ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MAURO PACELLI

Esame di una successione di potenziali di strato ellittico con applicazione a problemi armonici nello spazio e nel semispazio

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 9, nº 1-2 (1955), p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_1-2_1_0>

ESAME DI UNA SUCCESSIONE DI POTENZIALI DI STRATO ELLITTICO CON APPLICAZIONE A PROBLEMI ARMONICI NELLO SPAZIO E NEL SEMISPAZIO

di Mauro Pacelli (Pisa)

In un recente lavoro di C. Cattaneo [6] è stata presa in considerazione una successione $\{V_s\}$ $(s = -1, 1, 3, 5, \ldots)$ di potenziali di strato semplice relativi a masse distribuite su di un disco circolare di raggio a con densità

$$\mu^s = \left(1 - \frac{\varrho^2}{a^2}\right)^{\frac{s}{2}} \qquad (s = -1, 1, 3, 5, \ldots)$$

essendo ϱ la distanza del generico punto potenziante dal centro del disco. Alcuni di questi potenziali si erano già mostrati utili nello studio del contatto di due solidi elastici limitati da superficie di rotazione [3], [4]; successivamente l'intera successione $\{V_s\}$ $(s = -1, 1, 3, 5, \ldots)$, è stata utilizzata nel problema della torsione di due sfere elastiche a contatto [7].

Nella Nota sopra citata, facendo uso di una relazione differenziale ricorrente fra i V_s, si mostrava che tali potenziali, nei punti interni alle masse, sono polinomi in ϱ^2, i cui coefficienti sono facilmente calcolabili una volta noti quelli di V_{-1} e di V_1. Nella stessa Nota i potenziali V_s sono utilizzati per risolvere alcuni problemi armonici misti relativi al semispazio.

Nel presente lavoro compirò l'esame completo di una analoga successione di potenziali per un disco ellittico, alcuni dei quali sono già intervenuti isolatamente in questioni di contatto elastico [5]. Di essi mi varrò poi sistematicamente per la risoluzione dei seguenti problemi armonici: detta σ l'ellisse del piano $z = 0$, di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

1) Determinare una funzione $\varphi(x, y, z)$ regolare e armonica per $z > 0$, nulla all'infinito insieme con le sue derivate parziali prime, la quale soddisfi le condizioni

$$\varphi(x, y, 0) = P_n(x, y) \ldots \qquad z = 0, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \ldots \qquad z = 0, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$$

essendo $P_n(x, y)$ un polinomio assegnato ad arbitrio.

2) Determinare una funzione $\varphi(x, y, z)$ regolare e armonica per $z > 0$, nulla all'infinito insieme con le sue derivate parziali prime, la quale soddisfi le condizioni

$$\varphi(x, y, 0) = 0 \ldots \qquad z = 0, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = Q_n(x, y) \ldots \qquad z = 0, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

essendo $Q_n(x, y)$ un polinomio assegnato ad arbitrio.

3) Determinare una funzione $\varphi(x, y, z)$ regolare e armonica in tutto lo spazio (eccetto che nei punti di σ), nulla all'infinito insieme con le sue derivate parziali prime, la quale soddisfi le condizioni

$$\lim_{z \to 0+} \varphi(x, y, z) = P_n(x, y), \quad \lim_{z \to 0-} \varphi(x, y, z) = Q_m(x, y) \ldots \quad z = 0, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

essendo $P_n(x y)$ ed $Q_m(x y)$ due polinomi assegnati ad arbitrio in σ.

La considerazione dei suddetti potenziali di strato ha dato occasione anche ad un rapido studio (n. 3) della corrispondente successione di potenziali « *diretti* » (secondo la locuzione di BOUSSINESQ), i quali trovano presumibilmente il loro naturale campo di applicazione nella teoria della elasticità.

§ 1.

Esame di alcuni potenziali di strato semplice relativi ad una ellisse.

1. — Una successione di potenziali newtoniani relativi ad un disco ellittico con densità variabile per ellissi omotetiche. Calcolo nei punti interni con metodo diretto.

In un piano π, sia data una ellisse σ di semiassi a e b. Riferito lo spazio ad una terna cartesiana ortogonale di cui gli assi x e y coincidano rispettivamente con gli assi di σ, consideriamo su σ una massa diffusa con densità

$$\mu^s = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{s}{2}}$$

s essendo un qualunque numero della successione $-1, 1, 3, 5, \ldots$. Sono allora determinati i corrispondenti potenziali newtoniani

$$V_s = \int_\sigma \frac{\mu^s}{r}\, d\,\sigma\,,$$

$(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2})$ dei quali indicheremo con $\overline{V}_s$ i valori assunti nei punti di σ.

Il calcolo dei $\overline{V}_s$ può essere effettuato ricorrendo ad una formula dovuta ad U. Dini [1], la quale permette di esprimere mediante un integrale semplice il potenziale U di masse distribuite sulla ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con densità ϱ variabile per ellissi omotetiche alla data $\left(\varrho = \varrho(\nu)\,,\ \nu = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ con la condizione che $\varrho(\nu)$ per ν compreso fra 0 e 1 sia integrabile e sempre definita, potendo al più divenire infinita di ordine $\frac{1}{2}$ per $\nu = 0$. Precisamente risulta:

$$U(x\,y\,z) = \pi\, a\, b \int_\lambda^\infty f(H)\, \frac{d\,t}{D}$$

dove è

$$D = \{ t (t + a^2)(t + b^2) \}^{\frac{1}{2}} \qquad f(H) = \frac{1}{\pi} \int_0^H \frac{\varrho(\nu)\, d\nu}{(H - \nu)^{\frac{1}{2}}}$$

$$H = 1 - \frac{x^2}{t + a^2} - \frac{y^2}{t + b^2} - \frac{z^2}{t}$$

essendo λ la radice maggiore della equazione cubica, in t, $H(t) = 0$.

