

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

MARIA LUISA PRINCIVALLI

**Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo
all'equilibrio delle volte cilindriche**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 8,
n° 3-4 (1954), p. 157-291

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1954_3_8_3-4_157_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUL SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI
ALLE DERIVATE PARZIALI,
RELATIVO ALL'EQUILIBRIO
DELLE VOLTE CILINDRICHE (*)

Memoria di MARIA LUISA PRINCIVALLI (Trieste).

Oggetto principale della presente Memoria è il seguente sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 u_1 + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (b u_3) = F_1 \\ \Delta_2 u_2 + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (c u_3) = F_2 \\ b \frac{\partial u_1}{\partial x} + c \frac{\partial u_2}{\partial y} + \Delta_4 u_3 + a u_3 = F_3, . \end{array} \right.$$

dove k è una costante reale, e a, b, c, F_1, F_2, F_3 sono funzioni reali dellē due variabili reali x e y , assegnate in un dato campo A del piano.

In opportune ipotesi per la costante k e per le menzionate funzioni, le equazioni (1) costituiscono il sistema delle cosiddette *equazioni indefinite* per l'equilibrio di una volta elastica sottile avente forma cilindrica e sviluppabile sul campo A . Precisamente u_1, u_2, u_3 , sono le componenti del vettore, rispetto ad un'opportuna terna trirettangola, che indica lo spostamento di un punto del sistema dalla configurazione naturale di questo alla configurazione d'equilibrio; F_1, F_2, F_3 sono proporzionali alle componenti del vettore che rappresenta la forza di massa agente sull'elemento di superficie della volta; le funzioni a, b, c e la costante k dipendono dalla natura elastica e geometrica della volta. Allorchē la volta ha curvatura nulla, si ha $a \equiv b \equiv c \equiv 0$.

Pertanto il sistema (1) costituisce una generalizzazione di due classiche Teorie della Fisica Matematica: quella dell'elasticità piana e quella delle pia-

(*) Lavoro eseguito per l'I. N. A. C. nell'Istituto Matematico della Università di Trieste.

stre piane elastiche sottili. Infatti, assumendo $a \equiv b \equiv c \equiv 0$, il sistema (1) si spezza nel sistema di equazioni e nell'equazione che rispettivamente reggono i problemi elastostatici relativi alle dette due teorie.

Al sistema (1) vanno associate le *condizioni al contorno*, relative al tipo di vincolo al quale deve soddisfare la volta lungo il suo bordo. Ad esempio, se questa si suppone incastrata lungo tutto il detto bordo, il *problema al contorno* che traduce analiticamente quello dell'equilibrio del sistema, consisterà nel dover integrare, nel campo A , il sistema (1) con le seguenti condizioni sulla frontiera:

$$u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0.$$

Mi sono proposta, con il presente lavoro, di cercare di porre i fondamenti per una teoria generale del sistema (1)⁽¹⁾.

Mi permetto notare che essa è stata già oggetto di ricerca da parte di diversi Autori; i risultati che però finora sono stati conseguiti, sono relativi a casi molto particolari, oppure assai incompleti⁽²⁾.

Nella presente trattazione, mi sono sistematicamente avvalsa dei procedimenti esistenziali introdotti dal Prof. Gaetano Fichera nella teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali. Tali procedimenti sono già stati applicati a diversi problemi particolari, ed anche nei casi da me considerati, mi hanno permesso di raggiungere gli scopi prefissi. Lo stesso Prof. Fichera, perchè potessi dare a questa Memoria carattere, per quanto possi-

⁽¹⁾ Nel capitolo VI verrà dato un teorema d'esistenza per un sistema anche più generale del sistema (1); precisamente, posto:

$$E_1 \equiv \Delta_2 + k \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad E_2 \equiv \Delta_2 + k \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad E_3 \equiv \Delta_4,$$

noi daremo un teorema d'esistenza per un problema al contorno relativo al sistema

$$(1') \quad E_i(u_i) + \sum_{h=1}^3 (\alpha_{h1}^{(i)} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \alpha_{h2}^{(i)} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \beta_h^{(i)} u_h) = F_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

essendo le $\alpha_{h1}^{(i)}$, $\alpha_{h2}^{(i)}$ e $\beta_h^{(i)}$ funzioni arbitrarie definite nel campo A , tali però che per il menzionato problema al contorno sussista un teorema d'unicità in una conveniente classe di soluzioni, che sarà ben precisata.

Desidero avvertire che gli strumenti analitici approntati in questa Memoria per pervenire al detto teorema d'esistenza potrebbero anche condurre, opportunamente completati, a stabilire teoremi di esistenza per sistemi ancora più generali del sistema (1'), nei quali intervengono, oltre agli operatori considerati in (1'), anche operatori differenziali, applicati all'incognita u_3 , di ordine ≤ 3 .

⁽²⁾ Cfr. [5], [6], [26], [32], [40].

bile, di completezza e indipendenza rispetto ad altre precedenti ricerche, mi ha incoraggiato a rielaborare, usando di questi nuovi metodi, risultati concernenti classiche equazioni, quale quella di Laplace o quella biarmonica, e a riesporre, altresì, con ulteriori contributi, risultati già da Lui conseguiti e apparsi in diverse Note.

Il principale strumento per il conseguimento dei teoremi di esistenza dimostrati in questa Memoria, risiede in un metodo dato dal Prof. Fichera, pubblicato fin dal 1948 ⁽³⁾ e successivamente applicato dallo stesso Prof. Fichera e da altri Autori in Italia, a svariati problemi al contorno ⁽⁴⁾.

In seguito il metodo, limitatamente a casi assai particolari, è stato ritrovato — certo indipendentemente — dai Matematici degli U. S. A. Garabedian, Schiffer [25] e Lax [30] ⁽⁵⁾.

Mi permetto di notare come l'applicazione dei menzionati procedimenti ai nuovi problemi da me considerati abbia richiesto il superamento di difficoltà specifiche connesse ai problemi stessi. Infatti, per dare un'idea dell'ordine di difficoltà che presenta una teoria relativa ad un sistema quale il sistema (1), basta notare che, applicando, come qualche Autore ⁽⁶⁾ ha tentato nel caso dei coefficienti tutti costanti, il metodo di eliminazione di Cauchy, il sistema risulta essere equivalente ad un'equazione alle derivate parziali dell'ottavo ordine.

Dopo aver dedicato il I capitolo a richiami essenziali per gli ulteriori sviluppi; considero nel II e nel V capitolo i casi particolari che si ottengono per $k = 0, a \equiv b \equiv c \equiv 0$. Essi sono relativi alla classica equazione di Laplace e a quella biarmonica, le cui teorie vengono rapidamente ricostruite, pervenendo inoltre ad una abbastanza approfondita indagine delle rispettive funzioni di Green.

Nel capitolo IV, considero il sistema dell'elasticità piana, del quale anche viene conseguita una rapida teoria.

Il metodo che verrà poi in seguito (cap. VI) applicato al sistema (1) viene, nel capitolo III, applicato all'equazione canonica del second'ordine di tipo ellittico.

⁽³⁾ Cfr. [7].

⁽⁴⁾ Cfr. [1], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [33], [37], [38], [41].

⁽⁵⁾ Cfr. anche [3], [39]. E' da notare che in questi Trattati, quantunque apparsi recentissimamente, quando già il Prof. Fichera ed Altri in Italia avevano pubblicato numerose applicazioni del metodo di cui si parla nel testo, la priorità del procedimento viene attribuita ad altri Autori, i cui lavori sull'argomento sono apparsi dopo il 1948 (Cfr. [3], pag. 381 e [39], pag. 53). Tuttavia Z. Nehari, recensendo nella rivista americana *Mathematical Reviews* il lavoro del Prof. Fichera, riconosce la Sua priorità — cfr. *Mathematical Reviews*, vol. 13, n. 10, pag. 931.

⁽⁶⁾ Cfr. [5].

Ciò mi è sembrato non inutile fare, in primo luogo per esemplificare in modo efficace il procedimento, spogliandolo da tutte le sovrastrutture formali inevitabilmente connesse al sistema (1), ed in secondo luogo per trattare con pieno rigore la traduzione in equazione integrale del problema di Dirichlet per la detta equazione di tipo ellittico. Infatti la trattazione datane da Picard [35], quasi mezzo secolo addietro, quantunque abbia trovato posto in classici trattati d'Analisi ⁽⁷⁾, si rivela incompleta, oppure, se resa rigorosa, è relativa a campi dotati di frontiera assai regolare ⁽⁸⁾.

La trattazione conseguita in questa Memoria, consente che la frontiera del campo presenti anche singolarità.

Nel capitolo VI infine, viene considerato il sistema (1) e per esso si perviene a stabilire risultati fondamentali, relativi all'esistenza e all'unicità per i problemi considerati in questa Memoria.

⁽⁷⁾ Cfr. [27].

⁽⁸⁾ Cfr. [4].

CAPITOLO I

DEFINIZIONI E TEOREMI PRELIMINARI.

1. Definizioni ed ipotesi sul campo A .

Sia A un campo (insieme aperto) del piano x, y , nel quale sia definita una funzione reale $u(x, y)$. Indichiamo con Γ un insieme di punti contenuti nella frontiera $\mathcal{F}A$ di A .

Dicendo che $u(x, y)$ è di classe n in $A + \Gamma$, intenderemo che sono verificate le seguenti circostanze:

1) la $u(x, y)$ è continua ed è dotata di derivate parziali continue fino all'ordine n incluso, in ogni punto di A .

2) esistono $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ funzioni: $u_{rs}^{(h)}$ ($r+s=h$, $h=0, 1, \dots, n$) definite e continue in $A + \Gamma$, tali che in ogni punto di A riesca:

$$u_{rs}^{(h)} = \frac{\partial^h u}{\partial x^r \partial y^s}.$$

Daremo al modo seguente la definizione di porzione o arco di curva di classe n nel piano.

Sia t il generico punto di una retta, ed (a, b) un intervallo limitato dell'asse t . Siano:

$$(1) \quad \xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t)$$

due funzioni definite in (a, b) . Il luogo C descritto dal punto del piano di coordinate $[\xi(t), \eta(t)]$ quando t descrive l'intervallo (a, b) è una *porzione o arco di curva di classe n* , se sono verificate le seguenti condizioni:

1) le funzioni (1) sono di classe n nell'intervallo chiuso (a, b) , e le loro derivate del prim'ordine $\frac{d\xi(t)}{dt}, \frac{d\eta(t)}{dt}$ non sono mai contemporaneamente nulle nei punti dell'intervallo chiuso (a, b) .

2) la corrispondenza posta dalle (1) fra i punti dell'intervallo chiuso (a, b) ed i punti di C è biunivoca.

Diremo *estremi* della porzione di curva C , i punti ai quali competono i valori a e b del parametro t ,

L'intervallo chiuso (a, b) chiamasi *l'intervallo base* della porzione di curva C .

I problemi di integrazione per equazioni alle derivate parziali considerati nel presente lavoro saranno studiati in campi particolari del piano, che chiameremo campi di classe n , e che veniamo ora a definire.

Il campo A del piano sarà detto un *campo limitato di classe n* ($n \geq 1$), se esso è limitato, e se la sua frontiera $\mathcal{F}A$ si può decomporre in un numero finito di porzioni di curve di classe n , tali che due qualunque di esse abbiano tutt'al più punti estremi in comune.

Diremo che $\zeta \equiv (\xi, \eta)$ è un *punto regolare di $\mathcal{F}A$* , se è possibile decomporre la frontiera del campo A , nel modo sopraddetto, in un numero finito di porzioni di curve di classe n , ed in maniera che ζ non sia punto estremo di nessuna di esse.

Diremo che un insieme di punti N contenuto nella frontiera di un campo limitato di classe uno (o di classe superiore ad uno) è un *insieme di misura (curvilinea) nulla* se, dette C_1, C_2, \dots, C_q le porzioni di curva di classe uno che compongono la frontiera del campo, l'insieme N . C_h ($h = 1, 2, \dots, q$) ha come corrispondente nell'intervallo base (t_{h-1}, t_h) un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue) dell'asse t . Dopo tale definizione, assumono un preciso significato le frasi: *quasi ovunque su $\mathcal{F}A$, per quasi tutti i punti di $\mathcal{F}A$, etc.*

Diremo che il campo limitato A di classe n è *regolare* se sono verificate le seguenti circostanze:

1) è possibile definire un versore $\mu(\zeta)$, funzione del punto ζ variabile sulla frontiera $\mathcal{F}A$ del campo A , il quale sia funzione continua di ζ , sia sempre penetrante nell'interno di A , e tale che, detta ω la misura dell'angolo (compreso fra 0 e π) che $\mu(\zeta)$ forma con il versore $\nu(\zeta)$ normale a $\mathcal{F}A$ in ogni suo punto regolare ζ e penetrante in A , risulti sempre:

$$0 \leq \omega \leq \omega_0 < \frac{\pi}{2}.$$

2) dette C_1, C_2, \dots, C_q le porzioni di curve di classe n che compongono $\mathcal{F}A$, e $(a, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{q-1}, b)$ i rispettivi intervalli base, le componenti del versore $\mu(\zeta)$, considerate come funzioni del punto t variabile in (t_{h-1}, t_h) , siano di classe uno in (t_{h-1}, t_h) .

3) esista un numero positivo ϱ_0 tale che, per $0 < \varrho \leq \varrho_0$, il luogo descritto dal punto $z = \zeta + \varrho \mu(\zeta)$ al variare del punto ζ su $\mathcal{F}A$, riesca interamente contenuto in A , ed in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{F}A$.

4) in quasi tutti i punti ζ di $\mathcal{F}A$, si possa condurre un segmento di centro ζ , normale a $\mathcal{F}A$, per metà contenuto in A e per metà nel complementare di $A + \mathcal{F}A$.

2. Teorema sul prolungamento alla frontiera di una funzione dotata di derivate del prim'ordine continue e sommabili in A ⁽¹⁾.

Indicheremo con $C_n^{(p)}$ la classe delle funzioni $u(z)$ dotate in A di derivate continue fino all'ordine n incluso, e tali che ogni derivata di $u(z)$ di ordine $\leq n$ abbia modulo di potenza p -esima sommabile in A .

I. — Se $u(z)$ è una funzione appartenente alla classe $C_1^{(p)}$ ($p \geq 1$), e se il campo limitato A è di classe uno e regolare, esiste, fissato quasi ovunque ζ su $\mathcal{F}A$, il limite:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} u[\zeta + \varrho \mu(\zeta)] = u^*(\zeta).$$

La funzione $u^*(\zeta)$ è una funzione del punto ζ di $\mathcal{F}A$ misurabile secondo Lebesgue ⁽²⁾ ed appartiene alla classe $L^{(p)}$ ($\mathcal{F}A$) delle funzioni che hanno modulo di potenza p -esima sommabile su $\mathcal{F}A$, essendo la funzione $|u[\zeta + \varrho \mu(\zeta)]|^p$ uniformemente sommabile sulla frontiera $\mathcal{F}A_\varrho$ del campo A_ϱ che si ottiene privando A di tutti i punti:

$$z = \zeta + \varrho' \mu(\zeta) \quad \zeta \in \mathcal{F}A \quad 0 < \varrho' \leq \varrho < \varrho_0.$$

Se $\mu'(\zeta)$ è un versore che gode delle stesse proprietà 1), 2), 3), 4) di cui gode $\mu(\zeta)$, si ha quasi ovunque su $\mathcal{F}A$:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} u[\zeta + \varrho \mu'(\zeta)] = u^*(\zeta).$$

Esiste una costante positiva Q , dipendente unicamente da A , tale che, per $0 < \varrho < \varrho_0$, si ha:

$$(2) \quad \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |u[\zeta + \varrho \mu(\zeta)]|^p d s \leq 2^p Q \left\{ \int_{\mathcal{F}A} |u^*(\zeta)|^p d s + \varrho^{p-1} \iint_A |\text{grad } u|^p d \tau \right\}.$$

Infine si ha, qualunque sia p :

$$(3) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left(\varrho \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |\text{grad } u|^p d s \right) = 0.$$

⁽¹⁾ Cfr. [10], [14]. Avvertiamo che i numeri fra parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia alla fine del lavoro.

⁽²⁾ Dicendo che la $u^*(\zeta)$ è una funzione misurabile secondo Lebesgue, s'intende che $u^*[\zeta(t)]$ è misurabile in ogni intervallo base (t_{n-1}, t_n) .

D'ora in avanti, allorchè per una funzione $u(z)$, definita in un campo limitato, regolare e di classe uno, ed appartenente a $C_1^{(p)}$, diremo che essa *coincide sul contorno con la funzione* $U(\zeta)$, intenderemo che la $U(\zeta)$ è quasi ovunque uguale alla funzione $u^*(\zeta)$ considerata nel teorema I.

Scriveremo anche:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = U(\zeta),$$

convenendo di dare a tale passaggio al limite il significato ben precisato nel teorema I.

Analogamente, per una funzione u appartenente a $C_2^{(p)}$, potremo definire, oltre che i valori sul contorno della u , anche quelli delle derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$. In un punto regolare di $\mathcal{F}A$, potremo anche definire la $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, cioè la derivata secondo la normale esterna a $\mathcal{F}A$, ponendo:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^* \alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^* \beta,$$

essendo α e β i coseni direttori dell'asse normale esterno a $\mathcal{F}A$ nel punto regolare che si considera, e $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^*$ e $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^*$ i valori assunti nel punto da $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ secondo la convenzione testè fatta. Evidentemente, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ riesce definita su quasi tutta $\mathcal{F}A$, ed è una funzione appartenente a $L^{(p)}(\mathcal{F}A)$. Analogamente può definirsi la $\frac{\partial u}{\partial s}$ su $\mathcal{F}A$ ponendo:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^* x'(s) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^* y'(s),$$

avendo supposto che l'arco di curva di classe uno che contiene il punto che si considera ammetta la rappresentazione parametrica in funzione dell'arco:

$$x = x(s), \quad y = y(s).$$

È utile, per gli ulteriori sviluppi, notare il seguente lemma:

II. — *Se nel campo limitato regolare e di classe due A è definita una funzione $u(z)$, appartenente a $C_2^{(2)}$, e tale che:*

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}A,$$

riesce su $\mathcal{F}A$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Indichiamo con C un arco di curva di classe due contenuto in $\mathcal{F}A$, di estremi i punti regolari z_1 e z_2 , e di equazioni parametriche :

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

e con C_ϱ l'arco di curva di equazioni parametriche :

$$x_\varrho = x(s) - \varrho y'(s), \quad y_\varrho = y(s) + \varrho x'(s).$$

Per l'uniforme sommabilità su C_ϱ di $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ rispetto a ϱ , riesce, detta s_ϱ l'ascissa curvilinea del punto variabile su C_ϱ :

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{C_\varrho} \frac{\partial u}{\partial s_\varrho} ds_\varrho &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{C_\varrho} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} [x'(s) - \varrho y''(s)] + \frac{\partial u}{\partial y} [y'(s) + \varrho x''(s)] \right\} ds_\varrho = \\ &= \int_C \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(s) \right\} ds = \int_C \frac{\partial u}{\partial s} ds = u(z_2) - u(z_1) = 0, \end{aligned}$$

eccettuati eventualmente quegli archi che hanno gli estremi in un insieme di misura nulla. Ne segue che la funzione $\frac{\partial u}{\partial s}$ riesce quasi ovunque nulla su $\mathcal{F}A$.

Dall'essere poi, per quasi tutti i punti di $\mathcal{F}A$:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} x'(s) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(s) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} y'(s) - \frac{\partial u}{\partial y} x'(s) = 0$$

e :

$$\begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ y'(s) & -x'(s) \end{vmatrix} \neq 0,$$

segue l'asserto.

3. Richiamo di alcuni teoremi relativi alla teoria del potenziale logaritmico.

Sia C una porzione di curva di classe due. Indicheremo con ν_ζ la normale ν condotta nel punto ζ a C . Orientata la normale ν , con ν^+ designeremo la direzione positiva, con ν^- la direzione negativa della medesima. Converremo inoltre di indicare con $\frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta|$ la derivata normale della funzione $\log |z - \zeta|$, ottenuta derivando rispetto a ζ .

Sussistono i seguenti teoremi⁽³⁾:

III. — *Se $h(z)$ è una funzione sommabile su C , per quasi tutti i punti ζ di C la funzione di z :*

$$h(z) \log \frac{1}{|z - \zeta|}$$

è sommabile su C , ed inoltre, per quasi tutti i punti ζ di C , si ha:

$$\lim_{w \rightarrow \zeta(\text{su } \nu_\zeta^+)} \int_C h(z) \log \frac{1}{|z - w|} d_z s = \int_C h(z) \log \frac{1}{|z - \zeta|} d_z s.$$

IV. — *Se $h(z)$ è una funzione sommabile su C , per quasi tutti i punti ζ di C , la funzione di z :*

$$h(z) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log \frac{1}{|z - \zeta|}$$

è sommabile su C , ed inoltre, per quasi tutti i punti ζ di C , si ha:

$$\lim_{w \rightarrow \zeta(\text{su } \nu_\zeta^+)} \int_C h(z) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log \frac{1}{|z - w|} d_z s = -\pi h(\zeta) + \int_C h(z) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d_z s$$

$$\lim_{w \rightarrow \zeta(\text{su } \nu_\zeta^-)} \int_C h(z) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log \frac{1}{|z - w|} d_z s = \pi h(\zeta) + \int_C h(z) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log \frac{1}{|z - \zeta|} d_z s.$$

V. — *Se $h(z)$ è una funzione sommabile su C , per quasi tutti i punti ζ di C , la funzione di z :*

$$h(z) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log \frac{1}{|z - \zeta|}$$

⁽³⁾ Cfr. [15], [16].

è sommabile su C , ed inoltre, per quasi tutti i punti ζ di C , si ha :

$$\lim_{w \rightarrow \zeta(\text{sup}_\zeta^+)} \int_C h(z) \frac{\partial}{\partial v_z} \log \frac{1}{|z-w|} d_z s = \pi h(\zeta) + \int_C h(z) \frac{\partial}{\partial v_z} \log \frac{1}{|z-\zeta|} d_z s$$

$$\lim_{w \rightarrow \zeta(\text{sup}_\zeta^-)} \int_C h(z) \frac{\partial}{\partial v_z} \log \frac{1}{|z-w|} d_z s = -\pi h(\zeta) + \int_C h(z) \frac{\partial}{\partial v_z} \log \frac{1}{|z-\zeta|} d_z s .$$

VI. — *Indicati con $V(w)$ e $W(w)$ i potenziali di semplice e doppio strato, considerati, rispettivamente, nei teoremi III e V, supposto w un punto sulla normale positiva a C in ζ , e w' il suo simmetrico rispetto a ζ , si ha, per quasi tutti i punti ζ di C :*

$$\lim_{w \rightarrow \zeta(\text{sup}_\zeta^+)} \frac{\partial}{\partial v_\zeta} V(w) - \lim_{w' \rightarrow \zeta(\text{sup}_\zeta^-)} \frac{\partial}{\partial v_\zeta} V(w') = -2\pi h(\zeta)$$

$$\lim_{w \rightarrow \zeta(\text{sup}_\zeta^-)} W(w) - \lim_{w' \rightarrow \zeta(\text{sup}_\zeta^-)} W(w') = 2\pi h(\zeta) .$$

VII. — *Teorema di Lichtenstein — Friedrichs [23], [31].*

Se la funzione $\varphi(\zeta)$ è definita nel campo limitato A del piano x, y ed è ivi di quadrato sommabile, allora la funzione :

$$g(z) = \iint_A \varphi(\zeta) \log |z-\zeta| d_\zeta \tau$$

gode delle seguenti proprietà :

- a) *è continua e di quadrato sommabile in A*
- b) *$g(z)$ possiede le derivate parziali prime e seconde, in quasi tutto \hat{A} , di quadrato sommabile in A*
- c) *in quasi tutto A riesce :*

$$A_2 g(z) = 2\pi \varphi(z) .$$

VIII. — *Sia A un campo limitato di classe due del piano x, y , e sia $h(z)$ una funzione reale verificante in ogni dominio D ⁽⁴⁾ interno ad A una condizione di Hölder⁽⁵⁾, ed avente quadrato sommabile in A . Per quasi tutti*

(4) Per dominio, intenderemo un campo al quale si sia aggregata la frontiera.

