ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIA CINQUINI CIBRARIO

Nuovi teoremi di esistenza e di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 9, nº 1-2 (1955), p. 65-113

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_1-2_65_0>

NUOVI TEOREMI DI ESISTENZA E DI UNICITÀ PER SISTEMI DI EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI

Memoria di MARIA CINQUINI CIBRARIO (a Pavia)

In due Memorie, scritte in collaborazione, (1) abbiamo trasportato l'ordine di idee, sviluppato da C. CARATHÉODORY nel campo delle equazioni differenziali ordinarie (2) al campo delle equazioni a derivate parziali del primo ordine

$$p = f(x, y, z, q).$$

Quando si vogliano studiare, in questo stesso indirizzo, i sistemi di equazioni del primo ordine a derivate parziali, si incontrano nuove difficoltà. Una ricerca recente, (3) in tale indirizzo, conduce ad un teorema di unicità, valido sotto ipotesi molto ampie, per sistemi del tipo $\left(\text{avendo posto } p_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial x}, q_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial y}\right)$

$$(a) \qquad p_i = f_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m, q_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

il metodo tenuto si collega al § 3 di (A) e al Cap. II di (B).

---

(1) (A) M. CINQUINI-CIBRARIO e S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$, Ann. di Mat. (IV) T. XXXII (1951), 121-155.

(B) M. CINQUINI-CIBRARIO e S. CINQUINI, *Ancora sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$, Ann. Scuola Normale Superiore di Pisa (III) Vol. VI (1952), p. 187-243.

Nel seguito tali memorie saranno indicate con (A) e (B).

(2) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Teubner, Leipzig, 1918, Cap. XI, pp. 665-688.

(3) S. CINQUINI, *Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine*. Note I e II, Rendic. Acc. Naz. Lincei (VIII), Vol. XVII (1954) p. 188-191, 339-344.

Nel presente lavoro ci si ispira piuttosto ai §§ 1 e 2 di (A) e al Cap. I di (B), poichè si fa uso della teoria delle caratteristiche di sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine. [4]

Per superare le notevoli difficoltà, che si incontrano in questo ordine di ricerche, si considerano, in primo luogo, nel § 1 ***sistemi quasi lineari della forma***

$$\text{(I)} \qquad p_i + \varrho_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)\, q_i = f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$$

$$\left(p_i = \frac{\partial z_i}{\partial x}, q_i = \frac{\partial z_i}{\partial y};\ i = 1, 2, \dots, m\right),$$

e si dà per tali sistemi un teorema di esistenza, valido sotto ipotesi molto ampie: le funzioni $\varrho_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$, $f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ sono supposte, per ogni $(m+1)$-pla fissata $(y, z_1, z_2, \dots, z_m)$, ***quasi continue in*** x in un intervallo $(0, a_0)$ e, per ogni x fissato di $(0, a_0)$, ***continue nel complesso*** delle variabili $y, z_1, z_2, \dots, z_m$; le ***soluzioni*** ottenute $z_1(x, y)$, $z_2(x, y), \dots,$ $z_m(x, y)$, ***assolutamente continue in*** x ***e lipschitziane in*** y, ***soddisfano il sistema*** (I) ***quasi ovunque in un campo*** D_∞ ben determinato

$$D_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a, \ -\infty < y < +\infty,$$

e per $x = 0$ si riducono a funzioni assegnate $\Phi_i(y)$, che sono supposte lipschitziane. Nella dimostrazione si sfrutta un sistema di equazioni integrali, (le (III) e (IV) del § 1) che è stato introdotto da COURANT e LAX [5] nelle ipotesi di continuità, derivabilità ecc. delle funzioni $\varrho_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$,

---

[4] Circa la teoria delle caratteristiche dei sistemi di equazioni non lineari del primo ordine a derivate parziali

$$F_i(x, y; z_1, z_2, \dots, z_m; p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, q_2, \dots, q_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

cfr. M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra il problema di Cauchy per i sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine,* Rendic. Seminario Mat. Univ. Padova, Vol. XVII (1948), p. 75-96.

M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra la teoria delle caratteristiche per i sistemi di equazioni quasi-lineari alle derivate parziali del primo ordine,* Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa (III) Vol. III (1949) p. 161-197.

M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra la teoria delle caratteristiche per i sistemi di equazioni non lineari alle derivate parziali del primo ordine,* Rendic. Ist. Lombardo, Vol. LXXXVI (1953), p. 725-746.

[5] R. COURANT e P. LAX, *On nonlinear partial differential equations with two indipendent variables,* Commun. pure appl. Math. Vol. II (1949) pp. 255-273; cfr. § 5, p. 261-262.

$f_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$, e che, nelle attuali ipotesi molto generali, deve essere giustificato con considerazioni minute; tale sistema viene risolto col metodo, ormai classico, di TONELLI (6), che può essere applicato, sfruttando opportuni accorgimenti, e risolvendo, fra l'altro, un sistema ausiliario di equazioni differenziali (cfr. § 1, n. 4), le cui soluzioni vengono utilizzate per eseguire le maggiorazioni necessarie.

Nel § 2, introducendo qualche ipotesi ulteriore, si assicura la continuità delle derivate $q_i(x, y)$ in tutto D_∞; ne segue che, in questo caso particolare, l'insieme (appartenente a D_∞) di misura superficiale nulla, in cui le $z_1(x, y), z_2(x, y), \ldots, z_m(x, y)$ *non soddisfano* il sistema (I), è tagliato da ogni segmento $0 \leq x \leq a$, $y = \text{cost.}$ in un insieme di misura lineare nulla; in tutto D_∞ le $z_1(x, y), z_2(x, y), \ldots, z_m(x, y)$ soddisfano il sistema (7)

$$(b) \qquad z_i(x, y) = \Phi_i(y) + \int_0^x [-\varrho_i(X, y, z_1(X, y), z_2(X, y), \ldots, z_m(X, y))\, q_i(X, y) + $$
$$+ f_i(X, y, z_1(X, y), z_2(X, y), \ldots, z_m(X, y))]\, dX \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Se, in particolare, $\varrho_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$, $f_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *sono continue nel complesso delle variabili, le soluzioni* $z_1(x,y), z_2(x,y), \ldots, z_m(x,y)$ *soddisfano il sistema* (I) *in tutto* D_∞; si ha così, anche nel caso classico, un teorema di esistenza valido sotto ipotesi molto generali. (8)

Il § 3 è dedicato ad alcune estensioni delle ricerche dei §§ 1 e 2; una di tali estensioni permette di dare un teorema di esistenza per i sistemi non lineari (a), già citati, sotto ipotesi vicine a quelle del § 2 (9); le soluzioni

---

(6) L. TONELLI, *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*, Bull. of the Calcutta Math. Soc., vol. XX (1928), p. 31-48.

(7) Invece nelle ipotesi generali del § 1 esiste, in generale, un insieme J di misura lineare nulla di valori di y, tale che *se* $\bar{y}$ *appartiene a* J, *le* (b) *non sono soddisfatte nei punti del segmento* $0 \leq x \leq a, y = \bar{y}$, mentre *le* ($b$) *sono soddisfatte in tutti i punti di* D_∞, *appartenenti a segmenti* $0 \leq x \leq a$, $y = y_0$, *dove* y_0 *non appartiene all'insieme* J.

(8) I risultati del § 2 sono stati comunicati al X Congresso Internazionale dei Matematici (Amsterdam, 2-9 settembre 1954) col titolo « *Una estensione nello studio dei sistemi di equazioni a derivate parziali* », mentre i risultati più generali del § 1 e quelli dei successivi §§ 3 e 4 non sono ancora contenuti in tale comunicazione.

(9) Un teorema di esistenza per il sistema (a) nell'ipotesi della continuità delle $f_i(x, y, z_1, \ldots, z_m, q_i)$ e di alcune delle loro derivate è stato dato da R. CONTI, *Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma*

$$z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \ldots, z^{(k)}; z_y^{(i)}),$$

Nota I e Nota II, Rend. Acc. Naz. Lincei (VIII) vol. XII (1952) p. 61-65 e 151-155.

costruite $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$ soddisfano in tutto D_∞ le

$$(c) \qquad z_i(x, y) = \Phi_i(y) + \int_0^x f_i(X, y, z_1(X, y), z_2(X, y), \dots, z_m(X, y), q_i(X, y))\, dX$$
$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Una seconda estensione contenuta nel § 3 permetterebbe di sviluppare un nuovo metodo di risoluzione del problema di CAUCHY per sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari di tipo iperbolico del primo ordine [10]

$$F_i(x, y; z_1, z_2, \dots, z_m; p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, q_2, \dots, q_m) = 0$$
$$\left(i = 1, 2, \dots, m; p_i = \frac{\partial z_i}{\partial x}, \ q_i = \frac{\partial z_i}{\partial y}\right),$$

i quali, come è noto [11], sotto ipotesi opportune, si possono ricondurre ai sistemi (I); in particolare si ottiene un nuovo metodo di risoluzione del problema di CAUCHY per equazioni non lineari a derivate parziali di ordine $n > 1$ di tipo iperbolico. Tali applicazioni non sono però state sviluppate.

Il § 4 mostra che le ipotesi del teorema di esistenza del § 1 sono sufficienti ad assicurare in D_∞ l'unicità del sistema delle $z_1(x,y), z_2(x,y), \dots, z_m(x, y)$, che soddisfano le

$$(\mathrm{II}) \qquad z_i(0, y) = \Phi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

e che, quasi ovunque in D_∞, sono soluzioni del sistema (I); ne segue che ad ognuno dei teoremi di esistenza, dimostrati nel presente lavoro, corri-

---

(10) Circa tali sistemi cfr. p. es. i lavori citati in (4) e in (5). La risoluzione del problema di CAUCHY per tali sistemi è stata oggetto, in questi ultimi anni, di numerosi lavori, nei quali si introducono ipotesi varie di continuità, derivabilità, ecc. Non faremo altre citazioni in proposito, dato che il presente lavoro risolve il problema di CAUCHY per i sistemi (I) e (a) sotto una forma più ampia. Ricordiamo soltanto la recente memoria di P. LAX, *Nonlinear hyperbolic equations,* Commun. pure appl. Math. Vol. VI (1953), p. 231-258, il quale introduce soluzioni generalizzate di un sistema di equazioni a derivate parziali del primo ordine quasi-lineari, seguendo un indirizzo diverso dal nostro, e, in particolare, non rinunciando alla continuità dei coefficienti.

Inoltre non faremo alcuna citazione relativa a lavori che riguardino equazioni o sistemi di equazioni a derivate parziali lineari o semilineari, oppure che si riferiscano a problemi diversi dal problema di CAUCHY.

(11) Cfr. R. COURANT e P. LAX, l. c. in (5) § 1, p. 156 e § 4, p. 259-261.

Per la riduzione di un sistema di equazioni a derivate parziali del primo ordine non lineari ad un sistema pure di equazioni a derivate parziali del primo ordine ma quasi-lineari, cfr. l'ultimo dei miei lavori citati in (4), n. 4 p. 730 (sistema (11)).

sponde un teorema di unicità. Il teorema di unicità del § 4 è indipendente dal teorema di unicità, contenuto nel lavoro citato in (3).

Nel § 4 si dimostra pure che, nelle ipotesi del teorema di esistenza del § 1, le soluzioni del sistema (I) (anche in senso generalizzato) dipendono con continuità dai valori assegnati per $x = 0$; analogo risultato si può dimostrare nelle ipotesi degli altri teoremi di esistenza, contenuti nel presente lavoro.

§ 1.

Un primo teorema di esistenza.

1. Allo scopo di snellire gli enunciati dei teoremi successivi, introduciamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE. *Una funzione* $z(x,y)$, *definita nel campo* $0 \leq x \leq \alpha$, $-\infty < y < +\infty$, *si dice che è ivi di classe* G, *se per ogni* y *fissato reale è assolutamente continua in* x *nell'intervallo* $(0,\alpha)$, *e per ogni* x *fissato di* $(0,\alpha)$ *è lipschitziana in* y, *con costante di* LIPSCHITZ *indipendente da* x (12).

Possiamo enunciare il seguente

TEOREMA I. (TEOREMA DI ESISTENZA). — *Siano* $\varrho_i(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m)$, $f_i(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m)$ $(i = 1,2,\dots,m)$ *funzioni definite per ogni* x *di un intervallo* (o,a_0) *e per tutti i valori reali di* $y, z_1, z_2, \dots, z_m$, *le quali, per ogni* x *fissato di* (o,a_0) *siano continue nel complesso delle variabili* $y, z_1, z_2, \dots, z_m$, *e per ogni* $(m+1)$*-pla reale fissata* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m)$, *siano quasi-continue in* x *in* (o,a_0); *esistano* $2m+1$ *funzioni* $M_i(x)$, $N_i(x)$ $(i=1,2,\dots,m)$, $L(x)$, *definite in* (o,a_0), *ivi positive o nulle, quasi continue e integrabili* (13), *tali che per quasi tutti gli* x *di* (o,a_0) *valgano le*

$$(1)\qquad \begin{cases} |\varrho_i(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m)| \leq M_i(x) \\ |f_i(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m)| \leq N_i(x) \end{cases} \qquad (i = 1,2,\dots,m)$$

per tutte le $(m+1)$*-ple reali* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m)$, *e le*

$$(2)\begin{cases} |\varrho_i(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m) - \varrho_i(x,\bar y,\bar z_1,\bar z_2,\dots,\bar z_m)| \leq L(x)\left\{|y-\bar y| + \sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar z_j|\right\} \\ |f_i(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m) - f_i(x,\bar y,\bar z_1,\bar z_2,\dots,\bar z_m)| \leq L(x)\left\{|y-\bar y| + \sum_{j=1}^{m}|z_j-\bar z_j|\right\} \end{cases}$$

---

(12) Ne segue che la funzione $z(x,y)$ è continua nel complesso delle variabili x, y in ogni punto del campo $0 \leq x \leq \alpha$, $-\infty < y < +\infty$.

(13) In tutto il presente lavoro l'integrabilità va intesa nel senso di LEBESGUE.

per tutte le $(m+1)$*-ple* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m)$, $(\bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m)$ *di numeri reali.*

Siano date m funzioni $\Phi_1(y), \Phi_2(y), \dots, \Phi_m(y)$, *definite per ogni y, e lipschitziane in y, così che esista una costante h, per cui sia*

$$(3) \qquad |\Phi_i(y) - \Phi_i(\bar{y})| \leq h\,|y - \bar{y}| \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutti gli $y, \bar{y}$ *reali.*

In queste ipotesi si può determinare un numero reale positivo $a \leq a_0$ *ed esiste almeno un sistema di funzioni* $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$, *che sono definite nel campo*

$$D_\infty: \quad 0 \leq x \leq a, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

sono in esso di classe G, soddisfano le

$$(\mathrm{II}) \qquad z_i(o, y) = \Phi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \dots, m;\ -\infty < y < +\infty),$$

e inoltre in quasi tutto D_∞ *soddisfano il sistema*

$$(\mathrm{I})\ p_i(x, y) + \varrho_i(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(x, y))\, q_i(x, y) = f_i(x, y, z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)),$$
$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

2. Supponiamo che il numero a sia noto e che $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$ siano funzioni, che soddisfano il TEOREMA I in D_∞. Dalle ipotesi fatte segue che esistono m costanti $H_1, H_2, \dots, H_m$, tali che

$$(4) \qquad |z_i(x, y) - z_i(x, \bar{y})| \leq H_i\,|y - \bar{y}| \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

per ogni x di (o, a) e per tutti gli $y, \bar{y}$ reali. Inoltre, poichè $z_1(x, y)$, $z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$ soddisfano le (I) in quasi tutto D_∞, si può determinare un insieme I di misura lineare nulla tale, che se y non appartiene a tale insieme I, è

$$(5) \qquad z_i(x, y) = \Phi_i(y) + \int_0^x [-\varrho_i(X, y, z_1(X, y), z_2(X, y), \dots, z_m(X, y))\, q_i(X, y) +$$
$$+ f_i(X, y, z_1(X, y), z_2(X, y), \dots, z_m(X, y))]\, dX, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

e quindi per le (1) e (4)

$$(6) \qquad |z_i(x_1, y) - z_i(x_2, y)| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} (M_i(X)\, H_i + N_i(X))\, dX \right| \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

per tutti gli y non appartenenti all'insieme I e per x_1, x_2 appartenenti a (o, a). Poichè il primo membro della disuguaglianza (6) è continuo in y, e il secondo non dipende da y, segue che la (6) vale per ogni y reale e comunque siano x_1, x_2 in (o, a).