Nel caso in questione, essendo $\lambda = 0$ nei punti di σ, a calcoli effettuati si trova [1]:

$$(1) \qquad \overline{V}_s(x, y) = \pi\, a\, b \frac{s!!}{(s+1)!!} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + t} - \frac{y^2}{b^2 + t}\right)^{\frac{s+1}{2}} \frac{dt}{\{(t + a^2)(t + b^2)\, t\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Risulta da tale espressione, che il generico $\overline{V}_s$ ($s = -1, 1, 3, 5, \ldots$) è un polinomio di grado $\dfrac{s+1}{2}$ in x^2 e y^2 e che, posto

$$\overline{V}_s(x\, y) = \sum_{h+k=0}^{\frac{s+1}{2}} v_{h,k}^{(s)}\, x^{2h}\, y^{2k},$$

si ha

$$v_{h,k}^{(s)} = \frac{(-1)^{h+k}}{2^{\frac{s-1}{2}}} \frac{s!!}{\left(\frac{s+1}{2} - h - k\right)!\, h!\, k!} C_{h,k}$$

essendo

$$(2) \qquad C_{h,k} = \frac{\pi\, a\, b}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(a^2 + t)^{h+\frac{1}{2}} (b^2 + t)^{k+\frac{1}{2}}\, t^{\frac{1}{2}}}$$

Scomponendo in frazioni elementari l'espressione $\dfrac{1}{(a^2 + t)^h (b^2 + t)^k}$ si riconosce che tutti i $C_{h,k}$ sono esprimibili in funzione di $C_{i,0}$ e $C_{0,i}$. Per il

---

[1] Col simbolo $m!!$ si suole indicare il prodotto $1.3.5 \ldots (m-2)\, m$ oppure $2 \cdot 3 \cdot 6 \ldots \ldots (m-2) . m$, secondo che m è dispari o pari.

calcolo effettivo tornano utili le seguenti formole ricorrenti

$$(a^2 - b^2)\, C_{h,k} = C_{h-1,\,k} - C_{h,\,k-1} \tag{3}$$

$$a^2 (a^2 - b^2)\, C_{i,0} = \frac{2\,i-2}{2\,i-1} (2\,a^2 - b^2)\, C_{i-1,0} - \frac{2\,i-3}{2\,i-1}\, C_{i-2,0} \tag{4}$$

$$b^2 (a^2 - b^2)\, C_{0,i} = \frac{2\,i-2}{2\,i-1} (a^2 - 2\,b^2)\, C_{0,\,i-1} + \frac{2\,i-3}{2\,i-1}\, C_{0,\,i-2}\,, \tag{5}$$

di immediata verifica. Inoltre la (4), applicata un conveniente numero di volte, permette di esprimere $C_{i,0}$ mediante una combinazione lineare omogenea di $C_{1,0}$ e $C_{0,0}$ con coefficienti funzioni razionali di a e b. La (5) poi consente di esprimere in modo analogo il generico $C_{0,i}$ in funzione di $C_{0,1}$ e $C_{0,0}$.

Si può anche osservare che fra $C_{1,0}$, $C_{0,1}$ e $C_{0,0}$ sussiste la relazione

$$a^2\, C_{1,0} + b^2\, C_{0,1} = C_{0,0} \tag{6}$$

Infatti è:

$$a^2\, C_{1,0} + b^2\, C_{0,1} - C_{0,0} = \int_0^\infty \left(\frac{a^2}{a^2+t} + \frac{b^2}{b^2+t} - 1\right) \frac{d\,t}{\{(a^2+t)(b^2+t)\,t\}^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{a^2\,b^2 - t^2}{(a^2+t)^{\frac{3}{2}}\,(b^2+t)^{\frac{3}{2}}\,t^{\frac{1}{2}}}\,d\,t = \int_0^{ab} \frac{a^2\,b^2 - t^2}{(a^2+t)^{\frac{3}{2}}\,(b^2+t)^{\frac{3}{2}}\,t^{\frac{1}{2}}}\,d\,t +$$

$$+ \int_{ab}^\infty \frac{a^2\,b^2 - t^2}{(a^2+t)^{\frac{3}{2}}\,(b^2+t)^{\frac{3}{2}}\,t^{\frac{1}{2}}}\,d\,t = 0$$

come si riconosce osservando che la sostituzione $t = \dfrac{a^2\,b^2}{u}$ muta l'ultimo integrale in $-\displaystyle\int_0^{ab} \frac{a^2\,b^2 - u^2}{(a^2+u)^{\frac{3}{2}}\,(b^2+u)^{\frac{3}{2}}\,u^{\frac{1}{2}}}\,d\,u$.

La (6), per quanto è stato già detto, permetterà allora di esprimere ciascun $C_{i,0}$ e $C_{0,i}$ come combinazione lineare omogenea (con coefficienti funzioni razionali di a e b) di $C_{1,0}$ e $C_{0,1}$. Nel seguito, per semplicità, porremo $C_{1,0} = A$ e $C_{0,1} = B$. Mostriamo ora come A e B si possano esprimere mediante gli integrali ellittici completi di prima e di seconda specie:

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\theta}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}, \qquad E(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}}\, d\,\theta$$

avendo indicato con $e = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ l'eccentricità di σ. Effettuando nell'integrale che esprime A, ottenuto ponendo nella (2) $h = 1$ e $k = 0$, la sostituzione $t = a^2 \operatorname{cotang}^2 \theta$ otteniamo infatti

$$A = \frac{\pi\, b}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta\, d\,\theta}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{b} E(e) - \frac{\pi}{b} K(e) + \frac{\pi}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}\, d\,\theta$$

cioè:

$$A = \frac{\pi\, b\, [K(e) - E(e)]}{a^2 - b^2} \tag{7}$$

Analogamente, se nell'integrale esprimente B effettuiamo la sostituzione $t = b^2 \operatorname{tang}^2 \theta$, si trova:

$$B = \frac{\pi\, [a^2 E(e) - b^2\, K(e)]}{b\, (a^2 - b^2)} \tag{8}$$

Inversamente dalle (7) e (8) si trae:

$$K(e) = \frac{A\, a^2 + B\, b^2}{\pi\, b}, \qquad E(e) = \frac{b}{\pi} (A + B). \tag{9}$$

Resta con ciò acquisito che tutti i coefficienti $v_{hk}^{(s)}$ sono esprimibili come funzioni lineari omogenee di $K(e)$ e di $E(e)$ con coefficienti funzioni razionali di a e b.

Dai $\overline{V}_s$ così determinati, ponendo $a = b$, si ottengono naturalmente gli analoghi potenziali sul cerchio, sopra ricordati. Per questi vale l'espressione

$$\overline{V}_s(\varrho^2) = \pi\, a^2 \frac{s!!}{(s+1)!!} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\varrho^2}{a^2 + t}\right)^{\frac{s+1}{2}} \frac{d\,t}{(a^2 + t)\, t^{\frac{1}{2}}},$$

($\varrho^2 = x^2 + y^2$) e, posto $\overline{V}_s = \sum_{k=0}^{\frac{s+1}{2}} a_{s,k}\, \varrho^{2k}$ risulta:

$$a_{s,k} = (-1)^k \frac{\pi^2}{2^{\frac{s+2k+1}{2}}\, a^{2k-1}} \cdot \frac{s!!\,(2k-1)!!}{k!^2} \qquad \begin{cases} s = -1\,, 1\,, 3\,, 5\,, \ldots \\ k = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots \dfrac{s+1}{2}\,. \end{cases}$$

conformemente a quanto stabilito in [6].

Nella seguente tabella sono riportati i coefficienti dei primi cinque $\overline{V}_s$ per l'ellisse.

