P\alpha \leq 0 \qquad \textit{in } \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D} \tag{36}$$

allora nella classe $\mathcal{U}$ esiste solo la funzione identicamente nulla che risolva il problema (32).

Infatti ogni soluzione di (32) appartenente alla classe $\mathcal{U}$ soddisfa alla relazione (9) come si è visto nel n. 15; si ha allora, in virtù delle ipotesi fatte

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} P(t, r_2)\, u^2(t, r_2)\, dt \leq \int_{t_1}^{t_2} P(t, r_1)\, u^2(t, r_1)\, dt + \\ + L \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{t_1}^{t_2} Pu^2\, dt - 2\int_{r_1}^{r_2} dr \iint_{\mathcal{D}_r} P\alpha \sum_{h,k}^{1,2} a_{h,k} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx_1\, dx_2 .\end{aligned} \tag{37}$$

Supposto per assurdo che $u(P)$ non sia identicamente nulla, facciamo tendere r_1 a zero; o l'ultimo integrale nella (37) tende a $-\infty$ e si ha allora subito l'assurdo; oppure si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t, r_2)\, u^2(t, r_2)\, dt \leq L \int_0^{r_2} dr \int_{t_1}^{t_2} Pu^2\, dt - \int_0^{r_2} dr \iint_{\mathcal{D}_r} P\alpha \sum_{h,k}^{1,2} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k}\, dx_1\, dx_2 .$$

Nel secondo membro il primo integrale è infinitesimo con r_2 d'ordine superiore a r_2, il secondo è al più infinitesimo come r_2 e si ha dunque di nuovo l'assurdo.

Dal teorema ora dimostrato segue subito, *nell'ipotesi che valga la* (36), *il teorema di unicità anche nella classe Ω_λ per il problema* (30); infatti se esistessero due soluzioni u_1 e u_2 in Ω_λ del problema (30) la loro differenza sarebbe soluzione di (32) e apparterrebbe a $\mathcal{U}$, per quanto si è dimostrato nel n. 14; ne verrebbe $u_1 \equiv u_2$.

Sarà bene osservare che *le ipotesi in cui vale il teorema di unicità in $\mathcal{U}$ e in Ω_λ sono sostanzialmente quelle in cui notoriamente esso può dedursi dalla formula di Green nella classe delle funzioni di classe* 1 *in* $\mathcal{D}$, e cioè esistenza di una funzione w opportunamente regolare tale che: $E^*(w) + c\,w \leq 0$ in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$, $w > 0$ in $\mathcal{D}$, $\dfrac{dw}{d\nu} - b\,w \leq 0$ su $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$. Se per es. è

$c + c^* \leq 0$ in $\mathfrak{D}$ e $b \geq 0$ su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ la costruzione del sistema γ_r e della P volute è sempre possibile; in particolare se $E(u)$ è autoaggiunto e $c \leq 0$, dato il sistema γ_r, basterà prendere $P = \dfrac{1}{\alpha}$ (si riveda quanto si è detto nel n. 4).

Un teorema di unicità analogo vale anche per il problema aggiunto.

I risultati di questo § sono una generalizzazione del teorema di unicità del n. 4 di [25].

§ 5 - Il teorema dell'alternativa.

20. — Il teorema di esistenza del § 3 dà le condizioni sufficienti per l'esistenza della soluzione di (30) in Ω_λ espresse attraverso le (35), cioè come ortogonalità dei termini noti (f, μ, δ) alle autosoluzioni del problema omogeneo aggiunto (34) in $\Omega^*_{\lambda,0}$. Poichè (34) ha in $\Omega^*_{\lambda,0}$ un numero finito di autosoluzioni linearmente indipendenti $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)}$, le (35) sono equivalenti alle

$$(38) \qquad \iint_{\mathfrak{D}} v^{(i)} f \, d x_1 \, d x_2 - \int_{\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}} \mu \left(\frac{d v^{(i)}}{d \nu} - b \, v^{(i)} \right) d s + \int_{\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}} \delta v^{(i)} \, ds = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Per poter concludere che per il problema (30) nel modo da noi impostato, vale il teorema dell'alternativa nella forma consueta della teoria di Fredholm occorre dunque dimostrare ancora che le (38) sono anche condizioni necessarie e inoltre che $p = q$, cioè che il problema omogeneo (32) e quello omogeneo aggiunto (34), intesi nel senso generalizzato da noi introdotto col presente lavoro, ammettono lo stesso numero di autosoluzioni linearmente indipendenti.