Si indichino ora con X, Y le coordinate correnti e con (x, y) un punto fissato di D_∞; si consideri la equazione differenziale (scritta sotto forma integrale), nella quale i è un numero fissato tra 1 e m

$$Y = y - \int_X^x \varrho_i(t, Y, z_1(t, Y), z_2(t, Y), \ldots, z_m(t, Y))\, dt\,. \tag{7}$$

Dalla prima delle (2) e dalle (4) segue

$$\begin{aligned}&|\varrho_i(X, Y, z_1(X, Y), z_2(X, Y), \ldots, z_m(X, Y)) - \\ &- \varrho_i(X, \overline{Y}, z_1(X, \overline{Y}), z_2(X, \overline{Y}), \ldots, z_m(X, \overline{Y}))| \leq L(X)\,|Y - \overline{Y}|\left(1 + \sum_{j=1}^{m} H_j\right)\end{aligned} \tag{8}$$

per quasi tutti gli X di (o, a) e per tutti gli $Y, \overline{Y}$ reali. La prima delle (1) e la (8) assicurano che per l'equazione (7) valgono i teoremi di esistenza e di unicità di CARATHÉODORY [14]; indicata la soluzione della (7) con $g_i(X; x, y)$ è dunque

$$g_i(X; x, y) = y - \int_X^x \varrho_i[t, g_i(t; x, y), z_1(t, g_i(t; x, y))\, z_2(t, g_i(t; x, y)), \ldots, z_m(t, g_i(t; x, y))]\, dt\,. \tag{II}$$

Si considerino i valori di $z_i(X, Y)$ nei punti della curva

$$Y = g_i(X; x, y) \qquad (o \leq X \leq a)\,; \tag{9}$$

dalle (1), (4), (6), (III), segue, fissato (x, y) in D_∞, comunque siano X_r, X_s, in (o, a)

$$\begin{aligned}&|z_i(X_r, g_i(X_r, x, y)) - z_i(X_s, g_i(X_s; x, y))| \leq \\ &\leq 2H_i \left|\int_{X_r}^{X_s} M_i(t)\, dt\right| + \left|\int_{X_r}^{X_s} N_i(t)\, dt\right|.\end{aligned} \tag{10}$$

---

(14) C. CARATHÉODORY, l. c. in (2), n. 582, p. 672, e n. 583, p. 674.

La (10) assicura che $z_i(X; g_i(X; x, y))$ è funzione assolutamente continua di X in (o, a) [14 bis].

In quasi tutti i punti $(X, g_i(X; x, y))$ della curva (9) esiste dunque la derivata $\dfrac{dz_i(X, g_i(X; x, y))}{dX}$. Le derivate $\dfrac{\partial z_i(X, Y)}{\partial X}$, $\dfrac{\partial z_i(X, Y)}{\partial Y}$ esistono e soddisfano l'i-*esima* equazione del sistema (I) (nella quale si scrivano X, Y al posto di x, y) in tutto il campo $0 \leq X \leq a$, $-\infty < Y < +\infty$, tranne in un insieme E di misura superficiale nulla. Si fissi x in (o, a); al variare di y in $(-\infty, +\infty)$ le curve di equazione (9) riempiono una volta sola tutto il campo $0 \leq X \leq a$, $-\infty < Y < +\infty$ (nel senso che per ogni punto di tale campo ne passa una e una sola). Per ogni y si considerino i punti $(\overline{X}, g_i(\overline{X}; x, y))$ della curva (9), in cui non esiste $\dfrac{\partial z_i(X, Y)}{\partial X}$, oppure non esiste $\dfrac{\partial z_i(X, Y)}{\partial Y}$, oppure tali derivate non soddisfano la i^{esima} delle (I) (nella quale si pongano X, Y al posto di x, y); vi è al più un insieme I_1 di misura lineare nulla di valori y, per cui tali punti $\overline{X}$ costituiscono un insieme di misura lineare non nulla [15].

[14 bis] Infatti se (X_r, X'_r) $(r = 1, 2, \dots, \mu)$ sono un numero finito di intervalli di (o, a) con $X_r < X'_r$, a due a due distinti, dalla (10) segue

$$\sum_{r=1}^{\mu} | z_i(X_r, g_i(X_r; x, y)) - z_i(X'_r, g_i(X'_r; x, y)) | \leq \sum_{r=1}^{\mu} \int_{X_r}^{X'_r} (2H_i M_i(t) + N_i(t)) \, dt,$$

e l'assoluta continuità in X di $z_i(X, g_i(X; x, y))$ per X variabile in (o, a) segue dall'assoluta continuità in (o, a) di $\int_0^X (2H_i M_i(t) + N_i(t)) \, dt$.

Considerazioni simili valgono in casi analoghi, che si presenteranno nel seguito.

[15] Fissato x, la $Y = g_i(X; x, y)$ stabilisce, per il teorema di unicità citato in [14], una corrispondenza biunivoca tra i campi $o \leq X \leq a$, $-\infty < Y < +\infty$ e $o \leq X \leq a$, $-\infty < y < +\infty$; si può provare che, inoltre, ad ogni insieme di misura superficiale nulla dell'uno corrisponde un insieme di misura superficiale nulla dell'altro; ciò perchè (cfr. più avanti nota [16]) vale la (per X fissato, $Y = g_i(X; x, y)$, $\overline{Y} = g_i(X; x, \overline{y})$)

$$e^{-A} \leq \frac{Y - \overline{Y}}{y - \overline{y}} \leq e^{A}$$

dove

$$A = 1 + \sum_{j=1}^{m} H_j \int_0^a L(t) \, dt.$$

Quindi, fissato x, se y non appartiene a I_1, è in quasi tutti i punti $(X, g_i(X, x, y))$ della curva di equazione (9) ([15bis])

$$\frac{dz_i(X, g_i(X; x, y))}{dX} = \frac{\partial z_i}{\partial X} + \frac{\partial z_i}{\partial Y}\frac{dg_i}{dX},$$

e, tenuto conto della (III)

$$\frac{dz_i(X; g_i(X, x, y))}{dX} = \tag{11}$$

$$= \frac{\partial z_i}{\partial X} + \varrho_i[X, g_i(X; x, y), z_1(X, g_i(X; x, y)), \dots, z_m(X, g_i(X; x, y))]\frac{\partial z_i}{\partial Y},$$

dalla quale, per la i^{esima} delle (I) (in cui si pongano X, Y al posto di x, y) segue

$$\frac{dz_i(X, g_i(X; x, y))}{dX} = \tag{12}$$

$$= f_i[X, g_i(X; x, y), z_1(X, g_i(X; x, y)), z_2(X, g_i(X; x, y)), \dots, z_m(X, g_i(X; x, y))].$$

Da questa, integrando tra o e x, si ottiene

$$z_i(x, y) = \Phi_i(g_i(o; x, y)) + \tag{IV}$$

$$+ \int_0^x f_i[X, g_i(X; x, y), z_1(X, g_i(X; x, y)), \dots, z_m(X, g_i(X; x, y))]\, dX.$$

Fissato x in (o, a) la (IV) è stata dimostrata per gli y non appartenenti all'insieme I_1. Ora $g_i(X; x, y)$ è funzione continua, e anzi lipschitziana in y, con costante di LIPSCHITZ indipendente da X e x, ed è precisamente,

---

([15bis]) Cfr. (A), § 2, n. 5, *e*), p. 145; ivi è implicitamente dimostrato un teorema di derivazione di funzione composta. Cfr. anche il lavoro successivo di G. SCORZA e M. VOLPATO, *Un teorema di unicità per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali di primo ordine,* Rendic. Seminario matematico Università di Padova, vol. XX (1951), p. 450-461; cfr. n. 3, p. 449-451.

tenuto conto della (8) [16]

$$(13)\qquad |g_i(X;x,y)-g_i(X;x,\bar{y})|\leq e^{(1+\sum_{j=1}^{m}H_j)\int_0^a L(t)\,dt}\,|y-\bar{y}|.$$

Ne segue per le (2) e (4)

$$(14)\qquad \Big|\int_0^x f_i[X,g_i(X;x,y),z_1(X,g_i(X;x,y)),\ldots,z_m(X,g_i(X;x,y))]\,dX-$$

$$-\int_0^x f_i[X,g_i(X;x,\bar{y}),z_1(X,g_i(X;x,\bar{y})),\ldots,z_m(X,g_i(X;x,\bar{y}))]\,dX\Big|\leq$$

$$\leq\int_0^a L(X)\,dX\Big(1+\sum_{j=1}^{m}H_j\Big)e^{(1+\sum_{j=1}^{m}H_j)\int_0^a L(X)\,dX}\,|y-\bar{y}|.$$

---

[16] Cfr. (A) § 1, n. 1, p. 123-125. Posto

$$v(X)=\frac{g_i(X;x,y)-g_i(X;x,\bar{y})}{y-\bar{y}},$$

è $v(X)>0$, perchè, per il teorema di unicità, per ogni X, e per x fisso, $g_i(X;x,y)$ è funzione crescente di y; dalle (8) e (III) segue che in quasi tutto (o,a) è

$$(\alpha)\qquad |v'(X)|\leq\Big(1+\sum_{j=1}^{m}H_j\Big)L(X)\,v(X)$$

e da questa e dalla $v(x)=1$ segue

$$v(X)\leq e^{(1+\sum_{j=1}^{m}H_j)\left|\int_X^x L(t)\,dt\right|},$$

da cui la (13). Dalla (α) segue pure subito

$$e^{-(1+\sum_{j=1}^{m}H_j)\int_0^a L(t)\,dt}\leq v(X)\leq e^{(1+\sum_{j=1}^{m}H_j)\int_0^a L(t)\,dt}$$

già citata in [15].

Entrambi i membri della (IV) sono dunque continui in y, e quindi le (IV) valgono in tutto D_∞.

3. Si è così provato che, nell'ipotesi che sia determinato a, e quindi il campo D_∞, e che sia noto un sistema di funzioni $z_1(x,y), z_2(x,y), \ldots, z_m(x,y)$, che in D_∞ soddisfano il Teorema I, ad esso si può associare un altro sistema di funzioni $g_1(X;x,y), g_2(X;x,y), \ldots, g_m(X;x,y)$, definite per $o \leq x \leq a$, $o \leq X \leq a$, $-\infty < y < +\infty$, in modo che valgano le (III) e (IV).

Viceversa per $i = 1, 2, \ldots, m$, le (III) e (IV) costituiscono il sistema di $2m$ equazioni integrali, al quale si è accennato nell'introduzione, e che, come si è detto nell'introduzione stessa, risolveremo col metodo di TONELLI, integrato da opportuni accorgimenti.

Scegliamo anzi tutto il numero a reale positivo $\leq a_0$ in modo che sia

$$e^{(m-1)\int_0^a L(t)\,dt} < 1 + \frac{m-1}{mh+1} \qquad (m > 1). \tag{15}$$

Giustificheremo la (15) nel successivo n. 4.

Per x nell'intervallo $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ e per ogni $(m+1)$-pla $y, z_1, z_2, \ldots, z_m$ poniamo

$$\varrho_i(x, y, z_j) = 0; \qquad f_i(x, y, z_j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

avendo scritto, qui e spesso nel seguito del lavoro, a scopo di brevità, $\varrho_i(x,y,z_j)$, $f_i(x,y,z_j)$ al posto di $\varrho_i(x,y,z_1,z_2,\ldots,z_m)$, $f_i(x,y,z_1,z_2,\ldots,z_m)$.

Posto $\delta = \frac{a}{n}$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ per x in $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $-\infty < y < +\infty$ definiamo le funzioni $z_1^{(n)}(x,y), z_2^{(n)}(x,y), \ldots, z_m^{(n)}(x,y)$ mediante le

$$z_i^{(n)}(x, y) = \Phi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Poi per $o \leq x \leq a$, $o \leq X \leq a$, $-\infty < y < +\infty$, definiamo le funzioni $g_1^{(n)}(X;x,y), g_2^{(n)}(X;x,y), \ldots, g_m^{(n)}(X;x,y)$ e $z_1^{(n)}(x,y), z_2^{(n)}(x,y), \ldots, z_m^{(n)}(x,y)$ rispettivamente mediante le

$$g_i^{(n)}(X;x,y) = y - \int_X^x \varrho_i[t, g_i^{(n)}(t;x,y), z_j^{(n)}(t-\delta, g_i^{(n)}(t;x,y))]\,dt \tag{16}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$(17)\quad z_i^{(n)}(x,y) = \Phi_i(g_i(o;x,y)) + \int_0^x f_i[t, g_i^{(n)}(t;x,y), z_j^{(n)}(t-\delta, g_i^{(n)}(t;x,y))]\,dt$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Le (16) e (17) definiscono effettivamente le funzioni $g_i^{(n)}(X;x,y)$ $(i=1,2,\dots,m)$ per $o \leq x \leq a$, $o \leq X \leq a$, $-\infty < y < +\infty$, e $z_i^{(n)}(x,y)$ $(i=1,2,\dots,m)$ in D_∞. Infatti per x e X in (o,δ), $-\infty < y < +\infty$, la (16) diviene

$$g_i^{(n)}(X;x,y) = y - \int_X^x \varrho_i[t, g_i^{(n)}(t;x,y), \Phi_j(g_i^{(n)}(t;x,y))]\,dt\,;$$

questa è una equazione differenziale (scritta sotto forma integrale), a cui per la (1) e per la

$$(18)\quad |\varrho_i(X, Y, \Phi_j(Y)) - \varrho_i(X, \overline{Y}, \Phi_j(\overline{Y}))| \leq L(X)(1+mh)(Y-\overline{Y})$$

(la quale segue dalle (2) e (3)) si possono applicare i teoremi di esistenza e di unicità di Carathéodory, citati in ([14]). Ragionando come al n. 2, tenendo conto della (18) e della (13) (nella quale si ponga $H_1 = H_2 = \dots = H_m = h$ e δ al posto di a) segue che per x, X in (o,δ), y qualunque è

$$(19)\quad |g_i^{(n)}(X;x,y) - g_i^{(n)}(X,x,\overline{y})| \leq e^{(1+mh)\int_0^\delta L(t)\,dt}\,|y-\overline{y}|\,.$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

Si verifica inoltre facilmente che $g_i^{(n)}(X;x,y)$ è funzione assolutamente continua di x (oltre che, come è evidente, di X); infatti è ([17])

$$(20)\quad |g_i^{(n)}(X;x_r,y) - g_i^{(n)}(X;x_s,y)| \leq e^{(1+mh)\int_0^\delta L(t)\,dt}\left|\int_{x_r}^{x_s} M_i(t)\,dt\right|.$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

([17]) Posto $w(X) = |g_i^{(n)}(X;x_r,y) - g_i^{(n)}(X;x_s,y)|$, dove x_r, x_s sono punti di (o,δ), Dalla (20) segue l'assoluta continuità di $g_i^{(n)}(X; x, y)$ in x, per x in (o, δ) ([17bis]). Le (17) definiscono le $z_i^{(n)}(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ per $o \leq x \leq \delta$, $-\infty < y < +\infty$; esse sono di classe G in tale campo, perchè dalle (1), (2), (3), (19) e (20) ponendo

$$h_1 = e^{(1+mh)\int_0^\delta L(t)\,dt}\left[h + (1+mh)\int_0^\delta L(t)\,dt\right] \qquad (h_1 > h), \tag{21}$$

segue con facile calcolo

$$|z_i^{(n)}(x, y) - z_i^{(n)}(x, \bar{y})| \leq h_1 |y - \bar{y}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{22}$$

$$|z_i^{(n)}(x_r, y) - z_i^{(n)}(x_s, y)| \leq h_1 \left|\int_{x_r}^{x_s} M_i(t)\,dt\right| + \left|\int_{x_r}^{x_s} N_i(t)\,dt\right|. \tag{23}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

e la (23) assicura (cfr. nota ([14bis])) che $z_i^{(n)}(x, y)$ è assolutamente continua in x in (o, δ).