2. — Indipendenza lineare delle $r+1$ derivate parziali $\dfrac{\partial^r \overline{V}_{2r-1}}{\partial x^t \, \partial y^{r-t}}$, $(t=0, 1, \ldots r-1, r)$.

È utile per il seguito mostrare che le $r+1$ derivate parziali r—me $\dfrac{\partial^r \overline{V}_{2r-1}}{\partial x^t \, \partial y^{r-t}}$ $(t=0, 1, 2, \ldots, r)$ sono linearmente indipendenti.

Ammettiamo infatti per assurdo che sussista una identità del tipo

$$\sum_{t=0}^{r} c_t \frac{\partial^r \overline{V}_{2r-1}}{\partial x^t \, \partial y^{r-t}} \equiv 0 \tag{10}$$

essendo le c_t costanti non tutte nulle. In virtù delle formule di trasformazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_\sigma \frac{f(\xi, \eta)}{r} \, d\sigma &= \int_\sigma \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \xi} \, \frac{1}{r} \, d\sigma + \int_l \frac{f(\xi, \eta)}{r} \cos \widehat{n\,x} \, d\,l \\ \frac{\partial}{\partial y} \int_\sigma \frac{f(\xi, \eta)}{r} \, d\sigma &= \int_\sigma \frac{\partial f(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{r} \, d\sigma + \int_l \frac{f(\xi, \eta)}{r} \cos \widehat{n\,y} \, d\,l \end{aligned} \tag{11}$$

(cfr. [5] pp. 206-210, dove l è il contorno della ellisse σ ed $f(\xi, \eta)$ una qualunque funzione continua con derivate prime continue in σ) essendo $\dfrac{\partial^h \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \, \partial \eta^{h-t}} = 0$ su l per $h \leq r-1$, risulta

$$\frac{\partial^r \overline{V}_{2r-1}}{\partial x^t \, \partial y^{r-t}} = \int_\sigma \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \, \partial \eta^{r-t}} \, \frac{1}{r} \, d\sigma$$

e la (10) può, in modo equivalente, scriversi

$$\int_\sigma \frac{\displaystyle\sum_{t=0}^{r} c_t \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \, \partial \eta^{r-t}}}{r} \, d\sigma \equiv 0 \,. \tag{12}$$

Il primo membro della (12) è un potenziale di strato semplice relativo a σ, con densità $\displaystyle\sum_{t=0}^{r} c_t \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \, \partial \eta^{r-t}}$. Il fatto che esso sia nullo su σ, oltre che allo infinito come ogni potenziale newtoniano, comporta il suo annullarsi identico in tutto lo spazio, dovendo esso avere il suo massimo e il suo minimo appunto su σ o all'infinito. Di conseguenza sarà anche identicamente nulla su σ la sua densità, essendo essa proporzionale alla discontinuità della derivata normale del potenziale attraverso la σ. Dall'ipotesi (9) consegue pertanto

$$\sum_{t=0}^{r} c_t \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \, \partial \eta^{r-t}} \equiv 0 \tag{13}$$

Mostreremo ora che tale identità è assurda. Per questo, effettuata la trasformazione di variabili $u = \frac{\xi}{a} + i\frac{\eta}{b}$, $v = \frac{\xi}{a} - i\frac{\eta}{b}$ (i = unità immaginaria) osserviamo che ciascuna $\frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \, \partial \eta^{r-t}}$ si esprime come combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti (e tutti diversi da zero) di *tutte* le $r+1$ $\frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial u^t \, \partial v^{r-t}}$ e viceversa, e che quindi, le prime risulteranno linearmente indipendenti se proveremo che sono tali le seconde.

Eseguendo le derivazioni si ottiene:

$$\frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial u^t \, \partial v^{r-t}} = (-1)^r \frac{(2r-1)!!\, t!}{2^t} \mu^{-1} \sum_{h=0}^{r-t} (-1)^h \binom{r-t}{h} \frac{\mu^{2h} u^{r-t-h} v^{t-h}}{2^{r-t-h}(2h-1)!!\,(t-h)!} \tag{14}$$

con la convenzione che la somma venga estesa soltanto ai termini contenenti potenze di v con esponente positivo. Si vede in base a tale formola, che $\mu \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial u^t \, \partial v^{r-t}}$ è un polinomio in u e v di grado r. Sviluppando ora μ^{2h}, ponendo cioè $\mu^{2h} = \sum_{k=0}^{h} (-1)^k \binom{h}{k} u^k v^k$ si ha:

$$\mu \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial u^t \, \partial v^{r-t}} = (-1)^r (2r-1)!!\, t! \sum_{m=0}^{r-t} \alpha_{r,r-t}^{(m)} u^{r-t-m} v^{t-m}$$

avendo posto:

$$\alpha_{r,r-t}^{(m)} = \sum_{l=m}^{r-t} (-1)^{2l-m} \binom{r-t}{l} \binom{l}{l-m} \frac{2^l}{(2l-1)!!\,(t-l)!}$$

Si vede in tal modo che $\mu \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial u^t \, \partial v^{r-t}}$ contiene un sol termine di grado r, il quale risulta espresso da $(-1)^r (2r-1)!!\, t!\, \alpha_{r,r-t}^{(0)} u^{r-t} v^t$ con $\alpha_{r,r-t}^{(0)} \neq 0$.

Ciò posto osserviamo che da una eventuale identità del tipo $\sum_{t=0}^{r} \gamma_t \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial u^t \partial v^{r-t}} \equiv 0$ con le γ_t costanti, o meglio dalla equivalente $\mu \sum_{t=0}^{r} \gamma_t \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial u^t \partial v^{r-t}} \equiv 0$ annullando il complesso dei termini di grado massimo, si trae l'identità:

$$\sum_{t=0}^{r} \gamma_t \, \alpha_{r,r-t}^{(0)} \, u^{r-t} \, v^t \equiv 0$$

e poichè tutte le $\alpha_{r,r-t}^{(0)}$ sono diverse da zero, questa può sussistere solo se tutte le γ_t sono nulle.

Dall'indipendenza lineare, così dimostrata, delle $\frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial u^t \partial v^{r-t}}$ consegue quella delle $\frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \partial \eta^{r-t}}$, $(t = 0, 1, \ldots r-1, r)$ e quindi, per quanto sopra si è detto, delle $\frac{\partial^r \overline{V}_{2r-1}}{\partial x^t \partial y^{r-t}}$. La (14) mostra inoltre che ciascuna delle $r+1$ derivate $\frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial u^t \partial v^{t-r}}$ diviene infinita di ordine $\frac{1}{2}$ sul contorno l di σ. La stessa proprietà vale quindi per ciascuna derivata $\frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \partial \eta^{r-t}}$.