Sarà sufficiente per questo prendere in considerazione un caso particolare del problema (30), precisamente il caso semiomogeneo

$$(39) \qquad E(u) = f \text{ in } \mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}, \quad u = 0 \text{ su } \mathcal{F}_1 \mathfrak{D}, \quad \frac{d u}{d \nu} = 0 \text{ su } \mathcal{F}_2 \mathfrak{D}.$$

Noi studieremo in $\Omega_{\lambda,0}$ tale problema, interpretandolo come una trasformazione lineare e continua del tipo di Riesz in $\mathcal{L}^2$, in analogia a quanto C. Miranda ha sviluppato a proposito del problema di Dirichlet generalizzato nel modo del Cimmino (v. [28, teor. 29 V]).

Si consideri per questo per ogni funzione f appartenente a $\mathcal{L}^2$ e hölderiana in $\mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}$ il problema generalizzato

$$(40) \qquad E(u) - \lambda u = f \text{ in } \mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}, \quad u = 0 \text{ su } \mathcal{F}_1 \mathfrak{D}, \quad \frac{d u}{d \nu} = 0 \text{ su } \mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$$

essendo λ il numero che si è fissato nel n. 16 nella determinazione di Ω_λ e Ω_λ^*. Si studi il problema (40) nella *varietà lineare* $\Omega'_{\lambda,0}$ *di* $\mathcal{L}^2$ *costituita dalle funzioni* $u(P)$ *soddisfacenti alle condizioni* I^0) (dove sia $\mu = 0$), IV^0) *e inoltre alle*

II') $u(P)$ *è di classe* 2 *in* $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$, *appartiene a* $\mathcal{L}^2$ *e la funzione* $E(u) - \lambda u$ *è una funzione* f *di* $\mathcal{L}^2$ *hölderiana in* $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$.

III') *per ogni punto* M *di* $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ *e per quasi tutti i* ϱ *di* $(0, r(M))$ $u(P)$ *soddisfa alla relazione*

$$u(P) = \int_{\mathcal{F}_1\mathcal{D}^*_{M,\varrho}} \frac{d\,u(P)}{d\,\nu^*} N_{\lambda,\varrho}(P, Q)\,d\,s_Q - \iint_{\mathcal{D}^*_{M,\varrho}} f(Q)\,N_{\lambda,\varrho}(P, Q)\,d\,Q$$

per ogni P *interno a* $D^*_{M,\varrho}$.

In tale varietà $\Omega'_{\lambda,0}$ il problema (40) si può studiare, come si è fatto per il problema (30) in Ω_λ mediante gli stessi ragionamenti e pervenendo agli stessi risultati dei § precedenti, dove si sostituisca naturalmente all'operatore $E(u)$ l'operatore $E(u) - \lambda u$ e alla classe Ω_λ la $\Omega'_{\lambda,0}$.

Ne viene, per le ipotesi fatte a suo tempo su λ (v. n. 16), che varrà in $\Omega'_{\lambda,0}$ per il problema (40) e per il relativo problema aggiunto il teorema di unicità e varrà anche il teorema di esistenza, sicchè possiamo affermare che *per ogni funzione* f *di* $\mathcal{L}^2$ *e hölderiana in* $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ *esiste una ed una sola soluzione di* (40) *in* $\Omega'_{\lambda,0}$.

Possiamo dunque interpretare tale soluzione come la trasformata di f secondo una opportuna trasformazione lineare $u = \mathcal{T}(f)$, definita nella varietà lineare W delle funzioni f di $\mathcal{L}^2$ hölderiane in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ e avente codominio contenuto nella varietà $\Omega'_{\lambda,0}$.

Ora gli stessi ragionamenti adoperati nel teorema di convergenza dimostrano che la trasformazione $u = \mathcal{T}(f)$ può prolungarsi in tutto $\mathcal{L}^2$, ottenendo così una trasformazione lineare continua di dominio $\mathcal{L}^2$ e codominio contenuto in una varietà lineare di $\mathcal{L}^2$ più ampia della $\Omega'_{\lambda,0}$ nel senso che per ogni funzione $u(P)$ di essa valgono le I^0) (con $\mu = 0$) III'), IV^0) mentre la II') va sostituita con la

II'') $u(P)$ è hölderiana in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ e appartiene a $\mathcal{L}^2$

(cosicchè non si può in generale dedurre che la u soddisfi all'equazione $E(u) - \lambda u = f$).