Poi le (16) definiscono in modo unico $g_i^{(n)}(X; x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ per x, X in $(o, 2\delta)$, y comunque; le funzioni $g_i^{(n)}(X; x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ così definite soddisfano in $(o, 2\delta)$ le (19), (20), nei secondi membri delle quali

---

dalla (18) segue che, in quasi tutto (o, δ), è

$$|w'(X)| \leq (1 + mh)\, L(X)\, w(X),$$

dalla quale

$$w(X) \leq e^{(1+mh)\left|\int_{x_r}^{X} L(t)\,dt\right|}\, w(x_r)$$

e poichè

$$w(x_r) = \left|\int_{x_s}^{x_r} \varrho_i[t, g_i^{(n)}(t; x_s, y), \Phi_j(g_i^{(n)}(t; x_s, y))]\,dt\right|,$$

tenuto conto della (1), si ottiene subito la (20).

([17bis]) Cfr. la nota ([14bis]); nel caso attuale basta fare un ragionamento del tutto analogo.

si ponga h_1 al posto di h e 2δ al posto di δ. Le (12) definiscono le $z_i^{(n)}(x, y)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ per x in $(\delta, 2\delta)$, y comunque; posto

$$h_2 = e^{(1+mh_1)\int_0^{2\delta} L(t)\,dt}\left[h + (1 + mh_1)\int_0^{2\delta} L(t)\,dt\right] \qquad (h_2 > h_1) \tag{21'}$$

valgono le (22), (23), nei secondi membri delle quali si ponga h_2 al posto di h_1.

Per ricorrenza le (16), (17) definiscono $g_i^{(n)}(X; x, y)$, per ogni x di (o, a), ogni X di (o, a) e ogni y reale, e $z_i^{(n)}(x, y)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ per ogni x di (o, a) e per ogni y reale. Determinate successivamente $h_3, \dots, h_n$, mediante formule ricorrenti, analoghe alle (21), (21′), e posto, alla fine, $H^{(n)} = h_n$, si vede che per tutti gli x e X di (o, a) e gli y reali valgono le (19), (20), nelle quali si ponga $H^{(n)}$ al posto di h e a al posto di δ, e per tutti gli x di (o, a) e gli y reali valgono le (22), (23), nelle quali si ponga $H^{(n)}$ al posto di h_1.

4. Per le (1) e (3) è

$$|g_i^{(n)}(X; x, y) - y| \leq \int_0^a M_i(t)\,dt \qquad (o \leq X \leq a, (x,y) \text{ in } D_\infty) \tag{24}$$

$$|z_i^{(n)}(x, y) - \Phi_i(y)| \leq h\int_0^a M_i(t)\,dt + \int_0^a N_i(t)\,dt \qquad ((x,y) \text{ in } D_\infty). \tag{25}$$

Se $i = 1, 2, \dots, m$, *le funzioni delle* $2m$ *successioni*

$$g_i^{(n)}(X; x, y) - y \qquad (n = 2, 3, \dots); \tag{26}$$

$$z_i^{(n)}(x, y) - \Phi_i(y) \qquad (n = 2, 3, \dots) \tag{26'}$$

sono equilimitate per (x, y) *in* D_∞ *e* $o \leq X \leq a$.

Proveremo ora che *le funzioni delle successioni* (26) *e* (26′) *sono equilipschitziane in* y, *con costante di* LIPSCHITZ *indipendente da* x (*e, per quanto riguarda* $g_i^{(n)}(X; x, y)$, *anche da* X); nello stesso tempo *giustificheremo la scelta del numero positivo* $a \leq a_0$, *che soddisfa la* (15).

Dalla (16) segue che, fissato il punto (x, y) in D_∞, per quasi tutti gli X di (o, a) è

$$\frac{d g_i^{(n)}(X; x, y)}{d X} = \varrho_i(X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_j^{(n)}(X - \delta, g_i^{(n)}(X; x, y))) . \tag{27}$$

Per brevità, se y_1, y_2 sono due numeri reali qualsiasi, poniamo

$$g_i^{(n)}(X; x, y_r) = Y_{ir}(X), \quad z_j^{(n)}(X - \delta, Y_{ir}(X)) = z_{ji}(X, y_r) \quad (r = 1, 2). \tag{28}$$

Tenuto conto delle (2) e (27) è per $(x, y_1), (x, y_2)$ in D_∞, e per quasi tutti gli X di (o, a) [18]

$$\left| \frac{d}{dX} \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} \right| \leq L(X) \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} \times \tag{29}$$
$$\times \left(1 + \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{z_{ji}(X, y_1) - z_{ji}(X, y_2)}{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)} \right| \right) .$$

Dalla (17), per le (2) e (3), segue per $(x, y_1), (x, y_2)$ in D_∞

$$\left| \frac{z_i^{(n)}(x, y_1) - z_i^{(n)}(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq h \frac{Y_{i1}(o) - Y_{i2}(o)}{y_1 - y_2} + \tag{30}$$
$$+ \int_0^x L(X) \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{z_{ji}(X, y_1) - z_{ji}(X, y_2)}{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)} \right| \right\} d X .$$

Si introducano due funzioni ausiliarie, assolutamente continue in (o, a), $U(x)$, $V(x)$, mediante le relazioni

$$\begin{cases} U(x) = m\, h\, V(x) + m \int_0^x L(X)\, V(X)\,(1 + U(X))\, d X \\ V(x) = 1 + \int_0^x L(X)\, V(X)\,(1 + U(X))\, d X , \end{cases} \tag{31}$$

---

[18] È $\dfrac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} > 0$ sempre, perchè $g_i^{(n)}(X; x, y)$, per X, x fissati, è funzione crescente di y (per il teorema di unicità, citato in [14], applicato all'equazione differenziale (27)).

da cui

$$U(x) = m(h+1)\,V(x) - m\,. \tag{32}$$

Inoltre, per quasi tutti gli x di $(o\,,a)$, è

$$V'(x) = L(x)\,V(x)\,(1 + U(x)), \tag{33}$$

e, per la (32),

$$V'(x) = L(x)\,V(x)\,[m(h+1)\,V(x) - m + 1]\,. \tag{34}$$

Da queste, tenuto conto che $V(o) = 1$, si hanno le due relazioni

$$V(x) = e^{\int_0^x L(X)(1+U(X))\,dX}\,, \tag{35}$$

$$V(x) = \frac{m-1}{m(h+1) - (mh+1)\,e^{(m-1)\int_0^x L(X)\,dX}}\,. \tag{36}$$

La (15) assicura che il denominatore della frazione a secondo membro della (36) non si annulla in $(o\,,a)$; quindi $V(x)$ è positiva e crescente in $(o\,,a)$, ed è

$$1 \leq V(x) \leq V(a) \qquad (0 \leq x \leq a)\,. \tag{37}$$

Dalla (32) segue

$$U(x) = \frac{m(mh+1)\,e^{(m-1)\int_0^x L(X)\,dX} - m(h+1)}{m(h+1) - (mh+1)\,e^{(m-1)\int_0^x L(X)\,dX}}\,. \tag{38}$$

Anche $U(x)$ è positiva e crescente in $(o\,,a)$ ed è

$$mh \leq U(x) \leq U(a) \qquad (0 \leq x \leq a)\,. \tag{39}$$

Per $0 \leq x \leq \delta$, $-\infty < y < +\infty$, è $z_i^{(n)}(x-\delta, y) = \Phi_i(y)$ $(i=1,2,...,m)$, e quindi per $0 \leq X \leq x$ vale la (19), nella quale si ponga x al posto di δ; è dunque

$$(40) \qquad \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} \leq e^{(1+mh)\int_0^x L(X)\,dX} \leq V(x), \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

perchè vale la (35) ed è $U(x) \geq m\,h$.

Dalle (30), (31) e (39) segue che, se x appartiene a $(0, \delta)$, è

$$(41) \qquad \left| \frac{z_i^{(n)}(x, y_1) - z_i^{(n)}(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq h\,V(x) + \int_0^x L(t)\,V(t)(1 + m\,h)\,d\,t \leq$$

$$\leq h\,V(x) + \int_0^x L(t)\,V(t)(1 + U(t))\,d\,t = \frac{U(x)}{m}.$$

Se è $\delta \leq x \leq 2\,\delta$, $0 \leq X \leq x$, dalle (29) e (41) segue, tenuto conto che $U(x)$ è funzione crescente

$$(42) \qquad \left| \frac{d}{dX} \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} \right| \leq L(X) \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} (1 + U(X)),$$

e da questa ([18bis]) segue

$$(43) \qquad \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} \leq e^{\int_X^x L(t)(1+U(t))\,dt} \leq e^{\int_0^x L(t)(1+U(t))\,dt} = V(x).$$

([18bis]) Cfr. (A) § 1, n. 1, nota ([13]) p. 125; si tenga conto che per $X = x$ è

$$\frac{Y_{i1}(x) - Y_{i2}(x)}{y_1 - y_2} = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_2} = 1.$$

Dalle (30), (31), (41) e (43) segue che per $\delta \leq x \leq 2\delta$, $-\infty < y < +\infty$ è

$$(44) \qquad \left| \frac{z_i^{(n)}(x, y_1) - z_i^{(n)}(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq h\, V(x) + \int_0^x L(t)\, V(t)\, (1 + U(t - \delta))\, dt$$

$$< h\, V(x) + \int_0^x L(t) V(t) (1 + U(t))\, dt = \frac{U(x)}{m}.$$

Ragionando allo stesso modo nei successivi intervalli $2\delta \leq x \leq 3\delta, \ldots, (n-1)\delta \leq x \leq n\delta$, e tenendo conto che $U(x)$ e $V(x)$ sono crescenti in (o, a), si trova che per $0 \leq x \leq a$, y_1, y_2 reali, $o \leq X \leq x$ vale la

$$(45) \qquad \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} \leq V(x) \leq V(a) \qquad (o = 1, 2, \ldots, m),$$

e per $o \leq x \leq a$, y_1, y_2 reali la

$$(46) \qquad \left| \frac{z_i^{(n)}(x, y_1) - z_i^{(n)}(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq \frac{U(x)}{m} \leq \frac{U(a)}{m} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Dalle (29) e (46) segue pure che per $o \leq x \leq a$, $o \leq X \leq a, y_1, y_2$ reali è

$$\left| \frac{d}{dX} \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} \right| \leq L(X)(1 + U(X)) \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2},$$

da cui segue (cfr. nota ([18bis])), tenendo conto della (35)

$$(47) \qquad \frac{Y_{i1}(X) - Y_{i2}(X)}{y_1 - y_2} \leq e^{\int_0^a L(X)(1 + U(X))\, dX} = V(a),$$

comunque siano X, x in (o, a) e y_1, y_2 reali.

5. Per ogni i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *le funzioni della successione* $g_i^{(n)}(X; x, y)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *sono equiassolutamente continue in* X *per* X *in* (o, a); infatti dalle (1) e (16) segue

$$(48) \qquad |g_i^{(n)}(X_r; x, y) - g_i^{(n)}(X_s; x, y)| \leq \left| \int_{X_r}^{X_s} M_i(t)\, dt \right|, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

e questa assicura l'equiassoluta continuità in X per X in (o, a) delle $g_i^{(n)}(X; x, y)$ ([18ter]) $(n = 2, 3, \ldots)$.

Le funzioni di tale successione sono pure equiassolutamente continue in x per x in (o, a); infatti con un ragionamento simile a quello, con il quale è stata stabilita la (20) si ottiene ([19]) la

$$(49) \qquad | g_i^{(n)}(X; x_r, y) - g_i^{(n)}(X; x_s, y) | \leq V(a) \left| \int_{x_r}^{x_s} M_i(t)\, dt \right|,$$

da cui, con considerazioni analoghe a quelle sviluppate nella nota ([18ter]) segue l'equiassoluta continuità accennata.

Dalle (2), (17), (46) e (49) si ha poi, se x_r, x_s sono due punti qualsiasi di (o, a)

$$(50) \quad | z_i^{(n)}(x_r, y) - z_i^{(n)}(x_s, y) | \leq \left[h + (1 + U(a)) \int_0^a L(t)\, dt \right] V(a) \left| \int_{x_r}^{x_s} M_i(t) dt \right| + \left| \int_{x_r}^{x_s} N_i(t)\, dt \right|.$$

([18ter]) Infatti se (X_r, X'_r) $(r = 1, 2, \ldots, \mu;\ X_r < X'_r)$ sono un numero finito di intervalli di (o, a) a due a due distinti, dalla (48) segue $\sum_{r=1}^{\mu} | g_i^{(n)}(X_r; x, y) - g_i^{(n)}(X'_r; x, y) | \leq \leq \sum_{r=1}^{\mu} \int_{X_r}^{X'_r} M_i(t)\, dt$, e dalla assoluta continuità in (o, a) di $\int_0^X M_i(t)\, dt$ segue l'equiassoluta continuità in X (per X in (o, a)) delle funzioni della successione $g_i^{(n)}(X; x, y)$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

([19]) Se x_r, x_s appartengono a (o, a) si ponga (come in ([17])) $w(X) = | g_i^{(n)}(X; x_r, y) - g_i^{(n)}(X; x_s, y) |$; dalle (2), (27) e (46) segue, per quasi tutti gli X di (o, a),

$$| w'(X) | \leq L(X)(1 + U(X))\, w(X),$$

da cui

$$w(X) \leq e^{\left| \int_{x_r}^{X} L(t)(1 + U(t))\, dt \right|} w(x_r);$$

tenuto conto della (35) e del fatto che per la (1) è $w(x_r) \leq \left| \int_{x_r}^{x_s} M_i(t)\, dt \right|$, ne segue la (49).