Osserviamo inoltre che dalla indipendenza lineare delle derivate parziali $\frac{\partial^r \overline{V}_{2r-1}}{\partial x^t \partial y^{r-t}}$, per mezzo della ovvia identità,

$$a^2 \frac{\partial^2 \overline{V}_{2r+1}}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 \overline{V}_{2r+1}}{\partial y^2} = -(2r+1)^2 \overline{V}_{2r-1} + (2r+1)(2r-1) \overline{V}_{2r-3}$$

consegue anche l'indipendenza lineare delle $r+1$ derivate parziali $\frac{\partial^r}{\partial x^t \partial y^{r-t}} \left(\frac{\partial^2 \overline{V}_{2r+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{V}_{2r+1}}{\partial y^2} \right)$, $(t = 0, 1, 2, \ldots r-1, r)$.

L' indipendenza lineare delle $r+1$ derivate parziali $\frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \partial \eta^{r-t}}$ si può dimostrare, in modo più sintetico, col seguente procedimento.

Ammettiamo, per assurdo, che sussista la identità (13) con le c_t costanti non tutte nulle. Indicate con $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$, r costanti reali o complesse e con α e β i coseni direttori di una direzione s reale o complessa, consideriamo la derivata secondo tale direzione, della funzione

$$\Phi = A_0 \frac{\partial^{r-1} \mu^{2r-1}}{\partial \xi^{r-1}} + A_1 \frac{\partial^{r-1} \mu^{2r-1}}{\partial \xi^{r-2} \partial \eta} + \ldots + A_{r-1} \frac{\partial^{r-1} \mu^{2r-1}}{\partial \eta^{r-1}}. \tag{15}$$

Eseguendo la derivazione, si ottiene

$$\Phi' = A_0 \alpha \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^r} + (A_1 \alpha + A_0 \beta) \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^{r-1} \partial \eta} + \ldots + \tag{16}$$

$$+ (A_{r-1} \alpha + A_{r-2} \beta) \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi \, \partial \eta^{r-1}} + A_{r-1} \beta \frac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \eta^r}$$

In base a tale espressione è facile controllare che è sempre possibile determinare i coefficienti $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ e i coseni direttori α e β in modo tale che la Φ' coincida col primo membro della (13), e se le c_t non sono tutte nulle altrettanto accade per A_i $(i = 0, 1, 2, \ldots r-1)$.

Con tale determinazione dei coefficienti $A_0, A_1, \ldots A_{r-1}$ la Φ, avendo derivata identicamente nulla secondo la direzione s, risulta costante in tale direzione, e poichè le $\dfrac{\partial^h \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \partial \eta^{h-t}}$ per $h \leq r-1$ sono nulle sul contorno l di σ, altrettanto deve accadere per la Φ, la quale perciò è identicamente nulla. Dalla ipotesi (13) che esprime la dipendenza lineare delle $r+1$ derivate parziali $\dfrac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \partial \eta^{r-1}}$ $(t = 0, 1, \ldots r)$, discende pertanto la dipendenza lineare delle r derivate parziali di ordine $r-1$ $\dfrac{\partial^{r-1} \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \partial \eta^{r-1-t}} (t=0, 1, \ldots r-1)$. Procedendo in modo analogo si giunge alla conclusione che tutte le derivate di uno stesso ordine h minore di r della funzione $\mu^{2r-1} = \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{2r-1}{2}}$ sono linearmente dipendenti, e che la funzione stessa è identicamente nulla su σ. Ma questo, data l'espressione di μ^{2r-1} è assurdo. Dobbiamo così concludere che la (13) non può sussistere con le c_t tutte diverse da zero, e che pertanto le derivate parziali $\dfrac{\partial^r \mu^{2r-1}}{\partial \xi^t \partial \eta^{r-t}}$ $(t = 0, 1, \ldots r)$ sono linearmente indipendenti.

3. — Un procedimento ricorrente per il calcolo dei V_s. Potenziali diretti.

La determinazione dei coefficienti $v_{h,k}^{(s)}$ può anche ottenersi con un procedimento ricorrente che nei calcoli effettivi risulta di utile controllo.

Mantenendo le notazioni già introdotte e con riferimento alla terna $0(x, y, z)$ precedentemente fissata, consideriamo accanto alla successione dei potenziali $\overline{V}_s$ quella dei corrispondenti potenziali «diretti»

(17) $$D_s(x\,,y\,,z) = \int_\sigma \mu^s\, r\, d\,\sigma \qquad (s = -1\,,1\,,3\,,5\,,\ldots)$$

$(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2})$ di cui indicheremo con $\overline{D}(x\,,y)$ i valori assunti nei punti interni a σ. Si possono facilmente stabilire alcune identità su σ che legano i potenziali diretti $\overline{D}_s$ ai potenziali $\overline{V}_s$. A questo scopo si prestano le formole di trasformazione (11). Essendo

$$\overline{D}_s(x\,,y) = \int_\sigma \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}\right)^{\frac{s}{2}} r\, d\,\sigma \text{ con } r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \text{ si ha:}$$

$$\frac{\partial\,\overline{D}_s}{\partial\,x} = \int_\sigma \mu^s \frac{x-\xi}{r}\, d\,\sigma = x\,\overline{V}_s + \frac{a^2}{s+2}\int_\sigma \frac{\partial\,\mu^{s+2}}{\partial\,\xi}\,\frac{1}{r}\, d\,\sigma =$$

$$= x\,\overline{V}_s - \frac{a^2}{s+2}\int_l \frac{\mu^{s+2}}{r}\cos\widehat{\eta\,\xi}\, d\,l - \frac{a^2}{s+2}\int_\sigma \mu^{s+2}\frac{\partial\,\frac{1}{r}}{\partial\,\xi}\, d\,\sigma$$

e poichè μ^{s+2} si annulla su l, si può scrivere:

$$\frac{\partial\,\overline{D}_s}{\partial\,x} = x\,\overline{V}_s + \frac{a^2}{s+2}\,\frac{\partial}{\partial\,x}\int_\sigma \frac{\mu^{s+2}}{r}\, d\,\sigma$$

cioè

(18) $$\frac{\partial\,\overline{D}_s}{\partial\,x} = x\,\overline{V}_s + \frac{a^2}{s+2}\,\frac{\partial\,\overline{V}_{s+2}}{\partial\,x}$$

Analogamente si ha:

(19) $$\frac{\partial\,\overline{D}_s}{\partial\,y} = y\,\overline{V}_s + \frac{b^2}{s+2}\,\frac{\partial\,\overline{V}_{s+2}}{\partial\,y}\,.$$

Essendo poi $\dfrac{\partial^2 r}{\partial\,x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial\,y^2} = \dfrac{1}{r}$ vale anche l'identità