(5) Si dice che la funzione reale $h(z)$ verifica una condizione di Hölder in ogni dominio D interno al campo A , se esistono due costanti $L(D)$ e $\alpha(D)$ che dipendono unicamente

i punti ζ di $\mathcal{F}A$, riescono sommabili in A le funzioni del punto $z \equiv (x, y)$:

$$h(z) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - \zeta|, \quad h(z) \frac{\partial}{\partial y} \log |z - \zeta|,$$

e si ha, per quasi tutti i punti ζ di $\mathcal{F}A$:

$$(4) \quad \lim_{w \rightarrow \zeta} \iint_A h(z) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - w| d_z \tau = \iint_A h(z) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - \zeta| d_z \tau$$

$$\lim_{w \rightarrow \zeta} \iint_A h(z) \frac{\partial}{\partial y} \log |z - w| d_z \tau = \iint_A h(z) \frac{\partial}{\partial y} \log |z - \zeta| d_z \tau,$$

comunque w tenda a ζ sulla normale a C in ζ , dall'interno o dall'esterno di A ⁽⁶⁾.

Osservazione:

Se A è limitato, regolare e di classe due, i limiti sopra indicati possono intendersi anche nel senso specificato nel teorema I. Poichè entrambe le funzioni:

$$\iint_A h(z) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - w| d_z \tau, \quad \iint_A h(z) \frac{\partial}{\partial y} \log |z - w| d_z \tau$$

appartengono a $C_1^{(2)}$, i limiti (4), quando w tende a ζ dall'interno di A , possono anche intendersi nel senso specificato nel teorema I.

da D , e con $\alpha(D)$ verificante la limitazione: $0 < \alpha(D) \leq 1$, tali che, per ogni coppia z_1, z_2 di punti di D , riesca:

$$|h(z_1) - h(z_2)| \leq L(D) |z_1 - z_2|^{\alpha(D)}.$$

D'ora in avanti, dicendo che la funzione $h(z)$ è *holderiana nel campo A* , intenderemo dire che essa verifica una condizione di Hölder in ogni dominio D contenuto in A .

⁽⁶⁾ Cfr. [1], [10].

CAPITOLO II

L'EQUAZIONE DI LAPLACE IN DUE VARIABILI.

1. Teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet relativo alle funzioni armoniche nella classe $\overline{C}_1^{(2)}$.

Sia A un campo limitato, di classe due e regolare, del piano x, y .

Assegnata la funzione $u^*(\zeta)$ su $\mathcal{F}A$, indicheremo con $\overline{C}_1^{(2)}$ la sottoclasse di $C_1^{(2)}$ costituita da tutte le funzioni di $C_1^{(2)}$ che quasi ovunque su $\mathcal{F}A$ verificano la relazione:

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = u^*(\zeta).$$

Sussiste il seguente teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet, relativo alle funzioni armoniche, nella classe $\overline{C}_1^{(2)}$:

I. — Se $\overline{C}_1^{(2)}$ non è vuota, esiste in essa una ed una sola funzione armonica in A ⁽¹⁾.

Consideriamo un intervallo aperto ⁽²⁾ I contenente $A + \mathcal{F}A$, e poniamo:

$$B = I - (A + \mathcal{F}A).$$

Diciamo $\{\psi_k(z)\}$ un sistema di funzioni continue in $B + \mathcal{F}B$, completo in $L^{(2)}(B)$ ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Cfr. [17].

⁽²⁾ Assegnati i numeri reali a_1, a_2 e b_1, b_2 , chiamasi *intervallo aperto* [chiuso] del piano x, y , di estremi (a_1, b_1) e (a_2, b_2) , l'insieme dei punti $z \equiv (x, y)$ tali che:

$$\begin{array}{ll} a_1 < x < a_2 & [a_1 \leq x \leq a_2] \\ b_1 < y < b_2 & [b_1 \leq y \leq b_2]. \end{array}$$

⁽³⁾ Con $L^{(2)}(B)$ designeremo lo spazio reale delle funzioni aventi quadrato sommabile nel campo B ; tale spazio può rendersi hilbertiano definendo il prodotto scalare di due sue funzioni u e v al modo seguente:

$$(u, v) = \iint_B u v \, d\tau.$$

D'ora in avanti, con $L_n^{(2)}(B)$ designeremo lo spazio reale delle funzioni appartenenti a $L^{(2)}(B)$, che sono h olderiane in B .

Posto

$$v_k(z) = \iint_B \psi_k(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau,$$

le funzioni $v_k(z)$ sono armoniche e di classe uno in $A' + \mathcal{F}A$. Supponiamo, ciò che è lecito, che il sistema $\{\text{grad } v_k(z)\}$ sia ortonormale in A , verifichi cioè le condizioni:

$$\iint_A [\text{grad } v_h \times \text{grad } v_k] d\tau = \delta_h^k \quad (4).$$

Poniamo:

$$a_k = \int_{\mathcal{F}A} u^* \frac{\partial v_k}{\partial \nu} ds \quad (5).$$

Poichè $\bar{C}_1^{(2)}$ è per ipotesi non vuota, diciamo $U(z)$ una funzione di $C_1^{(2)}$ verificante la (1). Il teorema I del capitolo I assicura l'uniforme sommabilità della $U(z)$ sulle frontiere della successione di campi A_ρ (cfr. cap. I, 2); pertanto riesce:

$$a_k = \iint_A [\text{grad } U \times \text{grad } v_k] d\tau.$$

Dall'esistenza del vettore $\text{grad } U$ soluzione di questo sistema di infinite equazioni segue, per la ben nota disequaglianza di Bessel⁽⁶⁾, la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$. Allora la serie di vettori $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{grad } v_k$ converge in media in A , giacchè riesce:

$$\iint_A \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \text{grad } v_k \right|^2 d\tau = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \quad (p \text{ intero positivo}).$$

In ogni dominio D interno ad A , tale serie converge uniformemente. Infatti, indica con $\delta(w)$ la distanza del punto w di A da $\mathcal{F}A$, e con $I(w)$ il dominio circolare di centro il punto w e raggio $\frac{\delta(w)}{2}$, per la proprietà di

(4) La considerazione di una successione $\{\text{grad } v_k(z)\}$ ortonormalizzata non ha nessun valore concettuale, ma conferisce maggior speditezza alle dimostrazioni.

(5) Avvertiamo che d'ora in avanti la normale ν ad $\mathcal{F}A$ sarà orientata verso l'esterno del campo A .

(6) Cfr. [18].

media superficiale caratteristica delle funzioni armoniche, si ha :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \text{grad } v_k(w) = \frac{4}{\pi [\delta(w)]^2} \iint_{I(w)} \left[\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \text{grad } v_k(\zeta) \right] d_\zeta \tau.$$

Applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ⁽⁷⁾, si ha :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \text{grad } v_k(w) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi} \delta(w)} \left(\iint_A \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \text{grad } v_k(\zeta) \right|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}};$$

si conclude che, per ogni punto w di D , essendo D un arbitrario dominio interno ad A ed avente da $\mathcal{F}A$ distanza positiva d , riesce :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \text{grad } v_k(w) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi} d} \left(\iint_A \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \text{grad } v_k(\zeta) \right|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde l'asserita uniforme convergenza in D della serie.

Ciò implica l'esistenza di una funzione armonica φ appartenente a $\mathcal{O}_1^{(2)}$, e tale che :

$$\text{grad } \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{grad } v_k.$$

Riesce quindi :

$$a_k = \int_{\mathcal{F}A} u^* \frac{\partial v_k}{\partial \nu} d s = \iint_A [\text{grad } \varphi \times \text{grad } v_k] d \tau.$$

Dall'essere :

$$(2) \quad 0 = \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s - \iint_A [\text{grad } \varphi(\zeta) \times \text{grad } v_k(\zeta)] d_\zeta \tau,$$

segue — come veniamo a dimostrare — che per ogni punto z esterno ad $A + \mathcal{F}A$ si ha :

$$(3) \quad 0 = \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s - \iint_A [\text{grad } \varphi(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau.$$

⁽⁷⁾ Cfr. [18].

Ricordando la definizione di $v_k(\zeta)$, la (2) diviene:

$$\int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) d_\zeta s \iint_B \psi_k(z) \frac{\partial}{\partial v_\zeta} \log |z - \zeta| d_z \tau - \\ - \iint_A \{ \text{grad } \varphi(\zeta) \times [\iint_B (\psi_k(z) \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|) d_z \tau] \} d_\zeta \tau = 0.$$

Fissato ζ su $\mathcal{F}A$, la funzione di z : $|\psi_k(z)| \frac{\partial}{\partial v_\zeta} \log |z - \zeta|$ è sommabile in B , e la funzione di ζ : $|u^*(\zeta)| \iint_B |\psi_k(z)| \frac{\partial}{\partial v_\zeta} \log |z - \zeta| d_z \tau$ è sommabile su $\mathcal{F}A$. Per il teorema di Tonelli, allora, la funzione $|u^*(\zeta)| |\psi_k(z)| \frac{\partial}{\partial v_\zeta} \log |z - \zeta|$ è sommabile in $B \times \mathcal{F}A$ ⁽⁸⁾ [$z \subset B, \zeta \subset \mathcal{F}A$], e per il teorema di Fubini riesce:

$$\int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) d_\zeta s \iint_B \psi_k(z) \frac{\partial}{\partial v_\zeta} \log |z - \zeta| d_z \tau = \\ = \iint_B \psi_k(z) d_z \tau \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial v_\zeta} \log |z - \zeta| d_\zeta s.$$

Fissato ζ in A , la funzione di z : $|\psi_k(z)| \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|$ è sommabile in B , e la funzione di ζ : $\iint_B |\psi_k(z)| \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta| d_z \tau$ riesce continua e limitata in A . Pertanto, per un ragionamento analogo al precedente, la funzione $|\psi_k(z)| \text{grad } \varphi(\zeta) \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|$ è sommabile in $A \times B$ [$\zeta \subset A, z \subset B$], e per il teorema di Fubini è lecito invertire l'ordine d'integrazione; si ha dunque:

$$\iint_B \psi_k(z) d_z \tau \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial v_\zeta} d_\zeta s - \iint_A \{ \text{grad } \varphi(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta| \} d_\zeta \tau = 0.$$

⁽⁸⁾ In generale, se A è un insieme di uno spazio ad h dimensioni, e B è un insieme di uno spazio a k dimensioni, per *prodotto topologico* dei due insiemi A e B si intende l'insieme $A \times B$ di uno spazio ad $h + k$ dimensioni, descritto dal punto $(a_1, a_2, \dots, a_h, b_1, b_2, \dots, b_k)$ quando il punto (a_1, a_2, \dots, a_h) descrive A , e (b_1, b_2, \dots, b_k) descrive B .

Poniamo :

$$F(z) = \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial v_\zeta} d_\zeta s - \iint_A [\text{grad } \varphi(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau ;$$

la funzione $F(z)$ è continua in B ed appartiene ad $L^{(2)}(B)$; verificando le relazioni:

$$\iint_B F(z) \psi_k(z) d_z \tau = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

essa è identicamente nulla in B ; e per la sua analiticità riesce nulla in ogni punto esterno ad A , ossia sussiste la (3).

Ebbene, la funzione $u(z)$ definita in A al modo seguente :

$$(4) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial v_\zeta} d_\zeta s - \frac{1}{2\pi} \iint_A [\text{grad } \varphi(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau$$

è la soluzione del problema.

Proviamo anzitutto che essa è armonica in A . L'integrale :

$$(5) \quad \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial v_\zeta} d_\zeta s$$

è ovviamente una funzione armonica in A . Se D è un arbitrario campo regolare tale che $D + \mathcal{F}D$ sia contenuto in A e contenente all'interno il punto z , si ha :

$$\begin{aligned} & \iint_A [\text{grad } \varphi(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau = \\ & \iint_{A-D} [\text{grad } \varphi(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau + \\ & \iint_D [\text{grad } \varphi(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Il primo addendo è armonico in D , data la possibilità di derivare sotto il segno, il secondo può trasformarsi nel: $\int_{\mathcal{F}D} \varphi(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s$, che pure

è ivi armonico. Dall'arbitrarietà di D , si deduce l'armonicità in A della $u(z)$.

Proviamo che la $u(z)$ appartiene a $C_1^{(2)}$, per il che è sufficiente dimostrare che le derivate parziali del prim'ordine di $u(z)$ sono di quadrato sommabile in A .

Sia A_ρ il campo contenuto in A e contenente z , definito nel teorema I del capitolo I; se $I_\eta(z)$ rappresenta il dominio circolare di centro z e raggio η interno ad A_ρ , riesce, per una funzione U di $\overline{C_1^{(2)}}$:

$$\int_{\mathcal{F}(A_\rho - I_\eta)} U(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s - \\ - \iint_{A_\rho - I_\eta} [\text{grad } U(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau = 0.$$

Facendo tendere η a zero, si ottiene il valore di U nel punto z di A_ρ :

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A_\rho} U(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s - \\ - \frac{1}{2\pi} \iint_{A_\rho} [\text{grad } U(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau.$$

Per l'uniforme sommabilità di U sulle frontiere dei campi A_ρ , se ρ tende a zero, si ha:

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s - \\ (6) \quad - \frac{1}{2\pi} \iint_A [\text{grad } U(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau.$$

Siccome $U(z)$ è dotata di derivate prime di quadrato sommabile in A , e quindi, per il teorema VII del capitolo I, tale è pure l'integrale

$$\iint_A [\text{grad } U(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau,$$

ne viene che le derivate parziali del prim'ordine della funzione (5) appartengono ad $L^{(2)}(A)$. D'altra parte il secondo integrale che compare a secondo membro della (4), sempre per il teorema VII del capitolo I, è dotato di derivate parziali prime di quadrato sommabile in A , e pertanto rimane provato l'asserto.

Fissato il punto regolare $\bar{\zeta}$ su $\mathcal{F}A$, diciamo w un punto di A sulla normale in $\bar{\zeta}$ ad $\mathcal{F}A$, e w' il suo simmetrico rispetto a $\bar{\zeta}$.

Riesce:

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \left(\frac{\partial \log |w - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} - \frac{\partial \log |w' - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} \right) d_\zeta s - \\ - \frac{1}{2\pi} \iint_A \left[\text{grad } \varphi(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log \left| \frac{w - \zeta}{w' - \zeta} \right| \right] d_\zeta \tau.$$

Per i teoremi V e VIII del capitolo I, riesce, per quasi tutti i punti $\bar{\zeta}$ di $\mathcal{F}A$:

$$(7) \quad \lim_{w \rightarrow \bar{\zeta}} u(w) = u^*(\bar{\zeta}) \quad (9)$$

Il teorema d'esistenza è così completamente dimostrato.

Per conseguire l'unicità della soluzione occorre provare che, se $u_1(z)$ e $u_2(z)$ sono due funzioni di $\overline{C}_1^{(2)}$ armoniche in A , esse devono necessariamente coincidere ⁽¹⁰⁾.

Posto:

$$v(z) = u_1(z) - u_2(z),$$

in ogni campo A_ρ di cui al teorema I del capitolo I, riesce:

$$\int_{\mathcal{F}A_\rho} v \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = \iint_{A_\rho} |\text{grad } v|^2 d\tau.$$

Vogliamo passare al limite per ρ che tende a zero. Dall'essere:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \iint_{A_\rho} |\text{grad } v|^2 d\tau = \iint_A |\text{grad } v|^2 d\tau,$$

⁽⁹⁾ Veramente la relazione di limite (7), che va intesa nel senso specificato nel capitolo I, è stata ora dimostrata per w tendente a $\bar{\zeta}$ su $\nu_{\bar{\zeta}}$, ma per ogni arco di $\mathcal{F}A$ interno ad un arco di classe due, il versore $\mu(\zeta)$ — di cui al teorema I del capitolo I — può, com'è ovvio, assumersi coincidente con $\nu(\bar{\zeta})$.

⁽¹⁰⁾ Cfr. [14].

segue l'esistenza del limite :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}A_\rho} v \frac{\partial v}{\partial \nu} d s .$$

Applicando la diseguaglianza di Cauchy — Schwarz, la (2) e la (3) del capitolo I, si ha :

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{F}A_\rho} v \frac{\partial v}{\partial \nu} d s \right| &\leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{\mathcal{F}A_\rho} |v|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A_\rho} |\text{grad } v|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2 Q^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\text{grad } v|^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\rho \int_{\mathcal{F}A_\rho} |\text{grad } v|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} = 0 . \end{aligned}$$

Dall'essere allora :

$$\iint_A |\text{grad } v|^2 d \tau = 0 , \quad \text{e} \quad \lim_{w \rightarrow \bar{\zeta}} v(w) = 0 ,$$

segue $v \equiv 0$ in A .

2. Proprietà di minimo della soluzione.

II. — Nella classe $\bar{C}_1^{(2)}$ il funzionale

$$I(u) = \iint_A |\text{grad } u|^2 d \tau$$

è dotato di minimo, e lo consegue in corrispondenza alla funzione armonica appartenente a $\bar{C}_1^{(2)}$.

Sia $\eta(z)$ una funzione di $C_1^{(2)}$, tale che, per quasi tutti i punti ζ di $\mathcal{F}A$, riesca :

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \eta(z) = 0 .$$

Se $u(z)$ è la funzione armonica di $\bar{C}_1^{(2)}$, la tesi sarà acquisita se si dimostra che :

$$I(u + \eta) - I(u) = \iint_A |\text{grad } \eta|^2 d \tau + 2 \iint_A (\text{grad } \eta \times \text{grad } u) d \tau \geq 0 ,$$

Nel campo A_ϱ , di cui al teorema I del capitolo I, il secondo addendo può trasformarsi con la formula di Green al modo seguente:

$$\iint_{A_\varrho} (\text{grad } \eta \times \text{grad } u) d\tau = \int_{\mathcal{F}A_\varrho} \eta \frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$$

Applicando la diseuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la (2) e la (3) del capitolo I, si trova:

$$\begin{aligned} \left| \iint_A (\text{grad } \eta \times \text{grad } u) d\tau \right| &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left| \iint_{A_\varrho} (\text{grad } \eta \times \text{grad } u) d\tau \right| \leq \\ &\leq \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho} |\eta|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho} |\text{grad } u|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2 Q^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\text{grad } \eta|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left(\varrho \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |\text{grad } u|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Riesce allora:

$$I(u + \eta) - I(u) = \iint_A |\text{grad } \eta|^2 d\tau \geq 0.$$

3. Diseuguaglianza integrale per le funzioni armoniche.

Vogliamo adesso richiamare un teorema di cui dovremo servirci in seguito. Ricordiamo che, dal teorema I del capitolo I, risulta che i valori su $\mathcal{F}A$ di una funzione appartenente a $C_1^{(2)}$ costituiscono una funzione avente il quadrato sommabile su $\mathcal{F}A$.

Il teorema menzionato è il seguente:

III. — Se $u(z)$ è armonica in A ed appartiene a $C_1^{(2)}$, essa è di quadrato sommabile in A , ed esiste una costante $K(A)$ che dipende unicamente dal campo A , tale che si abbia:

$$\iint_A u^2 d\tau \leq K(A) \int_{\mathcal{F}A} u^2 ds^{(41)}.$$

(41) Cfr. [19], [20].

4. **Funzione di Green** $G(w, z)$ e studio dell'integrale: $\iint_A \varphi(\zeta) G(z, \zeta) d\zeta \tau$.

Fissato w in A , poniamo su $\mathcal{F}A$:

$$w^*(\zeta) = \log |w - \zeta|.$$

La classe $\bar{C}_1^{(2)}$ è, in questo caso, non vuota, dato che, detto $I_{\varrho_0}(w)$ il dominio circolare di centro w e raggio ϱ_0 , interno ad A , appartiene ad essa la funzione $U(z)$ così definita in A ⁽¹²⁾:

$$U(z) \begin{cases} = \log |w - z| & \dots \dots \dots \text{ per } z \in A - I_{\varrho_0}(w) \\ = \frac{|z - w|^2}{2 \varrho_0^2} + \log \varrho_0 - \frac{1}{2} & \dots \dots \dots \text{ per } z \in I_{\varrho_0}(w). \end{cases}$$

Infatti, indicata con $U(\varrho)$ la funzione $U(z)$ riferita al sistema di coordinate polari (ϱ, θ) avente per polo il punto w , la funzione $U(\varrho)$, che risulta definita in A al modo seguente:

$$U(\varrho) \begin{cases} = \log \varrho & \dots \dots \dots \text{ in } A - I_{\varrho_0}(w) \\ = \frac{\varrho^2}{2 \varrho_0^2} + \log \varrho_0 - \frac{1}{2} & \dots \dots \dots \text{ in } I_{\varrho_0}(w), \end{cases}$$

è continua anche su $\mathcal{F}I_{\varrho_0}(w)$, dato che:

$$\lim_{\varrho \rightarrow \varrho_0} \log \varrho = \lim_{\varrho \rightarrow \varrho_0} \left(\frac{\varrho^2}{2 \varrho_0^2} + \log \varrho_0 - \frac{1}{2} \right) = \log \varrho_0.$$

Per verificare la continuità delle derivate di $U(z)$ rispetto x e y , basta provare la continuità della $\frac{d U(\varrho)}{d \varrho}$.

La funzione $\frac{d U(\varrho)}{d \varrho}$, che è così definita in A :

$$\frac{d U(\varrho)}{d \varrho} \begin{cases} = \frac{1}{\varrho} & \dots \dots \dots \text{ in } A - I_{\varrho_0}(w) \\ = \frac{\varrho}{\varrho_0^2} & \dots \dots \dots \text{ in } I_{\varrho_0}(w), \end{cases}$$

⁽¹²⁾ Cfr. [17].

riesce continua anche su $\mathcal{F}I_{e_0}(w)$, dato che :

$$\lim_{e \rightarrow e_0} \frac{1}{e} = \lim_{e \rightarrow e_0} \frac{e}{e_0^2} = \frac{1}{e_0}.$$

Ne deriva l'appartenenza di $U(z)$ a $C_1^{(2)}$.

Rifacendoci al procedimento esistenziale di cui al n. 1, fissato w in A , indichiamo con $g(w, z)$ la funzione armonica appartenente a $C_1^{(2)}$, che su $\mathcal{F}A$ coincide con $\log |w - z|$.