Dalla (50), ragionando in modo simile a quello tenuto nella nota ([18ter]), segue che, per ogni i $(i=1,2,\dots,m)$ *le funzioni della successione* $z_i^{(n)}(x,y)$ $(n=2,3,\dots)$ *sono equiassolutamente continue in* x, *per* x *in* (o,a).

6. Dalle (46)-(50) segue che le funzioni delle $2m$ successioni (26), (26′) *sono equicontinue nel complesso delle variabili* per $o \leq x \leq a$, $o \leq X \leq a$, $-\infty < y < +\infty$ e per $o \leq x \leq a$, $-\infty < y < +\infty$ rispettivamente. Poichè le (24), (25) assicurano che, negli stessi campi, le funzioni delle successioni (26), (26′) *sono equilimitate, dalle* $2m$ *successioni* (26), (26′) *si possono estrarre* $2m$ *successioni convergenti in ogni punto dei campi indicati rispettivi* ([20]) cioè per $i=1,2,\dots,m$

$$g_i^{(n_r)}(X;x,y)-y \qquad (r=1,2,\dots) \tag{51}$$

$$z_i^{(n_r)}(x,y)-\Phi_i(y) \qquad (r=1,2\dots) \tag{51'}$$

Se ω è un qualunque numero positivo (arbitrariamente grande), si può provare che le $2m$ successioni (51) e (51′) convergono uniformemente ([21]) in ogni campo definito dalle $o \leq x \leq a$, $o \leq X \leq a$, $-\omega \leq y \leq \omega$ e $o \leq x \leq a$, $-\omega \leq y \leq \omega$ rispettivamente.

Si indichino con $g_i(X;x,y)-y$; $z_i(x,y)-\Phi_i(y)$ $(i=1,2,\dots,m)$ le $2m$ funzioni limiti delle successioni (51) e (51′); le funzioni $z_i(x,y)$ $(i=1,2,\dots,m)$ sono dunque definite nel campo

$$D_\infty: \qquad o \leq x \leq a, \ -\infty < y < +\infty,$$

sono ivi continue nel complesso delle variabili, soddisfano le (46) e (50) (nelle quali si ponga $z_i(x,y)$ al posto di $z_i^{(n)}(x,y)$), e quindi sono di classe

---

([20]) Il teorema di GIULIO ASCOLI vale anche per funzioni di due o più variabili in campi finiti rettangolari a due o più dimensioni. Cfr. p. es. C. SEVERINI, *Sul problema di Cauchy*, Atti Acc. Gioenia di Scienze Naturali in Catania S. 5, Vol. X (1916), n. 3.

Del resto è semplice estendere a tali campi finiti la dimostrazione esposta da G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale.* Parte I (Bologna Zanichelli, 1941), Cap. I, § 6, n. 2 a), p. 38-39, nota ([1]).

Nel caso dei campi illimitati considerati nel testo, cioè $o \leq x \leq a$, $o \leq X \leq a$, $-\infty < y < +\infty$ per le m successioni (26), e $o \leq x \leq a$, $-\infty < y < +\infty$ per le m successioni (26′), riprendendo in modo opportuno la dimostrazione citata di G. SANSONE, si può provare che dalle $2m$ successioni (26) e (26′) si possono estrarre $2m$ successioni, che convergono in ogni punto a distanza finita dei campi stessi.

([21]) Ciò segue dall'estensione alle funzioni di due o più variabili della dimostrazione data da G. SANSONE (cfr. anche la precedente nota ([20])).

G in D_∞. Le funzioni $g_i(X; x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sono definite per (x, y) in D_∞ e per $o \leq X \leq a$, sono ivi continue nel complesso delle variabili, e soddisfano le (47), (48), (49) (nelle quali si ponga $g_i(X; x, y)$ al posto di $g_i^{(n)}(X; x, y)$); sono dunque, per ogni X fissato di (o, a), di classe G in D_∞, e, per ogni (x, y) fissato di D_∞, sono assolutamente continue in X in (o, a).

Si verifica poi facilmente che le $2m$ funzioni $g_i(X; x, y)$; $z_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ soddisfano le equazioni integrali (III) e (IV); quindi le $z_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ soddisfano le (II); inoltre le $g_i(X; x, y)$ soddisfano, fissato (x, y), per quasi tutti gli X di (o, a), la

$$\frac{d\, g_i(X; x, y)}{d X} = \varrho_i[X, g_i(X; x, y), z_j(X, g_i(X; x, y))]. \tag{52}$$

7. Per provare che le funzioni $z_1(x, y), z_2(x, y), \ldots, z_m(x, y)$ soddisfano il Teorema I, si deve ancora dimostrare che esse soddisfano il sistema (I) in quasi tutto D_∞.

Nel campo $o \leq X \leq a, -\infty < Y < +\infty$ si consideri la curva Γ: $Y = g_i(X; o, \eta)$, dove η è un qualunque numero reale, ed i è uno (fissato) tra i numeri $1, 2, \ldots, m$; per brevità si ponga

$$Y_i(X, \eta) = g_i(X; o, \eta). \tag{53}$$

In D_∞ si consideri la curva γ_η: $y = Y_i(x, \eta)$; comunque sia x in (o, a) per il teorema di unicità, relativo alla equazione differenziale (52), citato in ([14]) è

$$g_i(X; x, Y_i(x, \eta)) = Y_i(X, \eta). \tag{54}$$

Dalla (III) segue, tenuto conto delle (53) e (54),

$$Y_i(x, \eta) = \eta + \int_0^x \varrho_i[t, Y_i(t, \eta), z_j(t, Y_i(t, \eta))]\, d t. \tag{III'}$$

Fissato η, per quasi tutti gli x di (o, a) è

$$\frac{d\, Y_i(x, \eta)}{d x} = \varrho_i[x, Y_i(x, \eta), z_j(x, Y_i(x, \eta))]. \tag{55}$$

Nella (IV) si ponga $y = Y_i(x, \eta)$; si ottiene

$$z_i(x, Y_i(x, \eta)) = \Phi_i(\eta) + \int_0^x f_i[X, Y_i(X, \eta), z_j(X, Y_i(X, \eta))]\, d X, \tag{IV'}$$

dove si è tenuto conto che vale la (54), e quindi che, in particolare, è

$$g_i(o\,;x\,,\,Y_i(x\,,\eta))=Y_i(o\,,\eta)=\eta\,.$$

Dalla (IV′) segue, fissato η, per quasi tutti gli x di $(o\,,a)$

$$\frac{d\,z_i(x\,,\,Y_i(x\,,\eta))}{d\,x}=f_i[x\,,\,Y_i(x\,,\eta)\,,z_i(x\,,\,Y_i(x\,,\eta))]\,. \tag{56}$$

La (III′) è una equazione differenziale (scritta sotto forma integrale), per la quale vale il teorema di unicità, citato in [14]; al variare di η in $(-\infty\,,+\infty)$ le curve γ_η di equazione $y=Y_i(x\,,\eta)$ riempiono dunque una volta sola il campo D_∞ (nel senso che per ogni punto di D_∞ ne passa una e una sola). È così stabilita una corrispondenza biunivoca tra il campo D_∞ e il campo Δ_∞: $o\le x\le a\,;\ -\infty<\eta<+\infty$, nella quale ad un insieme di misura superficiale nulla dell'uno corrisponde un insieme di misura superficiale nulla dell'altro [21bis]. Nei punti di D_∞ le derivate $p_i(x\,,y)=\dfrac{\partial\,z_i(x.y)}{\partial\,x}$, $q_i(x\,,y)=\dfrac{\partial\,z_i(x\,,y)}{\partial\,y}$ esistono, tranne in un insieme di misura superficiale nulla, al quale corrisponde in Δ_∞ un insieme di misura superficiale nulla. Inoltre le (55) e (56) valgono nei punti di Δ_∞, tranne in un insieme di misura superficiale nulla. Ne segue che nei punti di Δ_∞, tranne in quelli che appartengono ad un insieme $\mathcal{E}_{0i}$ di misura superficiale nulla, la (56) si può scrivere nella forma [22]

$$\begin{aligned}&p_i(x\,,Y_i(x\,,\eta))+\\&+\varrho_i[x\,,Y_i(x\,,\eta)\,,z_j(x\,,Y_i(x\,,\eta))]\,q_i(x\,,Y_i(x\,,\eta))=f_i[x\,,Y_i(x\,,\eta)\,,z_j(x\,,Y_i(x\,,\eta))]\,.\end{aligned}$$

All'insieme $\mathcal{E}_{0i}$ di Δ_∞ corrisponde in D_∞ un insieme E_i di misura nulla; posto $y=Y_i(x\,,\eta)$, nei punti $x\,,y$ di D_∞, che non appartengono a E_i è

$$p_i(x\,,y)+\varrho_i(x\,,y\,,z_j(x\,,y))\,q_i(x\,,y)=f_i(x\,,y\,,z_j(x',y))\,,$$

cioè vale la i-esima delle (1). Facendo variare i da 1 a m, si trova che le equazioni del sistema (I) sono soddisfatte nei punti di D_∞, tranne in quelli che appartengono a un insieme E, di misura superficiale nulla.

(21bis) La corrispondenza tra i campi D_∞ e Δ_∞ è stabilita dalla $y=Y_i(x\,,\eta)$; ragionando come nella nota [16] e tenendo conto della (46) si trova che

$$e^{-I}\le\frac{Y(x\,,\eta_1)-Y(x\,,\eta_2)}{\eta_1-\eta_2}\le e^I\,,\ \text{con } I=(1+U(a))\int_0^a L(t)\,d\,t\,.$$

(22) Cfr. (A), § 2, n. 5, *e*), p. 145; cfr. pure nota [15bis].

Segue che, per quasi tutti i valori reali di y, è

$$(\mathrm{V}) \qquad z_i(x, y) = \Phi_i(y) + \int_0^x [-\varrho_i(X, y, z_j(X, y))\, q_i(X, y) + f_i(X, y, z_j(X, y))]\, dX \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Il TEOREMA I è dunque completamente dimostrato.

8. OSSERVAZIONE. Nella dimostrazione del TEOREMA I il campo D_∞ è determinato scegliendo a, in modo da soddisfare la (15). Se $a < a_0$, partendo dalla retta $x = a$, si scelga $a^{[1]}$ $(a < a^{[1]} \leq a_0)$ in modo che sia

$$(15_1) \qquad e^{(m-1)\int_0^{a^{[1]}} L(t)\, dt} < 1 + \frac{m-1}{U(a)+1} \qquad (m > 1).$$

Il TEOREMA I assicura l'esistenza nel campo $a \leq x \leq a^{[1]}$, $-\infty < y < +\infty$ di almeno un sistema di funzioni $\overline{z}_i(x, y)\, (i = 1, 2, \dots, m)$, che sono di classe G in esso, soddisfano in quasi tutto il campo il sistema (I) e inoltre, per ogni y, le $\overline{z}_i(a, y) = z_i(a, y)$.

Allora le funzioni $\overline{z}_i(x, y)\, (i = 1, 2, \dots, m)$ prolungano le funzioni $z_i(x, y)\, (i = 1, 2, \dots, m)$, di cui il TEOREMA I assicura l'esistenza, al di fuori di D_∞; basta porre per definizione

$$z_i(x, y) = \overline{z}_i(x, y)\, (i = 1, 2, \dots, m) \text{ per } a \leq x \leq a^{[1]}, -\infty < y < +\infty .$$

Se $a^{[1]} < a_0$, si può ripetere di nuovo il procedimento, assicurando l'esistenza dalle $z_i(x, y)$ per valori $x > a^{[1]}$, e così continuare.

§ 2.

Un complemento.

9. TEOREMA II. «*Siano soddisfatte tutte le ipotesi del* TEOREMA I, *e inoltre esistano per ogni x fissato di (o, a_0) e per ogni $(m+1)$-pla reale $(y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ le derivate $\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}$, $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}$, $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}$ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$, le quali, per ogni x fissato di (o, a_0), siano continue in $y, z_1, z_2, \dots, z_m$, e per ogni $(m+1)$-pla*

reale fissata $(y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$*, siano quasi-continue in* x*. Come conseguenza delle* (2) *è*

$$(57)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial \varrho_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)}{\partial y}\right| \leq L(x); \quad \left|\dfrac{\partial \varrho_i(\ldots)}{\partial z_j}\right| \leq L(x) \\ \left|\dfrac{\partial f_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)}{\partial y}\right| \leq L(x); \quad \left|\dfrac{\partial f_i(\ldots)}{\partial z_j}\right| \leq L(x) \\ (i, j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

per quasi tutti gli x *di* (o, a_0)*, e per ogni* $(m+1)$*-pla reale* $(y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$*; inoltre esista una funzione* $\Lambda(x)$*, definita in* (o, a_0)*, ivi positiva o nulla, quasi-continua e integrabile in* (o, a_0)*, tale che valgano le*

$$(58_1)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial \varrho_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)}{\partial y} - \dfrac{\partial \varrho_i(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m)}{\partial y}\right| \leq \\ \qquad \leq \Lambda(x)\left\{|y-\bar{y}| + \sum_{s=1}^{m}|z_s - \bar{z}_s|\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \left|\dfrac{\partial \varrho_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)}{\partial z_j} - \dfrac{\partial \varrho_i(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m)}{\partial z_j}\right| \leq \\ \qquad \leq \Lambda(x)\left\{|y-\bar{y}| + \sum_{s=1}^{m}|z_s - \bar{z}_s|\right\}. \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

$$(58_2)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial f_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)}{\partial y} - \dfrac{\partial f_i(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m)}{\partial y}\right| \leq \\ \qquad \leq \Lambda(x)\left\{|y-\bar{y}| + \sum_{s=1}^{m}|z_s - \bar{z}_s|\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \left|\dfrac{\partial f_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)}{\partial z_j} - \dfrac{\partial f_i(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m)}{\partial z_j}\right| \leq \\ \qquad \leq \Lambda(x)\left\{|y-\bar{y}| + \sum_{s=1}^{m}|z_s - \bar{z}_s|\right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

per quasi tutti gli x *di* (o, a_0) *e per tutte le* $(m+1)$*-ple reali* $(y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$, $(\bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_m)$. *Le funzioni* $\Phi_i(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *ammettano derivata continua per ogni* y *reale, la quale (per la* (3)*) soddisfa la*

$$(59)\qquad \Phi_i'(y) \leq h \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ -\infty < y < +\infty);$$

esista una costante k, tale che per tutti gli y_1, y_2, reali sia

$$(60) \qquad | \Phi_i'(y_1) - \Phi_i'(y_2) | \leq k \, | y_1 - y_2 | \; (i = 1, 2, \dots m).$$

Allora le funzioni $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$, di cui il TEOREMA I ***assicura l'esistenza, ammettono derivate parziali $\frac{\partial z_1(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial z_2(x,y)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial z_m(x,y)}{\partial y}$ in ogni punto di D_∞, le quali sono di classe G in D_∞. Inoltre per ogni y_0 reale fissato $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$ soddisfano il sistema*** (I) ***in quasi tutti i punti del segmento $o \leq x \leq a$, $y = y_0$*** (23)***, e le (V) sono soddisfatte in ogni punto di D_∞*** ».