Osserviamo di più che $u = \mathcal{T}(f)$ è addirittura una trasformazione completamente continua, vale a dire: se la successione $\{f_n\}$ è di funzioni a norme equilimitate in $\mathcal{L}^2$, dalla successione $u_n = \mathcal{T}(f_n)$ si può estrarre una sottosuccessione convergente in media in $\mathcal{D}$.

Si può infatti anzitutto osservare che essendo W ovunque densa in $\mathcal{L}^2$ e $\mathcal{T}(f)$ continua si può sempre supporre che f_n appartenga a W, bastando altrimenti sostituire a ogni f_n una f'_n di W tale che $\| \mathfrak{T}(f'_n) - - \mathfrak{T}(f_n) \| < \frac{1}{n}$ e ragionare poi su $\{f'_n\}$.

Allora le funzioni $u_n = \mathfrak{T}(f_n)$ apparterranno ad $\Omega'_{\lambda,0}$; esse inoltre avranno norme equilimitate, cosicchè si potrà estrarre dalla successione $\{u_n\}$ una sottosuccessione convergente in media in $\mathfrak{D}$ mediante i ragionamenti del n. 6, tenendo presenti anche le considerazioni del n. 12; e infatti in sostanza in essi l'ipotesi della convergenza in media della successione $E(u_n)$ può benissimo essere sostituita con lievi modifiche dalla equilimitatezza degli integrali $\iint\limits_{\mathfrak{D}} [E(u_n)]^2 \, d\,x_1 \, d\,x_2$ (17).

---

(17) Infatti le (17), (18), (19) valgono ancora e si può anche arrivare alla (20), la quale, nelle ipotesi attuali (tenendo presente naturalmente che l'operatore $E(u)$ andrebbe sostituito con $E(u) - \lambda u$), si riduce alla

$$\int_{t_1}^{t_2} P(t, r)[u_m(t, r) - u_n(t, r)]^2 \, d\,t \leq L \int_0^r d\,\varrho \int_{t_1}^{t_2} P(t, \varrho)[u_m(t, \varrho) - u_n(t, \varrho)]^2 \, d\,t +$$

$$+ C \int_0^r d\,\varrho \iint\limits_{\mathfrak{D}_\varrho} |u_m - u_n| \, |E(u_m - u_n)| \, d\,x_1 \, d\,x_2 .$$

Di qui se $L\,r < 1$ si ha facilmente

$$(1 - L\,r) \int_{t_1}^{t_2} P(t, r)[u_m(t, r) - u_n(t, r)]^2 \, d\,t \leq$$

$$\leq 2\,C \int_0^r d\,\varrho \iint\limits_{\mathfrak{D}_\varrho} \{(u_m - u_n)^2 + [E(u_m - u_n)^2]\} \, d\,x_1 \, d\,x_2 .$$

Preso $\varepsilon > 0$ si può rendere il secondo membro minore di $(1 - L\,r)\,\varepsilon$ per ogni m e n e per ogni r minore di un certo r_ε, in virtù della equilimitatezza degli integrali di u_n^2 e di $[E(u_n)]^2$ in $\mathfrak{D}$. Ne segue subito per ogni m ed n

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_r} (u_m - u_n)^2 \, d\,x_1 \, d\,x_2 \leq \varepsilon\, G$$

con G costante indipendente da ε, m, n. E poichè dalla (19) si ha la convergenza in media di $\{u_n\}$ in $\mathfrak{D}_{r_\varepsilon}$, ne segue la convergenza in media di $\{u_n\}$ in $\mathfrak{D}$.

Ciò premesso si osservi che il problema generalizzato (39) nella classe $\Omega_{\lambda,0}$ si riduce immediatamente alla risoluzione in $\mathcal{L}^2$ dell'equazione funzionale

$$u + \lambda\, \mathcal{T}(u) = \mathcal{T}(f)\,.$$

Per quanto si è ora visto, essa risulta dunque una trasformazione del tipo di RIESZ e un noto teorema di RIESZ ci assicura che essa è risolubile allora e allora solo che sono soddisfatte dal termine noto $\mathcal{T}(f)$, cioè da f, certe condizioni integrali di compatibilità, il cui numero è esattamente uguale al numero delle autosoluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea $u + \lambda\, \mathcal{T}(u) = 0$, cioè al numero q delle autosoluzioni linearmente indipendenti del problema omogeneo (32) in $\Omega_{\lambda,0}$.

Dunque per la risolubilità di (39) e quindi anche del problema (30) sono necessarie q condizioni integrali.