Per la (4) si ha :

$$g(w, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} \log |w - \zeta| \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial v_\zeta} d_\zeta s - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_A \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) \text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau.$$

Fissato il punto z in A , sia I un dominio circolare di centro z ed interno ad A .

$$\iint_A \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) \text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau = \\ \iint_I \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) \text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau + \\ + \iint_{A-I} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) \text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau.$$

In I la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) \text{grad } v_k(\zeta)$ converge uniformemente ed il $\text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|$ è un vettore sommabile, in $A-I$ la serie converge in media ed il $\text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|$ è un vettore continuo; ne deriva la possibilità di scambiare fra di loro i simboli di sommazione e di integrazione in tutto il campo A :

$$\iint_A \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) \text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau.$$

Ricordando l'espressione di $a_k(w)$ ⁽¹³⁾:

$$\begin{aligned} a_k(w) &= \int_{\mathcal{F}A} \log |w - \zeta| \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial \nu} d_\zeta s = \\ &= \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |w - \zeta|] d_\zeta \tau, \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} (8) \quad g(w, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} \log |w - \zeta| \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |w - \zeta|] d_\zeta \tau \cdot \\ &\iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Poniamo:

$$G(w, z) = g(w, z) - \log |w - z|;$$

ne viene che:

$$\begin{aligned} G(w, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} \log |w - \zeta| \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s - \log |w - z| - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |w - \zeta|] d_\zeta \tau \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \\ &\times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Per la (6) si ha:

$$\begin{aligned} \log |w - z| &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} \log |w - \zeta| \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s - \\ &- \frac{1}{2\pi} \iint_A [\text{grad}_\zeta \log |w - \zeta| \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau, \end{aligned}$$

⁽¹³⁾ Si noti che, nel caso in ispecie, è lecito applicare la formula di Green, dato che si tratta del $\log |w - \zeta|$.

e pertanto la funzione $G(w, z)$ risulta espressa al modo seguente :

$$(9) \quad G(w, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_A [\text{grad}_\zeta \log |w - \zeta| \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |w - \zeta|] d_\zeta \tau \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \\ \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau .$$

La $G(w, z)$ è la funzione di Green per il problema di Dirichlet relativo all'equazione di Laplace.

Essa è funzione simmetrica di w e z .

Detta $\varphi(\zeta)$ una funzione di quadrato sommabile in A , poichè $g(z, \zeta)$, per ogni fissato z in A , è funzione di ζ di quadrato sommabile in A — cfr. teorema III — ne viene che per ogni z in A ha senso l'integrale :

$$\iint_A \varphi(\zeta) G(z, \zeta) d_\zeta \tau .$$

Stabiliremo un teorema relativo alla funzione di z definita da tale integrale. Occorre però adesso premettere il seguente lemma, di per sè interessante.

IV. — *Posto :*

$$F(w) = \iint_A |\text{grad}_z g(w, z)|^2 d_z \tau ,$$

la funzione $F(w)$ è sommabile in A , e, indicata con $\delta(w)$ la distanza del punto w di A da $\mathcal{F}A$, sussiste la disuguaglianza :

$$(10) \quad \iint_A |\text{grad}_z g(w, z)|^2 d_z \tau \leq \\ \leq \int_{\mathcal{F}A} \log |w - z| \frac{\partial \log |w - z|}{\partial \nu_z} d_z s - 2\pi \log \delta(w) + \frac{\pi}{2} .$$

Per dimostrare il lemma, faremo vedere che sussiste la (10) e che la funzione di w al secondo membro è sommabile in A .

Detta U la funzione introdotta nel n. 4, per il teorema II riesce:

$$I(g) \leq I(U),$$

ossia:

$$\iint_A |\operatorname{grad}_z g(w, z)|^2 d_z \tau \leq \iint_A |\operatorname{grad}_z U(w, z)|^2 d_z \tau.$$

Indichiamo con $I_{\varrho_0}(w)$ il dominio circolare di centro w e raggio ϱ_0 , interno ad A . Si ha:

$$\begin{aligned} \iint_A |\operatorname{grad}_z U(w, z)|^2 d_z \tau &= \iint_{A-I_{\varrho_0}(w)} |\operatorname{grad}_z \log |w - z||^2 d_z \tau + \\ &\iint_{I_{\varrho_0}(w)} |\operatorname{grad}_z \left(\frac{|w - z|^2}{2 \varrho_0^2} + \log \varrho_0 - \frac{1}{2} \right)|^2 d_z \tau = \\ &= \int_{\mathcal{F}A} \log |w - z| \frac{\partial \log |w - z|}{\partial \nu_z} d_z s - 2 \pi \log \varrho_0 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Si ottiene allora, per ogni $\varrho_0 < \delta(w)$:

$$\iint_A |\operatorname{grad}_z g(w, z)|^2 d_z \tau \leq \int_{\mathcal{F}A} \log |w - z| \frac{\partial \log |w - z|}{\partial \nu_z} d_z s - 2 \pi \log \varrho_0 + \frac{\pi}{2},$$

e quindi, facendo tendere ϱ_0 a $\delta(w)$, la (10).

Vogliamo ora provare la sommabilità in A della funzione:

$$\int_{\mathcal{F}A} \log |w - z| \frac{\partial \log |w - z|}{\partial \nu_z} d_z s - 2 \pi \log \delta(w) + \frac{\pi}{2}.$$

Consideriamo dapprima la funzione:

$$Q(w) = \int_{\mathcal{F}A} \log |w - z| \frac{\partial \log |w - z|}{\partial \nu_z} d_z s.$$

Per ogni fissato z su $\mathcal{F}A$, la funzione di w :

$$\left| \log |w - z| \right| \left| \frac{\partial \log |w - z|}{\partial \nu_z} \right|$$

è sommabile in A , e la funzione di z :

$$\iint_A |\log |w - z|| \left| \frac{\partial \log |w - z|}{\partial v_z} \right| d_w \tau$$

è continua⁽¹⁴⁾, e quindi sommabile, su $\mathcal{F}A$. Ne segue, per il teorema di Tonelli, che la funzione

$$\log |w - z| \frac{\partial \log |w - z|}{\partial v_z}$$

è sommabile in $A \times \mathcal{F}A$, ed allora $Q(w)$, per il teorema di Fubini, è sommabile in A . Dimostriamo ora la sommabilità in A di $\log \delta(w)$.

Facciamo prima vedere che, se C è una porzione di curva del piano, semplice, aperta e di classe due, di estremi z_1 e z_2 , e w è un punto che non giace su di essa, detta $\delta(w)$ la distanza di w da C , la funzione $\log \delta(w)$ è sommabile in ogni campo limitato del piano.

Siano

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s)$$

le equazioni parametriche della curva C ; s rappresenti la lunghezza dell'arco, contato a partire dall'estremo z_1 della curva. Consideriamo l'insieme dei punti del piano aventi coordinate:

$$(11) \quad x = x(s) + \varrho y'(s) \quad , \quad y = y(s) - \varrho x'(s),$$

al variare di s da 0 a L , e di ϱ nell'intervallo $(-\varrho_0, \varrho_0)$.

Il numero positivo ϱ_0 si scelga abbastanza piccolo, in modo che la funzione:

$$J(\varrho, s) = \begin{vmatrix} x'(s) + \varrho y''(s) & y'(s) - \varrho x''(s) \\ y'(s) & -x'(s) \end{vmatrix} = -1 - \varrho(x' y'' - x'' y')$$

risulti negativa nel dominio rettangolare R :

$$0 \leq s \leq L \quad , \quad -\varrho_0 \leq \varrho \leq \varrho_0$$

ed inoltre, detto T il dominio descritto dal punto le cui coordinate sono espresse dalle (11), sia biunivoca la corrispondenza fra R e T . Diciamo T_1

⁽¹⁴⁾ Cfr. [29].

il dominio costituito dal semicerchio di centro z_1 e raggio ϱ_0 , e non contenente nel suo interno punti di T (tale semicerchio esiste se ϱ_0 è abbastanza piccolo). Sia T_2 l'analogo semicerchio relativo all'estremo z_2 . Per provare l'asserto, basta far vedere la sommabilità in T, T_1 e T_2 di $\log \delta(w)$.

In T , infatti, si ha:

$$\iint_T \log \delta(w) d_w \tau = \int_0^L ds \int_0^{\varrho_0} \log \varrho |J(\varrho, s)| d\varrho < +\infty,$$

ed in $T_1 [T_2]$, riferendo un suo punto w ad un sistema di coordinate polari (ϱ, θ) con polo nel punto $z_1 [z_2]$, si ha:

$$\iint_{T_1} \log \delta(w) d_w \tau = \int_0^\pi d\theta \int_0^{\varrho_0} \varrho \log \varrho d\varrho < +\infty.$$

Rimane pertanto provata la sommabilità di $\log \delta(w)$ in ogni campo limitato contenente C . Sia ora $\delta(w)$ la distanza di un punto w di A da $\mathcal{F}A$. Indicate con $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_q$ le porzioni di curve di classe due di cui si compone $\mathcal{F}A$, diciamo $\delta_h(w)$ la distanza di w da Γ_h . Per quanto testè dimostrato, la funzione $\log \delta_h(w)$ [$h = 1, 2, \dots, q$] è sommabile nel campo A ; dall'essere:

$$|\log \delta(w)| \leq \sum_{h=1}^q |\log \delta_h(w)|,$$

segue la sommabilità in A della funzione $\log \delta(w)$.

Il lemma è così completamente provato.

V. — Se $\varphi(\zeta)$ è una funzione di $L_h^{(2)}(A)$, la funzione $u(z)$ definita in A al modo seguente:

$$(12) \quad u(z) = \iint_A \varphi(\zeta) G(z, \zeta) d_\zeta \tau$$

è di classe due in A , appartiene a $C_1^{(2)}$, ed è tale che:

$$(13) \quad \begin{aligned} \Delta_2 u(z) &= -2\pi \varphi(z) \quad . \quad . \quad . \quad \text{per } z \in A \\ u(\zeta) &= 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{per } \zeta \in \mathcal{F}A. \end{aligned}$$

Per il teorema VII del capitolo I e per il classico teorema di Poisson sul potenziale logaritmico ⁽¹⁵⁾, la funzione definita in A al modo seguente :

$$(14) \quad v^*(\zeta) = \iint_A \varphi(w) \log |w - \zeta| d_w \tau$$

è di classe due in A , appartiene a $O_1^{(2)}$, e riesce :

$$\Delta_2 v^*(z) = 2\pi \varphi(z) \quad \text{per } z \in A.$$

Ne segue ovviamente che, se $v(z)$ è soluzione del seguente problema :

$$(15) \quad \begin{aligned} \Delta_2 v(z) &= 0 && \text{per } z \in A \\ v(\zeta) &= v^*(\zeta) && \text{per } \zeta \in \mathcal{F}A, \end{aligned}$$

la funzione :

$$u^*(z) = v(z) - v^*(z)$$

verifica le (13).

La funzione $v(z)$ appartenente a $O_1^{(2)}$, armonica in A e coincidente su $\mathcal{F}A$ con la $v^*(\zeta)$ definita dalla (14) è, per la (4), espressa al modo seguente :

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s \iint_A \varphi(w) \log |w - \zeta| d_w \tau - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \iint_A \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Nel paragrafo 4 è stato provato che nel secondo addendo si possono scambiare fra loro i simboli d'integrazione e di sommazione; quanto al primo addendo, si osservi che la funzione

$$(16) \quad |\varphi(w)| |\log |w - \zeta||$$

è sommabile in $\mathcal{F}A \times A$ [$\zeta \in \mathcal{F}A$; $w \in A$]. Infatti si ha che :

$$|\varphi(w)| \int_{\mathcal{F}A} |\log |w - \zeta|| d_\zeta s$$

⁽¹⁵⁾ Cfr. [29].

è il prodotto di una funzione sommabile — la $|\varphi(w)|$ — per una funzione continua :

$$\int_{\mathcal{F}A} |\log |w - \zeta|| d_{\zeta} s ;$$

dal teorema di Tonelli segue l'asserto. Moltiplicando la funzione (16) per la funzione continua di ζ :

$$\frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial v_{\zeta}} \quad (z \in A)$$

si ottiene sempre una funzione sommabile in $\mathcal{F}A \times A$.

Applicando il teorema di Fubini, abbiamo :

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(w) d_w \tau \int_{\mathcal{F}A} \log |w - \zeta| \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial v_{\zeta}} d_{\zeta} s - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_{\zeta} \log |z - \zeta|] d_{\zeta} \tau. \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i coefficienti a_k :

$$a_k = \int_{\mathcal{F}A} \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial v_{\zeta}} d_{\zeta} s \iint_A \varphi(w) \log |w - \zeta| d_w \tau.$$

Ragionando come testè fatto, si ha (teorema di Fubini) :

$$\begin{aligned} a_k &= \iint_A \varphi(w) d_w \tau \int_{\mathcal{F}A} \log |w - \zeta| \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial v_{\zeta}} d_{\zeta} s = \\ &\iint_A \varphi(w) d_w \tau \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_{\zeta} \log |w - \zeta|] d_{\zeta} \tau. \end{aligned}$$

Sostituendo si trova :

$$\begin{aligned} (17) \quad v(z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(w) d_w \tau \int_{\mathcal{F}A} \log |w - \zeta| \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial v_{\zeta}} d_{\zeta} s - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \varphi(w) d_w \tau \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_{\zeta} \log |w - \zeta|] d_{\zeta} \tau \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \\ &\quad \times \text{grad}_{\zeta} \log |z - \zeta|] d_{\zeta} \tau. \end{aligned}$$

Sia :

$$\alpha_k(w) = \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |w - \zeta|] d_\zeta \tau,$$

e quindi

$$\alpha_k(z) = \iint_A [\text{grad } v_k(\zeta) \times \text{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau.$$

La ridotta n -esima della serie :

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(z) \alpha_k(w) \right] \varphi(w)$$

è maggiorata in A da una funzione sommabile rispetto a w .

Infatti, per la diseuguaglianza di Cauchy — Schwarz, si ha :

$$\left| \varphi(w) \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \alpha_k(w) \right] \right| \leq |\varphi(w)| \left(\sum_{h=1}^n |\alpha_h(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k(w)|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

essendo :

$$\begin{aligned} \alpha_k(w) &= \int_{\mathcal{F}A} \log |w - \zeta| \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial \nu} d_\zeta s = \int_{\mathcal{F}A} g(w, \zeta) \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial \nu} d_\zeta s = \\ &= \iint_A [\text{grad}_\zeta g(w, \zeta) \times \text{grad } v_k(\zeta)] d_\zeta \tau, \end{aligned}$$

per il teorema di Bessel⁽¹⁶⁾ la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(w)|^2$ è convergente, e riesce :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(w)|^2 \leq \iint_A |\text{grad}_\zeta g(w, \zeta)|^2 d_\zeta \tau.$$

⁽¹⁶⁾ Cfr. [18].

Si ha pertanto, qualunque sia n :

$$|\varphi(w) \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \alpha_k(w) \right]| \leq |\varphi(w)| \left(\sum_{h=1}^n |\alpha_h(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\operatorname{grad}_\zeta g(w, \zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

e per la (10):

$$\begin{aligned} & \left| \varphi(w) \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \alpha_k(w) \right] \right| \leq \\ & \leq |\varphi(w)| \left(\sum_{h=1}^{\infty} |\alpha_h(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}^A} \log |w - \zeta| \frac{\partial \log |w - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s - 2\pi \log \delta(w) + \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

dove la funzione a secondo membro è sommabile rispetto a w . Ne viene che è lecito nella (17) scambiare il simbolo d'integrazione con quello di sommazione, ossia:

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(w) d_w \tau \left\{ \int_{\mathcal{F}^A} \log |w - \zeta| \frac{\partial \log |z - \zeta|}{\partial \nu_\zeta} d_\zeta s - \right. \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A [\operatorname{grad} v_k(\zeta) \times \operatorname{grad}_\zeta \log |w - \zeta|] d_\zeta \tau \iint_A [\operatorname{grad} v_k(\zeta) \times \\ & \quad \left. \times \operatorname{grad}_\zeta \log |z - \zeta|] d_\zeta \tau \right\} \end{aligned}$$

e, ricordando la (8), si ha:

$$v(z) = \iint_A \varphi(w) g(w, z) d_w \tau.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} u^*(z) = v(z) - v^*(z) &= \iint_A \varphi(\zeta) g(z, \zeta) d_\zeta \tau - \iint_A \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau = \\ &= \iint_A \varphi(\zeta) G(z, \zeta) d_\zeta \tau = u(z). \end{aligned}$$

Essendo:

$$u(z) = v(z) - \iint_A \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau,$$

la $u(z)$ è di classe in A ed appartiene a $C_1^{(2)}$. Infatti, la $v(z)$ appartiene a $C_1^{(2)}$ ed è analitica in A , il secondo addendo è continuo in A assieme alle derivate prime e seconde, data l'hölderianità di $\varphi(\zeta)$ nel campo, e, siccome $\varphi(\zeta)$ appartiene ad $L^{(2)}(A)$, per il teorema VII del capitolo I esso ha derivate parziali prime e seconde di quadrato sommabile in A .

Il teorema è completamente dimostrato.

Il seguente teorema fornisce ulteriori notevoli proprietà della funzione $u(z)$ definita dalla (12).

VI. — Se $\varphi(\zeta)$ appartiene ad $L^{(2)}(A)$, per ogni fissato $z \equiv (x, y)$ nel campo A , sono sommabili in A le funzioni di ζ :

$$\varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} G(z, \zeta) \quad , \quad \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} G(z, \zeta),$$

e si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \iint_A \varphi(\zeta) G(z, \zeta) d_\zeta \tau &= \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} G(z, \zeta) d_\zeta \tau \\ \frac{\partial}{\partial y} \iint_A \varphi(\zeta) G(z, \zeta) d_\zeta \tau &= \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} G(z, \zeta) d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Essendo:

$$\iint_A \varphi(\zeta) G(z, \zeta) d_\zeta \tau = \iint_A \varphi(\zeta) g(z, \zeta) d_\zeta \tau - \iint_A \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau,$$

basta dimostrare i fatti asseriti nell'enunciato per la $g(z, \zeta)$ anzichè per la $G(z, \zeta)$. Per far vedere che $\varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta)$, per ogni fissato z in A , è funzione di ζ sommabile in A , basta provare che la funzione di ζ : $\frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta)$ è di quadrato sommabile in A .

Fissato ζ in A , indichiamo con $F[\zeta, u^*]$ il funzionale che fa corrispondere alla u^* definita su $\mathcal{F}A$ il valore che in ζ assume la funzione $u(\zeta)$ armonica in A , appartenente a $C_1^{(2)}$, e tale che riesca:

$$u(w) = u^*(w) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{per } w \subset \mathcal{F}A.$$

Tale funzionale della u^* , è ovviamente lineare. Definiamo il modulo di Banach di una funzione u^* , traccia su $\mathcal{F}A$ di una funzione $u(\zeta)$ armonica in A ed appartenente a $C_1^{(2)}$, al modo seguente:

$$\|u^*\| = \left(\int_{\mathcal{F}A} |u^*|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si ha — cfr. dimostrazione del teorema I —

$$|F[\zeta, u^*]| = |u(\zeta)| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi} \delta(\zeta)} \left(\iint_A |u|^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

avendo indicato come al solito con $\delta(\zeta)$ la distanza di ζ da $\mathcal{F}A$; quindi — cfr. teor. III — riesce:

$$|F[\zeta, u^*]| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi} \delta(\zeta)} \left[K(A) \right]^{\frac{1}{2}} \|u^*\|.$$

Da ciò segue la continuità rispetto a u^* del funzionale $F[\zeta, u^*]$.

Fissato z in A , come funzione $u^*(w)$ su $\mathcal{F}A$ assumeremo la funzione di w :

$$u^*(w) = \log |z - w|.$$

Per l'asserita linearità di $F[\zeta, u^*]$ si ha:

$$\frac{g(z + \Delta x, \zeta) - g(z, \zeta)}{\Delta x} = F \left[\zeta, \frac{\log |z + \Delta x - w| - \log |z - w|}{\Delta x} \right].$$

Riesce:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F \left[\zeta, \frac{\log |z + \Delta x - w| - \log |z - w|}{\Delta x} \right] = \\ & = F \left[\zeta, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log |z + \Delta x - w| - \log |z - w|}{\Delta x} \right] = \\ & = F \left[\zeta, \frac{\partial}{\partial x} \log |z - w| \right], \end{aligned}$$

dato che $F[\zeta, u^*]$ è continuo, e dato che la funzione $\frac{\partial}{\partial x} \log |z - w|$ è uniformemente continua al variare di w su $\mathcal{F}A$ e di z in un insieme chiuso contenuto in A .

Ne segue, per ogni z in A e w su $\mathcal{F}A$

$$\frac{\partial}{\partial x} g(z, w) = \frac{\partial}{\partial x} \log |z - w|,$$

dato che $\frac{\partial}{\partial x} \log |z - w|$ è la traccia su $\mathcal{F}A$ di una funzione di $C_1^{(2)}$ (17).

Pertanto $\frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta)$, come funzione di ζ , è armonica ed appartiene a $C_1^{(2)}$, e quindi essa, — cfr. teorema III, — come funzione di ζ appartiene a $L^{(2)}(A)$.

Vogliamo dimostrare, ad esempio, che :

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_A \varphi(\zeta) g(z, \zeta) d_\zeta \tau = \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta) d_\zeta \tau.$$

(17) Indichiamo con $I_{\rho_0}(z)$ il dominio circolare di centro z e raggio ρ_0 , contenuto in A . Introdotta in A un sistema di coordinate polari avente polo in z , diciamo ρ e θ le coordinate di w . La funzione così definita :

$$u(\rho, \theta) \left\{ \begin{array}{l} = \frac{\cos \theta}{\rho} \dots \dots \dots \text{in } A - I_{\rho_0}(z) \\ = \frac{5}{2} \frac{\rho^2 \cos \theta}{\rho_0^3} - \frac{3}{2} \frac{\rho^4 \cos \theta}{\rho_0^5} \dots \dots \dots \text{in } I_{\rho_0}(z) \end{array} \right.$$

appartiene a $C_1^{(2)}$, e su $\mathcal{F}A$ coincide con la funzione :

$$\frac{\partial}{\partial x} \log |z - w| = \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

Infatti, essa è continua anche su $\mathcal{F}I_{\rho_0}(z)$, dato che riesce :

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \frac{\cos \theta}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \left(\frac{5}{2} \frac{\rho^2 \cos \theta}{\rho_0^3} - \frac{3}{2} \frac{\rho^4 \cos \theta}{\rho_0^5} \right) = \frac{\cos \theta}{\rho_0};$$

inoltre la funzione :

$$\frac{\partial u(\rho, \theta)}{\partial \rho} \left\{ \begin{array}{l} = -\frac{\cos \theta}{\rho^2} \dots \dots \dots \text{in } A - I_{\rho_0}(z) \\ = 5 \frac{\rho \cos \theta}{\rho_0^3} - 6 \frac{\rho^3 \cos \theta}{\rho_0^5} \dots \dots \dots \text{in } I_{\rho_0}(z) \end{array} \right.$$

è continua anche su $\mathcal{F}I_{\rho_0}(z)$, essendo :

$$\lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \left(-\frac{\cos \theta}{\rho^2} \right) = \lim_{\rho \rightarrow \rho_0} \left(5 \frac{\rho \cos \theta}{\rho_0^3} - 6 \frac{\rho^3 \cos \theta}{\rho_0^5} \right) = -\frac{\cos \theta}{\rho_0^2}.$$

Per la diseuguaglianza di Cauchy — Schwarz e per il teorema III, si ha:

$$\begin{aligned}
 & \left| \iint_A \varphi(\zeta) \left[\frac{g(z + \Delta x, \zeta) - g(z, \zeta)}{\Delta x} - \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta) \right] d_\zeta \tau \right| \leq \\
 & \leq \left(\iint_A |\varphi(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A \left| \frac{g(z + \Delta x, \zeta) - g(z, \zeta)}{\Delta x} - \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta) \right|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 & \leq [K(\Delta)]^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\varphi(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\bar{\sigma}A} \left| \frac{\log |z + \Delta x - \zeta| - \log |z - \zeta|}{\Delta x} - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \log |z - \zeta| \right|^2 d_\zeta s \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Al limite, per Δx tendente a zero, si ha la tesi.