10. Una volta dimostrata l'esistenza e la continuità delle derivate $\frac{\partial z_i(x, y)}{\partial y}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ in tutto D_∞, la dimostrazione dell'ultima parte del TEOREMA II è immediata, poichè ***se le derivate $\frac{\partial z_i(x, y)}{\partial y}$*** $(i = 1, 2, \dots, m)$ ***esistono continue in D_∞, il primo e il secondo membro di ognuna delle*** (V) ***sono funzioni continue in D_∞, e le*** (V) ***valgono in tutto D_∞;*** quindi ***per ogni y_0 reale fissato le*** (I) ***valgono in quasi tutti i punti del segmento $o \leq x \leq a$, $y = y_0$.***

11. Per provare la prima parte del TEOREMA II, si considerino nuovamente le $2m$ successioni (per $i = 1, 2, \dots, m$) $g_i^{(n)}(X; x, y)$ $(n = 2, 3, \dots)$, $z_i^{(n)}(x, y)$ $(n = 2, 3, \dots)$, introdotte al n. 3, e definite dalle (16), (17). Si supponga che le derivate $\frac{\partial g_i^{(n)}(X; x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial z_i^{(n)}(x, y)}{\partial y}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ esistano continue per x, X nell'intervallo $(o, r\delta)$ $\left(1 \leq r \leq n - 1; \delta = \frac{a}{n}\right)$ e per $-\infty < y < +\infty$, e siano lipschitziane in y per x, X fissati in tale intervallo, con costante di LIPSCHITZ indipendente da x e X; si prova subito che tali derivate esistono continue anche per x, X in $(o, (r+1)\delta)$, e per $-\infty < y < +\infty$, e sono lipschitziane in y (per x, X fissati) con costante indipendente da x, X. Infatti per x, X in $(o, (r+1)\delta)$ e per ogni y la $g_i^{(n)}(X; x, y)$ (dove i è uno qualunque dei numeri $1, 2, \dots, m$) è soluzione

---

(23) Quindi *l'insieme E di misura superficiale nulla,* in cui il sistema (I) *non è soddisfatto, è tagliato* da ogni retta $y = y_0$ *in un insieme di misura lineare nulla* (Cfr. anche introduzione e nota (7)).

dell'equazione differenziale (16); per ogni X fissato, esiste la derivata

$$\frac{d\varrho_i(X,\,Y,\,z_j^{(n)}(X-\delta,\,Y))}{dY}=\frac{\partial\varrho_i(\ldots)}{\partial Y}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varrho_i(\ldots)}{\partial z_j}\,\frac{\partial z_j^{(n)}(X-\delta,\,Y)}{\partial Y}\,, \tag{61}$$

la quale, per ogni X di $(o\,,(r+1)\,\delta)$ è continua in Y. Allora, tenuto conto delle (46), (57), (58_1) e delle ipotesi fatte sulle derivate $\dfrac{\partial z_j^{(n)}(x\,,y)}{\partial y}$ per x nell'intervallo $(o\,,r\,\delta)$, y qualunque, da un teorema di CARATHÉODORY [24] segue l'esistenza della derivata $\dfrac{\partial g_i^{(n)}(X;\,x\,,y)}{\partial y}$ per $(x\,,X)$ in $(o\,,(r+1)\,\delta)$, y comunque; indicando per brevità tale derivata con $G_i^{(n)}(X;\,x\,,y)$, e con $R_i^{(n)}(X\,,\,Y)$ il secondo membro della (61), $G_i^{(n)}(X;\,x\,,y)$, fissato $(x\,,y)$ $(o\le x\le(r+1)\,\delta,\,-\infty<y<+\infty)$ soddisfa per quasi tutti gli X di $(o\,,(r+1)\,\delta)$ la

$$\frac{dG_i^{(n)}(X;\,x\,,y)}{dX}=R_i^{(n)}(X\,,\,g_i^{(n)}(X;\,x\,,y))\;G_i^{(n)}(X;\,x\,,y), \tag{62}$$

dalla quale

$$G_i^{(n)}(X;\,x\,,y)=e^{-\int_X^x R_i^{(n)}(t\,,\,g_i^{(n)}(t\,;\,x\,,\,y))\,dt} \tag{63}$$

per tutti gli $X\,,x$ di $(o\,,(r+1)\,\delta)$ e per ogni y reale; si può verificare che la $G_i^{(n)}(X;\,x\,,y)$ è lipschitziana in y (con costante indipendente da $x\,,X$). Da questa e dalla (17) segue l'esistenza di $\dfrac{\partial z_i^{(n)}(x\,,y)}{\partial y}$ per x in $(o\,,(r+1)\,\delta)$ e per ogni y reale; precisamente [25]

$$\frac{\partial z_i^{(n)}(x\,,y)}{\partial y}=\Phi_i'(g_i^{(n)}(o\,;\,x\,,y))\;G_i^{(n)}(o\,;\,x\,,y)+ \tag{64}$$

$$+\int_0^x F_i^{(n)}(X,\,g_i^{(n)}(X;\,x\,,y))\,G_i^{(n)}(X\,;\,x\,,y)\,dX\,,$$

---

[24] C. CARATHÉODORY, l. c. in [2], n. 589-591, Satz 7, p. 682-687.

[25] Circa la derivabilità sotto il segno di integrale, cfr. (A), p. 140, nota [17]. Dal teorema la dimostrato segue che, per ogni x, la (64) vale per quasi tutti gli y; se si in-

avendo posto

$$F_i^{(n)}(X, Y) = \frac{\partial f_i(X, Y, z_j^{(n)}(X-\delta, Y))}{\partial Y} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(\ldots)}{\partial z_j} \frac{\partial z_j^{(n)}(X-\delta, Y)}{\partial Y}.$$

Le (63), (64) assicurano la continuità in y di $\dfrac{\partial g_i^{(n)}(X; x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z_i^{(n)}(x, y)}{\partial y}$ per X, x fissati in $(o, (r+1)\delta)$ e per ogni y reale (basta tenere conto delle (57), (58), (59), (60) e del fatto che $g_i^{(n)}(X; x, y)$, $z_i^{(n)}(x, y)$ sono funzioni continue); si può verificare che esse sono inoltre lipschitziane in y (per x, X fissati) con costanti indipendenti da x, X.

Per ricorrenza, poichè per $o \leq X \leq \delta$ si pone $z_i^{(n)}(X-\delta, Y) = \Phi_i(y)$ si prova che le derivate $\dfrac{\partial g_i^{(n)}(X; x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z_i^{(n)}(x, y)}{\partial y}$ esistono e sono continue per (x, y) in D_∞ e $o \leq X \leq a$, e sono lipschitziane in y, per x, X fissati in (o, a), con costanti di LIPSCHITZ indipendenti da x, X.

12. Dalle (46) e (47) segue che (25 bis)

$$(65_1) \quad \frac{\partial g_i^{(n)}(X; x, y)}{\partial y} \leq V(a); \qquad (65_2) \quad \left| \frac{\partial z_i^{(n)}(x, y)}{\partial y} \right| \leq \frac{U(a)}{m},$$

così che le successioni

$$(66_1) \quad \frac{\partial g_i^{(n)}(X; x, y)}{\partial y} \quad (n=2,3,\ldots) \qquad (66_2) \quad \frac{\partial z_i^{(n)}(x, y)}{\partial y} \quad (n=2,3,\ldots)$$

sono equilimitate per $o \leq X \leq a$ e (x, y) in D_∞.

---

dica con $Z_i^{(n)}(x, y)$ il secondo membro della (64), si verifica subito che $Z_i^{(n)}(x, y)$ è continua in x, y. Poichè dunque, fissato x in $(o, (r+1)\delta)$ è $\dfrac{\partial z_i^{(n)}(x, y)}{\partial y} = Z_i^{(n)}(x, y)$ per quasi tutti gli y, ne segue

$$z_i^{(n)}(x, y) = z_i^{(n)}(x, o) + \int_0^y Z_i^{(n)}(x, \eta)\, d\eta$$

in tutto il campo $o \leq x \leq (r+1)\delta$, $-\infty < y < +\infty$, e quindi, per la continuità di $Z_i^{(n)}(x, y)$, è $\dfrac{\partial z_i^{(n)}(x, y)}{\partial y} = Z_i^{(n)}(x, y)$ in tutti i punti di tale campo.

Cfr. anche M. VOLPATO, *Sulla derivazione sotto il segno di integrale*, Rendic. Acc. Lincei, s. 8, vol. XII (1952), p. 146-150.

(25 bis) Per la (63) è $\dfrac{\partial g_i^{(n)}(X; x, y)}{\partial y} > o$ per $o \leq X \leq a$ e (x, y) in D_∞.

Per provare che le successioni (66_1) e (66_2) sono equilipschitziane in y, osserviamo anzi tutto che dalle (46), (47), (57), (58_1), (62), (65) segue

$$(67)\quad \left|\frac{d}{dX}\left|\frac{G_i^{(n)}(X;x,y_1)-G_i^{(n)}(X;x,y_2)}{y_1-y_2}\right|\right| \leq (1+U(a))^2 V^2(a)\,A(X)+$$

$$+V^2(a)\,L(X)\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{Z_j^{(n)}(X-\delta,\,Y_{i1}(X))-Z_j^{(n)}(X-\delta,\,Y_{i2}(X))}{Y_{i1}(X)-Y_{i2}(X)}\right|+$$

$$+(1+U(a))\,L(X)\left|\frac{G_i^{(n)}(X;x,y_1)-G_i^{(n)}(X;x,y_2)}{y_1-y_2}\right|,$$

dove si è posto, per brevità

$$Z_i^{(n)}(x,y)=\frac{\partial z_i^{(n)}(x,y)}{\partial y}$$

e le $Y_{i1}(X)$, $Y_{i2}(X)$ sono definite dalle prime delle (28) del n. 4. Dalla (67) segue [26], tenuto conto che $\dfrac{G_i^{(n)}(x;x,y_1)-G_i^{(n)}(x;x,y_2)}{y_1-y_2}=0$

$$(68)\quad \left|\frac{G_i^{(n)}(X;x,y_1)-G_i^{(n)}(X;x,y_2)}{y_1-y_2}\right|\leq V^2(a)\left|\int_X^x\Big\{(1+U(a))^2 A(t)+\right.$$

$$\left.+L(t)\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{Z_j^{(n)}(t-\delta,\,Y_{i1}(t))-Z_j^{(n)}(t-\delta,\,Y_{i2}(t))}{Y_{i1}(t)-Y_{i2}(t)}\right|\Big\}\,e^{(1+U(a))\left|\int_X^t L(\xi)\,d\xi\right|}\,dt\right|,$$

per tutti gli x, X di (o, a) e gli y_1, y_2 reali.

Dalla (64), tenuto conto delle (46), (47), (57)-(60), (65) e (68), si ottiene, con qualche calcolo, la disuguaglianza

$$\left|\frac{Z_i^{(n)}(x,y_1)-Z_i^{(n)}(x,y_2)}{y_1-y_2}\right|\leq V^2(a)\Big[k+A_1+$$

$$+A_2\int_0^x L(X)\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{Z_j^{(n)}(X-\delta,\,Y_{i1}(X))-Z_j^{(n)}(X-\delta,\,Y_{i2}(X))}{Y_{i1}(X)-Y_{i2}(X)}\right|dX\Big],$$

dove A_1 e A_2 sono costanti, di cui sarebbe facile scrivere l'espressione esplicita, che omettiamo per brevità.

---

[26] Cfr. (A), nota (13), p. 125, (b).

Sia $W(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$W(x) = m\,V^2(a)\left[k + A_1 + A_2 \int_0^x L(X)\,W(X)\,dX\right],$$

cioè

$$W(x) = m\,V^2(a)\,(k + A_1)\,e^{m V^2(a) A_2 \int_0^x L(X) dX}.$$

$W(x)$ è positiva e crescente in $(0, a)$.

Con considerazioni simili a quelle svolte nel § 1, n. 4, si trova che in tutto $(0, a)$ è

$$\left|\frac{Z_i^{(n)}(x, y_1) - Z_i^{(n)}(x, y_2)}{y_1 - y_2}\right| \leq \frac{W(x)}{m} \leq \frac{W(a)}{m}, \tag{69}$$

comunque siano x in $(0, a)$ e y_1, y_2 reali.

Dalla (68) segue che, comunque siano X, x in (o, a) e y_1, y_2 reali, è

$$\left|\frac{G_i^{(n)}(X; x, y_1) - G_i^{(n)}(X; x, y_2)}{y_1 - y_2}\right| \leq A_3, \tag{70}$$

dove A_3 è una costante, di cui sarebbe facile scrivere l'espressione esplicita. Le $2m$ successioni (66_1) e (66_2) sono dunque equilipschitziane in y.

Ragionando come al § 1, nn. 5 e 6, si prova che le funzioni delle m successioni (66_1) sono equiassolutamente continue sia in X che in x nell'intervallo $(0, a)$ per ogni y fissato, che le funzioni delle m successioni (66_2) sono equiassolutamente continue in x nell'intervallo $(0, a)$ per ogni y fissato, e infine che tutte le funzioni di tali successioni (66_1) e (66_2) sono equicontinue nel complesso delle variabili.

In modo ben noto, si prova che le $2m$ funzioni $g_i(X; x, y)$, $z_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, delle quali si è dimostrata l'esistenza nel § 1, n. 6, ammettono derivate parziali $\dfrac{\partial g_i(X_i; x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z_i(x, y)}{\partial y}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, definite rispettivamente per $0 \leq X \leq a$, $0 \leq x \leq a$, $-\infty < y < +\infty$, e per $0 \leq x \leq a$ $-\infty < y < +\infty$, e ivi continue. Le derivate $\dfrac{\partial g_i(X_i; x, y)}{\partial y}$, per X e x fissati in $(0, a)$ sono lipschitziane in y (con costante A_3, indipendente da X e x) e per $X(x)$ fissato in $(0, a)$ e y reale fissato, sono assolutamente continue in x (X) in

$(0, a)$; le derivate $\dfrac{\partial z_i(x, y)}{\partial y}$ per ogni x fissato in $(0, a)$ sono lipschitziane in y (con costante $\dfrac{W(a)}{m}$, indipendente da x) e per ogni y reale fissato sono assolutamente continue in x in $(0, a)$, e quindi sono di classe G in D_∞.

Il TEOREMA II è dunque pienamente dimostrato.

13. OSSERVAZIONI: *a*) Come si è accennato nell'introduzione, *se valgono tutte le ipotesi del* TEOREMA II, *e se* inoltre *le funzioni* $\varrho_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$, $f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ *sono continue nel complesso delle variabili*, tenuto conto che, nelle attuali ipotesi, le funzioni $\varrho_i(x, y, z_1(x, y), \dots, z_m(x, y))$, $f_i(x, y, z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y))$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, considerate come funzioni composte di x, sono continue in x, e che le $q_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ sono pure continue in x, dalle (V) segue che *le derivate parziali* $p_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ *esistono e sono continue in ogni punto di* D_∞, *e che le* $z_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ *soddisfano il sistema* (I) *in tutto* D_∞, *e*, naturalmente, *le condizioni* (II).