(20) $$\frac{\partial^2\,\overline{D}_s}{\partial\,x^2} + \frac{\partial^2\,\overline{D}_s}{\partial\,y^2} = \overline{V}_s$$

Sussiste inoltre tra i $\overline{D}_s$ un semplice legame differenziale ricorrente. Essendo infatti:

$$\frac{\partial \overline{D}_s}{\partial x} = \int_\sigma \frac{\partial \mu^s}{\partial \xi} r\, d\sigma + \int_l \mu^s r\, d l = -\frac{s}{a^2}\int_\sigma \mu^{s-2}\, \xi\, r\, d\sigma$$

$$\frac{\partial^2 \overline{D}_s}{\partial x^2} = -\frac{s}{a^2}\int_\sigma \mu^{s-2}\frac{x-\xi}{r}\xi\, d\sigma\,, \qquad \left(\frac{\partial^2 \overline{D}_s}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{s}{a^2}\int_\sigma \mu^{s-2}\frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

e, analogamente,

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{D}_s}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{s}{b^2}\int_\sigma \mu^{s-2}\frac{\eta^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

risulta

$$a^2\left(\frac{\partial^2 \overline{D}_s}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} + b^2\left(\frac{\partial^2 \overline{D}_s}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = s\, \overline{D}_{s-2}^{(0,0)}\,. \tag{21}$$

Dalle (14) (15), valide in tutta σ si deduce inoltre

$$\overline{D}_s(x\,,y) = \overline{D}_s(0\,,0) + \int_0^x \left\{x\, \overline{V}_s(x\,,y) + \frac{a^2}{s+2}\frac{\partial \overline{V}_{s+2}}{\partial x}\right\} d x +$$
$$+ \int_0^y \left\{y\, \overline{V}_s(0\,,y) + \frac{b^2}{s+2}\left(\frac{\partial \overline{V}_{s+2}}{\partial y}\right)_{x=0}\right\} d y$$

ed infine, ricordando l'espressione (1) di $\overline{V}_s$, si ha

$$\overline{D}_s(x\,,y) = \pi\, a\, b\frac{s!!}{(s+3)!!}\int_0^\infty \left\{1-\left(1-\frac{x^2}{a^2+t}-\frac{y^2}{b^2+t}\right)^{\frac{s+3}{2}}\right\}\frac{t^{\frac{1}{2}}\, d t}{(a^2+t)^{\frac{1}{2}}\,(b^2+t)^{\frac{1}{2}}} + \tag{22}$$
$$+ \overline{D}_s(0\,,0)$$

formola per il calcolo diretto dei $\overline{D}_s$. Risulta da essa che $\overline{D}_s(x\,,y)$ per $s = -1\,,1\,,3\,,\ldots$ è un polinomio di grado $\frac{s+3}{2}$ in x^2 e y^2 e che posto

$$\overline{D}_s = \sum_{h+k=0}^{\frac{s+3}{2}} d_{h,k}^{(s)} \, x^{2h} \, y^{2k} \quad \text{è}$$

$$d_{h,k}^{(s)} = (-1)^{h+k+1} \frac{s!!}{2^{\frac{s+1}{2}} \left(\frac{s+3}{2} - h - k\right)! \, h! \, k!} \, (C_{h-1,k} - a^2 \, C_{h,k}) \tag{23}$$

avendo ancora i C_{hk} il significato (2).

Quanto a $\overline{D}_s(0\,,\,0)$, dalla definizione (17), posto ivi $\xi = a\,u \cos\theta$ $\eta = b\,u \operatorname{sen}\theta$, risulta

$$\overline{D}_s(0\,,\,0) = \int_\sigma \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}\right)^{\frac{s}{2}} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \; d\,\sigma =$$

$$= a^2\, b \int_0^{2\pi} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}} \, d\,\theta \int_0^1 (1 - u^2)^{\frac{s}{2}} \, u^2 \, d\,u =$$

$$= 2\,\pi\, a^2\, b \frac{s!!}{(s+3)!!} E(e) = 2\, a^2\, b^2 \frac{s!!}{(s+3)!!} (A + B) \,.$$

Si può osservare, per inciso, che i potenziali diretti $D_s(x\,,\,y\,,\,z)$ sono funzioni biarmoniche in tutti i punti dello spazio esterni a σ; infatti essendo $\Delta_2 D_s = 2\, V_s(x\,,\,y\,,\,z)$, dall'armonicità dei $V_s(x\,y\,z)$ nei punti esterni a σ segue

$$\Delta_2\, \Delta_2\, D_s = 0 \,.$$

Facendo uso delle (18) (19) (20) (21) mostreremo ora come i $\overline{V}_s(x\,y)$ e i $\overline{D}_s(x\,y)$, si possano anche calcolare, in parallelo, con procedimento ricorrente una volta noti $\overline{V}_{-1}$, $\overline{D}_{-1}(x\,y)$, $\overline{V}_s(0\,,\,0)$, $\overline{D}_s(0\,,\,0)$. Per questo scriviamo le (18) e (19) nella forma

$$\frac{\partial\, \overline{V}_s}{\partial\, x} = \frac{s}{a^2} \left(\frac{\partial\, \overline{D}_{s-2}}{\partial\, x} - x\, \overline{V}_{s-2}\right) \tag{24}$$

$$\frac{\partial\, \overline{V}_s}{\partial\, y} = \frac{s}{b^2} \left(\frac{\partial\, \overline{D}_{s-2}}{\partial\, y} - y\, \overline{V}_{s-2}\right) \tag{25}$$

Posto allora $\overline{V}_s(x\,,y) = \sum_{h+k=0}^{\frac{s+1}{2}} v_{h,k}^{(s)}\, x^{2h}\, y^{2k}$, $\overline{D}(x\,,y) = \sum_{h+k=0}^{\frac{s+3}{2}} d_{h,k}^{(s)}\, x^{2h}\, y^{2k}$ la (24) diviene

$$2\,x \sum_{h+k=0}^{\frac{s-1}{2}} (h+1)\, v_{h+1,k}\, x^{2h}\, y^{2k} = \frac{s}{a^2}\left(2\,x \sum_{h+k=0}^{\frac{s-1}{2}} (h+1)\, d_{h+1,k}^{(s-2)}\, x^{2h}\, y^{2k} - \right.$$

$$\left. - x \sum_{h+k=0}^{\frac{s-1}{2}} v_{h,k}^{(s-2)}\, x^{2h}\, y^{2k}\right)$$

dalla quale si deduce

$$v_{h+1,k}^{(s)} = \frac{2\,s\,(h+1)\, d_{h+1,k}^{(s-2)} - s\, v_{h,k}^{(s-2)}}{2\,(h+1)\, a^2} \qquad \left(h+k=0\,,1\,,2\,,\ldots \frac{s-1}{2}\right). \tag{26}$$