CAPITOLO III

L'EQUAZIONE DI TIPO ELLITTICO :

$$\Delta_2 u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = f.$$

1. Teorema di unicità relativo alle funzioni di classe due in A ed appartenenti a $C_1^{(2)}$.

Sia A un campo limitato, regolare e di classe due del piano x, y .

Supponiamo che le funzioni $a(z)$ e $b(z)$ siano di classe uno in $A + \mathcal{F}A$, e che $c(z)$ sia continua in $A + \mathcal{F}A$.

Indicheremo con $E(u)$ il seguente operatore :

$$E(u) \equiv \Delta_2 u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u$$

e con $E^*(u)$ il suo aggiunto :

$$E^*(u) \equiv \Delta_2 u - \frac{\partial (a u)}{\partial x} - \frac{\partial (b u)}{\partial y} + c u.$$

Sussiste il seguente teorema d'unicità⁽¹⁾ che generalizza il teorema I del capitolo II:

I. — *Se esiste una funzione $v(z)$ di classe due in $A + \mathcal{F}A$, sempre positiva, e tale che riesca :*

$$(1) \quad E^*(v) + c v \leq 0,$$

allora l'equazione :

$$(2) \quad \Delta_2 u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = 0$$

è sprovvista di autosoluzioni $u(z)$ di classe due in A , appartenenti a $C_1^{(2)}$, nulle su $\mathcal{F}A$.

⁽¹⁾ Cfr. [14].

Sia $u(z)$ una soluzione della (2), appartenente alla classe considerata. Nel campo A_ϱ sussiste la seguente relazione integrale:

$$\iint_{A_\varrho} u^2 [E^*(v) + cv] d\tau = 2 \iint_{A_\varrho} v |\text{grad } u|^2 d\tau + \int_{\mathcal{F}A_\varrho} [u^2 \frac{\partial v}{\partial \nu} - 2uv \frac{\partial u}{\partial \nu} - (a\alpha + b\beta)u^2 v] ds,$$

dove con α e β si sono indicati i coseni direttori dell'asse normale esterno a $\mathcal{F}A_\varrho$. Facciamo tendere ϱ a zero.

Per la continuità della funzione $E^*(v) + cv$, e poichè u^2 è sommabile in A ⁽²⁾, si ha:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \iint_{A_\varrho} u^2 [E^*(v) + cv] d\tau = \iint_A u^2 [E^*(v) + cv] d\tau.$$

Riesce analogamente:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \iint_{A_\varrho} v |\text{grad } u|^2 d\tau = \iint_A v |\text{grad } u|^2 d\tau.$$

Consideriamo l'integrale: $\int_{\mathcal{F}A_\varrho} u^2 \frac{\partial v}{\partial \nu} ds$; per la continuità in $A + \mathcal{F}A$ di $\frac{\partial v}{\partial \nu}$

e per il teorema I del capitolo I, la funzione integranda è uniformemente sommabile su $\mathcal{F}A_\varrho$; pertanto:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}A_\varrho} u^2 \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = \int_{\mathcal{F}A} u^2 \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = 0.$$

In modo analogo si prova che:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}A_\varrho} u^2 v (a\alpha + b\beta) ds = \int_{\mathcal{F}A} u^2 v (a\alpha + b\beta) ds = 0.$$

⁽²⁾ La sommabilità di u^2 in A è una conseguenza della (2) del teorema I capitolo I; infatti la u^2 è continua in A_ϱ , ed è sommabile in $A - A_\varrho$, come segue dalla diseuguaglianza ricordata e dal teorema di Fubini.

Consideriamo l'integrale :

$$\int_{\mathcal{F}A_\varrho} u v \frac{\partial u}{\partial \nu} d s;$$

indicando con M il massimo della funzione $|v|$ in $A + \mathcal{F}A$, per la disegualianza di Cauchy-Schwarz, per la (2) e per la (3) del capitolo I, riesce :

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{F}A_\varrho} u v \frac{\partial u}{\partial \nu} d s \right| &\leq M \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho} |u|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho} |\text{grad } u|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2 Q^{\frac{1}{2}} M \left(\iint_A |\text{grad } u|^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left(\varrho \int_{\mathcal{F}A_\varrho} |\text{grad } u|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

In definitiva, riesce :

$$\iint_A u^2 [E^*(v) + cv] d \tau = 2 \iint_A v |\text{grad } u|^2 d \tau.$$

Il primo membro non è mai positivo, il secondo non è mai negativo : tale relazione perciò è compatibile allora ed allora soltanto che la $u(z)$ sia identicamente nulla.

Osservazione :

La $v(z)$ certamente esiste, se i coefficienti della (2) verificano in $A + \mathcal{F}A$ la disegualianza :

$$2c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \leq 0.$$

Basta assumere $v \equiv 1$.

Il teorema dimostrato è da ritenersi classicamente noto⁽³⁾ se si impone alla u l'ulteriore condizione di essere di classe uno in $A + \mathcal{F}A$.

2. Traduzione del problema al contorno in equazione integrale.

Sia $f(z)$ una funzione appartenente ad $L_h^{(2)}(A)$. Ci proponiamo di stabilire il teorema d'esistenza della soluzione $u(z)$ del problema al

⁽³⁾ Cfr. [36].

contorno :

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta_2 u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u &= f \quad \text{ in } A \\ u &= 0 \quad \text{ su } \mathcal{F}A \end{aligned}$$

nello spazio delle funzioni di classe due in A ed appartenenti a $C_1^{(2)}$.

D'ora in avanti, indicheremo con x e y le coordinate del punto z , con ξ e η quelle del punto ζ .

Su $a(z)$, $b(z)$ e $c(z)$ faremo le ipotesi che $a(z)$ e $b(z)$ siano di classe uno in $A + \mathcal{F}A$, e $c(z)$ sia continua in $A + \mathcal{F}A$ ed hölderiana in A . — *Avvertiamo che tali ipotesi su a , b e c saranno costantemente mantenute in tutto questo capitolo.*

Per conseguire tale teorema, ci serviremo di una traduzione in equazione integrale del problema al contorno (3). Precisamente ci fonderemo sul seguente teorema :

II. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè, assegnata la funzione $f(z)$ in $L_h^{(2)}(A)$, esista la soluzione $u(z)$ del problema al contorno (3), di classe due in A ed appartenente a $C_1^{(2)}$, è che esista in $L_h^{(2)}(A)$ una funzione $\varphi(z)$ soluzione della seguente equazione integrale :*

$$(4) \quad \iint_A \varphi(\zeta) H(z, \zeta) d_\zeta \tau - 2\pi \varphi(z) = f(z),$$

avendo posto :

$$(5) \quad H(z, \zeta) = c(z) G(z, \zeta) + a(z) \frac{\partial}{\partial x} G(z, \zeta) + b(z) \frac{\partial}{\partial y} G(z, \zeta),$$

ed essendo $G(z, \zeta)$ la funzione di Green introdotta al capitolo precedente.

Proviamo la necessità.

Sia $u(z)$ la soluzione del sistema (3). Poniamo :

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_2 u(z);$$

essendo :

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi} f(z) + \frac{1}{2\pi} a(z) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\pi} b(z) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2\pi} c(z) u(z),$$

per le ipotesi ammesse su $f(z)$, $a(z)$, $b(z)$ e $c(z)$, e poichè u appartiene a $C_1^{(2)}$, segue l'appartenenza di $\varphi(z)$ ad $L_h^{(2)}(A)$ ⁽⁴⁾.

(4) È bene ricordare — cfr. [18] — che il prodotto di due funzioni $c(z)$ ed $u(z)$ hölderiane in A , è una funzione hölderiana in A .

In virtù del teorema *V* del capitolo II si ha :

$$(6) \quad u(z) = \iint_A \varphi(\zeta) G(z, \zeta) d_\zeta \tau$$

ed inoltre, per il teorema *VI* del capitolo II :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} G(z, \zeta) d_\zeta \tau \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} G(z, \zeta) d_\zeta \tau .$$

Sostituendo in (3), segue l'asserto.

La condizione è sufficiente. Sia infatti $\varphi(z)$ la soluzione dell'equazione integrale (4). La funzione definita dalla (6) è la richiesta soluzione del problema (3), come segue sempre dai teoremi *V* e *VI* del capitolo II.

Il problema al contorno (3) è così ricondotto allo studio dell'equazione integrale (4).

3. Dimostrazione della totale continuità della trasformazione :

$$(7) \quad T(\varphi) = \iint_A \varphi(\zeta) H(z, \zeta) d_\zeta \tau .$$

Premettiamo il seguente teorema :

III. — *Posto* :

$$H_0(z, \zeta) = -a(z) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - \zeta| - b(z) \frac{\partial}{\partial y} \log |z - \zeta|$$

$$H_1(z, \zeta) = c(z) G(z, \zeta) + a(z) \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta) + b(z) \frac{\partial}{\partial y} g(z, \zeta) ,$$

i due nuclei $H_0(z, \zeta)$ e $H_1(z, \zeta)$ verificano le seguenti condizioni :

$$(8) \quad |H_0(z, \zeta)| \leq \frac{P}{|z - \zeta|} [z \in A, \zeta \in A]; \iint_{A \times A} |H_1(z, \zeta)|^2 d_z \tau d_\zeta \tau < +\infty .$$

Con P si è indicata un'opportuna costante positiva.

Proviamo la prima delle (8).

$$\begin{aligned} |H_0(z, \zeta)| &= \left| a(z) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - \zeta| + b(z) \frac{\partial}{\partial y} \log |z - \zeta| \right| \leq \\ &\leq \frac{|a(z)| + |b(z)|}{|z - \zeta|} . \end{aligned}$$

Detto P il massimo assunto in $A + \mathcal{F}A$ dalla funzione $|a(z) + b(z)|$ segue l'asserto. Per verificare che:

$$\iiint_{A \times A} |H_1(z, \zeta)|^2 d_z \tau d_\zeta \tau < +\infty,$$

basta far vedere che:

$$\iiint_{A \times A} |\text{grad}_z g(z, \zeta)|^2 d_z \tau d_\zeta \tau < +\infty, \quad \iiint_{A \times A} |G(z, \zeta)|^2 d_z \tau d_\zeta \tau < +\infty.$$

La prima relazione è stata dimostrata nel lemma IV del capitolo II; quanto alla seconda, basta far vedere che riesce di quadrato sommabile in $A \times A$ la $g(z, \zeta)$.

Infatti, fissato z in A , per il teorema III del capitolo II, la funzione di ζ : $g(z, \zeta)$ è tale che:

$$\int_A |g(z, \zeta)|^2 d_\zeta \tau \leq K(A) \int_{\mathcal{F}A} |\log |z - \zeta||^2 d_\zeta s;$$

dall'essere il secondo membro funzione sommabile del punto z in A , segue la tesi.

Dimostriamo ora il seguente teorema:

IV. — Sia $H_0(z, \zeta)$ una funzione continua di z e ζ in $A \times A$ privato dei punti $z = \zeta$ e verificante la limitazione

$$|H_0(z, \zeta)| \leq \frac{P}{|z - \zeta|} \quad (P \text{ costante}).$$

Sia $H_1(z, \zeta)$ di quadrato sommabile in $A \times A$.

Posto:

$$H(z, \zeta) = H_0(z, \zeta) + H_1(z, \zeta),$$

la trasformazione lineare:

$$T(\varphi) = \iint_A \varphi(\zeta) H(z, \zeta) d_\zeta \tau$$

è definita per ogni $\varphi(\zeta) \in L^{(2)}(A)$ e muta la $\varphi(\zeta)$ in una funzione di $L^{(2)}(A)$ definita quasi ovunque in A . La $T(\varphi)$ è totalmente continua in $L^{(2)}(A)$.

Per quasi tutti i punti z di A sono sommabili in A le funzioni di ζ :

$$\varphi(\zeta) H_0(z, \zeta) \quad \text{e} \quad \varphi(\zeta) H_1(z, \zeta)$$

dato che esse, come funzioni di z e ζ , lo sono in $A \times A$.

Facciamo vedere che le due funzioni:

$$\psi_0(z) = T_0(\varphi) = \iint_A \varphi(\zeta) H_0(z, \zeta) d_\zeta \tau$$

$$\psi_1(z) = T_1(\varphi) = \iint_A \varphi(\zeta) H_1(z, \zeta) d_\zeta \tau,$$

quasi ovunque definite in A , ed ivi sommabili, appartengono ad $L^{(2)}(A)$.

Siccome $\varphi(\zeta)$ appartiene a $L^{(2)}(A)$ ed è:

$$|H_0(z, \zeta)| \leq \frac{P}{|z - \zeta|},$$

riesce: ⁽⁵⁾

$$\iint_A |\psi_0(z)|^2 d_z \tau < +\infty.$$

Per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha:

$$|\psi_1(z)|^2 \leq \left(\iint_A |\varphi(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right) \left(\iint_A |H_1(z, \zeta)|^2 d_\zeta \tau \right),$$

e, dato che $H_1(z, \zeta)$ è di quadrato sommabile in $A \times A$, si conclude l'appartenenza di $\psi_1(z)$ ad $L^{(2)}(A)$.

Per provare la totale continuità in $L^{(2)}(A)$ della trasformazione $T(\varphi)$, basta dimostrare che $T_0(\varphi)$ e $T_1(\varphi)$ sono totalmente continue in $L^{(2)}(A)$ ⁽⁶⁾.

Nella successione dei nuclei iterati di $H_0(z, \zeta)$:

$$H_{01}(z, \zeta) = \iint_A H_0(z, w) H_0(w, \zeta) d_w \tau$$

$$H_{02}(z, \zeta) = \iint_A H_{01}(z, w) H_0(w, \zeta) d_w \tau$$

.

⁽⁵⁾ Cfr. [15].

⁽⁶⁾ Cfr. [18], pag. 219.

il nucleo iterato secondo $H_{02}(z, \zeta)$ risulta continuo in $A \times A$ (7); pertanto la trasformazione $T_0(\varphi)$ relativa ad $H_0(z, \zeta)$ riesce totalmente continua (8).

La totale continuità della trasformazione $T_1(\varphi)$, poi, segue dall'ipotesi che $H_1(z, \zeta)$ sia di quadrato sommabile in $A \times A$ (9).

Il teorema è completamente dimostrato.

Dai teoremi III e IV si trae che:

Se nella trasformazione lineare (7) il nucleo $H(z, \zeta)$ è definito dalla (5), allora la $T(\varphi)$ muta una funzione φ di $L^{(2)}(A)$ in una funzione di $L^{(2)}(A)$, ed è una trasformazione totalmente continua in $L^{(2)}(A)$.

(7) Cfr. [36], pag. 806 e [29], pag. 301.

(8) Infatti, posto:

$$R_1(\varphi) = \iint_A \varphi(\zeta) [H_0(z, \zeta) + H_0(\zeta, z)] d\zeta \tau$$

$$R_2(\varphi) = i \iint_A \varphi(\zeta) [H_0(\zeta, z) - H_0(z, \zeta)] d\zeta \tau,$$

la $T_0(\varphi)$ può scriversi al modo seguente:

$$(9) \quad T_0(\varphi) = \frac{1}{2} [R_1(\varphi) + i R_2(\varphi)].$$

Le trasformazioni $R_1(\varphi)$ e $R_2(\varphi)$ risultano ovviamente hermitiane; facciamo vedere che esse sono totalmente continue.

Dall'insieme limitato U di $L^{(2)}(A)$, costituito dalle funzioni φ per cui

$$\|\varphi\| \leq M,$$

si estragga una successione $\{\varphi_k\}$.

Applicando la relazione di reciprocità — cfr. [18] — e la diseguglianza di Cauchy — Schwarz, si ha:

$$\begin{aligned} \|R_i(\varphi_h) - R_i(\varphi_k)\|^2 &= (R_i(\varphi_h - \varphi_k), R_i(\varphi_h - \varphi_k)) = \\ &= ((\varphi_h - \varphi_k), R_i^{(2)}(\varphi_h - \varphi_k)) \leq \|\varphi_h - \varphi_k\| \|R_i^{(2)}(\varphi_h - \varphi_k)\| \leq \\ &\leq 2M \|R_i^{(2)}(\varphi_h) - R_i^{(2)}(\varphi_k)\| \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Per la totale continuità di $R_i^{(2)}(\varphi)$, la successione $\{R_i^{(2)}(\varphi_k)\}$ verifica certamente la condizione di Cauchy; ne segue che la successione $\{R_i(\varphi_k)\}$ verifica la medesima condizione, e quindi che l'insieme trasformato di U mediante la $R_i(\varphi)$ ($i = 1, 2$) è compatto. Dalla (9) segue la totale continuità di $T_0(\varphi)$.

(9) Cfr. [18], pag. 479.

Dimostriamo ora che :

V. — Se $f(z)$ appartiene ad $L_h^{(2)}(A)$, e $\varphi(\zeta)$ appartiene ad $L^{(2)}(A)$ ed è soluzione dell'equazione integrale :

$$\iint_A \varphi(\zeta) H(z, \zeta) d_\zeta \tau - 2\pi \varphi(z) = f(z),$$

il cui nucleo $H(z, \zeta)$ è definito dalla (5), $\varphi(z)$ appartiene ad $L_h^{(2)}(A)$.

Proviamo infatti che la funzione di z :

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(\zeta) H_1(z, \zeta) d_\zeta \tau + \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(\zeta) H_0(z, \zeta) d_\zeta \tau - \frac{1}{2\pi} f(z)$$

è hölderiana in A .

Incominciamo col dimostrare la continuità in A di

$$\psi_1(z) = \iint_A \varphi(\zeta) H_1(z, \zeta) d_\zeta \tau.$$

Poniamo :

$$\psi_2(z) = \iint_A \varphi(\zeta) [c(z) g(z, \zeta) + a(z) \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta) + b(z) \frac{\partial}{\partial y} g(z, \zeta)] d_\zeta \tau,$$

per modo che riesce :

$$\psi_1(z) = -c(z) \iint_A \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau + \psi_2(z).$$

Il primo addendo è funzione continua in A per il teorema VII del capitolo I; per provare la continuità di $\psi_2(z)$, basta far vedere che sono continue in A le seguenti funzioni di z :

$$(11) \quad \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta) d_\zeta \tau, \quad \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} g(z, \zeta) d_\zeta \tau, \quad \iint_A \varphi(\zeta) g(z, \zeta) d_\zeta \tau.$$

Applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ed il teorema III del capitolo II, si ha:

$$\begin{aligned} & \left| \iint_A \varphi(\zeta) \left[\frac{\partial}{\partial x} g(z + \Delta z, \zeta) - \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta) \right] d_\zeta \tau \right| \leq \\ & \leq \left(\iint_A |\varphi(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A \left| \frac{\partial}{\partial x} g(z + \Delta z, \zeta) - \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta) \right|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq [K(A)]^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\varphi(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{E}A} \left| \frac{\partial}{\partial x} \log |z + \Delta z - \zeta| - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} \log |z - \zeta| \right|^2 d_\zeta s \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

e quindi l'asserto.

Analogamente si prova la continuità in A del secondo integrale. Quanto al terzo integrale, esso è continuo in A , dato che riesce:

$$\begin{aligned} & \left| \iint_A \varphi(\zeta) [g(z + \Delta z, \zeta) - g(z, \zeta)] d_\zeta \tau \right| \leq \\ & \leq \left(\iint_A |\varphi(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |g(z + \Delta z, \zeta) - g(z, \zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq [K(A)]^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\varphi(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{E}A} |\log |z + \Delta z - \zeta| - \log |z - \zeta||^2 d_\zeta s \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Proviamo la continuità in A della funzione di z :

$$\iint_A \varphi(\zeta) H_0(z, \zeta) d_\zeta \tau.$$

Posto:

$$H_{01}(z, \zeta) = \iint_A H_0(z, w) H_0(w, \zeta) d_w \tau,$$

dalla :

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(\zeta) H_0(z, \zeta) d_\zeta \tau + \frac{1}{2\pi} [\psi_1(z) - f(z)]$$

si trae :

$$\begin{aligned} \iint_A \varphi(\zeta) H_0(z, \zeta) d_\zeta \tau &= \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(\zeta) H_{01}(z, \zeta) d_\zeta \tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \iint_A [\psi_1(\zeta) - f(\zeta)] H_0(z, \zeta) d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Per $H_{01}(z, \zeta)$ si ha, designando con B un'opportuna costante ⁽¹⁰⁾ :

$$|H_{01}(z, \zeta)| < \log \frac{B}{|z - \zeta|};$$

pertanto risulta continua la funzione di z : $\iint_A \varphi(\zeta) H_{01}(z, \zeta) d_\zeta \tau$.

Anche l'integrale :

$$\iint_A [\psi_1(\zeta) - f(\zeta)] H_0(z, \zeta) d_\zeta \tau$$

è funzione di z continua in A , dato che $f(\zeta)$ è continua per ipotesi, $\psi_1(\zeta)$ abbiamo testè dimostrato essere tale, e:

$$|H_0(z, \zeta)| \leq \frac{P}{|z - \zeta|}.$$

Proviamo ora che la (10) è funzione di z hölderiana in A .

La $f(z)$ è per ipotesi hölderiana in A ; la funzione di z :

$$\iint_A \varphi(\zeta) H_0(z, \zeta) d_\zeta \tau$$

è hölderiana in A ⁽¹¹⁾, dato che $\varphi(\zeta)$ è ivi continua, e

$$|H_0(z, \zeta)| \leq \frac{P}{|z - \zeta|}.$$

⁽¹⁰⁾ Cfr. [36], pag. 806.

⁽¹¹⁾ Cfr. [29].

La funzione di z :

$$\iint_A \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau$$

è certamente hölderiana in A ; quanto a $\psi_2(z)$, occorre provare che le funzioni (11) riescono hölderiane in A ; la tesi sarà pertanto conseguita se si dimostra che dette funzioni (11) sono derivabili rispetto a x e y , e che le derivate sono limitate in ogni dominio contenuto in A .

Consideriamo la prima delle funzioni (11).