D'altra parte le (38) (scritte per $\mu = 0$, $\delta = 0$) sono condizioni sufficienti per la risolubilità in $\Omega_{\lambda,0}$ di (39) e quindi risulta $p \geq q$.

Ragionando in modo analogo sul problema aggiunto del problema dato, si ottiene $q \geq p$ e dunque $p = q$; le condizioni (38) sono dunque le condizioni di compatibilità e possiamo concludere col seguente

TEOREMA DELL'ALTERNATIVA: *Considerato nella classe Ω_λ il problema misto generalizzato*

$$E(u) = f \quad in \quad \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}\,, \qquad u = \mu \quad su \quad \mathcal{F}_1\mathcal{D}\,, \qquad \frac{d\,u}{d\,\nu} = \delta \quad su \quad \mathcal{F}_2\,\mathcal{D}$$

dove f è hölderiana in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ e appartiene a $\mathcal{L}^2$, μ e δ sono di quadrato sommabile rispettivamente su $\mathcal{F}_1\,\mathcal{D}$ e $\mathcal{F}_2\,\mathcal{D}$, è possibile la seguente alternativa: o il problema omogeneo associato (32) *ammette solo la soluzione identicamente nulla in Ω_λ, e allora il problema* (30) *è risolubile, e in modo unico, qualunque siano f, μ, δ; oppure il problema omogeneo associato* (32) *ammette in Ω_λ q soluzioni linearmente indipendenti $u^{(1)}, \ldots . u^{(q)}$ e allora anche il problema omogeneo aggiunto* (34) *ammette in Ω_λ^* q soluzioni linearmente indipendenti $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(q)}$ e il problema* (30) *è risolubile allora e allora solo che sono soddisfatte le condizioni*

$$(38) \quad \iint\limits_{\mathcal{D}} v^{(i)} f\, d\,x_1\, d\,x_2 - \int\limits_{\mathcal{F}_1\mathcal{D}} \mu \left(\frac{d\,v^{(i)}}{d\,\nu} - b\, v^{(i)}\right) d\,s + \int\limits_{\mathcal{F}_2\mathcal{D}} \delta v^{(i)} ds = 0 \quad (i = 1\,, 2\,, \ldots, q)$$

Se tali condizioni sono soddisfatte, il problema (30) *ammette infinite soluzioni, che si possono tutte mettere nella forma $u_0 + \sum\limits_{i=1}^{q} c_i\, u^{(i)}$ dove u_0 è una particolare di esse e le c_i sono costanti.*

§ 6 - Problemi misti di Dirichlet-derivata obliqua regolare.

21. — I problemi misti fin qui considerati si possono chiamare del tipo di *Dirichlet-Neumann* in quanto su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ viene assegnata la soluzione e su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ la derivata conormale. Accanto ad essi esistono anche problemi misti del tipo di *Dirichlet-derivata obliqua*, nei quali è assegnata la soluzione su $\mathcal{F}_1 \mathfrak{D}$ e la derivata secondo una direzione obliqua qualunque su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$. Il caso più noto è quello in cui la direzione obliqua sia di tipo « regolare »: più precisamente supponiamo che per ogni punto M di $\overline{\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}}$ sia definito un asse l non situato sulla tangente a $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$ in M, penetrante in $\mathfrak{D}$ e avente coseni direttori che siano funzioni hölderiane o addirittnra di classe 1 del punto M su $\overline{\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}}$; e consideriamo il problema misto

$$(41) \quad E(u) = f \quad \text{in} \quad \mathfrak{D} - \mathcal{F}\mathfrak{D}, \quad u = \mu \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_1 \mathfrak{D}, \quad \frac{d\,u}{d\,l} = \delta \quad \text{su} \quad \mathcal{F}_2 \mathfrak{D}.$$

Ebbene, *il problema* (41) *può essere studiato in modo analogo a qnanto si è fatto nel* § *precedente per il problema* (30) *con la stessa impostazione generalizzata e con lo stesso metodo di risoluzione, pervenendo agli stessi risultati.*

Anche senza entrare nei particolari, ci sembra che ciò risulti chiaro se si tengono presenti le seguenti considerazioni.

Anzitutto la formula di Green, come è ben noto (v. [32] e [27]) può essere stabilita anche se alla conormale viene sostituita una direzione obliqua regolare; in particolare essa può essere usata anche nei domini $\mathfrak{D}_r$, quando si consideri su $\mathcal{F}_2 \mathfrak{D}_r$ l'asse l e su γ_r l'asse ν. Ciò permette di stabilire facilmente le considerazioni del § 1 anche per il problema (41); in particolare rimarranno inalterate per le curve γ_r le condizioni (5) o (5'), e si otterranno facilmente le formule analoghe alle (9) e alle (11).