Poichè le equazioni del sistema (I) sono soddisfatte in ogni punto di D_∞, si ha così per il sistema (I) un teorema di esistenza (anche nell'indirizzo classico) valido sotto ipotesi molto generali (non occorre che le derivate $\dfrac{\partial \varrho_i}{\partial y}, \dfrac{\partial \varrho_i}{\partial z_j}, \dfrac{\partial f_i}{\partial y}, \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}$ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ siano continue rispetto a x, nè che siano lipschitziane rispetto a $y, z_1, z_2, \dots, z_m$; sono sufficienti le condizioni, più ampie, (57) e 58)).

b) Se $a < a_0$, e se si prolungano le funzioni $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$ per valori $x > a$ (cfr. § 1, n. 8), le ipotesi del TEOREMA II assicurano che in tutto il campo, in cui vengono costruite le $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$, esse ammettono derivate $\dfrac{\partial z_1(x, y)}{\partial y}, \dfrac{\partial z_2(x, y)}{\partial y}, \dots, \dfrac{\partial z_m(x, y)}{\partial y}$, che sono di classe G in tale campo, così che le (V) valgono in ogni punto del campo di esistenza delle $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$.

§ 3.

Alcune estensioni.

A).

14. TEOREMA III. « *Le funzioni* $\varrho_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ *soddisfino le ipotesi del* TEOREMA I; *sia* r *un numero intiero fissato* $(o \leq r \leq m - 1)$.

Siano $A_{ij}(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = r+1, \dots, m)$, $B_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ *funzioni definite per ogni* x *di un intervallo* (o, a_0) *e ogni* $(m+1)$*-pla reale* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m)$, *le quali, per ogni* x *fissato di* (o, a_0), *siano continue in* $y, z_1, z_2, \dots, z_m$, *e per ogni* $(m+1)$*-pla reale fissata* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ *siano quasi-continue in* x *in* (o, a_0); *esistano inoltre quattro funzioni definite in* (o, a_0), $\mu(x)$, $\mu_1(x)$, $\lambda(x)$, $\lambda_1(x)$, *ivi positive o nulle, quasi-continue e integrabili, tali che sia*

$$(71)\quad \begin{cases} |A_{ij}(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)| \leq \mu(x) & (i = 1, 2, \dots, m; j = r+1, \dots, m) \\ |B_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)| \leq \mu_1(x) & (i = 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

per quasi tutti gli x *di* (o, a_0) *e per tutte le* $(m+1)$*-ple reali* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ *e*

$$(72)\quad \begin{cases} |A_{ij}(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m) - A_{ij}(x,\bar{y},\bar{z}_1,\bar{z}_2,\dots,\bar{z}_m)| \leq \lambda(x)\left\{|y-\bar{y}| + \sum_{s=1}^{m}|z_s - \bar{z}_s|\right\} \\ \qquad (i = 1, 2, \dots, m; j = r+1, \dots, m) \\ |B_i(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m) - B_i(x,\bar{y},\bar{z}_1,\bar{z}_2,\dots,\bar{z}_m)| \leq \lambda_1(x)\left\{|y-\bar{y}| + \sum_{s=1}^{m}|z_s - \bar{z}_s|\right\}, \\ \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

per quasi tutti gli x *di* (o, a_0) *e per tutte le coppie di* $(m+1)$*-ple reali* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ *e* $(\bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m)$.

Le funzioni $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(y)$, ..., $\Phi_m(y)$ *soddisfino le ipotesi del* TEOREMA I; *inoltre esista una costante* K, *tale che per ogni* y *reale sia*

$$(73)\qquad |\Phi_i(y)| \leq K \qquad (i = r+1, \dots, m).$$

Allora si può determinare un numero positivo $a_1 \leq a_0$, *ed esiste almeno un sistema di funzioni* $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$, *che sono definite nel campo*

$$D_\infty^{[1]}: \qquad o \leq x \leq a_1, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

sono ivi di classe G, *soddisfano le*

$$(\mathrm{II})\qquad z_i(o, y) = \Phi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

per ogni y *reale, e inoltre in quasi tutto* $D_\infty^{[1]}$ *soddisfano il sistema*

$$(\mathrm{VI})\qquad p_i(x, y) + \varrho_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)\, q_i(x, y) = $$
$$= \sum_{j=r+1}^{m} A_{ij}(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)\, z_j + B_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$$
$$(i = 1, 2, \dots, m) \text{»}.$$

15. In (o, a_0) sia $T(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$T(x) = (m-r)K + (m-r)\int_0^x [\mu(X)\,T(X) + \mu_1(X)]\,dX,$$

cioè

$$T(x) = (m-r)\left[K\,e^{(m-r)\int_0^x \mu(X)\,dX} + \int_0^x \mu_1(X)\,e^{(m-r)\int_X^x \mu(t)\,dt}\,dX\right].$$

$T(x)$ è positiva e crescente in (o, a_0).

Si scelga a_1 in modo che sia

(74) $$e^{(m-1)\int_0^{a_1} L^{[1]}(t)\,dt} < 1 + \frac{m-1}{mh+1} \qquad (m > 1)$$

dove

(74') $$L^{[1]}(x) = \lambda(x)\,T(a_0) + \mu(x) + \lambda_1(x) + L(x).$$

Giustificheremo tra poco la scelta di a_1 mediante la (74) ([27]).

Posto $\delta_1 = \frac{a_1}{n}$ si introducano, come nel § 1 n. 3, le $2m$ successioni (per $i = 1, 2, \dots, m$), $g_i^{(n)}(X; x, y)$ $(n = 2, 3, \dots)$, definite dalle (16), nelle quali si ponga δ_1 al posto di δ, e $z_i^{(n)}(x, y)$ $(n = 2, 3, \dots)$, definite dalle

$$z_i^{(n)}(x, y) = \Phi_i(g_i^{(n)}(o; x; y)) +$$
$$+ \int_0^x \left\{\sum_{j=1}^m A_{ij}[X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_s^{(n)}(X-\delta_1, g_i^{(n)}(X; x, y))]\, z_j^{(n)}(X-\delta_1, g_i^{(n)}(X; x, y)) + B_i[\dots]\right\} dX.$$

Sia $i = r+1, \dots, m$; allora

$$|z_i^{(n)}(x, y)| \le K + \int_0^x \left\{\mu(X) \sum_{j=r+1}^m |z_j^{(n)}(X-\delta_1, g_i^{(n)}(X; x, y))| + \mu_1(X)\right\} dX$$
$$(i = r+1, \dots, m).$$

([27]) La (74) si ottiene dalla (15) del § 1, sostituendo $L^{[1]}(x)$ a $L(x)$.

Ragionando in modo simile a quello tenuto nel § 1, n. 4, si trova che per x in (o, a_1) e per ogni y è

$$(75) \qquad |z_i(x, y)| \leq \frac{T(x)}{m-r} \leq \frac{T(a_0)}{m-r} \qquad (i = r+1, \dots, m).$$

Si sostituisca al sistema (VI) il sistema

$$(76) \qquad p_i + \varrho_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m) q_i = F_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m), \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

dove le $F_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ sono definite come segue

$$(77) \qquad F_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m) = \sum_{j=r+1}^{m} A_{ij}(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m) z_j + B_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$$

per x in (o, a_0), $y, z_1, z_2, \dots, z_r$ reali qualsiasi, e

$$|z_{r+1}| \leq \frac{T(a_0)}{m-r}, \quad |z_{r+2}| \leq \frac{T(a_0)}{m-r}, \dots, |z_m| \leq \frac{T(a_0)}{m-r};$$

se invece una (o più) delle z_j $(j = r+1, \dots, m)$ soddisfa la $z_j > \frac{T(a_0)}{m-r}$ oppure la $z_j < -\frac{T(a_0)}{m-r}$, l'espressione di $F_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ è quella, che si ottiene, sostituendo nel secondo membro della (77) al posto di quella (oppure di quelle) z_j il valore $\frac{T(a_0)}{m-r}$ o $-\frac{T(a_0)}{m-r}$ rispettivamente.

Si verifica facilmente che per il sistema (76) sono soddisfatte tutte le ipotesi del TEOREMA I, quando si ponga

$$N_i(x) = \mu(x) T(a_0) + \mu_1(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

e alla $L(x)$ si sostituisca la $L^{[1]}(x)$, definita dalla (74'). Ne riesce giustificata la (74).

16. OSSERVAZIONE. — Come il TEOREMA I ha un complemento nel TEOREMA II, così si potrebbe portare un complemento analogo al TEOREMA III, facendo ipotesi convenienti sulle funzioni $A_{ij}(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$, $B_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m)$.

B)

17. Il TEOREMA III permette di dimostrare un teorema di esistenza anche per sistemi della forma

$$\text{(VII)} \qquad p_i = f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i) \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Precisamente

TEOREMA IV. « *Le funzioni* $f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i)$ *e le derivate* $\frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z_j}, \frac{\partial f_i}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m)$ *siano definite per ogni* x *dell'intervallo* (o, a_0) *e per ogni* $(m+2)$*-pla reale* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i)$, *per ogni* x *fissato di* (o, a_0) *siano continue nel complesso delle variabili* $y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i$, *e per ogni* $(m+2)$*-pla reale fissata* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i)$ *siano quasi-continue in* x *in* (o, a_0). *Esistano tre funzioni* $\nu(x)$, $L_0(x)$, $\Lambda_0(x)$, *definite in* (o, a_0), *ivi positive o nulle, e integrabili, per le quali valgano le*

$$(78) \qquad |f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i)| \le \nu(x) \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

$$(79) \quad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i)}{\partial y}\right| \le L_0(x); \quad \left|\dfrac{\partial f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i)}{\partial z_j}\right| \le L_0(x) \\ \left|\dfrac{\partial f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i)}{\partial q_i}\right| \le L_0(x) \\ (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

per quasi tutti gli x *di* (o, a_0), *e per tutte le* $(m+2)$*-ple reali* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i)$, *e*

$$(80) \qquad |f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i) - f_i(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m, \bar{q}_i)| \le$$

$$\le L_0(x)\left\{|y - \bar{y}| + \sum_{s=1}^{m} |z_s - \bar{z}_s| + |q_i - \bar{q}_i|\right\}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

$$
(81)\left\{\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial f_i(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m,q_i)}{\partial y}-\frac{\partial f_i(x,\bar y,\bar z_1,\bar z_2,\dots,\bar z_m,\bar q_i)}{\partial y}\right|\le\\
&\qquad\le A_0(x)\left\{|y-\bar y|+\sum_{s=1}^{m}|z_s-\bar z_s|+|q_i-\bar q_i|\right\}\\
&\left|\frac{\partial f_i(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m,q_i)}{\partial z_j}-\frac{\partial f_i(x,\bar y,\bar z_1,\bar z_2,\dots,\bar z_m,\bar q_i)}{\partial z_j}\right|\le\\
&\qquad\le A_0(x)\left\{|y-\bar y|+\sum_{s=1}^{m}|z_s-\bar z_s|+|q_i-\bar q_i|\right\}\\
&\left|\frac{\partial f_i(x,y,z_1,z_2,\dots,z_m,q_i)}{\partial q_i}-\frac{\partial f_i(x,\bar y,\bar z_1,\bar z_2,\dots,\bar z_m,\bar q_i)}{\partial q_i}\right|\le\\
&\qquad\le A_0(x)\left\{|y-\bar y|+\sum_{s=1}^{m}|z_s-\bar z_s|+|q_i-\bar q_i|\right\}\\
&\qquad\qquad(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,m),
\end{aligned}\right.
$$

per quasi tutti gli x *di* (o, a_0) *e per tutte le coppie di* $(m+2)$*-ple reali* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m, q_i)$, $(\bar y, \bar z_1, \bar z_2, \dots, \bar z_m, \bar q_i)$.

Le funzioni $\Phi_i(y)$ $(i=1,2,\dots,m)$ *siano definite per ogni* y *reale e continue colle loro derivate prime ; esistano due costanti* h *e* k *tali che*

$$(82)\qquad |\Phi_i'(y)|\le h \qquad (i=1,2,\dots,m),$$

per tutti gli y *reali e*

$$(83)\qquad |\Phi_i'(y_1)-\Phi_i'(y_2)|\le k\,|y_1-y_2| \qquad (i=1,2,\dots,m),$$

per tutti gli y_1, y_2 *reali.*

Allora si può determinare un numero positivo $a_2\le a_0$, *ed esiste almeno un sistema di funzioni* $z_1(x,y), z_2(x,y), \dots, z_m(x,y)$, *definite nel campo*

$$D_\infty^{[2]}:\qquad o\le x\le a_2,\ -\infty<y<+\infty,$$

le quali sono di classe G *in* $D_\infty^{[2]}$, *ammettono in* $D_\infty^{[2]}$ *le derivate parziali* $\frac{\partial z_1(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial z_2(x,y)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial z_m(x,y)}{\partial y}$, *limitate e di classe* G *in* $D_\infty^{[2]}$, *e soddisfano in tutto* $D_\infty^{[2]}$ *le*

$$(\mathrm{VIII})\qquad z_i(x,y)=\Phi_i(y)+\int_0^x f_i(X,y,z_1(X,y),z_2(X,y),\dots,z_m(X,y),q_i(X,y))\,dX,$$
$$(i=1,2,\dots,m)$$

così che, per ogni y fissato, le $z_1(x,y), z_2(x,y), \dots, z_m(x,y)$ soddisfano il sistema (VII) *per quasi tutti gli x di (o, a_2) e, per ogni y, soddisfano le* (II) ».