Ripetendo il ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema VI del capitolo II, si prova che:

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta) d_\zeta \tau = \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(z, \zeta) d_\zeta \tau,$$

ed inoltre si ha:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} g(z, \zeta) d_\zeta \tau \right| &\leq \left(\iint_A |\varphi(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(z, \zeta) \right|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq [K(A)]^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\varphi(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log |z - \zeta| \right|^2 d_\zeta s \right). \end{aligned}$$

Da questa disuguaglianza e dalle analoghe che possono scriversi per le derivate rispetto a y e per le altre funzioni (11), segue l'asserto.

Il teorema è così dimostrato.

4. Teorema di esistenza.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema:

VI. — *Se esiste una funzione $v(z)$ di classe due in $A + \mathcal{F}A$, sempre positiva, e tale che riesca:*

$$E^*(v) + cv \leq 0,$$

assegnata comunque la funzione $f(z)$ in $L_h^{(2)}(A)$, esiste la soluzione del problema (3), di classe due in A , ed appartenente a $C_1^{(2)}$.

Infatti, se esiste una funzione v siffatta, per il teorema I il problema al contorno:

$$\begin{aligned} \Delta_2 u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu &= 0 \quad \text{ in } A \\ u &= 0 \quad \text{ su } \mathcal{F}A \end{aligned}$$

è sprovvisto di autosoluzioni di classe due in A ed appartenenti a $C_1^{(2)}$. Per il teorema II allora, l'equazione integrale:

$$\iint_A \varphi(\zeta) H(z, \zeta) d_\zeta \tau - 2\pi \varphi(z) = 0$$

è sprovvista di autosoluzioni in $L_h^{(2)}(A)$, e quindi 2π non è autovalore della trasformazione totalmente continua $T(\varphi)$. Ne segue che ⁽¹²⁾ esiste in $L^{(2)}(A)$ e, per il teorema V, in $L_h^{(2)}(A)$, la soluzione φ dell'equazione integrale (4). Per il teorema II, esiste pure la soluzione $u(z)$ di classe due in A ed appartenente a $C_1^{(2)}$, del problema (3).

⁽¹²⁾ Cfr. [2].

CAPITOLO IV

IL SISTEMA DI EQUAZIONI DELL'ELASTICITÀ PIANA

1. Richiami e premesse.

Se $u_1(z)$ e $u_2(z)$ sono due funzioni definite in A , con $\vec{u}(z) \equiv (u_1(z), u_2(z))$ indicheremo il vettore avente quelle funzioni come componenti.

Diremo che il vettore \vec{u} appartiene a $\mathcal{C}_1^{(2)}$, ad $\mathcal{L}^{(2)}(A)$, ad $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$, se le sue componenti appartengono rispettivamente a $C_1^{(2)}$, $L^{(2)}(A)$, e $L_h^{(2)}(A)$.

Nel campo A limitato, regolare e di classe due, considereremo il seguente sistema di equazioni differenziali nelle componenti u_1 e u_2 del vettore \vec{u} :

$$(1) \quad \begin{cases} A_2 u_1 + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = 0 \\ A_2 u_2 + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = 0, \end{cases}$$

essendo x e y le coordinate di un punto z di A , e k una costante numerica. In forma vettoriale, il sistema si scrive al modo seguente:

$$(1_0) \quad A_2 \vec{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Con $\vec{\nu} \equiv (\alpha, \beta)$ indicheremo il versore della normale ad $\mathcal{F}A$ in un suo punto regolare, diretto verso l'esterno di A , e porremo

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \nu} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \alpha + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \beta.$$

Indicata con λ una costante numerica, con $P[\vec{u}] \equiv (P_1[\vec{u}], P_2[\vec{u}])$ denoteremo il vettore le cui componenti sono così definite su $\mathcal{F}A$:

$$\begin{aligned} P_1[\vec{u}] &= k \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \alpha + \frac{\partial u_1}{\partial \nu} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial s} \\ P_2[\vec{u}] &= k \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \beta + \frac{\partial u_2}{\partial \nu} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial s}. \end{aligned}$$

Con $\vec{P}[\vec{u}]$ converremo di indicare l'operatore $P[\vec{u}]$, ove si ponga: $\lambda = -1$. Considereremo il seguente primo problema fondamentale dell'elastostatica piana: *Assegnato su \mathcal{FA} il vettore $\vec{u}^*(\zeta) \equiv [u_1^*(\zeta), u_2^*(\zeta)]$, determinare in $\mathcal{C}_1^{(2)}$ il vettore $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z)]$ di classe due in A , soluzione in A della (1₀) e coincidente con \vec{u}^* su \mathcal{FA} .*

Supposto $k \neq -1$, si consideri la seguente matrice (di Somigliana):

$$\left\| \begin{array}{cc} 4 \log |z - \zeta| - & \frac{-k}{k+1} \frac{\partial^2 |z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|}{\partial x \partial y} \\ \frac{-k}{k+1} \frac{\partial^2 |z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|}{\partial x^2} & \\ \\ \frac{-k}{k+1} \frac{\partial^2 |z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|}{\partial x \partial y} & 4 \log |z - \zeta| - \\ & \frac{-k}{k+1} \frac{\partial^2 |z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|}{\partial y^2} \end{array} \right\| ,$$

dove $z \equiv (x, y)$ e $\zeta \equiv (\xi, \eta)$ sono due punti di A .

Diremo $\vec{s}^{(i)}(z, \zeta) \equiv (s_1^{(i)}(z, \zeta), s_2^{(i)}(z, \zeta))$ il vettore avente per componenti i due elementi della riga i -esima di questa matrice ed indicheremo con $\mathcal{S}(z, \zeta)$ la matrice stessa. Con semplici calcoli, si prova che $\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)$ ($i = 1, 2$), fissato $\zeta[z]$ in A , è, come funzione di $z[\zeta]$, soluzione in $A - \zeta[A - z]$ della (1₀).

Applicando ai vettori della matrice di Somigliana l'operatore P , si trova (1):

$$\begin{aligned} P_{1z}[\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)] &= \frac{4k(1+\lambda)}{k+1} \frac{(x-\xi)^2}{|z-\zeta|^2} \frac{\partial}{\partial v_z} \log |z-\zeta| + \\ &+ \frac{4+2k(1-\lambda)}{k+1} \frac{\partial}{\partial v_z} \log |z-\zeta| \\ P_{2z}[\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)] &= \frac{4k(1+\lambda)}{k+1} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{|z-\zeta|^2} \frac{\partial}{\partial v_z} \log |z-\zeta| + \\ &+ \frac{2k-2\lambda(k+2)}{k+1} \left[\frac{x-\xi}{|z-\zeta|^2} \beta - \frac{y-\eta}{|z-\zeta|^2} \alpha \right] \end{aligned}$$

(1) Avvertiamo che d'ora in avanti, scrivendo $P_{\#}[\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]$, intenderemo che l'operatore P è applicato al vettore $\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)$, pensato come funzione di z .

$$\begin{aligned}
P_{1z} [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)] &= \frac{4k(1+\lambda)}{k+1} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{|z-\zeta|^2} \frac{\partial}{\partial v_z} \log |z-\zeta| + \\
&+ \frac{2k-2\lambda(k+2)}{k+1} \left[\frac{y-\eta}{|z-\zeta|^2} \alpha - \frac{x-\xi}{|z-\zeta|^2} \beta \right] \\
P_{2z} [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)] &= \frac{4k(1+\lambda)}{k+1} \frac{(y-\eta)^2}{|z-\zeta|^2} \frac{\partial}{\partial v_z} \log |z-\zeta| + \\
&+ \frac{4+2k(1-\lambda)}{k+1} \frac{\partial}{\partial v_z} \log |z-\zeta|.
\end{aligned}$$

In particolare, per $\lambda = -1$, si ha:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{1z} [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)] &= 4 \frac{\partial}{\partial v_z} \log |z-\zeta| \\
\tilde{P}_{2z} [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)] &= 4 \left[\frac{x-\xi}{|z-\zeta|^2} \beta - \frac{y-\eta}{|z-\zeta|^2} \alpha \right] \\
\tilde{P}_{1z} [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)] &= 4 \left[\frac{y-\eta}{|z-\zeta|^2} \alpha - \frac{x-\xi}{|z-\zeta|^2} \beta \right] \\
\tilde{P}_{2z} [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)] &= 4 \frac{\partial}{\partial v_z} \log |z-\zeta|.
\end{aligned}$$

Osserviamo una formula integrale, che si dimostra con una assai semplice applicazione del teorema di Gauss Green, e che sussiste per i vettori $\vec{u} \equiv (u_1, u_2)$ di classe uno in $A + \mathcal{FA}$, e $\vec{v} \equiv (v_1, v_2)$ di classe due in A , ed aventi il $\Delta_2 \vec{v} + k \text{ grad div } \vec{v}$ sommabile in A :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{FA}} (\vec{u} \times P[\vec{v}]) ds - \iint_A \left\{ \vec{u} \times (\Delta_2 \vec{v} + k \text{ grad div } \vec{v}) \right\} d\tau = \\
(2) \quad &\iint_A \left[k \text{ div } \vec{u} \text{ div } \vec{v} + \text{grad } u_1 \times \text{grad } v_1 + \text{grad } u_2 \times \text{grad } v_2 + \right. \\
&\left. + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right] d\tau.
\end{aligned}$$

Nel caso $\lambda = -1$, la (2) diventa:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{FA}} (\vec{u} \times \tilde{P}[\vec{v}]) ds - \iint_A \left\{ \vec{u} \times (\Delta_2 \vec{v} + k \text{ grad div } \vec{v}) \right\} d\tau = \\
(3) \quad &\iint_A \left[(k+1) \text{ div } \vec{u} \text{ div } \vec{v} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] d\tau.
\end{aligned}$$

Sussiste il seguente teorema :

I. — Se $\vec{\varphi}(\zeta) \equiv [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ è un vettore appartenente ad $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$, il vettore $\vec{v}(z) \equiv [v_1(z), v_2(z)]$ definito in A al modo seguente :

$$v_1(z) = \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{s}^{(1)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

$$v_2(z) = \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{s}^{(2)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

è di classe due in A , appartiene a $\mathcal{C}_1^{(2)}$, e verifica in A la seguente relazione :

$$(4) \quad \Delta_2 \vec{v} + k \text{ grad div } \vec{v} = 8 \pi \vec{\varphi}.$$

L'essere $\vec{v}(z)$ di classe due in A , ed il sussistere della (4), si prova con semplici estensioni formali della dimostrazione ⁽²⁾ che si segue per provare l'analoga circostanza relativamente al potenziale logaritmico : $\iint_A \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau$.

Basta quindi solo provare l'appartenenza ad $\mathcal{L}^{(2)}(A)$ delle derivate parziali del prim'ordine di $v_i(z)$. Poichè, detta B un'opportuna costante, si ha, come si constata con ovvii calcoli :

$$|\text{grad } v_i(z)| \leq B \iint_A |\vec{\varphi}(\zeta)| \frac{1}{|z - \zeta|} d_\zeta \tau,$$

basta provare che il secondo membro è funzione di z appartenente ad $\mathcal{L}^{(2)}(A)$. A tal uopo, si osservi che la funzione di w, z, ζ

$$|\vec{\varphi}(\zeta)| |\vec{\varphi}(w)| \frac{1}{|z - \zeta|} \frac{1}{|z - w|}$$

è sommabile in $A \times A \times A$, come segue dal teorema di Tonelli (integrando prima rispetto a z , e poi rispetto alle altre due variabili) e dalla disegualianza ⁽³⁾ :

$$\iint_A \frac{1}{|z - \zeta|} \frac{1}{|z - w|} d_z \tau \leq \log \frac{D}{|\zeta - w|} \quad (D \text{ costante}).$$

⁽²⁾ Cfr. [28], [29].

⁽³⁾ Cfr. [36].

Da ciò ovviamente l'asserto.

Vogliamo ora stabilire un teorema che useremo in seguito.

Detto $\vec{u}^*(\zeta) \equiv [u_1^*(\zeta), u_2^*(\zeta)]$ un vettore sommabile su $\mathcal{F}A$, e posto:

$$(5) \quad \begin{aligned} 2\pi\psi_1(z) &= \int_{\mathcal{F}A} u_1^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| d_\zeta s - \\ &\quad - \int_{\mathcal{F}A} u_2^*(\zeta) \left[\frac{x - \xi}{|z - \zeta|^2} \beta - \frac{y - \eta}{|z - \zeta|^2} \alpha \right] d_\zeta s \\ 2\pi\psi_2(z) &= - \int_{\mathcal{F}A} u_1^*(\zeta) \left[\frac{y - \eta}{|z - \zeta|^2} \alpha - \frac{x - \xi}{|z - \zeta|^2} \beta \right] d_\zeta s + \\ &\quad + \int_{\mathcal{F}A} u_2^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| d_\zeta s, \end{aligned}$$

sia $\bar{\zeta}$ un punto regolare di $\mathcal{F}A$, z' un punto normale sulla interna a $\mathcal{F}A$ in $\bar{\zeta}$ e z'' il suo simmetrico rispetto a $\bar{\zeta}$.

Vogliamo dimostrare che:

II. Per quasi tutti i punti $\bar{\zeta}$ su $\mathcal{F}A$ si ha:

$$\lim_{z' \rightarrow \bar{\zeta}} [\psi_i(z') - \psi_i(z'')] = u_i^*(\bar{\zeta}) \quad (i = 1, 2).$$

Detti $\sigma_{i1}(z)$ e $\sigma_{i2}(z)$ i due integrali dei quali $2\pi\psi_i(z)$ è somma, occorre far vedere che — cfr. teorema V cap. I:

$$\lim_{z' \rightarrow \bar{\zeta}} [\sigma_{12}(z') - \sigma_{12}(z'')] = 0 \quad , \quad \lim_{z' \rightarrow \bar{\zeta}} [\sigma_{21}(z') - \sigma_{21}(z'')] = 0.$$

Occupiamoci di $\sigma_{12}(z)$, dato che la dimostrazione che faremo per tale integrale sussisterà identica per $\sigma_{21}(z)$, avendo i due integrali — a meno del segno — lo stesso nucleo.

Sia $\bar{\zeta}$ un punto interno ad un arco di classe due di $\mathcal{F}A$.

Assumiamo l'asse tangente positivo a $\mathcal{F}A$ come asse x , e quello normale (interno) come asse y .

Sia $C(h)$ l'arco di $\mathcal{F}A$ passante per $\bar{\zeta}$, e rappresentato nel riferimento adottato, da:

$$\eta = f(\xi) \quad (-h \leq \xi \leq +h).$$

Poniamo :

$$\sigma_{12}^{(1)}(z) = \int_{O(h)} u_2^*(\zeta) \left[\frac{x - \xi}{|z - \zeta|^2} \beta - \frac{y - \eta}{|z - \zeta|^2} \alpha \right] d_\zeta s ,$$

$$\sigma_{12}^{(2)}(z) = \int_{\mathcal{F}_A - O(h)} u_2^*(\zeta) \left[\frac{x - \xi}{|z - \zeta|^2} \beta - \frac{y - \eta}{|z - \zeta|^2} \alpha \right] d_\zeta s .$$

Si ha, qualunque sia $h > 0$:

$$\lim_{z' \rightarrow \bar{\zeta}} [\sigma_{12}^{(2)}(z') - \sigma_{12}^{(2)}(z'')] = 0 .$$

Si ha d'altra parte, tenendo presente che riesce, per $\zeta \in C(h)$:

$$\alpha = \frac{d\eta}{ds} = \frac{f'(\xi)}{\sqrt{1 + [f'(\xi)]^2}} , \beta = -\frac{d\xi}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{1 + [f'(\xi)]^2}} , d_\zeta s = \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2} d\xi ,$$

$$\frac{x - \xi}{|z' - \zeta|^2} \beta - \frac{y - \eta}{|z' - \zeta|^2} \alpha = \left[\frac{\xi}{\xi^2 + (l - \eta)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{l - \eta}{\xi^2 + (l - \eta)^2} f'(\xi) \right] \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(\xi)]^2}} ,$$

avendo indicato con l l'ordinata di z' .

Analogamente :

$$\frac{x - \xi}{|z'' - \zeta|^2} \beta - \frac{y - \eta}{|z'' - \zeta|^2} \alpha = \left[\frac{\xi}{\xi^2 + (l + \eta)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{l + \eta}{\xi^2 + (l + \eta)^2} f'(\xi) \right] \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(\xi)]^2}} .$$

Avremo quindi :

$$\sigma_{12}^{(1)}(z') - \sigma_{12}^{(1)}(z'') = \int_{-h}^{+h} u_2^*[\xi, f(\xi)] \xi \left(\frac{1}{\xi^2 + (l - \eta)^2} - \frac{1}{\xi^2 + (l + \eta)^2} \right) d\xi +$$

$$+ \int_{-h}^{+h} u_2^*[\xi, f(\xi)] f(\xi) f'(\xi) \left(\frac{1}{\xi^2 + (l - \eta)^2} - \frac{1}{\xi^2 + (l + \eta)^2} \right) d\xi -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{-h}^{+h} u_2^* [\xi, f(\xi)] l f'(\xi) \left(\frac{1}{\xi^2 + (l - \eta)^2} + \frac{1}{\xi^2 + (l + \eta)^2} \right) d\xi = \\
& = F(l) + G(l) + H(l).
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda $F(l)$, osserviamo che:

$$\xi \left(\frac{1}{\xi^2 + (l - \eta)^2} - \frac{1}{\xi^2 + (l + \eta)^2} \right) = \frac{4 l \xi \eta}{[\xi^2 + (l + \eta)^2][\xi^2 + (l - \eta)^2]}$$

e dato che, per $-h \leq \xi \leq +h$:

$$|\eta| = |f(\xi)| \leq M \xi^2$$

con M costante opportuna, si trae:

$$\frac{4 l \xi \eta}{[\xi^2 + (l + \eta)^2][\xi^2 + (l - \eta)^2]} \left\{ \begin{array}{l} \leq \frac{4 M \xi (l + \eta)}{\xi^2 + (l + \eta)^2} \leq 2 M \dots \text{ per } f(\xi) > 0 \\ \leq \frac{4 M \xi (l - \eta)}{\xi^2 + (l - \eta)^2} \leq 2 M \dots \text{ per } f(\xi) < 0. \end{array} \right.$$

Quindi, in ogni caso:

$$|u_2^* [\xi, f(\xi)] \xi \left(\frac{1}{\xi^2 + (l - \eta)^2} - \frac{1}{\xi^2 + (l + \eta)^2} \right)| \leq 2 M |u_2^* [\xi, f(\xi)]|;$$

ciò prova la uniforme sommabilità rispetto ad l della funzione a primo membro, epperò, fissato $h > 0$:

$$\lim_{l \rightarrow 0} F(l) = 0.$$

Così pure si constata immediatamente la uniforme sommabilità rispetto ad l dell'integrando di $G(l)$. Ciò implica, per ogni fissato $h > 0$:

$$\lim_{l \rightarrow 0} G(l) = 0.$$

Occupiamoci di $H(l)$.

In $(-h, +h)$ riesce:

$$|f(\xi)| \leq M \xi^2 \quad , \quad |f'(\xi)| \leq M |\xi|,$$

essendo M un'opportuna costante. Possiamo anche supporre h tale che :
 $Mh < 1$. Si ha, per : $-h \leq \xi \leq +h$:

$$\xi^2 + (l - \eta)^2 \geq \xi^2 + l^2 - 2l|\eta| \geq \xi^2 + l^2 - 2lM\xi^2 \geq \xi^2 + l^2 - 2lMh|\xi| \geq \xi^2 + l^2 - Mh(\xi^2 + l^2) = (1 - Mh)(\xi^2 + l^2).$$

Esiste quindi un numero positivo p tale che :

$$\xi^2 + (l - \eta)^2 \geq p(\xi^2 + l^2).$$

Analogamente si prova che :

$$\xi^2 + (l + \eta)^2 \geq p(\xi^2 + l^2).$$

Si ha infine, tenendo presente che $|f'(\xi)| \leq M|\xi|$:

$$\left| l f'(\xi) \left(\frac{1}{\xi^2 + (l - \eta)^2} + \frac{1}{\xi^2 + (l + \eta)^2} \right) \right| \leq \frac{2M}{p} \frac{l|\xi|}{\xi^2 + l^2} \leq \frac{M}{p}$$

e quindi anche :

$$\lim_{l \rightarrow 0} H(l) = 0.$$

Il teorema è così dimostrato.

2. Forma quadratica associata ai problemi dell'elastostatica piana.

Al secondo membro della (2), se assumiamo $\vec{u} \equiv \vec{v}$, l'integrando è una forma quadratica nelle variabili : $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, con :

$$(6) \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad \varepsilon_4 = \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

È opportuno, per gli ulteriori sviluppi, studiare tale forma quadratica. Sussiste il seguente lemma :

III. *La seguente forma quadratica nelle quattro variabili indipendenti :*

$$(7) \quad \pi = (k + 1) \varepsilon_1^2 + 2(k - \lambda) \varepsilon_1 \varepsilon_4 + \varepsilon_2^2 + 2\lambda \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2 + (k + 1) \varepsilon_4^2$$

è definita (positiva) allora ed allora soltanto che k e λ verificano le seguenti limitazioni :

$$(8) \quad \begin{cases} k > -1 \\ -1 < \lambda < \gamma_k, \end{cases}$$

essendo γ_k il minore fra i due numeri 1 e $2k + 1$.

Indichiamo con Δ il discriminante di π :

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} k+1 & 0 & 0 & k-\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ k-\lambda & 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix}.$$

Condizione perchè π risulti definita positiva, è che:

$$(9) \quad \begin{cases} k+1 > 0 \\ (k+1)(1-\lambda^2) > 0 \\ (1-\lambda^2)[(k+1)^2 - (\lambda-k)^2] > 0. \end{cases}$$

La prima disuguaglianza implica $k > -1$, la seconda $-1 < \lambda < 1$, la terza vuole che sia allo stesso tempo:

$$\lambda < 2k+1, \quad \lambda > -1,$$

pertanto, affinchè π sia definita positiva, k e λ devono verificare le (8).

IV. Se $\vec{v}(z)$ è un vettore appartenente a $\mathcal{C}_1^{(2)}$, e se k e λ verificano le (8), sussiste la disuguaglianza:

$$\iint_A \left[k (\operatorname{div} \vec{v})^2 + |\operatorname{grad} v_1|^2 + |\operatorname{grad} v_2|^2 + 2\lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] d_x \tau \geq \\ N(k, \lambda) \iint_A (|\operatorname{grad} v_1|^2 + |\operatorname{grad} v_2|^2) d_x \tau,$$

avendo posto:

$$N(k, \lambda) = \frac{1}{4} \frac{(1-\lambda)^2 (k+1)^2 - (1-\lambda)^2 (\lambda-k)^2}{(k+1)(1-\lambda^2) + (k+1)^2 - (k-\lambda)^2}.$$

Infatti, tenendo presenti le posizioni (6), si ha:

$$\pi = \varepsilon_1^2 \left[(k+1) + 2(k-\lambda) \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_1} + (k+1) \left(\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_1} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^2 + 2\lambda \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} + \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \right)^2 \right].$$

Determiniamo i valori di $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, $\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$; $\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_1}$ che rendono minima l'espressione (positiva) che compare fra parentesi quadra.