Si ha così la possibilità di sviluppare anche ora senza difficoltà i ragionamenti dei n. 6, 7, 8, 9, 10.

Quanto al n. 11, è opportuno dire qualche cosa a proposito della funzione $N_{\lambda,\varrho}(P, Q)$ che in questo caso sarà la funzione di Green per il problema di derivata obliqua regolare nel dominio $\mathfrak{D}^*_{M,\varrho}$. L'esistenza di una tale funzione discende, come è noto, da risultati di Giraud (v. soprattutto [17]. [18]); da essi discende esplicitamente anche la possibilità di dedurre dall'analoga della (28) la condizione al contorno

$$\lim_{P \to \dot{M}\ (\text{su}\ n_M)} \frac{d\,u}{d\,l_M} = \delta(M) \qquad \text{su} \quad \mathcal{F}_2 \mathfrak{D}$$

nel caso che $\delta(M)$ sia hölderiana.

Se invece $\delta(M)$ è solamente di quadrato sommabile, bisognerà tenere presente, oltre a risultati di C. W, OSEEN [31] e dello stesso GIRAUD [19] le considerazioni da me svolte recentemente a proposito dei problemi di derivata obliqua regolare [26]. Così il teorema di convergenza viene senz'altro stabilito anche per il problema (41).

La memoria [26] è poi da tenere presente anche per il teorema di esistenza del § 3; in essa infatti vengono ottenuti (18), per i problemi di derivata obliqua regolare e in particolare per quelli misti di *Dirichlet-derivata obliqua regolare*, i risultati analoghi a quelli dell'AMERIO e del FICHERA, che ci sono serviti nel § 3.

Immediata risulta poi l'estensione dei § 4 e 5 nel caso del problema (41).

Possiamo dunque affermare che anche il problema misto di *Dirichlet-derivata obliqua regolare* (41) può essere impostato nel senso generalizzato da noi qui introdotto per i problemi misti di *Dirichlet-Neumann* e conseguentemente risolto col metodo sviluppato nel presente lavoro.

---

(18) Le dimostrazioni vengono in [26] sviluppate per semplicità per l'operatore di LAPLACE, ma, come è ivi indicato, non si ha difficoltà ad estenderle ad un operatore ellittico qualunque.

BIBLIOGRAFIA

1 - L. AMERIO : *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (Amer. Journ. of Math. Vol. LXIX - 1947, pp. 447-489.

2 - L. BERS - L. NIRENBERG : *Boundary value problems for non linear elliptic equations in two independent variables* (Comunicazione al Congresso internazionale dei Matematici, Amsterdam 1954, Proceedings vol. II).

3 - G. CIMMINO : *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet* (Rend. Circ. Mat. Palermo, t. LXI-1937, pp. 177-221).

4 - G. CIMMINO : *Sulle eqnazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico* (Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, vol. XXIII, 1952, pp. 255-286).

5 - G. CIMMINO : *Spazi hilbertiani di funzioni armoniche e questioni connesse* (in corso di stampa sugli Atti del Convegno sulle equaz. lineari a deriv. parz., Trieste, agosto 1954).

6 - E. DE GIORGI - *Osservazioni relative ai teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico con condizioni al contorno di tipo misto* (Ricerche di Mat. Napoli, 2-1953, pp. 183-191).

7 - U. DINI : *Sulle equazioni a derivate parziali del secondo ordine* (Mem. Acc. Lincei, s. 5, vol. 3, 1899, pp. 33-104).

8 - G. C. EVANS : *Modern methods of Analysis in Potential Theory* (Bull. Amer. Math. Soc. vol. 43-1937, pp. 481-502).

9 - G. C. EVANS - R. N. HASKELL : *The mixed problem for Laplace's equation in the plane. Discontinuous boundary values.* (Proc. Nat. Acad. vol. 16-1930, pp. 520-526).

10 - G. FICHERA : *Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione $\Delta_4 u = f$.* (Giorn. Mat. Battaglini, 77, 1947-48, pp. 184-199).

11 - G. FICHERA : *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti relativi alle equazioni e ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico autoaggiunti.* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. I, 1949, pp. 75-100).