Con lo stesso procedimento, dalla (25) si trae

$$v_{h,k+1}^{(s)} = \frac{2\,s\,(k+1)\, d_{h,k+1}^{(s-2)} - s\, v_{h,k}^{(s-2)}}{2\,(k+1)\, b^2} \qquad \left(h+k=0\,,1\,,2\,,\ldots \frac{s-1}{2}\right). \tag{27}$$

La (26) permette di calcolare i coefficienti di $\overline{V}_s(x\,y)$ aventi il primo indice diverso da zero. Per gli altri coefficienti, la (27), ponendo ivi $h=0$, fornisce la formula ricorrente:

$$v_{0,k+1}^{(s)} = \frac{2\,s\,(k+1)\, d_{0,k+1}^{(s-2)} - s\, v_{0,k}^{(s-2)}}{2\,(k+1)\, b^2} \qquad \left(k=0\,,1\,,2\,,\ldots \frac{s-1}{2}\right) \tag{28}$$

Il termine noto $v_{0,0}^{(s)}$ coincide con $\overline{V}_s(0\,,0)$ che è già stato calcolato. Quindi il calcolo di $\overline{V}_s(x\,y)$ è ricondotto a quello di $\overline{D}_{s-2}(x\,y)$ e $\overline{V}_{s-2}(x\,y)$.

Vediamo ora di stabilire analoghe formule ricorrenti per i coefficienti di $\overline{D}_s(x\,y)$. Dalle (18) e (19) si ottiene facilmente l'identità

$$\frac{\partial^2 \overline{D}_s}{\partial x\, \partial y} = \frac{a^2\, y\, \dfrac{\partial \overline{V}_s}{\partial x} - b^2\, x\, \dfrac{\partial \overline{V}_s}{\partial y}}{a^2 - b^2} \tag{29}$$

che, una volta esplicitata, si scrive:

$$4\,x\,y \sum_{h+k=0}^{\frac{s-1}{2}} (h+1)\,(k+1)\, d_{h+1,\,k+1}^{(s)}\, x^{2h}\, y^{2k} =$$

$$= 2\,x\,y \sum_{h+k=0}^{\frac{s-1}{2}} \frac{a^2\,(h+1)\, v_{h+1,k}^{(s)} - b^2\,(k+1)\, v_{h,k+1}^{(s)}}{a^2 - b^2}\, x^{2h}\, y^{2k}.$$

Da essa si trae:

$$(30)\quad d^{(s)}_{h+1,\,k+1} = \frac{a^2\,(h+1)\,v^{(s)}_{h+1,\,k} - b^2\,(k+1)\,v^{(s)}_{h,\,k+1}}{2\,(h+1)\,(k+1)\,(a^2-b^2)} \quad \left(h+k=0\,,1\,,2\,,\ldots\,,\frac{s-1}{2}\right).$$

Noti allora i coefficienti di $\overline{V}_s(x\,,\,y)$, la (30) permette di calcolare i coefficienti di $\overline{D}_s(x\,,\,y)$ aventi entrambi gli indici diversi da zero. Inoltre dalla (20) che si può esplicitare nella forma

$$2\sum_{h+k=0}^{\frac{s+1}{2}}\left\{(h+1)(2h+1)\,d^{(s)}_{h+1,k} + (k+1)\,(2k+1)\,d^{(s)}_{h,k+1}\right\}x^{2h}\,y^{2k} = \sum_{h+k=0}^{\frac{s+1}{2}} v^{(s)}_{h,k}\,x^{2h}\,y^{2k}$$

si ottiene:

$$(31)\quad 2(h+1)(2h+1)\,d^{(s)}_{h+1,k} + 2(k+1)(2k+1)\,d^{(s)}_{h,k+1} = v^{(s)}_{h,k} \quad \left(h+k=0,1,2,\ldots\frac{s-1}{2}\right).$$

Posto in quest'ultima $k=0$, e calcolando $d^{(s)}_{h,1}$ $(h \neq 0)$ per mezzo della (30) si ha

$$(32)\qquad d^{(s)}_{h+1,0} = \frac{b^2\,v^{(s)}_{h-1,1} - h\,b^2\,v^{(s)}_{h,0}}{2\,h\,(h+1)\,(2\,h+1)\,(a^2-b^2)} \qquad \left(h=1\,,\,2\,,\ldots\,,\frac{s+1}{2}\right).$$

In modo analogo si trova

$$(33)\qquad d^{(s)}_{0,\,k+1} = \frac{k\,a^2\,v^{(s)}_{0,k} - a^2\,v^{(s)}_{1,\,k-1}}{2\,k\,(k+1)\,(2\,k+1)\,(a^2-b^2)} \qquad \left(k=1\,,\,2\,,\ldots\frac{s+1}{2}\right).$$

Per il calcolo di $d^{(s)}_{1,0}$ e $d^{(s)}_{0,1}$ scriviamo la (31) per $h=0$ e $k=0$ e la (21)

$$2\,d^{(s)}_{1,0} + 2\,d^{(s)}_{0,1} = v^{(s)}_{0,0}$$

$$2\,a^2\,d^{(s)}_{1,0} + 2\,b^2\,d^{(s)}_{0\,1} = s\,d^{(s-2)}_{0,0}$$

Abbiamo perciò:

$$(34)\qquad d^{(s)}_{1,0} = \frac{s\,d^{(s-2)}_{0,0} - b^2\,v^{(s)}_{0,0}}{2\,(a^2-b^2)}\,, \qquad d^{(s)}_{0,1} = \frac{a^2\,v^{(s)}_{0,0} - s\,d^{(s-2)}_{0,0}}{2\,(a^2-b^2)}\,.$$

Infine il termine noto $d^{(s)}_{0,0}$ coincide con $\overline{D}_s(0\,,\,0)$, già precedentemente calcolato.

Riassumendo abbiamo che i $\overline{V}_s(x\,y)$ e i $\overline{D}_s(x\,,\,y)$ $(s = -1\,,1\,,3\,,5\,,\ldots)$ sono polinomi di grado rispettivo $\dfrac{s+1}{2}$ e $\dfrac{s+3}{2}$ in x^2 e y^2 con coefficienti calcolabili (in funzione di $K(e)$ ed $E(e)$) sia con formule dirette (1)-(8), (22)-(23) sia con procedimento ricorrente (26)-(28) (30)-(34) che fa intervenire contemporaneamente i $\overline{V}_s(x\,y)$ e i $\overline{D}_s(x\,y)$. Riguardo ai $D_s(x\,y\,z)$ si puo osservare che essi non hanno soltanto una funzione ausiliaria, poichè la loro biarmonicità nei punti esterni a σ ne lascia prevedere un'utilizzazione sistematica nella teoria della elasticità.