Posto :

$$r = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad s = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \quad t = \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_1},$$

annulliamone le derivate parziali rispetto a r, s, t :

$$\begin{cases} r + \lambda s & = 0 \\ \lambda r + s & = 0 \\ (k + 1)t & = (\lambda - k). \end{cases}$$

Tale sistema implica :

$$r = 0, \quad s = 0, \quad t = \frac{\lambda - k}{k + 1}.$$

Riesce quindi :

$$\begin{aligned} \pi &\geq \varepsilon_1^2 \left[(k + 1) - 2 \frac{(\lambda - k)^2}{k + 1} + \frac{(\lambda - k)^2}{k + 1} \right] = \\ &= \varepsilon_1^2 \frac{(k + 1)^2 (1 - \lambda^2) - (\lambda - k)^2 (1 - \lambda^2)}{(k + 1) (1 - \lambda^2)} = \varepsilon_1^2 \frac{\Delta}{\Delta_{11}}, \end{aligned}$$

dove con Δ si è indicato il discriminante della forma π , con Δ_{rs} il complemento algebrico del coefficiente di $\varepsilon_r \varepsilon_s$ in π .

Mettendo in evidenza nella π : $\varepsilon_2^2, \varepsilon_3^2, \varepsilon_4^2$, si ottiene :

$$\pi \geq \varepsilon_2^2 \frac{\Delta}{\Delta_{22}}, \quad \pi \geq \varepsilon_3^2 \frac{\Delta}{\Delta_{33}}, \quad \pi \geq \varepsilon_4^2 \frac{\Delta}{\Delta_{44}}.$$

Sommando membro a membro le quattro disequaglianze trovate, si ha :

$$\pi \geq \frac{\Delta}{4} \left(\frac{\varepsilon_1^2}{\Delta_{11}} + \frac{\varepsilon_2^2}{\Delta_{22}} + \frac{\varepsilon_3^2}{\Delta_{33}} + \frac{\varepsilon_4^2}{\Delta_{44}} \right).$$

Indicata con $\bar{\Delta}(k, \lambda)$ una funzione definita per $k > -1$ e $-1 < \lambda < \gamma_k$, la quale maggiori le funzioni :

$$\Delta_{11}(k, \lambda) = \Delta_{44}(k, \lambda) = (k + 1)(1 - \lambda^2),$$

$$\Delta_{22}(k, \lambda) = \Delta_{33}(k, \lambda) = (k + 1)^2 - (k - \lambda)^2,$$

si ha :

$$\pi \geq \frac{\Delta}{4\bar{\Delta}} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2) = N(k, \lambda) (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2).$$

Siccome $\Delta_{11}(k, \lambda)$ e $\Delta_{22}(k, \lambda)$ sono entrambe funzioni positive per $k > -1$, $-1 < \lambda < \gamma_k$ — cfr. le (9) — come funzione $\bar{\Delta}(k, \lambda)$ possiamo assumere la funzione :

$$\bar{\Delta}(k, \lambda) = \Delta_{11}(k, \lambda) + \Delta_{22}(k, \lambda) = (k+1)(1-\lambda^2) + (k+1)^2 - (k-\lambda)^2.$$

Riesce allora :

$$N(k, \lambda) = \frac{1}{4} \frac{(k+1)^2(1-\lambda^2) - (1-\lambda^2)(\lambda-k)^2}{(k+1)(1-\lambda^2) + (k+1)^2 - (k-\lambda)^2}.$$

3. Teorema di esistenza ed unicità relativo al primo problema dell'elastostatica piana, nella classe $\mathcal{C}_1^{(2)}$.

Sia A un campo limitato, regolare e di classe due del piano x, y . Assegnato su \mathcal{FA} il vettore $\vec{u}^*(\zeta) \equiv [u_1^*(\zeta), u_2^*(\zeta)]$, indichiamo — cfr. cap. II — con $\bar{\mathcal{C}}_1^{(2)}$ la sottoclasse di $\mathcal{C}_1^{(2)}$ costituita da tutti i vettori $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z)]$ di $\mathcal{C}_1^{(2)}$ che quasi ovunque su \mathcal{FA} verificano le relazioni :

$$(10) \quad \lim_{z \rightarrow \zeta} u_1(z) = u_1^*(\zeta), \quad \lim_{z \rightarrow \zeta} u_2(z) = u_2^*(\zeta).$$

D'ora in avanti, supposto $k > -1$, ad ogni vettore $\vec{u} \equiv (u_1, u_2)$ di $\bar{\mathcal{C}}_1^{(2)}$ faremo corrispondere il vettore $J[\vec{u}] \equiv (J_1[\vec{u}], J_2[\vec{u}])$ così definito :

$$J_1[\vec{u}] = (k+1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{div} \vec{u}$$

$$J_2[\vec{u}] = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

In tal modo, anzichè :

$$\iint_A \left[(k+1) \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{v} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] d_z \tau,$$

scriveremo più semplicemente :

$$\iint_A \{J[\vec{u}] \times J[\vec{v}]\} d\tau.$$

Avvertiamo che, scrivendo $J_z[\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]$, intenderemo dire che il vettore $\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)$ è pensato come funzione di z .

Sussiste il seguente teorema di esistenza ed unicità per il primo problema della elastostatica piana nella classe $\mathcal{C}_1^{(2)}$, il quale contiene, come caso particolare ($k=0$), il teorema I del capitolo II.

V. Se è $k > -1$, e se $\overline{\mathcal{C}}_1^{(2)}$ non è vuota, esiste in essa uno ed un solo vettore $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z)]$ di classe due in A , soluzione in A della (1₀).

Dimostriamo dapprima il teorema d'esistenza.

Se I è un intervallo aperto contenente $A + \mathcal{F}A$, indichiamo con B il campo — cfr. teorema I capitolo II — definito al modo seguente:

$$B = I - (A + \mathcal{F}A).$$

Sia $\{\vec{\psi}^{(k)}(z)\}$ un sistema di vettori a due componenti continui in $B + \mathcal{F}B$, completo in $\mathcal{L}^{(2)}(B)$. Posto

$$\vec{v}^{(k)}(z) = \iint_B [\vec{\psi}^{(k)}(\zeta) * \mathcal{S}(z, \zeta)] d_\zeta \tau^{(4)} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

i vettori $\vec{v}^{(k)}(z) \equiv [v_1^{(k)}(z), v_2^{(k)}(z)]$ riescono soluzioni in A della (1₀), e sono di classe uno in $A + \mathcal{F}A$.

(4) In generale, se \vec{u} è un vettore a n componenti (u_1, u_2, \dots, u_n) , e \mathcal{U} è una matrice costituita da m vettori $\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}, \dots, \vec{U}^{(m)}$ ad n componenti:

$$\mathcal{U} \equiv \left\| \begin{array}{cccc} U_1^{(1)} & U_2^{(1)} & \dots & U_n^{(1)} \\ U_1^{(2)} & U_2^{(2)} & \dots & U_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_1^{(m)} & U_2^{(m)} & \dots & U_n^{(m)} \end{array} \right\|,$$

col simbolo $u * \mathcal{U}$ denoteremo il vettore, le cui m componenti sono definite al modo seguente:

$$u_1 U_1^{(1)} + u_2 U_2^{(1)} + \dots + u_n U_n^{(1)}, \quad u_1 U_1^{(2)} + u_2 U_2^{(2)} + \dots + u_n U_n^{(2)}, \dots$$

$$\dots, u_1 U_1^{(m)} + u_2 U_2^{(m)} + \dots + u_n U_n^{(m)}.$$

Supponiamo, ciò che è lecito, che il sistema $\{J[\vec{v}^{(k)}]\}$ sia ortonormale in A , verifichi cioè le condizioni:

$$\iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}] \times J[\vec{v}^{(k)}]\} d\tau = \delta_k^k \quad (5),$$

e poniamo:

$$a_k = \int_{\vec{\mathcal{A}}} \{\vec{u}^* \times \overset{\circ}{P}[\vec{v}^{(k)}]\} d\mathcal{S}.$$

Poichè $\mathcal{C}_1^{(2)}$ è per ipotesi non vuota, diciamo $\vec{U}(z)$ un vettore di $\mathcal{C}_1^{(2)}$ verificante le (10). Per il teorema I, capitolo I, si ha:

$$a_k = \iint_A \{J[\vec{U}] \times J[\vec{v}^{(k)}]\} d\tau \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Dall'esistenza del vettore $J[\vec{U}]$ soluzione di questo sistema di infinite equazioni, segue, per la ben nota diseuguaglianza di Bessel ⁽⁶⁾, la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$. Allora la serie dei vettori: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k J[\vec{v}^{(k)}]$ converge in media in A , dato che riesce:

$$\iint_A \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k J[\vec{v}^{(k)}] \right|^2 d\tau = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \quad (p \text{ intero positivo}).$$

Essendo le componenti dei suoi termini funzioni bi-iperarmoniche, essa converge uniformemente nell'interno di A ⁽⁷⁾ assieme a qualsiasi sua serie derivata. Indicato con $\vec{\Phi} \equiv (\Phi_1, \Phi_2)$ il vettore somma della serie, si ha:

$$(11) \quad a_k = \int_{\vec{\mathcal{A}}} \{\vec{u}^* \times \overset{\circ}{P}[\vec{v}^{(k)}]\} d\mathcal{S} = \iint_A \{\vec{\Phi} \times J[\vec{v}^{(k)}]\} d\tau.$$

⁽⁵⁾ Quanto all'ortonormalizzazione in A di $\{J[\vec{v}^{(k)}]\}$, si può ripetere quanto detto nel capitolo II, ^(*)

⁽⁶⁾ Cfr. [18].

⁽⁷⁾ Cfr. [10].

Facciamo vedere che in ogni punto z esterno ad A riesce :

$$\int_{\mathcal{A}} \{\vec{u}^*(\zeta) * \overset{\circ}{P}_\zeta [\mathcal{S}(z, \zeta)]\} d_\zeta s - \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) * J_\zeta [\mathcal{S}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau = 0 .$$

Infatti, ricordando l'espressione di $\vec{v}^{(k)}(z)$, dalla (11) si trae :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{A}} \left\{ \vec{u}^*(\zeta) \times \left[\iint_B \{\vec{\psi}^{(k)}(z) * \overset{\circ}{P}_\zeta [\mathcal{S}(z, \zeta)]\} d_z \tau \right] \right\} d_\zeta s - \\ & - \iint_A \left\{ \vec{\Phi}(\zeta) \times \left[\iint_B \{\vec{\psi}^{(k)}(z) * J_\zeta [\mathcal{S}(z, \zeta)]\} d_z \tau \right] \right\} d_\zeta \tau = 0 , \end{aligned}$$

e, ripetendo un ragionamento analogo a quello seguito nel teorema I del capitolo II, si dimostra che è lecito invertire l'ordine d'integrazione, di modo che riesce :

$$\iint_B \vec{\psi}^{(k)}(z) \times \left[\int_{\mathcal{A}} \{\vec{u}^*(\zeta) * \overset{\circ}{P}_\zeta [\mathcal{S}(z, \zeta)]\} d_\zeta s - \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) * J_\zeta [\mathcal{S}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau \right] d_z \tau = 0 .$$

Il vettore definito come segue :

$$\vec{F}(z) = \int_{\mathcal{A}} \{\vec{u}^*(\zeta) * \overset{\circ}{P}_\zeta [\mathcal{S}(z, \zeta)]\} d_\zeta s - \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) * J_\zeta [\mathcal{S}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau$$

riesce continuo in B ed appartiene a $\mathcal{L}^{(2)}(B)$; verificando esso le relazioni :

$$\iint_B [\vec{\psi}^{(k)}(z) \times \vec{F}(z)] d_z \tau = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) ,$$

risulta identicamente nullo in B e, per la sua analiticità, è nullo in ogni punto z esterno ad A .

Il vettore $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z)]$ definito in A al modo seguente :

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{A}} \{\vec{u}^*(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s - \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau \\ (12) \quad u_2(z) &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{A}} \{\vec{u}^*(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s - \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau \end{aligned}$$

è la soluzione del problema.

Proviamo anzitutto che tale vettore è soluzione in A della (1₀).

Il vettore di componenti:

$$(13) \quad \int_{\mathcal{A}} \{\vec{u}^*(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s \quad (i = 1, 2)$$

è ovviamente di classe due in A ed ivi soluzione della (1₀). Se D è un campo regolare tale che $D + \mathcal{D}$ sia contenuto in A e contenente all'interno arbitrario il punto z , si ha:

$$(14) \quad \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau = \iint_{A-D} \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau + \\ + \iint_D \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau.$$

Il vettore di componenti:

$$\iint_{A-D} \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau \quad (i = 1, 2)$$

è di classe due e soluzione in D della (1₀), come si constata con ovvii calcoli, data la possibilità di derivare sotto il segno. Il vettore di componenti

$$\iint_D \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau \quad (i = 1, 2)$$

può trasformarsi, mediante le formule di Green ⁽⁸⁾, al modo seguente:

$$\iint_D \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau = \iint_D \left[(k+1)^{\frac{1}{2}} \Phi_1 \operatorname{div}_\zeta \vec{s}^{(i)}(z, \zeta) + \right. \\ \left. + \Phi_2 \left(\frac{\partial s_1^{(i)}}{\partial \eta} - \frac{\partial s_2^{(i)}}{\partial \xi} \right) \right] d_\zeta \tau = - \iint_D \left[(k+1)^{\frac{1}{2}} \left(s_1^{(i)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + s_2^{(i)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. + s_1^{(i)} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta} - s_2^{(i)} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right] d_\zeta \tau + \int_{\mathcal{D}} [(k+1)^{\frac{1}{2}} (s_1^{(i)} \Phi_1 \alpha + s_2^{(i)} \Phi_1 \beta) + s_1^{(i)} \Phi_2 \beta - s_2^{(i)} \Phi_2 \alpha] ds. \quad (9)$$

⁽⁸⁾ Facciamo notare che è lecito applicare le formule di Green alle componenti del vettore $\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)$, dato che esse presentano singolarità di tipo logaritmico.

⁽⁹⁾ D'ora in avanti, indicheremo con x e y le coordinate del punto z , con ξ e η quelle del punto ζ .

Riesce :

$$\begin{aligned} & \iint_D \left\{ (k+1)^{\frac{1}{2}} \left(s_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{r=1}^{\infty} a_r (k+1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{div} \vec{v}^{(r)} \right] + s_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{r=1}^{\infty} a_r (k+1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{div} \vec{v}^{(r)} \right] \right) + \right. \\ & \quad \left. + s_1^{(i)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sum_{r=1}^{\infty} a_r \left(\frac{\partial v_1^{(r)}}{\partial \eta} - \frac{\partial v_2^{(r)}}{\partial \xi} \right) \right] - s_2^{(i)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sum_{r=1}^{\infty} a_r \left(\frac{\partial v_1^{(r)}}{\partial \eta} - \frac{\partial v_2^{(r)}}{\partial \xi} \right) \right] \right\} d_\zeta \tau = \\ & = \iint_D \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} a_r s_1^{(i)} \left[A_2 v_1^{(r)} + k \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{div} \vec{v}^{(r)} \right] + \sum_{r=1}^{\infty} a_r s_2^{(i)} \left[A_2 v_2^{(r)} + k \frac{\partial}{\partial \eta} \operatorname{div} \vec{v}^{(r)} \right] \right\} d_\zeta \tau ; \end{aligned}$$

si constata inoltre immediatamente, data la possibilità di derivare sotto il segno, che :

$$\int_{\mathfrak{A}D} \left[(k+1)^{\frac{1}{2}} \left(s_1^{(i)} \Phi_1 \alpha + s_2^{(i)} \Phi_1 \beta \right) + s_1^{(i)} \Phi_2 \beta - s_2^{(i)} \Phi_2 \alpha \right] ds$$

è di classe due in D e verifica ivi la (1₀). Dall'arbitrarietà di D , segue l'asserto.

Proviamo che $\vec{u}(z)$ appartiene a $\mathcal{C}_1^{(2)}$; perciò basta far vedere che le derivate parziali del prim'ordine di $u_i(z)$ ($i = 1, 2$) appartengono ad $L^{(2)}(A)$.

Sia A_ρ il campo contenuto in A e contenente z , definito nel capitolo I; se $I_\eta(z)$ rappresenta il dominio circolare di centro z e raggio η interno ad A_ρ , per un vettore \vec{U} di $\overline{\mathcal{C}}_1^{(2)}$ riesce :

$$\int_{\mathfrak{A}(A_\rho - I_\eta)} \left\{ \vec{U}(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta s - \iint_{A_\rho - I_\eta} \left\{ J[\vec{U}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta \tau = 0.$$

Se facciamo tendere η a zero, otteniamo il valore delle componenti U_1 e U_2 di \vec{U} nel punto z di A_ρ :

$$\begin{aligned} U_i(z) &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathfrak{A}A_\rho} \left\{ \vec{U}(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta s - \\ & - \frac{1}{8\pi} \iint_{A_\rho} \left\{ J[\vec{U}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta \tau \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Per l'uniforme sommabilità di $\vec{U}(\zeta)$ su $\mathfrak{A}A_\rho$, al tendere di ρ a zero, si ottiene :

$$\begin{aligned} (15) \quad U_i(z) &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathfrak{A}A} \left\{ \vec{u}^*(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta s - \\ & - \frac{1}{8\pi} \iint_A \left\{ J[\vec{U}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta \tau \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Siccome $U_i(z)$ ($i = 1, 2$) è dotata di derivate parziali prime appartenenti ad $L^{(2)}(A)$, e quindi tali sono, per il teorema VII del capitolo I, pure le funzioni:

$$\begin{aligned} & \iint_A \{J[\vec{U}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau = \\ & - 4 \iint_A \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial U_2}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - \zeta| + \left(\frac{\partial U_1}{\partial \eta} - \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial y} \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau, \\ & \iint_A \{J[\vec{U}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau = \\ & - 4 \iint_A \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{\partial U_2}{\partial \eta} \right) \frac{\partial}{\partial y} \log |z - \zeta| + \left(\frac{\partial U_1}{\partial \eta} - \frac{\partial U_2}{\partial \xi} \right) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau, \end{aligned}$$

le derivate parziali del prim'ordine del vettore (13) appartengono ad $\mathcal{L}^{(2)}(A)$.

D'altra parte il vettore (14), sempre per il teorema VII del capitolo I, è dotato di derivate parziali del prim'ordine di quadrato sommabile in A ; rimane perciò provata l'appartenenza a $\mathcal{C}_1^{(2)}$ del vettore $\vec{u}(z)$ definito dalle (12).

Fissato un punto regolare $\bar{\zeta}$ su \mathcal{FA} , diciamo $w \equiv (x, y)$ un punto di A sulla normale in $\bar{\zeta}$ a \mathcal{FA} , e $w' \equiv (x', y')$ il suo simmetrico rispetto a $\bar{\zeta}$.

Riesce

$$\begin{aligned} u_1(w) &= \frac{1}{8\pi} \iint_{\mathcal{FA}} \{\vec{u}^*(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta[\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)]\} d_\zeta s - \frac{1}{8\pi} \iint_{\mathcal{FA}} \{\vec{u}^*(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta[\vec{s}^{(1)}(w', \zeta)]\} d_\zeta s - \\ & - \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta[\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau + \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta[\vec{s}^{(1)}(w', \zeta)]\} d_\zeta \tau = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{FA}} u_1^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |w - \zeta| d_\zeta s - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{FA}} u_2^*(\zeta) \left(\frac{x - \xi}{|w - \zeta|^2} \beta - \frac{y - \eta}{|w - \zeta|^2} \alpha \right) d_\zeta s - \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{FA}} u_1^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |w' - \zeta| d_\zeta s + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{FA}} u_2^*(\zeta) \left(\frac{x' - \xi}{|w' - \zeta|^2} \beta - \frac{y' - \eta}{|w' - \zeta|^2} \alpha \right) d_\zeta s - \\ & - \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta[\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau + \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta[\vec{s}^{(1)}(w', \zeta)]\} d_\zeta \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(w) &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{A}} \{\vec{u}^*(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w, \zeta)]\} d_\zeta s - \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{A}} \{\vec{u}^*(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w', \zeta)]\} d_\zeta s - \\
 &- \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau + \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w', \zeta)]\} d_\zeta \tau = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} u_1^*(\zeta) \left(\frac{y - \eta}{|w - \zeta|^2} \alpha - \frac{x - \xi}{|w - \zeta|^2} \beta \right) d_\zeta s + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} u_2^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |w - \zeta| d_\zeta s + \\
 &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} u_1^*(\zeta) \left(\frac{y' - \eta}{|w' - \zeta|^2} \alpha - \frac{x' - \xi}{|w' - \zeta|^2} \beta \right) d_\zeta s - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} u_2^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |w' - \zeta| d_\zeta s - \\
 &- \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau + \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w', \zeta)]\} d_\zeta \tau,
 \end{aligned}$$

e quindi — cfr. le posizioni (5) fatte nel paragrafo 1 — si ha :

$$\begin{aligned}
 u_1(w) &= [\psi_1(w) - \psi_1(w')] - \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau + \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(w', \zeta)]\} d_\zeta \tau \\
 u_2(w) &= [\psi_2(w) - \psi_2(w')] - \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau + \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \iint_A \{\vec{\Phi}(\zeta) \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w', \zeta)]\} d_\zeta \tau.
 \end{aligned}$$

Per il teorema II, e per il teorema VIII del capitolo I, passando al limite per w che tende a $\bar{\zeta}$ si ottiene, per quasi tutti i punti $\bar{\zeta}$ di \mathcal{A} ⁽¹⁰⁾ :

$$(16) \quad \lim_{w \rightarrow \bar{\zeta}} u_1(w) = u_1^*(\bar{\zeta}) \quad , \quad \lim_{w \rightarrow \bar{\zeta}} u_2(w) = u_2^*(\bar{\zeta}).$$

Il teorema d'esistenza è così completamente dimostrato.

⁽¹⁰⁾ Le relazioni di limite (16), che al solito vanno intese nel senso specificato nel capitolo I, sono state ora provate per w che tende a $\bar{\zeta}$ su $\nu_{\bar{\zeta}}$; notiamo però ancora una volta — cfr. capitolo II, ⁽¹⁰⁾ — che per ogni arco di \mathcal{A} interno ad un arco di classe due che la compone, il versore $\mu(\bar{\zeta})$, di cui al teorema I del capitolo I, può assumersi coincidente con $\nu(\bar{\zeta})$.

Per conseguire il teorema d'unicità, occorre provare che, se $\vec{u}^{(1)}(z)$ e $\vec{u}^{(2)}(z)$ sono due vettori di $\overline{\mathcal{C}}_1^{(2)}$ soluzioni in A della (1₀), essi devono necessariamente coincidere in A .

Daremo una dimostrazione ⁽¹¹⁾ che generalizza quella del teorema I del capitolo II.