18. Si consideri il sistema costituito dalle

$$(84_1) \qquad \frac{\partial z_i}{\partial x} = f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+i}) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(84_2) \qquad \frac{\partial z_{m+i}}{\partial x} - \frac{\partial f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+i})}{\partial z_{m+i}} \frac{\partial z_{m+i}}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial f_i(\dots)}{\partial y} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(\dots)}{\partial z_j} z_{m+j} \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

nelle $2m$ funzioni incognite $z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+1}, z_{m+2}, \dots, z_{2m}$, colle condizioni iniziali

$$(85_1) \qquad z_i(o, y) = \Phi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$(85_2) \qquad z_{m+i}(o, y) = \Phi_i'(y) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Il sistema costituito dalle (84_1), (84_2) è del tipo del sistema (VI), con $2m$ anzichè m funzioni incognite,

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \dots = \varrho_m = 0, \; \varrho_{m+i} = - \frac{\partial f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+i})}{\partial z_{m+i}}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

$$A_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, 2m);$$

$$A_{m+i,j} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m);$$

$$A_{m+i,j} = \frac{\partial f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+i})}{\partial z_j} \; (i = 1, 2, \dots, m; j = m+1, m+2, \dots, 2m)$$

$$B_i = f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+i}) \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$B_{m+i} = \frac{\partial f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+i})}{\partial y} \qquad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Si verifica subito che sono soddisfatte tutte le ipotesi del TEOREMA III; si può dunque determinare un numero a_2, ed esiste almeno un sistema di funzioni $z_1(x, y)$ $z_2(x, y), \dots, z_m(x, y), z_{m+1}(x, y), z_{m+2}(x, y), \dots, z_{2m}(x, y)$, che soddisfano le (84_1), (84_2) in quasi tutto $D_\infty^{[2]}$, e le (85_1), (85_2) per ogni y. Dalle (84_1), (85_1) segue che, per quasi tutti gli y reali, è

$$(86)\qquad z_i(x,y) = \Phi_i(y) + \int_0^x f_i(X, y, z_1(X,y), \dots, z_m(X,y), z_{m+i}(X,y))\, dX$$

$$(i = 1, 2, \dots, m\,;\ 0 \leq x \leq a_2),$$

e, poichè primo e secondo membro della (86) sono continui in x, y, la (86) vale in tutto $D_\infty^{[2]}$. Le derivate $\dfrac{\partial z_i(x,y)}{\partial y}$ $(i = 1, 2, \dots, 2m)$ esistono in quasi tutti i punti di ogni segmento $0 \leq x \leq a_2$, $y = \text{cost.}$, se y non appartiene a un certo insieme $\mathfrak{J}_1$ di misura lineare nulla, e inoltre sono limitate in $D_\infty^{[2]}$. Per y non appartenente a $\mathfrak{J}_1$ sono dunque definite le funzioni

$$(87)\qquad u_i(x,y) = \Phi_i'(y) + \int_0^x \left[\frac{\partial f_i(X, y, z_1(X,y), \dots, z_m(X,y), z_{m+i}(X,y))}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i(\dots)}{\partial z_j} \frac{\partial z_j(X,y)}{\partial y} + \frac{\partial f_i(\dots)}{\partial z_{m+i}} \frac{\partial z_{m+i}(X,y)}{\partial y}\right] dX,$$

le quali, per y fissato, non appartenente a $\mathfrak{J}_1$, sono assolutamente continue in x in $(0, a_2)$; per un tale y, è dunque, per quasi tutti gli x di $(0, a_2)$

$$(88)\qquad \frac{\partial u_i(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f_i(x, y, z_1(x,y), z_2(x,y), \dots, z_m(x,y), z_{m+i}(x,y))}{\partial y} +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i(\dots)}{\partial z_j} \frac{\partial z_j(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f_i(\dots)}{\partial z_{m+i}} \frac{\partial z_{m+i}(x,y)}{\partial y},$$

le quali valgono in $D_\infty^{[2]}$, tranne nei punti di un insieme di misura superficiale nulla. Inoltre, tranne nei punti di un insieme di misura superficiale nulla, è in $D_\infty^{[2]}$ ([28])

$$(89)\qquad u_i(x,y) = \frac{\partial z_i(x,y)}{\partial y} \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Anche le (84_2) valgono nei punti di $D_\infty^{[2]}$ tranne nei punti di un insieme di misura superficiale nulla; dalle (84_2), (88), (89) segue che nei punti

---

([28]) Circa la derivazione sotto il segno di integrale cfr. (A), p. 140, nota ([17]). Cfr. pure la precedente nota ([25]).

di $D_\infty^{[2]}$, che non appartengono a un insieme di misura superficiale nulla è

$$(90) \qquad \frac{\partial\,(u_i(x\,,y) - z_{m+i}(x\,,y))}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(\ldots)}{\partial z_j}(u_j(x\,,y) - z_{m+j}(x\,,y))\,,$$

$$(i = 1\,,2\,,\ldots\,,m)$$

da cui per le (79)

$$(90') \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{m} |\,u_i(x\,,y) - z_{m+i}(x\,,y)\,|\right| \leq m\,L_0(x)\sum_{i=1}^{m} |\,u_i(x\,,y) - z_{m+i}(x\,,y)\,|\,.$$

Le (90′) valgono per quasi tutti gli x di ogni segmento $0 \leq x \leq$ $\leq a_2\,, y = \text{cost.}$, quando *y non appartiene ad un insieme* $\mathcal{J}_2$ di misura lineare nulla (del quale insieme $\mathcal{J}_2$ fa parte $\mathcal{J}_1$); *se y non appartiene a* $\mathcal{J}_2$, *è* inoltre per le (85_2) e (87)

$$u_i(0\,,y) = z_{m+i}(0\,,y) \qquad\qquad (i = 1\,,2\,,\ldots\,,m)\,.$$

Da queste e dalle (90′) segue che, per ogni y fissato non appartenente a $\mathcal{J}_2$, è, per tutti gli x di $(0\,,a_2)$ (29),

$$u_i(x\,,y) = z_{m+i}(x\,,y) \qquad\qquad (i = 1\,,2\,,\ldots\,,m)\,.$$

Da questa e dalla (89) si ha che in tutto $D_\infty^{[2]}$, tranne in un insieme di misura superficiale nulla, è

$$\frac{\partial z_i(x\,,y)}{\partial y} = z_{m+i}(x\,,y)\,.$$

Allora, per quasi tutti gli x di $(0\,,a_2)$, è

$$(91) \qquad z_i(x\,,y) = z_i(x\,,0) + \int_0^y z_{m+i}(x\,,\,Y)\,d\,Y\,.$$

Poichè primo e secondo membro della (91) sono funzioni continue di x, la (91) vale in tutto $D_\infty^{[2]}$, e per la continuità di $z_{m+i}(x\,,y)$ in tutto $D_\infty^{[2]}$, segue che, in tutto $D_\infty^{[2]}$, è

$$\frac{\partial z_i(x\,,y)}{\partial y} = z_{m+i}(x\,,y)\,.$$

(29) Cfr. (A) nota (13), form. (*a*) e (*b*), p. 125.

Da queste e dalle (86) seguono le (VIII), che valgono in tutto $D_{\infty}^{[2]}$, e ne riesce dimostrato il TEOREMA IV.

19. OSSERVAZIONE. Come nel § 2, n. 13, anche nel caso attuale, *se valgono tutte le ipotesi del* TEOREMA IV, *e se,* inoltre, *le funzioni* $f_i(x, y, z_1, \ldots, z_m, q_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *sono continue nel complesso delle variabili,* tenuto conto che, in tale ipotesi, le funzioni $f_i(x, y, z_1(x, y), \ldots, z_m(x, y), q_i(x, y))$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, considerate come funzioni composte di x, sono continue in x, dalle (VIII) segue che anche *le derivate* $\dfrac{\partial z_i(x, y)}{\partial x}$ *esistono e sono continue in ogni punto di* $D_{\infty}^{[2]}$ *e* che *le* (VII) *sono soddisfatte in tutto* $D_{\infty}^{[2]}$. Si ha così per il sistema (VII) un teorema di esistenza (nell'indirizzo classico) ([30]) valido sotto ipotesi molto generali (non occorre che le derivate $\dfrac{\partial f_i}{\partial y}, \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}, \dfrac{\partial f_i}{\partial q_i}$ siano limitate, nè che siano lipschitziane in $y, z_1, z_2, \ldots, z_m, q_i$; sono sufficienti le condizioni più ampie (79) e (81)).

b) Analogamente a quanto si è detto nel § 1, n. 8 nel caso del TEOREMA I, anche nelle ipotesi dei TEOREMI III e IV, se è, rispettivamente, $a_1 < a_0$ oppure $a_2 < a_0$, si può prolungare il sistema di soluzioni costruito $z_1(x, y), z_2(x, y), \ldots, z_m(x, y)$ per valori $x \geq a_1$ o, rispettivamente, $x \geq a_2$. In particolare, nelle ipotesi del TEOREMA IV, le funzioni $z_1(x, y)$, $z_2(x, y), \ldots, z_m(x, y)$ soddisfano le (VIII) in ogni punto del campo, nel quale esse sono state costruite.

C)

20. TEOREMA V. « *Le funzioni* $\varrho_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$, $A_{ij}(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$, $B_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = r+1, \ldots, m;\ 0 \leq r \leq m-1)$ *soddisfino tutte le ipotesi del* TEOREMA III. *Inoltre le funzioni* $C_{ijh}(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j, h = r+1, \ldots, m)$ *siano definite per ogni* x *di* $(0, a_0)$ *e per ogni* $(m+1)$*-pla reale* $(y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$, *per ogni* x *fissato di* $(0, a_0)$ *siano continue in* $y, z_1, z_2, \ldots, z_m$, *e per ogni* $(m+1)$*-pla reale fissata* $(y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$ *siano quasi continue in* x *in* $(0, a_0)$; *esistano due funzioni* $\mu_0(x), \lambda_0(x)$ *definite in* $(0, a_0)$, *ivi positive o nulle, quasicontinue e integrabili, tali che sia*

$$|C_{i,j,h}(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)| \leq \mu_0(x) \tag{92}$$

([30]) Cfr. anche R. CONTI, l. c. in ([9]).

per quasi tutti gli x *di* $(0, a_0)$ *e tutte le* $(m+1)$*-ple reali* $(y, z_1, z_2, \dots, z_m)$ *e*

$$(93) \qquad \begin{aligned} &| C_{i,j,h}(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m) - C_{i,j,h}(x, \bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m) | \leq \\ &\leq \lambda_0(x) \left\{ | y - \bar{y} | + \sum_{s=1}^{m} | z_s - \bar{z}_s | \right\}, \end{aligned}$$

per quasi tutti gli x *di* $(0, a_0)$ *e tutte le coppie di* $(m+1)$*-ple reali* $(y, z_1, z_2, \dots \dots, z_m), (\bar{y}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m)$. *Le funzioni* $\Phi_i(y)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ *soddisfino tutte le ipotesi del* TEOREMA III. *Allora si può determinare un numero* $a_3 \leq a_0$ *e almeno un sistema di funzioni* $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$, *che sono definite nel campo*

$$D_\infty^{[3]}: \qquad 0 \leq x \leq a_3 \quad , \quad -\infty < y < +\infty ,$$

sono ivi di classe G, *soddisfano le*

$$(\mathrm{II}) \qquad z_i(0, y) = \Phi_i(y)$$

per ogni y *reale, e inoltre in quasi tutto* $D_\infty^{[3]}$ *soddisfano il sistema*

$$(\mathrm{IX}) \qquad \begin{aligned} p_i + \varrho_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m) q_i = &\sum_{j,h=r+1}^{m} C_{i,j,h}(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m) z_j z_h + \\ &+ \sum_{j=r+1}^{m} A_{ij}(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m) z_j + B_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m) \\ &(i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

21. La dimostrazione del TEOREMA V è simile a quella del TEOREMA III. Posto

$$(94) \qquad M(x) = \mu_0(x) + \mu(x) + \mu_1(x),$$

si scelga il numero positivo $a' \leq a_0$, che soddisfi la

$$\int_0^{a'} M(X)\, dX < \frac{1}{(m-r)((m-r)K+1)} .$$

In $(0, a')$ sia $Z(x)$ la soluzione dell'equazione differenziale

$$Z(x) = (m-r) \left\{ K + \int_0^x M(X)(Z(X)+1)^2\, dX \right\},$$

cioè

$$Z(x) = -1 + \frac{(m-r)K+1}{1-(m-r)((m-r)K+1)\int_0^x M(X)\,dX}.$$

$Z(x)$ è positiva e crescente in $(0, a')$. Sia poi $a_3 \leq a'$ un numero positivo tale che valga la

$$(95) \qquad e^{(m-1)\int_0^{a_3} \overset{[3]}{L}(t)\,dt} < 1 + \frac{m-1}{mh+1} \qquad (m > 1)$$

dove

$$(96) \quad L^{[3]}(x) = Z^2(a')\lambda_0(x) + 2Z(a')\mu_0(x) + Z(a')\lambda(x) + \mu(x) + \lambda_1(x) + L(x).$$

Introdotte, come al § 1, n. 3, le $z_i^{(n)}(x, y)$ $\left(\text{avendo posto } \delta_3 = \frac{a_3}{n}\right)$ mediante le

$$z_i^{(n)}(x, y) = \Phi_i(g_i^{(n)}(0; x, y)) + \int_0^x \Big\{ \sum_{j,h=r+1}^{m} C_{i,j,h}[X, g_i^{(n)}(X; x, y), z_1^{(n)}(X-\delta_3, g_i^{(n)}(X; x, y)), \ldots$$

$$\ldots, [z_m^{(n)}(X-\delta_3, g_i^{(n)}(X; x, y))]\, z_j^{(n)}(X-\delta_3, g_i^{(n)}(X; x, y))\, z_h^{(n)}(X-\delta_3, g_i^{(n)}(X; x, y)) +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{m} A_{ij}[\ldots]\, z_j^{(n)}(X-\delta_3, g_i^{(n)}(X; x, y)) + B_i[\ldots] \Big\}\, dX \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

tenendo conto delle (92), (71), (73), e della posizione (94), e ragionando in modo simile a quello tenuto nel § 1, n. 4, si trova che per x in $(0, a_3)$ e per ogni y è

$$|z_i^{(n)}(x, y)| \leq \frac{Z(x)}{m-r} \leq \frac{Z(a_3)}{m-r} \leq \frac{Z(a')}{m-r}.$$

Al sistema (IX) si sostituisce il sistema

$$(97) \quad p_i + \varrho_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m) = G_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

dove si pone

$$(98)\qquad G_i(x\,,y\,,z_1\,,z_2\,,\dots\,,z_m)=\sum_{j,h=r+1}^{m} C_{i,j,h}(\dots)\,z_j\,z_h+$$

$$+\sum_{j=r+1}^{m} A_{ij}(\dots)\,z_j+B_i(\dots)\qquad (i=1\,,2\,,\dots\,,m)$$

per x in $(0\,,a_0)\,,y\,,z_1\,,\dots\,,z_r$ reali qualsiasi, $|\,z_{r+1}\,|\leq\dfrac{Z(a')}{m-r},|z_{r+2}|\leq\dfrac{Z(a')}{m-r}$, $\dots\,,|\,z_m\,|\leq\dfrac{Z(a')}{m-r}$, mentre se una (o più) delle $z_j\,(j=r+1\,,\dots\,,m)$ soddisfa la $z_j>\dfrac{Z(a')}{m-r}$, oppure $z_j<-\dfrac{Z(a')}{m-r}$, l'espressione di $G_i(x\,,y\,,z_1\,,z_2,\dots,z_m)$ è quella che si ottiene dalla (98) ponendo $\dfrac{Z(a')}{m-r}$ oppure $-\dfrac{Z(a')}{m-r}$ al posto di quella (o di quelle) z_j.

Si verifica che per il sistema (97) sono soddisfatte tutte le ipotesi del TEOREMA I, quando si ponga

$$N_i(x)=\mu_0(x)\,Z^2(a')+\mu(x)\,Z(a')+\mu_1(x)$$

e alla $L(x)$ si sostituisca la $L^{[3]}(x)$ definita dalla (96); la (95) è allora equivalente alla (15) del § 1.