§ 2

APPLICAZIONI.

Mostreremo ora come l'intervento dei potenziali $V_s(x\,y\,z)$ permetta di trattare con semplicità alcuni problemi armonici. Considereremo due problemi per il semispazio con condizioni miste sul piano limite (n. 4), ed un problema di DIRICHLET per un particolare insieme illimitato privo di punti esterni (n. 5) (²). La trattazione dei problemi relativi al semispazio è basata su di un procedimento già applicato in [6] a problemi più particolari.

4. — Due problemi armonici per il semispazio con condizioni miste sul piano limite.

Detto S il semispazio $z \geq 0$ e σ l'ellisse luogo dei punti per cui è contemporaneamente $z = 0$ e $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, ci proponiamo il seguente problema:

a) determinare una funzione $\varphi(x\,,\,y\,,\,z)$ regolare in S soddisfacente le seguenti condizioni

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{per } z > 0 \tag{35}$$

$$\lim_{R\to\infty} R\,\varphi = c_1 \qquad \lim_{R\to\infty} R^2 \frac{d\varphi}{dR} = c_2 \tag{36}$$

(²) Per problemi di DIRICHLET in campi privi di punti esterni si vedano [9], [10].

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{per } z = 0, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1 \tag{37}$$

$$\varphi(x, y, 0) = P_n(x, y) \qquad \text{per } z = 0, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \tag{38}$$

essendo $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, c_1 e c_2 quantità finite o nulle, $P_n(x, y)$ un polinomio in x, y assegnato ad arbitrio.

Consideriamo, per ogni h, le $h + 1$ derivate parziali $\dfrac{\partial^h V_{2h-1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots, h)$. Per quanto è stato detto al n. 2, esse sono altrettanti potenziali di strato semplice relativi a σ, con determinate densità, e pertanto rappresentano $h + 1$ funzioni regolari ed armoniche in tutti i punti dello spazio non appartenenti a σ, con derivata parziale rispetto a z nulla nei punti del piano $z = 0$ non appartenenti a σ. Poichè inoltre ciascuno di tali potenziali ha una densità che sul contorno l di σ diventa infinita di ordine $\dfrac{1}{2}$ [3] ed è quindi integrabile in σ, possiamo asserire che essi verificano le (36).

Infine, per quanto è stato detto al n. 1, ciascuna delle derivate parziali h-*me* ora considerate assume nei punti di σ valori di un polinomio di grado h in x e y.

Risulta da ciò che, qualunque siano le costanti $\alpha_{h,t}$, la funzione

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{0\,h}^{n} \sum_{0\,t}^{h} \alpha_{h,t} \frac{\partial^h V_{2h-1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}} = \int_\sigma \left(\sum_{0\,h}^{n} \sum_{0\,t}^{h} \alpha_{h,t} \frac{\partial^h \mu^{2h-1}}{\partial \xi^t \, \partial \eta^{h-t}} \right) \frac{1}{r} \, d\sigma \tag{39}$$

soddisfa tutte le condizioni volute eccetto in generale la (38). Appare così spontaneo chiedersi se sia possibile scegliere le costanti $\alpha_{h,t}$ in modo che anche quest'ultima condizione venga soddisfatta.

La risposta affermativa a tale domanda è assicurata dalla indipendenza lineare delle $h + 1$ derivate parziali $\dfrac{\partial^h \bar{V}_{2h-1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots, h)$.

È pertanto possibile, e in un solo modo, determinare le $\alpha_{h,t}$ in guisa che, qualunque sia il polinomio $P_n(x\,y)$ di grado n, risulti

$$\varphi(x, y, 0) = \sum_{0\,h}^{n} \sum_{0\,t}^{h} \alpha_{ht} \frac{\partial^h \bar{V}_{2h-1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}} \equiv P_n(x, y).$$

---

[3] Cfr. n. 2, in fine.

Con tale scelta delle $\alpha_{h,t}$ la (39) rappresenta evidentemente la soluzione del problema proposto.

Sempre per mezzo dei potenziali $V_s(x, y, z)$ si può risolvere anche il seguente problema:

b) determinare una funzione $\varphi(x, y, z)$ regolare in S, soddisfacente le seguenti condizioni

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{per } z > 0 \tag{40}$$

$$\lim_{R \to \infty} R\, \varphi(x, y, z) = K_1 \qquad \lim_{R \to \infty} R^2 \frac{d\varphi}{dR} = K_2 \tag{41}$$

$$\varphi(x, y, 0) = 0 \qquad \text{per } z = 0 \text{ e } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1 \tag{42}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = P_n(x, y) \qquad \text{per } z = 0 \text{ e } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \tag{43}$$

essendo $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, K_1 e K_2 quantità finite o nulle, e $P_n(x\,y)$ un polinomio in x e y assegnato ad arbitrio.

Cominciamo a osservare che ciascuna delle $h + 1$ derivate parziali $\frac{\partial^h V_{2h+1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}}$ $(t = 0, 1, 2, \ldots, h)$ è, come quelle considerate nel problema precedente, un potenziale di strato semplice relativo a σ e che pertanto la sua derivata parziale rispetto a z è regolare e armonica in tutti i punti dello spazio non appartenenti a σ e si annulla, oltre che nei punti del piano $z = 0$ esterni a σ, anche all'infinito dove sono pure nulle le sue derivate parziali del primo ordine.

Poichè inoltre ogni V_{2h+1} è una funzione armonica nei punti esterni a σ, indicato con $\overline{\Delta}_2$ l'operatore differenziale $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, in tali punti è

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^h V_{2h+1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}} = - \frac{\partial^h \overline{\Delta}_2 V_{2h+1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}} \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots, h).$$

Ciò premesso, posto

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{0h}^{n} \sum_{0t}^{h} \beta_{ht} \frac{\partial^h V_{2h+1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}} \tag{44}$$

è evidente che tale funzione soddisfa, qualunque siano le costanti β_{ht}, le condizioni volute, eccetto, in generale, la (43). Se poi osserviamo che è

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum_{0h}^{n} \sum_{0t}^{h} \beta_{ht} \frac{\partial^h V_{2h+1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}}\right]_{z=0} = - \sum_{0h}^{n} \sum_{0t}^{h} \beta_{ht} \frac{\partial^h \overline{\Delta}_2 \overline{V}_{2h+1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}}$$

e ricordiamo che, per ogni h, le $h+1$ funzioni $\frac{\partial^h \overline{\Delta}_2 \overline{V}_{2h+1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}}$ $(t=0,1,2,\dots,h)$ risultano polinomi linearmente indipendenti (cfr. n. 2 in fine), possiamo concludere che è possibile in sol modo determinare i coefficienti $\beta_{h,t}$ in guisa che la $\varphi(x, y, z)$ definita dalla (44) verifichi anche la (43) e che pertanto risolva il problema proposto.