Posto:

$$\vec{v}(z) = \vec{u}^{(1)}(z) - \vec{u}^{(2)}(z),$$

in ogni campo A_e di cui al capitolo I riesce, per la (2):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}A_e} \left\{ \vec{v}(\zeta) \times P[\vec{v}(\zeta)] \right\} d_\zeta s &= \iint_{A_e} \left\{ k [\operatorname{div} \vec{v}]^2 + |\operatorname{grad} v_1|^2 + |\operatorname{grad} v_2|^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right) \right\} d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Dall'essere

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0} \iint_{A_e} \left\{ k [\operatorname{div} \vec{v}]^2 + |\operatorname{grad} v_1|^2 + |\operatorname{grad} v_2|^2 + 2\lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right) \right\} d_\zeta \tau &= \\ = \iint_A \left\{ k [\operatorname{div} \vec{v}]^2 + |\operatorname{grad} v_1|^2 + |\operatorname{grad} v_2|^2 + 2\lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right) \right\} d_\zeta \tau, \end{aligned}$$

segue l'esistenza del limite:

$$\lim_{e \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}A_e} \left\{ \vec{v}(\zeta) \times P[\vec{v}(\zeta)] \right\} d_\zeta s.$$

Per calcolarlo, applichiamo la diseuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la (2) del capitolo I:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{F}A_e} \left\{ \vec{v} \times P[\vec{v}] \right\} d s \right| &\leq \left(\int_{\mathcal{F}A_e} |v_1|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A_e} |P_1[\vec{v}]|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \left(\int_{\mathcal{F}A_e} |v_2|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A_e} |P_2[\vec{v}]|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

⁽¹¹⁾ Cfr. [14].

$$\begin{aligned} &\leq 2 Q_1^{\frac{1}{2}} \left(\varrho \iint_A |\text{grad } v_1|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho} |P_1[\vec{v}]|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2 Q_2^{\frac{1}{2}} \left(\varrho \iint_A |\text{grad } v_2|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A_\varrho} |P_2[\vec{v}]|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

riuscendo poi (con B costante opportuna):

$$\begin{aligned} |P_1[\vec{v}]|^2 &\leq B^2 (|\text{grad } v_1|^2 + |\text{grad } v_2|^2) \\ |P_2[\vec{v}]|^2 &\leq B^2 (|\text{grad } v_1|^2 + |\text{grad } v_2|^2), \end{aligned}$$

per la (3) del capitolo I riesce:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{F}A_\varrho} \{\vec{v} \times P[\vec{v}]\} ds \right| \leq \\ &\leq 2 Q_1^{\frac{1}{2}} B \left(\iint_A |\text{grad } v_1|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left(\varrho \int_{\mathcal{F}A_\varrho} \{|\text{grad } v_1|^2 + |\text{grad } v_2|^2\} ds \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2 Q_2^{\frac{1}{2}} B \left(\iint_A |\text{grad } v_2|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left(\varrho \int_{\mathcal{F}A_\varrho} \{|\text{grad } v_1|^2 + |\text{grad } v_2|^2\} ds \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Qualunque sia λ , risulta dunque:

$$\iint_A \left\{ k [\text{div } \vec{v}]^2 + |\text{grad } v_1|^2 + |\text{grad } v_2|^2 + 2\lambda \left(\frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right) \right\} d\zeta \tau = 0.$$

Assumiamo per λ un valore tale che:

$$-1 < \lambda < \gamma_k,$$

essendo γ_k il numero definito nell'enunciato del teorema III; la forma quadratica nelle quattro variabili $\frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \frac{\partial v_1}{\partial \eta}, \frac{\partial v_2}{\partial \xi}, \frac{\partial v_2}{\partial \eta}$ che compare sotto il segno di integrale è definita positiva, per modo che si deve avere in A :

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = \frac{\partial v_2}{\partial \xi} = \frac{\partial v_2}{\partial \eta} = 0.$$

Dall'essere: $v_1 = v_2 = 0$ su $\mathcal{F}A$, si conclude che il vettore \vec{v} è identicamente nullo in A .

4. Proprietà di minimo della soluzione.

VI. — Si consideri, nella classe $\overline{\mathcal{C}}_1^{(2)}$, il funzionale :

$$I_{k,\lambda}(\vec{u}) = \iint_A \left\{ k [\operatorname{div} \vec{u}]^2 + |\operatorname{grad} u_1|^2 + |\operatorname{grad} u_2|^2 + \right. \\ \left. + 2\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right\} d_z \tau ;$$

si supponga che k e λ siano tali che la forma quadratica (7) sia semidefinita o definita positiva, ed inoltre che sia $k > -1$.

Detto funzionale è dotato di minimo in $\overline{\mathcal{C}}_1^{(2)}$, ed il vettore minimante è la soluzione in A della (1₀) che appartiene a $\overline{\mathcal{C}}_1^{(2)}$.

Sia $\vec{\eta}(z) \equiv [\eta_1(z), \eta_2(z)]$ un vettore di $\mathcal{C}_1^{(2)}$, tale che per quasi tutti i punti ζ di $\mathcal{F}A$ riesca :

$$\lim_{w \rightarrow \zeta} \eta_1(w) = 0 \quad , \quad \lim_{w \rightarrow \zeta} \eta_2(w) = 0 .$$

Se $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z)]$ è il vettore di $\overline{\mathcal{C}}_1^{(2)}$ soluzione in A della (1₀), basta provare che

$$I_{k,\lambda}(\vec{u} + \vec{\eta}) - I_{k,\lambda}(\vec{u}) \geq 0 .$$

Infatti :

$$I_{k,\lambda}(\vec{u} + \vec{\eta}) - I_{k,\lambda}(\vec{u}) = \iint_A \left\{ k [\operatorname{div} \vec{\eta}]^2 + |\operatorname{grad} \eta_1|^2 + |\operatorname{grad} \eta_2|^2 + \right. \\ \left. + 2\lambda \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} \right) \right\} d_z \tau + \\ + 2 \iint_A \left\{ k \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{\eta} + \operatorname{grad} u_1 \times \operatorname{grad} \eta_1 + \operatorname{grad} u_2 \times \operatorname{grad} \eta_2 + \right. \\ \left. + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right\} d_z \tau .$$

Nel campo A_e di cui al capitolo I, per la (2), la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz e la (2) del capitolo I, si ha :

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{A_e} \left[k \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{\eta} + \operatorname{grad} u_1 \times \operatorname{grad} \eta_1 + \operatorname{grad} u_2 \times \operatorname{grad} \eta_2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right] d_x \tau \right| = \\ & \left| \int_{\mathcal{F}A_e} \{ \vec{\eta} \times P[\vec{u}] \} d s \right| \leq 2 Q_1^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\operatorname{grad} \eta_1|^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\varrho \int_{\mathcal{F}A_e} |P_1[\vec{u}]|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & \quad + 2 Q_2^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\operatorname{grad} \eta_2|^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\varrho \int_{\mathcal{F}A_e} |P_2[\vec{u}]|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Indicata con B^2 una costante tale che :

$$|P_i[\vec{u}]|^2 \leq B^2 (|\operatorname{grad} u_1|^2 + |\operatorname{grad} u_2|^2) \quad (i = 1, 2),$$

si ha, per la (3) del capitolo I :

$$\begin{aligned} & \lim_{e \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{F}A_e} \{ \vec{\eta} \times P[\vec{u}] \} d s \right| \leq \\ & \leq 2 Q_1^{\frac{1}{2}} B \left(\iint_A |\operatorname{grad} \eta_1|^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{e \rightarrow 0} \left(\varrho \int_{\mathcal{F}A_e} \{ |\operatorname{grad} u_1|^2 + |\operatorname{grad} u_2|^2 \} d s \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + 2 Q_2^{\frac{1}{2}} B \left(\iint_A |\operatorname{grad} \eta_2|^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{e \rightarrow 0} \left(\varrho \int_{\mathcal{F}A_e} \{ |\operatorname{grad} u_1|^2 + |\operatorname{grad} u_2|^2 \} d s \right)^{\frac{1}{2}} = 0 . \end{aligned}$$

Il teorema è così dimostrato.

Osservazione :

Per $k = \lambda = 0$ si ottiene il teorema II del capitolo II. Per $k > -1, \lambda = 1$, la forma quadratica ha il significato di potenziale delle deformazioni elastiche. Pertanto il nostro teorema, in questo caso particolare, costituisce la dimostrazione rigorosa — per la prima volta acquisita — che la configurazione di equilibrio di un corpo elastico (cui è applicabile la teoria piana), è tale, fra tutte quelle compatibili con i vincoli, da render minima l'energia potenziale elastica.

5. Diseguaglianza integrale per le soluzioni del problema omogeneo dell'Elasticità piana.

Vogliamo adesso enunciare un teorema ⁽¹²⁾ di cui dovremo servirci in seguito:

VII. — Se $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z)]$ è un vettore appartenente a $\mathcal{C}_1^{(2)}$, soluzione in A della (1₀), esso appartiene ad $\mathcal{L}^{(2)}(A)$, ed esiste una costante $H(A)$ che dipende unicamente dal campo A , tale che:

$$\iint_A |\vec{u}|^2 d\tau \leq H(A) \int_{\mathcal{FA}} |\vec{u}|^2 ds.$$

6. Matrice di Green $\mathcal{G}(w, z)$ per il primo problema dell'elastostatica piana,

e studio del vettore:
$$\iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) * \mathcal{G}(z, \zeta)] d_\zeta \tau.$$

Fissato w in A , poniamo su \mathcal{FA} :

$$\vec{u}^*(\zeta) = \vec{s}^{(1)}(w, \zeta).$$

Facciamo vedere che la classe $\overline{\mathcal{C}}_1^{(2)}$ in questo caso è non vuota.

Infatti, introdotto in A un sistema di coordinate polari ϱ e θ di polo w , si ha:

$$s_1^{(1)}(\varrho, \theta) = 2 \frac{k+2}{k+1} \log \varrho - \frac{2k}{k+1} \cos^2 \theta - \frac{k}{k+1}$$

$$s_2^{(1)}(\varrho, \theta) = -2 \frac{k}{k+1} \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

Ebbene, indicato con $I_{e_0}(w)$ il dominio circolare di centro w e raggio ϱ_0 contenuto in A , appartiene a $\overline{\mathcal{C}}_1^{(2)}$ il vettore $\vec{U}^{(1)} \equiv (U_1^{(1)}, U_2^{(1)})$ così definito in A :

$$U_1^{(1)}(\varrho, \theta) \left\{ \begin{array}{l} = 2 \frac{k+2}{k+1} \log \varrho - \frac{2k}{k+1} \cos^2 \theta - \frac{k}{k+1} \dots \dots \dots \text{in } A - I_{e_0}(w) \\ = \frac{k+2}{k+1} \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} - \frac{2}{3} \frac{k}{k+1} \left(4 \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho^8}{\varrho_0^8} \right) \cos^2 \theta + 2 \frac{k+2}{k+1} \log \varrho_0 - 2 \dots \dots \text{in } I_{e_0}(w), \end{array} \right.$$

⁽¹²⁾ Cfr. [21].

$$U_2^{(1)}(\varrho, \theta) \left\{ \begin{aligned} &= -\frac{2k}{k+1} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \dots \dots \dots \text{in } A - I_{\varrho_0}(w) \\ &= -\frac{2}{3} \frac{k}{k+1} \left(4 \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho^8}{\varrho_0^8} \right) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \dots \dots \dots \text{in } I_{\varrho_0}(w). \end{aligned} \right.$$

Infatti $U_1^{(1)}$ e $U_2^{(1)}$ sono funzioni continue anche su $\mathcal{I}_{\varrho_0}(w)$, dato che :

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow \varrho_0} \left(2 \frac{k+2}{k+1} \log \varrho - \frac{2k}{k+1} \cos^2 \theta - \frac{k}{k+1} \right) &= \lim_{\varrho \rightarrow \varrho_0} \left(\frac{k+2}{k+1} \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \frac{k}{k+1} \left(4 \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho^8}{\varrho_0^8} \right) \cos^2 \theta + 2 \frac{k+2}{k+1} \log \varrho - 2 \right) = \\ &= 2 \frac{k+2}{k+1} \log \varrho_0 - \frac{2k}{k+1} \cos^2 \theta - \frac{k}{k+1}, \\ \lim_{\varrho \rightarrow \varrho_0} \left(-\frac{2k}{k+1} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right) &= \lim_{\varrho \rightarrow \varrho_0} \left[-\frac{2}{3} \frac{k}{k+1} \left(4 \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho^8}{\varrho_0^8} \right) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right] = \\ &= -\frac{2k}{k+1} \operatorname{sen} \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Le funzioni $\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \varrho}$ e $\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \varrho}$, che risultano definite in A al modo seguente :

$$\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \varrho} \left\{ \begin{aligned} &= 2 \frac{k+2}{k+1} \frac{1}{\varrho} \dots \dots \dots \text{in } A - I_{\varrho_0}(w) \\ &= 2 \frac{k+2}{k+1} \frac{\varrho}{\varrho_0^2} - \frac{16}{3} \frac{k}{k+1} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho^7}{\varrho_0^8} \right) \cos^2 \theta \dots \dots \dots \text{in } I_{\varrho_0}(w), \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \varrho} \left\{ \begin{aligned} &= 0 \dots \dots \dots \text{in } A - I_{\varrho_0}(w) \\ &= -\frac{16}{3} \frac{k}{k+1} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho^7}{\varrho_0^8} \right) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \dots \dots \dots \text{in } I_{\varrho_0}(w), \end{aligned} \right.$$

sono continue anche su $\mathcal{I}_{\varrho_0}(w)$, dato che riesce :

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow \varrho_0} \left(2 \frac{k+2}{k+1} \frac{1}{\varrho} \right) &= \lim_{\varrho \rightarrow \varrho_0} \left[2 \frac{k+2}{k+1} \frac{\varrho}{\varrho_0^2} - \frac{16}{3} \frac{k}{k+1} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho^7}{\varrho_0^8} \right) \cos^2 \theta \right] = 2 \frac{k+2}{k+1} \frac{1}{\varrho_0}, \\ \lim_{\varrho \rightarrow \varrho_0} \left[-\frac{16}{3} \frac{k}{k+1} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho^7}{\varrho_0^8} \right) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right] &= 0. \end{aligned}$$

Fissato w in A , poniamo su \mathcal{FA} ,

$$\vec{u}^*(\zeta) = \vec{s}^{(2)}(w, \zeta);$$

anche in questo caso la classe $\overline{\mathcal{C}}_1^{(2)}$ è non vuota, dato che vi appartiene — lo si prova in maniera analoga alla precedente — il vettore $\vec{U}^{(2)} \equiv (U_1^{(2)}, U_2^{(2)})$ definito in A come segue:

$$U_1^{(2)}(\varrho, \theta) \begin{cases} = -\frac{2k}{k+1} \text{sen } \theta \cos \theta \dots \dots \dots \text{ in } A - I_{e_0}(w) \\ = -\frac{2}{3} \frac{k}{k+1} \left(4 \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho^8}{\varrho_0^8} \right) \text{sen } \theta \cos \theta \dots \dots \dots \text{ in } I_{e_0}(w), \end{cases}$$

$$U_2^{(2)}(\varrho, \theta) \begin{cases} = 2 \frac{k+2}{k+1} \log \varrho - \frac{2k}{k+1} \text{sen}^2 \theta - \frac{k}{k+1} \dots \dots \dots \text{ in } A - I_{e_0}(w) \\ = \frac{k+2}{k+1} \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} - \frac{2}{3} \frac{k}{k+1} \left(4 \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} - \frac{\varrho^8}{\varrho_0^8} \right) \text{sen}^2 \theta + 2 \frac{k+2}{k+1} \log \varrho_0 - 2 \dots \dots \text{ in } I_{e_0}(w). \end{cases}$$

Rifacendoci al procedimento esistenziale di cui al n. 3, fissato il punto w in A , indichiamo con

$$\vec{g}^{(i)}(w, z) \equiv [g_1^{(i)}(w, z), g_2^{(i)}(w, z)]$$

il vettore di $\mathcal{C}_1^{(2)}$, soluzione in A della (1₀), che su \mathcal{FA} coincide col vettore $\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)$ ($i = 1, 2$).

Per le (12) si ha:

$$g_1^{(i)}(w, z) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{FA}} \{ \vec{s}^{(i)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \} d_\zeta s -$$

$$- \frac{1}{8\pi} \iint_A \left\{ \sum_{k=1}^\infty a_k^{(i)}(w) J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta \tau$$

$$g_2^{(i)}(w, z) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{FA}} \{ \vec{s}^{(i)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)] \} d_\zeta s -$$

$$- \frac{1}{8\pi} \iint_A \left\{ \sum_{k=1}^\infty a_k^{(i)}(w) J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta \tau.$$

avendo posto

$$(17) \quad a_k^{(i)}(w) = \int_{\mathcal{F}A} \{\vec{s}^{(i)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}[\vec{v}^{(k)}(\zeta)]\} d_\zeta s = \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \quad (13).$$

Fissato z in A , sia I un dominio circolare di centro z , tutto contenuto in A . Si ha ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} & \iint_A \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(j)}(w) J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{s}^{(j)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta \tau = \\ & = \iint_{A-I} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(j)}(w) J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{s}^{(j)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta \tau + \\ & + \iint_I \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(j)}(w) J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{s}^{(j)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

In I la serie :

$$(18) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(j)}(w) J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)]$$

converge uniformemente, il vettore $J_\zeta[\vec{s}^{(j)}(z, \zeta)]$ è sommabile; quindi in I si può scambiare il simbolo di integrazione con quello di sommazione. In $A - I$ la serie (18) converge in media, il vettore $J_\zeta[\vec{s}^{(j)}(z, \zeta)]$ è continuo, quindi è ancora lecito scambiare fra di loro i due simboli. In forza delle (17) si ottiene allora :

$$\begin{aligned} g_1^{(j)}(w, z) &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{F}A} \{\vec{s}^{(j)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta[\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s - \\ &- \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{s}^{(j)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau \end{aligned}$$

⁽¹³⁾ al vettore $\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)$ si può applicare la (3), dato che esso presenta solamente singolarità di tipo logaritmico.

$$g_2^{(i)}(w, z) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{F}A} \{\vec{s}^{(i)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s -$$

$$- \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau.$$

Posto :

$$G_1^{(i)}(w, z) = g_1^{(i)}(w, z) - s_1^{(i)}(w, z)$$

$$G_2^{(i)}(w, z) = g_2^{(i)}(w, z) - s_2^{(i)}(w, z),$$

si ha :

$$G_1^{(i)}(w, z) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{F}A} \{\vec{s}^{(i)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s - s_1^{(i)}(w, z) -$$

$$- \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau$$

$$G_2^{(i)}(w, z) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{F}A} \{\vec{s}^{(i)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s - s_2^{(i)}(w, z) -$$

$$- \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau.$$

Avendosi, per le (15) :

$$s_1^{(i)}(w, z) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{F}A} \{\vec{s}^{(i)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s -$$

$$- \frac{1}{8\pi} \iint_A \{J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau$$

$$s_2^{(i)}(w, z) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{F}A} \{\vec{s}^{(i)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s -$$

$$- \frac{1}{8\pi} \iint_A \{J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau,$$

riesce :

$$\begin{aligned}
 G_1^{(i)}(w, z) &= \frac{1}{8\pi} \int_A \{J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau - \\
 &- \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \int_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau \\
 G_2^{(i)}(w, z) &= \frac{1}{8\pi} \int_A \{J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau - \\
 &- \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \int_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau.
 \end{aligned}$$

Siamo pervenuti in tal modo alla matrice di Green per il primo problema dell'elastostatica piana :

$$\mathcal{G}(w, z) \equiv \left\| \begin{array}{cc} G_1^{(1)}(w, z) & G_2^{(1)}(w, z) \\ G_1^{(2)}(w, z) & G_2^{(2)}(w, z) \end{array} \right\|$$

la quale risulta espressa al modo seguente :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\pi} \iint_A \{J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau - \\
& \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \cdot \\
& \cdot \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau \\
& \frac{1}{8\pi} \iint_A \{J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w, \zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau - \\
& \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \cdot \\
& \cdot \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau
\end{aligned}$$

Facciamo notare che la matrice di Green gode della proprietà seguente :

$$G_k^{(h)}(w, z) = G_h^{(k)}(z, w) \quad (h, k = 1, 2).$$

Dimostriamo ora un lemma che contiene, nel caso particolare $k = \lambda = 0$, il teorema IV del capitolo II :

VIII. — Si supponga che k e λ verificano le ipotesi formulate nell'enunciato del teorema VI. Posto :

$$F_i(w) = \iint_A \left\{ k [\operatorname{div}_\zeta \vec{g}^{(i)}(w, \zeta)]^2 + |\operatorname{grad}_\zeta g_1^{(i)}(w, \zeta)|^2 + |\operatorname{grad}_\zeta g_2^{(i)}(w, \zeta)|^2 + \right. \\ \left. + 2\lambda \left(\frac{\partial g_1^{(i)}(w, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial g_2^{(i)}(w, \zeta)}{\partial \xi} - \frac{\partial g_1^{(i)}(w, \zeta)}{\partial \xi} \frac{\partial g_2^{(i)}(w, \zeta)}{\partial \eta} \right) \right\} d_\zeta \tau,$$

la funzione $F_i(w)$ è sommabile in A e, indicata con $\delta(w)$ la distanza da \mathcal{FA} del punto w di A , sussiste la seguente disuguaglianza :

$$(19) F_i(w) \leq \int_{\mathcal{FA}} \{ \vec{s}^{(i)}(w, \zeta) \times P_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)] \} d_\zeta s + N_1 \log \delta(w) + N_2 \quad (i = 1, 2),$$

dove N_1 e N_2 sono costanti così definite :

$$N_1 = - \frac{16\pi}{(k+1)^2} (k^2 + 3k + 2), \\ N_2 = \frac{k\pi}{(k+1)^2} \left[\frac{81}{20} k^2 + \frac{177}{10} k + \frac{48}{5} \right] + \frac{8\pi}{(k+1)^2}.$$

Per dimostrare il lemma, faremo vedere che sussiste la (19) — facendo ad esempio $i = 1$ — e che la funzione di w al secondo membro è sommabile in A .

Per il lemma VI, detto $\vec{U}^{(1)}(w, \zeta) \equiv [U_1^{(1)}(w, \zeta), U_2^{(1)}(w, \zeta)]$ il vettore introdotto al n. 6, riesce :

$$I_{k,\lambda}[\vec{g}^{(1)}] \leq I_{k,\lambda}[\vec{U}^{(1)}].$$

Indicato con $I_{e_0}(w)$ il dominio circolare di centro w e raggio e_0 contenuto in A , si ha:

$$\begin{aligned}
 I_{k,\lambda}[\vec{U}^{(1)}] &= \iint_{A-I_{e_0}(w)} \left\{ k [\operatorname{div}_\zeta \vec{U}^{(1)}(w, \zeta)]^2 + |\operatorname{grad}_\zeta U_1^{(1)}(w, \zeta)|^2 + |\operatorname{grad}_\zeta U_2^{(1)}(w, \zeta)|^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\lambda \left(\frac{\partial U_1^{(1)}(w, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial U_2^{(1)}(w, \zeta)}{\partial \xi} - \frac{\partial U_1^{(1)}(w, \zeta)}{\partial \xi} \frac{\partial U_2^{(1)}(w, \zeta)}{\partial \eta} \right) \right\} d_\zeta \tau + \\
 &+ \iint_{I_{e_0}(w)} \left\{ k [\operatorname{div}_\zeta \vec{U}^{(1)}(w, \zeta)]^2 + |\operatorname{grad}_\zeta U_1^{(1)}(w, \zeta)|^2 + |\operatorname{grad}_\zeta U_2^{(1)}(w, \zeta)|^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\lambda \left(\frac{\partial U_1^{(1)}(w, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial U_2^{(1)}(w, \zeta)}{\partial \xi} - \frac{\partial U_1^{(1)}(w, \zeta)}{\partial \xi} \frac{\partial U_2^{(1)}(w, \zeta)}{\partial \eta} \right) \right\} d_\zeta \tau = \\
 &= \int_{\mathcal{F}A} \{ \vec{s}^{(1)}(w, \zeta) \times P_\zeta [\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)] \} d_\zeta s - 16 \frac{k^2 + 3k + 2}{(k+1)^2} \pi \log e_0 + \\
 &\quad + \frac{k\pi}{(k+1)^2} \left[\frac{81}{20} k^2 + \frac{177}{10} k + \frac{48}{5} \right] + \frac{8\pi}{(k+1)^2} \quad (14).
 \end{aligned}$$

Donde, per $e_0 \rightarrow \delta(w)$, si ottiene l'asserto.