12 - G. FICHERA : *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico.* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. III, vol. IV, 1950, pp. 35-99).

13 - G. FICHERA : *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari* (in corso di stampa sugli Atti del Convegno sulle equaz. lineari a deriv. parziali. Trieste, agosto 1954).

14 - G. FICHERA : *Linear Functional Analysis and Boundary Value Problems* (in corso di stampa presso Interscience Publisher, New York).

15 - M. GEVREY : *Détermination et emploi des fonctions de Green dans les problèmes aux limites relatifs aux équations linéaires du type elliptique* (Journ. de Math. 9, 1930, pp. 1-80).

16 - G. GIRAUD : *Problèmes mixtes et problèmes sur de variétés closes, relativement aux équations lineaires du type elliptique.* (Ann. Soc. Polon. de Math., 12, 1933, pp. 35-54).

17 - G. GIRAUD : *Équations à intégrales principales. Étude suivie d'une application* (Ann. École Norm. Sup. 51, 1934, pp. 251-372).

18 - G. GIRAUD : *Équations à intégrales principales d'ordre quelconque* (Ann. École Norm. Sup. 53-1936, pp. 1-40).

19 - G. GIRAUD: *Nouvelle méthode pour traiter certains problèmes relatifs aux équiations du type elliptique* (Journ. de Math. 18, 1939 pp. 111-143).

20 - H. HORNICH: *Lösung einer vermischten Randwertaufgabe der Potentialtheorie durch hype-ιelliptische Integrale* (Monatshefte für Math. und Phys. vol. 39, 1932, pp. 107-128).

21 - H. HORNICH: *Die allgemeine vermischte Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie* (Monatshefte fur Math und Phys, vol. 39, 1932, pp. 455-460 e vol. 41-1934, pp. 7-19).

22 - L. LICHTENSTEIN: *Randwertaufgaben der linearen elliptischen Gleichungen* (Jorn für die reine und and Math., vol. 143, 1913, pp. 93-105).

23 - J. L. LIONS: *Problèmes aux limites relatifs à des équations de type elliptique* (Exposé au Seminaire Bourbaki, Février 1955).

24 - J. L. LIONS: *Problèmes aux limites en theorie des distributions* (in corso di stampa sugli Acta Mathematica).

25 - E. MAGENES: *Sui problemi al contorno misti per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (Ann. Sc. Norm. Sup. s. III, v. VIII, 1954, p. 93-120).

26 - E. MAGENES: *Sui problemi di derivata obliqua regolare per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (in corso di stampa sugli Annali di Mat. pura e appl.).

27 - E. MAGENES: *Problema generalizzato di Dirichlet e teoria del potenziale* (Rend. Sem. Mat. Padova, vol. XXIV, 1955, pp. 220-229).

28 - C. MIRANDA: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* Springer, Berlin, 1955.

29 - C. MIRANDA: *Sui problemi misti per le equazioni lineari ellittiche* (in corso di stampa nel vol. 39 degli Annali di Mat. pura e appl.).

30 - L. MYRBERG: *Uber die vermischte Randwertaufgabe der harmonischen Fuuktionen* (Ann. Acc. Fennicae, s. A. I. Math. Phys. n. 103-1951).

31 - C. W. OSEEN: *Contributions à la théorie analitique des marées* (Arkiv for Math. Astr. Phys, b. 25 A. n. 24, 1937, pp. 1-39).

32 - M. PICONE - C. MIRANDA: *La formula di Green per i problemi con arbitraria derivata obliqua* (Rend. Acc. Lincei, 29, 1939, pp. 160-165).

33 - F. RELLICH: *Eine Satz über mittlere Konvergenz* (Gött. Nachr., Math. Phys. Kl., 1930, pp. 30-35).

34 - G. STAMPACCHIA: *Problemi al contorno misti per equazioni del calcolo delle variazioni* (in corso di stampa sugli Annali di Mat. pura e applic.)

35 - G- STAMPACCHIA: *Osservazioni sull'esistenza e sull'unicità della soluzione dei problemi al contorno misti per equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico* (in corso di stampa sui Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli).

36 - H. VILLAT: *Sur la résolution de certains équations intégrales et sur quelques problèmes qui s'y rattachent* (Acta Math. vol. 40, 1916, pp. 162-167).

37 - M. I. VISIK: *Sui problemi al contorno per i sistemi di equazioni differenziali ellittiche e sulla stabilità delle loro soluzioni.* (Doklady Akad. Nauk S S S R, 86, 1952, pp. 615-648).