5. — Un particolare problema di Dirichlet per una regione priva di punti esterni.

Ferme restando le notazioni precedentemente introdotte, ci proponiamo di determinare una funzione $\varphi(x, y, z)$, regolare e armonica in tutto lo spazio, eccettuati i punti di σ, la quale verifichi le condizioni

$$(45) \qquad \lim_{z \to 0+} \varphi(x, y, z) = P_n(x, y) \qquad \lim_{z \to 0-} \varphi(x, y, z) = Q_m(x, y) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right)$$

$$(46) \qquad \lim_{R \to \infty} R\, \varphi(x, y, z) = q_1 \qquad \lim_{R \to \infty} R^2 \frac{d\varphi}{dR} = q_2$$

essendo $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, q_1 e q_2 quantità finite o nulle, $P_n(xy)$ e $Q_m(xy)$ due arbitrari polinomi in x e y.

Un analogo problema, relativo alla equazione di POISSON anzichè all'equazione di LAPLACE, è stato trattato da G. CIMMINO con condizioni al contorno generalizzate, come esempio di un procedimento generale atto allo studio del problema di DIRICHLET per l'equazione di POISSON in n variabili [8]. Nel presente lavoro mi limito a costruire la soluzione del problema proposto facendo uso ancora dei potenziali $V_s(x, y, z)$, o meglio di potenziali da essi deducibili con operazioni di derivazione, allo scopo di mostrare l'utilità concreta dei potenziali studiati nel presente lavoro.

Si giunge rapidamente alla soluzione del problema considerando anzitutto il potenziale di doppio strato

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma (P_n - Q_m) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \, d\sigma$$

il quale, come è ben noto (cfr. [2], cap. VI, n. 6), presenta attraverso σ la discontinuità

$$(47) \qquad [U] = U_{+z} - U_{-z} = P_n - Q_m$$

$[U_{\pm z} = \lim_{z \to 0\pm} U(x, y, z)]$. Essendo, per la emisimmetria di $U(x, y, z)$ rispetto al piano $z = 0$, $U_{+z} = -U_{-z}$ dalla uguaglianza precedente (47) si trae

$$U_{+z} = \frac{P_n - Q_m}{2} = -U_{-z}$$

Costruiamo ora una funzione $W(x, y, z)$, armonica e regolare nei punti dello spazio non appartenenti a σ, nulla all'infinito assieme alle sue derivate parziali prime, la quale assuma nei punti di σ i valori del polinomio $\frac{P_n + Q_m}{2}$. Per quanto è stato detto al n. 4, sappiamo che una tal funzione si può sempre costruire mediante opportune combinazioni di certe derivate dei $V_s(x y z)$, ed in tal modo essa risulta, in ultima analisi un potenziale di strato semplice relativo a σ. Precisamente si ha:

$$(48) \qquad W(x, y, z) = \sum_{0h}^{k} \sum_{0t}^{h} \gamma_{h,t} \frac{\partial^h V_{2h-1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}} = \int_\sigma \left(\sum_{0h}^{k} \sum_{0t}^{h} \gamma_{ht} \frac{\partial^h \mu^{2h-1}}{\partial \xi^t \, \partial \eta^{h-t}} \right) \frac{1}{r} \, d\sigma$$

dove k è il maggiore dei due numeri n ed m, e i coefficienti $\gamma_{h,t}$ sono individuati dalla identità in σ:

$$(49) \qquad \sum_{0h}^{k} \sum_{0t}^{h} \gamma_{ht} \frac{\partial^h \overline{V}_{2h-1}}{\partial x^t \, \partial y^{h-t}} = \frac{P_n + Q_m}{2}.$$

Ciò posto, la funzione

$$(50) \qquad \varphi(x, y, z) = U(x, y, z) + W(x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_\sigma (P_n - Q_m) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \, d\sigma + \int_\sigma \left(\sum_{0h}^{k} \sum_{0t}^{h} \gamma_{ht} \frac{\partial^h \mu^{2h-1}}{\partial \xi^t \, \partial \eta^{h-t}} \right) \frac{1}{r} \, d\sigma$$

come somma di un potenziale di doppio strato e di un potenziale di strato semplice, oltre a soddisfare le volute condizioni di regolarità all'infinito (46) è regolare e armonica in tutti i punti dello spazio che non appartengono a σ e verifica le condizioni (45). È infatti, per $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$, :

$$\lim_{z \to 0+} \varphi(x,y,z) = \frac{P_n - Q_m}{2} + \frac{P_n + Q_m}{2} = P_n, \quad \lim_{z \to 0-} \varphi(x,y,z) = -\frac{P_n - Q_m}{2} + \frac{P_n + Q_m}{2} = Q_m.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BETTI, « *Teorica delle forze newtoniane e sue applicazioni all'elettrostatica e al magnetismo* » Cap. I, § XV, Nistri e c., Pisa, (1879).

[2] O. D. KELLOG, « *Foundations of potenzial theory* » Frederick Ungar Publishing Company, New York, (1929).

[3] C. CATTANEO, « *Teoria del contatto elastico in seconda approssimazione* » Rend. di Matematica e delle sue applicazioni. Fasc. III-IV, 1947

[4] C. CATTANEO, « *Teoria del contatto elastico in seconda approssimazione: compressione obliqua* » Rend. del seminario della Facoltà di Scienze della Università di Cagliari, Fasc. I, vol. XVII, 1947.

[5] C. CATTANEO, « *Pressione eccentrica di un cilindro rigido a base ellittica sopra un suolo elastico* » Rend. di Matematica e delle sue applicazioni. Fasc. I, 1947.

[6] C. CATTANEO, « *Sul calcolo di alcuni potenziali e sul loro intervento nella risoluzione di particolari problemi armonici* » Atti del Seminario matematico e fisico della Università di Modena Vol. III 1948-49.

[7] C. CATTANEO, « *Sulla torsione di due sfere elastiche a contatto* » Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Serie III, Vol. VI, Fasc. I-II (1952).

[8] G. CIMMINO, « *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson* » Rend. del Seminario matematico della Università di Padova. Anno XI, nn. 1-2 pp. 28-29.

[9] C. MIRANDA, « *Il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet in un campo privo di punti esterni* ». Rend. della R. Acc. di Scienze fis. e mat. di Napoli, s. 3ª, Vol. XXXVIII, 1932, pp. 50-53.

[10] C. MIRANDA, « *Il problema di Dirichlet in campi dello spazio privi di punti esterni* ». Annali di Mat., s. 4ª, t. XII, (1934), pp. 1-11.