22. Si potrebbero dare altre estensioni del TEOREMA I, sulle quali non ci dilungheremo. Abbiamo dimostrato il TEOREMA V, perchè esso permette di risolvere il problema di CAUCHY (coi dati sull'asse y) per sistemi quasi-lineari generici di tipo iperbolico

$$(\mathrm{X})\quad \sum_{j=1}^{m}[\alpha_{ij}(x\,,y\,,z_1\,,z_2\,,\dots\,,z_m)\,p_j+\beta_{ij}(x\,,y\,,z_1\,,z_2\,,\dots\,,z_m)\,q_j]=$$

$$=\gamma_i(x\,,y\,,z_1\,,z_2\,,\dots\,,z_m)\qquad (i=1,2,\dots,m),$$

i quali, sotto condizioni opportune per i coefficienti, si possono ricondurre a sistemi della forma (IX) [31]; non staremo, almeno per ora, nè a precisare le ipotesi, nè a sviluppare i calcoli, limitandoci ad osservare che il TEOREMA V fornisce un nuovo metodo di risoluzione del problema di CAUCHY per i si-

---

(31) Cfr. R. COURANT e P. LAX, l. c. in (5), § 4, p. 259-261.

stemi della forma (X), e quindi anche per sistemi generici non lineari di equazioni a derivate parziali del primo ordine del tipo iperbolico

$$\text{(XI)} \qquad F_i(x, y; z_1, z_2, \dots, z_m; p_1, p_2, \dots, p_m; q_1, q_2, \dots, q_m) = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots, m),$$

e per equazioni a derivate parziali non lineari di tipo iperbolico di un ordine $n > 1$ arbitrario ([31] bis)

$$\text{(XII)} \quad F\left(x, y; z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots; \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}; \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0.$$

23. Osservazione. Analogamente a quanto si è fatto nel § 1, n. 8 nelle ipotesi del Teorema I, anche nelle ipotesi del Teorema V, se è $a_3 < a'$, si può prolungare il sistema di soluzioni costruito $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$ anche per valori $x > a_3$; la stessa osservazione si potrebbe fare anche per le applicazioni del Teorema V alla quali si è accennato nel n. 22.

§ 4.

Teoremi di unicità. Dipendenza della soluzione dai valori iniziali.

24. — Teorema VI (Teorema di unicità) « *Valgano tutte le ipotesi del* Teorema I. *Allora non può esistere più di un sistema di funzioni* $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$, *definite in un dominio*

$$\Delta_\infty: \qquad 0 \le x \le \alpha, \quad -\infty < y < +\infty,$$

(*dove* α *è un qualsiasi numero positivo* $\le a_0$), *le quali sono di classe* G *in* Δ_∞, *in quasi tutto* Δ_∞ *soddisfano il sistema*

$$\text{(I)} \quad p_i + \varrho_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m) q_i = f_i(x, y, z_1, z_2, \dots, z_m), \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

e per ogni y *soddisfano le*

$$\text{(II)} \qquad z_i(0, y) = \Phi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \text{ ».}$$

Siano $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y)$ e $z_1^*(x, y), z_2^*(x, y), \dots, z_m^*(x, y)$, due sistemi di funzioni, che soddisfano le condizioni del Teorema VI. Ragionando come nel § 1, n. 2, a tali sistemi si possono associare altri due

---

([31]bis) Per la riduzione di un sistema della forma (XI) ad uno della forma (X), cfr. l'ultimo lavoro citato in ([4]), n. 4, p. 730, sistema (11).

Per la riduzione dell'equazione (XII) ad un sistema del tipo (X) cfr. p. es.

M. Cinquini-Cibrario. *Alcuni nuovi teoremi di esistenza per equazioni non lineari di ordine n di tipo iperbolico*, Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa, S. III, Vol. **5** (1951), p. 329-353 (cfr. § 2, n. 1, p. 335, sistema (IX)).

sistemi di funzioni $g_1(X;x,y), g_2(X;x,y), \ldots, g_m(X;x,y)$ e $g_1^*(X;x,y)$, $g_2^*(X;x,y), \ldots, g_m^*(X;x,y)$ rispettivamente, in modo che valgano le (III) e (IV) per le funzioni $g_i(X;x,y), z_i(x,y)$ $(i=1,2,\ldots,m)$, e le loro analoghe per le funzioni $g_i^*(X;x,y), z_i^*(x,y)$ $(i=1,2,\ldots,m)$.

Dalle (III) e dalle analoghe per le $g_i^*(X;x,y)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ segue

$$\text{(99)}\qquad \begin{cases} \dfrac{d\,g_i(X;x,y)}{d\,X} = \varrho_i[X, g_i(X;x,y), z_j(X, g_i(X;x,y))] \\ \dfrac{d\,g_i^*(X;x,y)}{d\,X} = \varrho_i[X, g_i^*(X;x,y), z_j^*(X, g_i^*(X;x,y))] \end{cases}$$

Poichè le funzioni $z_i(x,y), z_i^*(x,y)$ sono di classe G in Δ_∞, esiste una costante H, tale che

$$\text{(100)}\qquad \left|\frac{z_i(x,y)-z_i(x,\overline{y})}{y-\overline{y}}\right| \leq H; \left|\frac{z_i^*(x,y)-z_i^*(x,\overline{y})}{y-\overline{y}}\right| \leq H \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

per ogni x di $(0,\alpha)$ e per tutti gli $y, \overline{y}$ reali. Dalle (99) e (100), tenuto conto delle (2), segue

$$\left|\frac{d\,|g_i(X;x,y)-g_i^*(X;x,y)|}{d\,Y}\right| \leq$$

$$\leq (1+m\,H)\,L(X)\,|g_i(X;x,y)-g_i^*(X;x,y)| +$$

$$+ L(X)\sum_{j=1}^{m} |z_j(X, g_i(X;x,y)) - z_j^*(X, g_i(X;x,y))| \qquad (i=1,2,\ldots,m),$$

dalle quali, tenuto conto che $g_i(x;x,y) - g_i^*(x;x,y) = 0$, segue [32]

$$\text{(101)}\qquad |g_i(X;x,y)-g_i^*(X;x,y)| \leq$$

$$\leq \left|\int_X^x L(t)\, e^{(1+m\,H)\left|\int_X^t L(u)\,d\,u\right|} \sum_{j=1}^{m} |z_j(t, g_i(t;x,y)) - z_j^*(t, g_i(t;x,y))|\, dt.\right.$$

Dalle (IV) e dalle analoghe per la $z_i^*(x,y)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ segue, tenuto conto delle (2) e (3)

$$|z_i(x,y)-z_i^*(x,y)| \leq h\,|g_i(0;x,y)-g_i^*(0;x,y)| +$$

$$+ \int_0^x L(X)\,\{(1+m\,H)\,|g_i(X;x,y)-g_i^*(X;x,y)| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} |z_j^*(X, g_i(X;x,y)) - z_j(X, g_i(X;x,y))|\}\,d\,X \qquad (i=1,2,\ldots,m).$$

---

[32] Cfr. (A), p. 125, nota [13], form. (a) e (b).

Tenuto conto delle (101), si ottiene

(102) $$| z_i(x, y) - z_i^*(x, y) | \leq$$

$$\leq A \int_0^x L(X) \sum_{j=1}^m | z_j(X, g_i(X; x, y)) - z_j^*(X, g_i(X; x, y)) | \, dX$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

dove

$$A = e^{(1+mH)\int_0^a L(t)\,dt} \left(h + (1 + m H) \int_0^a L(t)\,dt\right) + 1 .$$

Si indichi con $u(x)$ il limite superiore, certo finito [33], dei valori di $\sum_{i=1}^m | z_i(x, y) - z_i^*(x, y) |$ per y variabile in $(-\infty, +\infty)$; si prova facilmente che la funzione $u(x)$ è continua in (o, α) [34].

---

[33] Le funzioni $z_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ soddisfano, per quasi tutti gli y, le (V); quindi, tenuto conto delle (1), per quasi tutti gli y è

$$| z_i(x, y) - \Phi_i(y) | \leq \int_0^x [M_i(X) H + N_i(X)] \, dX .$$

Poichè il primo membro di questa disuguaglianza è continuo in y e il secondo non dipende da y, la disuguaglianza vale in tutto Δ_∞; analogamente in tutto Δ_∞ è

$$| z_i^*(x, y) - \Phi_i(y) | \leq \int_0^x [M_i(X) H + N_i(X)] \, dX .$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^m | z_i(x, y) - z_i^*(x, y) | \leq 2 \sum_{i=1}^m \int_0^x [M_i(X) H + N_i(X)] \, dX .$$

[34] Posto $v(x, y) = \sum_{i=1}^m | z_i(x, y) - z_i^*(x, y) |$, dalla formula (6) del § 1 (nella quale si ponga H al posto di H_i) e dall'analoga per $z_i^*(x, y)$ segue facilmente che $| v(x_1, y) - v(x_2, y) | \leq 2 \sum_{i=1}^m \left| \int_{x_1}^{x_2} \{M_i(X) H + N_i(X)\} dX \right|$, per ogni y reale, e per tutti gli x_1, x_2 di

Dalla (102) segue

$$u(x) \leq m\, A \int_0^x L(X)\, u(X)\, dX\,, \tag{103}$$

da cui, per una semplice estensione del LEMMA di GRONWALL ([35]), segue

$$u(x) = 0$$

identicamente in $(o\,,\alpha)$, e di qui il teorema di unicità.

$(o\,,\alpha)$. Allora, dato ε, si può determinare un h_0 positivo, tale che per tutti gli $|h| < h_0$, per ogni x di $(o\,,\alpha)$ e ogni y reale sia

$$|v(x+h\,,y) - v(x\,,y)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \text{da cui} \quad v(x+h\,,y) < v(x\,,y) + \frac{\varepsilon}{2} \leq u(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,;$$

ne segue $u(x+h) \leq u(x) + \frac{\varepsilon}{2}$. D'altra parte, fissato x, esiste qualche valore $\overline{y}$ per cui $u(x) - \varepsilon < v(x\,,\overline{y}) \leq u(x)$; allora si può determinare un h_1 $(\leq h_0)$ positivo, tale che per $|h| < h_1$ sia $u(x) - \varepsilon < v(x+h\,,\overline{y}) \leq u(x+h)$. Dunque dato ε, si può determinare un h_1 positivo, tale che per $|h| < h_1$ sia

$$u(x) - \varepsilon < u(x+h) < u(x) + \varepsilon\,.$$

Ne segue la continuità della funzione $u(x)$ in $(o\,,\alpha)$.

([35]) Sia, per maggior generalità, in tutto $(o\,,\alpha)$

$$u(x) \leq c + m\, A \int_0^x L(X)\, u(X)\, dX\,. \tag{a}$$

Si ricava subito

$$u(x) \leq c\, e^{m A \int_0^x L(t)\, dt}\,; \tag{b}$$

infatti, posto

$$u(x) = c\, e^{m A \int_0^x L(t)\, dt}\, \xi(x)\,,$$

sostituendo nella (a) si ottiene

25. Come al TEOREMA I (*di esistenza*) corrisponde il TEOREMA VI (*di unicità*), che vale nelle stesse ipotesi, così ai successivi TEOREMI III, IV, V (*di esistenza*) corrispondono altrettanti TEOREMI *di unicità*.

Le ipotesi del TEOREMA IV sono sufficienti ad assicurare l'unicità di un sistema di funzioni $z_1(x,y), z_2(x,y), \ldots, z_m(x,y)$ definite in Δ_∞, ivi di classe G, aventi in ogni punto di Δ_∞ derivate parziali $q_1(x,y), q_2(x,y), \ldots$ $\ldots, q_m(x,y)$, che sono pure di classe G in Δ_∞, e soddisfacenti la (VIII) in tutto Δ_∞.

Nelle ipotesi dei TEOREMI III e V l'unicità di un sistema di funzioni che in quasi tutto Δ_∞ soddisfino le (VI) oppure (IX) rispettivamente e per ogni y soddisfino le (II), si può dimostrare nella classe dei sistemi di funzioni $z_1(x,y), z_2(x,y), \ldots, z_m(x,y)$, che sono di classe G in Δ_∞ e per i quali inoltre esiste una costante $K^{[1]}$, per cui

$$|z_{r+1}(x,y)| \leq K^{[1]}, |z_{r+2}(x,y)| \leq K^{[1]}, \ldots, |z_m(x,y)| \leq K^{[1]}.$$

26. TEOREMA VII. « *Valgano tutte le ipotesi del* TEOREMA I. *Siano* $z_i(x,y), z_i^*(x,y)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *due sistemi di funzioni, definite nel campo*

$$\Delta_\infty: \quad o \leq x \leq \alpha, \quad -\infty < y < +\infty,$$

ivi di classe G, soddisfacenti in quasi tutti i punti di Δ_∞ *rispettivamente le*

$$e^{mA\int_0^x L(t)\,dt}\,\xi(x) \leq 1 + mA\int_0^x L(X)\,e^{mA\int_0^X L(t)\,dt}\,\xi(X)\,dX.$$

Se x_1 è un punto di (o,α) in cui $\xi(x)$ assume il suo valore massimo, è

$$e^{mA\int_0^x L(t)\,dt}\,\xi(x) \leq 1 + \xi(x_1)\left(e^{mA\int_0^x L(t)\,dt} - 1\right).$$

da cui

$$\xi(x_1) - 1 \leq (\xi(x_1) - \xi(x))\,e^{mA\int_0^x L(t)\,dt},$$

e per $x = x_1$ segue $\xi(x_1) \leq 1$, e poichè $\xi(x) \leq \xi(x_1)$ in (o,α), ne segue la (b) (cfr. anche G. SANSONE, l. c. in ([?]), Cap. I, § 5, n. 3, p. 28).

$$\text{(I)} \qquad p_i + \varrho_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)\, q_i = f_i(x, y, z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

e

$$\text{(I*)} \qquad p_i^* + \varrho_i(x, y, z_1^*, z_2^*, \ldots, z_m^*)\, q_i^* = f_i(x, y, z_1^*, z_2^*, \ldots, z_m^*)\,.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

Allora, dato un numero positivo ε*, si può determinare un numero positivo* σ *in modo che sia*

$$| z_i(x, y) - z_i^*(x, y) | < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

in tutto Δ_∞*, quando è*

$$| z_i(o, y) - z_i^*(o, y) | < \sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

comunque sia y reale, cioè le soluzioni del sistema (I) *dipendono con continuità dai valori iniziali* ».

Per la dimostrazione è sufficiente riprendere i calcoli del n. 24, avvertendo che la (102) è sostituita, nel caso attuale, dalla

$$\text{(104)} \quad | z_i(x, y) - z_i^*(x, y) | \leq \sigma + A \int_0^x L(X) \sum_{j=1}^m | z_j(X, g_i) - z_j^*(X, g_i) | \, dX\,,$$

e quindi la (103) dalla

$$\text{(105)} \qquad u(x) \leq m\,\sigma + m\,A \int_0^x L(X)\, u(X)\, dX\,.$$

Da questa segue [36]

$$\text{(106)} \qquad u(x) \leq m\,\sigma\, e^{m A \int_0^x L(t)\, dt}$$

da cui, per la (104), tenuto conto del modo nel quale è stata definita la

---

[36] Cfr. la precedente nota [35], form. (*a*) e (*b*).

funzione $u(x)$ al n. 24, si ottiene [37]

$$|z_i(x, y) - z_i^*(x, y)| \leq \sigma e^{mA\int_0^a L(t)\,dt},$$

e quindi $|z_i(x, y) - z_i^*(x, y)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, se σ è sufficientemente piccolo.

27. Risultato analogo a quello del TEOREMA VII si potrebbe dimostrare, coi dovuti accorgimenti, anche nelle ipotesi degli altri teoremi di esistenza contenuti nel presente lavoro (TEOREMI III, IV, V).

([37]) Basta sostituire, nel secondo membro della (104), a $\sum_{j=1}^{m} | z_j(X, g_i(X; x, y)) - z_j^*(X, g_i(X; x, y)) |$ il suo limite superiore $u(X)$, e poi a $u(X)$ il secondo membro della (106) (nel quale si ponga X al posto di x).