La sommabilità in A della funzione di $w: \int_{\mathcal{F}A} \{ \vec{s}^{(1)}(w, \zeta) \times P_\zeta [\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)] \} d_\zeta s$

si consegue con considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte per dimostrare il teorema IV del capitolo II. Nel corso della dimostrazione di detto teorema, è stata anche provata la sommabilità in A della funzione $\log \delta(w)$. Da tutto ciò, la tesi.

Detto $\vec{\varphi}(\zeta) \equiv [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ un vettore di quadrato sommabile in A , siccome il vettore $\vec{g}^{(i)}(z, \zeta)$ riesce, per ogni fissato z in A , di quadrato sommabile al variare di ζ in A (cfr. teorema VII), ha senso l'integrale:

$$\iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{G}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau \quad (i = 1, 2),$$

(14) Ricordiamo che:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{u} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_2}{\partial \Theta} \right) \cos \Theta + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_1}{\partial \Theta} \right) \sin \Theta \\
 |\operatorname{grad} u|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} \right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \Theta} \right)^2 \\
 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial u_2}{\partial \eta} &= \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \Theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varrho} - \frac{\partial u_1}{\partial \varrho} \frac{\partial u_2}{\partial \Theta} \right).
 \end{aligned}$$

ossia ha senso considerare il vettore : $\iint_A \{\vec{\varphi}(\zeta) * \mathcal{G}(z, \zeta)\} d_\zeta \tau$.

Sussiste il seguente teorema :

IX. — Se $\vec{\varphi}(\zeta) \equiv [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ è un vettore appartenente a $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$, il vettore $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z)]$ definito in A al modo seguente :

$$u_1(z) = \iint_A \{\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{G}^{(1)}(z, \zeta)\} d_\zeta \tau$$

$$u_2(z) = \iint_A \{\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{G}^{(2)}(z, \zeta)\} d_\zeta \tau$$

è di classe due in A , appartiene a $\mathcal{C}_1^{(2)}$, ed è tale che :

$$(20) \quad \begin{aligned} \Delta_2 \vec{u} + k \text{ grad div } \vec{u} &= -8 \pi \vec{\varphi} \quad . . . \text{ in } A \\ \vec{u} &= 0 \quad . . . \text{ su } \mathcal{F}A . \end{aligned}$$

Per il teorema I, il vettore $\vec{v}^*(z) \equiv [v_1^*(z), v_2^*(z)]$ definito in A al modo seguente :

$$(21) \quad \begin{aligned} v_1^*(z) &= \iint_A \{\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{s}^{(1)}(z, \zeta)\} d_\zeta \tau \\ v_2^*(z) &= \iint_A \{\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{s}^{(2)}(z, \zeta)\} d_\zeta \tau \end{aligned}$$

è di classe due in A , appartiene a $\mathcal{C}_1^{(2)}$, ed inoltre in A verifica la relazione:

$$\Delta_2 \vec{v}^* + k \text{ grad div } \vec{v}^* = 8 \pi \vec{\varphi} .$$

Ne segue che, se $\vec{v}(z)$ è soluzione del seguente problema :

$$(22) \quad \begin{aligned} \Delta_2 \vec{v} + k \text{ grad div } \vec{v} &= 0 \quad . . . \text{ in } A \\ \vec{v} &= \vec{v}^* \quad . . . \text{ su } \mathcal{F}A , \end{aligned}$$

il vettore

$$\vec{u}^* = \vec{v} - \vec{v}^*$$

verifica le (20).

Per il vettore $\vec{v}(z) \equiv [v_1(z), v_2(z)]$ appartenente a $\mathcal{C}_1^{(2)}$, e soluzione del problema (22), tenendo presenti le (12) e le (21) si ha:

$$\begin{aligned} v_i(z) = & \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{FA}} \overset{\circ}{P}_{1\zeta} [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta s \iint_A [\varphi_1(w) s_1^{(1)}(\zeta, w) + \varphi_2(w) s_2^{(1)}(\zeta, w)] d_w \tau + \\ & + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{FA}} \overset{\circ}{P}_{2\zeta} [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta s \iint_A [\varphi_1(w) s_1^{(2)}(\zeta, w) + \varphi_2(w) s_2^{(2)}(\zeta, w)] d_w \tau - \\ & - \frac{1}{8\pi} \iint_A \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta \tau \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

avendo posto:

$$a_k = \int_{\mathcal{FA}} \{ \vec{v}^*(\zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \} d_\zeta s.$$

Al n. 6 è stato dimostrato che nell'ultimo integrale è lecito scambiare fra loro i simboli d'integrazione e di sommazione; quanto ai primi due integrali, vogliamo provare che è possibile invertire l'ordine di integrazione.

Consideriamo ad esempio l'integrale:

$$\int_{\mathcal{FA}} \overset{\circ}{P}_{1\zeta} [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta s \iint_A \varphi_1(w) s_1^{(1)}(\zeta, w) d_w \tau;$$

la funzione: $|\varphi_1(w)| |s_1^{(1)}(\zeta, w)|$ è sommabile nel prodotto topologico $\mathcal{FA} \times A$ [$\zeta \subset \mathcal{FA}$, $w \subset A$]. Infatti: $|\varphi_1(w)| \int_{\mathcal{FA}} |s_1^{(1)}(\zeta, w)| d_\zeta s$ è il prodotto

di una funzione sommabile — la $|\varphi_1(w)|$ — per la funzione continua: $\int_{\mathcal{FA}} |s_1^{(1)}(\zeta, w)| d_\zeta s$.

Per il teorema di Tonelli, segue l'asserto. Pertanto, moltiplicando la funzione $|\varphi_1(w)| |s_1^{(1)}(\zeta, w)|$ per la funzione continua di ζ :

$$\left| \overset{\circ}{P}_{1\zeta} [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \right| \quad (z \text{ è interno ad } A)$$

si ottiene sempre una funzione sommabile in $\mathcal{FA} \times A$.

Applicando il teorema di Fubini, abbiamo dunque :

$$\begin{aligned}
 v_i(z) = & \frac{1}{8\pi} \iint_A \varphi_1(w) d_w \tau \int_{\mathfrak{F}^A} s_1^{(1)}(\zeta, w) \overset{\circ}{P}_{1\zeta} [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta s + \\
 & + \frac{1}{8\pi} \iint_A \varphi_1(w) d_w \tau \int_{\mathfrak{F}^A} s_1^{(2)}(\zeta, w) \overset{\circ}{P}_{2\zeta} [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta s + \\
 & + \frac{1}{8\pi} \iint_A \varphi_2(w) d_w \tau \int_{\mathfrak{F}^A} s_2^{(1)}(\zeta, w) \overset{\circ}{P}_{1\zeta} [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta s + \\
 & + \frac{1}{8\pi} \iint_A \varphi_2(w) d_w \tau \int_{\mathfrak{F}^A} s_2^{(2)}(\zeta, w) \overset{\circ}{P}_{2\zeta} [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta s - \\
 & - \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau \quad (i = 1, 2).
 \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i coefficienti a_k :

$$\begin{aligned}
 a_k = & \int_{\mathfrak{F}^A} \overset{\circ}{P}_1 [\vec{v}^{(k)}(\zeta)] d_\zeta s \iint_A [\varphi_1(w) s_1^{(1)}(\zeta, w) + \varphi_2(w) s_2^{(1)}(\zeta, w)] d_w \tau + \\
 & + \int_{\mathfrak{F}^A} \overset{\circ}{P}_2 [\vec{v}^{(k)}(\zeta)] d_\zeta s \iint_A [\varphi_1(w) s_1^{(2)}(\zeta, w) + \varphi_2(w) s_2^{(2)}(\zeta, w)] d_w \tau ;
 \end{aligned}$$

ragionando in modo analogo al precedente, si ha (teorema di Fubini) :

$$\begin{aligned}
 a_k = & \iint_A \varphi_1(w) d_w \tau \int_{\mathfrak{F}^A} s_1^{(1)}(\zeta, w) \overset{\circ}{P}_1 [\vec{v}^{(k)}(\zeta)] d_\zeta s + \\
 & + \iint_A \varphi_1(w) d_w \tau \int_{\mathfrak{F}^A} s_1^{(2)}(\zeta, w) \overset{\circ}{P}_2 [\vec{v}^{(k)}(\zeta)] d_\zeta s + \\
 & + \iint_A \varphi_2(w) d_w \tau \int_{\mathfrak{F}^A} s_2^{(1)}(\zeta, w) \overset{\circ}{P}_1 [\vec{v}^{(k)}(\zeta)] d_\zeta s + \\
 & + \iint_A \varphi_2(w) d_w \tau \int_{\mathfrak{F}^A} s_2^{(2)}(\zeta, w) \overset{\circ}{P}_2 [\vec{v}^{(k)}(\zeta)] d_\zeta s .
 \end{aligned}$$

Ricordando che $s_2^{(1)}(\zeta, w) = s_1^{(2)}(\zeta, w)$, per la (3) riesce:

$$a_k = \iint_A \varphi_1(w) d_w \tau \iint_A \{J_\zeta [\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau + \\ + \iint_A \varphi_2(w) d_w \tau \iint_A \{J_\zeta [\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau ;$$

ne viene allora che:

$$(23) \quad v_i(z) = \frac{1}{8\pi} \iint_A \varphi_1(w) d_w \tau \int_{\mathcal{E}A} \{\vec{s}^{(1)}(\zeta, w) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s + \\ + \frac{1}{8\pi} \iint_A \varphi_2(w) d_w \tau \int_{\mathcal{E}A} \{\vec{s}^{(2)}(\zeta, w) \times \overset{\circ}{P}_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta s - \\ - \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \varphi_1(w) d_w \tau \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times \\ \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau - \\ - \frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \varphi_2(w) d_w \tau \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times \\ \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau .$$

Sia

$$\alpha_k^{(i)}(w) = \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(w, \zeta)]\} d_\zeta \tau,$$

e quindi:

$$\alpha_k^{(i)}(z) = \iint_A \{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)]\} d_\zeta \tau .$$

Facciamo vedere che la ridotta n -esima della serie

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)}(w) \alpha_k^{(i)}(z) \right] \varphi_1(w)$$

è maggiorata in A da una funzione sommabile rispetto a w .

Per la disegualianza di Cauchy-Schwarz riesce :

$$\left| \varphi_1(w) \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k^{(1)}(w) \alpha_k^{(i)}(z) \right] \right| \leq |\varphi_1(w)| \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k^{(1)}(w)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{h=1}^n |\alpha_h^{(i)}(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ;$$

osserviamo, d'altra parte, che al variare di k le funzioni $\alpha_k^{(1)}(w)$ non sono altro che i coefficienti di Fourier di $J_\zeta [\vec{g}^{(1)}(w, \zeta)]$ rispetto al sistema ortogonale $\{J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)]\}$, dato che :

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(1)}(w) &= \int_{\mathcal{F}^A} \{ \vec{s}^{(1)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \} d_\zeta s = \int_{\mathcal{F}^A} \{ \vec{g}^{(1)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \} d_\zeta s = \\ &= \iint_A \{ J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{g}^{(1)}(w, \zeta)] \} d_\zeta \tau . \end{aligned}$$

Per il teorema di Bessel allora, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(1)}(w)|^2$ è convergente, e si ha :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(1)}(w)|^2 \leq \iint_A \{ J_\zeta[\vec{g}^{(1)}(w, \zeta)] \times J_\zeta[\vec{g}^{(1)}(w, \zeta)] \} d_\zeta \tau ;$$

perciò, qualunque sia n , tenendo presente la (19), riesce :

$$\begin{aligned} &\left| \varphi_1(w) \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k^{(1)}(w) \alpha_k^{(i)}(z) \right] \right| \leq \\ &\leq |\varphi_1(w)| \left(\sum_{h=1}^{\infty} |\alpha_h^{(i)}(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}^A} \{ \vec{s}^{(1)}(w, \zeta) \times \right. \\ &\left. \times \overset{\circ}{P}_\zeta[\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)] \} d_\zeta s + N_1 \log \delta(w) + N_2 \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Siccome a secondo membro si ha una funzione sommabile rispetto a w , nella (23) è lecito scambiare il simbolo d'integrazione con quello di sommazione :

$$\begin{aligned} v_i(z) &= \frac{1}{8\pi} \iint_A \varphi_1(w) d_w \tau \left[\int_{\mathcal{F}^A} \{ \vec{s}^{(1)}(w, \zeta) \times \overset{\circ}{P}_\zeta[\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \} d_\zeta s - \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \{ J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{s}^{(1)}(w, \zeta)] \} d_\zeta \tau \int_A \{ J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta[\vec{s}^{(i)}(z, \zeta)] \} d_\zeta \tau \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8\pi} \iint_A \varphi_2(w) d_w \tau \left[\int_{\mathcal{E}^A} \{ \vec{s}^{(2)}(w, \zeta) \times P_\zeta^0 [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)] \} d_\zeta s - \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \{ J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(2)}(w, \zeta)] \} d_\zeta \tau \iint_A \{ J[\vec{v}^{(k)}(\zeta)] \times J_\zeta [\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)] \} d_\zeta \tau \right].
\end{aligned}$$

Ricordando l'espressione di $g_i^{(j)}(w, z)$, si ottiene infine :

$$\begin{aligned}
v_1(z) &= \iint_A [\varphi_1(\zeta) g_1^{(1)}(\zeta, z) + \varphi_2(\zeta) g_1^{(2)}(\zeta, z)] d_\zeta \tau \\
v_2(z) &= \iint_A [\varphi_1(\zeta) g_2^{(1)}(\zeta, z) + \varphi_2(\zeta) g_2^{(2)}(\zeta, z)] d_\zeta \tau.
\end{aligned}$$

La soluzione \vec{u}^* del problema (20) è allora espressa come segue :

$$\begin{aligned}
u_1^*(z) &= \iint_A \{ \varphi_1(\zeta) [g_1^{(1)}(\zeta, z) - s_1^{(1)}(\zeta, z)] + \varphi_2(\zeta) [g_1^{(2)}(\zeta, z) - s_2^{(1)}(\zeta, z)] \} d_\zeta \tau \\
u_2^*(z) &= \iint_A \{ \varphi_1(\zeta) [g_2^{(1)}(\zeta, z) - s_1^{(2)}(\zeta, z)] + \varphi_2(\zeta) [g_2^{(2)}(\zeta, z) - s_2^{(2)}(\zeta, z)] \} d_\zeta \tau.
\end{aligned}$$

Ricordando che $G_k^{(h)}(\zeta, z) = g_k^{(h)}(\zeta, z) - s_k^{(h)}(\zeta, z)$, si ha :

$$\begin{aligned}
u_1^*(z) &= \iint_A [\varphi_1(\zeta) G_1^{(1)}(\zeta, z) + \varphi_2(\zeta) G_1^{(2)}(\zeta, z)] d_\zeta \tau \\
u_2^*(z) &= \iint_A [\varphi_1(\zeta) G_2^{(1)}(\zeta, z) + \varphi_2(\zeta) G_2^{(2)}(\zeta, z)] d_\zeta \tau
\end{aligned}$$

ossia, per la simmetria della matrice di Green :

$$\begin{aligned}
u_1^*(z) &= \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{G}^{(1)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau = u_1(z) \\
u_2^*(z) &= \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{G}^{(2)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau = u_2(z).
\end{aligned}$$

Rimangono da esaminare le proprietà qualitative del vettore $\vec{u}(z)$.

Essendo

$$u_1(z) = v_1(z) - \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{s}^{(1)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau \quad (24)$$

$$u_2(z) = v_2(z) - \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{s}^{(2)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau,$$

siccome il primo vettore $\vec{v}(z)$ appartiene a $\mathcal{C}_1^{(2)}$, ed è analitico in A , ed il secondo vettore — cfr. teorema I — è di classe due in A ed appartiene a $\mathcal{C}_1^{(2)}$, rimane provato l'asserto.

Il teorema è completamente dimostrato.

Il seguente teorema fornisce ulteriori notevoli proprietà del vettore $\vec{u}(z)$:

X. — Se $\vec{\varphi}(\zeta) \equiv [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ appartiene a $\mathcal{L}^{(2)}(A)$, per ogni fissato $z \equiv (x, y)$ nel campo A , sono sommabili in A le funzioni di ζ :

$$\vec{\varphi}(\zeta) \times \frac{\partial}{\partial x} \vec{G}^{(i)}(z, \zeta) \quad , \quad \vec{\varphi}(\zeta) \times \frac{\partial}{\partial y} \vec{G}^{(i)}(z, \zeta) \quad (i = 1, 2),$$

e si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{G}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau = \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \frac{\partial}{\partial x} \vec{G}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{G}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau = \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \frac{\partial}{\partial y} \vec{G}^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau.$$

Dalle (24) si vede che basta limitarsi a dimostrare i fatti asseriti nell'enunciato, considerando la matrice $\|g_k^{(i)}(z, \zeta)\|$, definita al n. 6, anzichè la matrice di Green.

Per far vedere che la funzione di ζ : $\vec{\varphi}(\zeta) \times \frac{\partial}{\partial x} \vec{g}^{(i)}(z, \zeta)$, per ogni fissato z in A , è sommabile in A , basta far vedere che il vettore $\frac{\partial}{\partial x} \vec{g}^{(i)}(z, \zeta)$ è, per ogni fissato z in A , di quadrato sommabile rispetto a ζ in A . Ragionando in modo perfettamente analogo a quanto fatto nel teorema VI del cap. II, si perviene al risultato seguente:

per ogni fissato z in A , e w su $\mathcal{F}A$, risulta ⁽¹⁵⁾:

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{g}^{(i)}(z, w) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{s}^{(i)}(z, w).$$

Pertanto $\frac{\partial}{\partial x} \vec{g}^{(i)}(z, \zeta)$, come funzione di ζ , è soluzione della (1₀) ed appartiene a $\mathcal{C}_1^{(2)}$; quindi — cfr. teorema VII — esso appartiene, come funzione di ζ , ad $\mathcal{L}^{(2)}(A)$.

Vogliamo ora dimostrare, ad esempio, la prima delle (25).

Per la diseuguaglianza di Cauchy-Schwarz e per il teorema VII, si ha:

$$\begin{aligned} & \left| \iint_A \left\{ \vec{\varphi}(\zeta) \times \left[\frac{\vec{g}^{(i)}(z + \Delta x, \zeta) - \vec{g}^{(i)}(z, \zeta)}{\Delta x} - \frac{\partial}{\partial x} \vec{g}^{(i)}(z, \zeta) \right] \right\} d_\zeta \tau \right| \leq \\ & \leq \left(\iint_A |\vec{\varphi}(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A \left| \frac{\vec{g}^{(i)}(z + \Delta x, \zeta) - \vec{g}^{(i)}(z, \zeta)}{\Delta x} - \frac{\partial}{\partial x} \vec{g}^{(i)}(z, \zeta) \right|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq [H(A)]^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\vec{\varphi}(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{\mathcal{F}A} \left| \frac{\vec{s}^{(i)}(z + \Delta x, \zeta) - \vec{s}^{(i)}(z, \zeta)}{\Delta x} - \frac{\partial}{\partial x} \vec{s}^{(i)}(z, \zeta) \right|^2 d_\zeta s \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Al limite, per Δx che tende a zero, si ha la tesi.

⁽¹⁵⁾ Analogamente a quanto fatto nel capitolo II, si prova facilmente che $\frac{\partial}{\partial x} \vec{s}^{(i)}(z, \zeta)$ è la traccia su $\mathcal{F}A$ di un vettore di $\mathcal{C}_1^{(2)'$.

CAPITOLO V

L'EQUAZIONE: $\Delta_4 u = f$.

1. Teorema di esistenza ed unicità, e proprietà di minimo della soluzione del problema biarmonico.

Sia A un campo limitato, di classe due e regolare, del piano x, y . Assegnate su $\mathcal{F}A$ le funzioni u^* e v^* , indicheremo con $\overline{C}_2^{(2)}$ la sottoclasse di $C_2^{(2)}$, costituita da tutte le funzioni di $C_2^{(2)}$ che in quasi tutti i punti ζ di $\mathcal{F}A$ verificano le relazioni:

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) = u^*(\zeta) \quad , \quad \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial u(z)}{\partial \nu_\zeta} = v^*(\zeta) \quad (1).$$

Poniamo in $\overline{C}_2^{(2)}$:

$$\mathcal{J}[u] = \iint_A (\Delta_2 u)^2 d\tau.$$

Sussiste il seguente teorema⁽²⁾ di esistenza ed unicità per il cosiddetto problema biarmonico nella classe $\overline{C}_2^{(2)}$, il quale fornisce al contempo la prova dell'esistenza del minimo in $\overline{C}_2^{(2)}$ del funzionale $\mathcal{J}[u]$:

I. — Se $\overline{C}_2^{(2)}$ è non vuota, esiste in essa una ed una sola funzione biarmonica nel campo A . Il funzionale $\mathcal{J}[u]$ è dotato di minimo in $\overline{C}_2^{(2)}$, e la minimante è la detta funzione biarmonica.

Se I denota un intervallo aperto contenente $A + \mathcal{F}A$, poniamo — cfr. teorema I, capitolo II:

$$B = I - (A + \mathcal{F}A).$$

Sia $\{\psi_k(z)\}$ un sistema di funzioni continue in $B + \mathcal{F}B$, completo in $L^{(2)}(B)$.

(1) Alle relazioni di limite (1) è da attribuirsi il significato specificato nel teorema I del capitolo I.

(2) Cfr. [13].

Le funzioni:

$$v_k(z) = \iint_B \psi_k(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau$$

sono armoniche e di classe uno in $A + \mathcal{FA}$. Supponiamo, ciò che è lecito, che il sistema $\{v_k(z)\}$ sia ortonormale in A , verifichi cioè le condizioni:

$$\iint_A v_h(z) v_k(z) d_z \tau = \delta_h^k,$$

e poniamo:

$$a_k = \iint_{\mathcal{FA}} \left\{ u^*(\zeta) \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial \nu_\zeta} - v^*(\zeta) v_k(\zeta) \right\} d_\zeta s.$$

Poichè $\overline{C}_2^{(2)}$ è per ipotesi non vuota, diciamo $U(z)$ una funzione di $C_2^{(2)}$ verificante le (1). Riesce allora (3)

$$a_k = - \iint_A \Delta_2 U(\zeta) v_k(\zeta) d_\zeta \tau \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Dall'esistenza della funzione $\Delta_2 U$ soluzione di questo sistema di infinite equazioni segue, per la ben nota disegualianza di Bessel (4), la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(z)$ converge in media in A ed inoltre, essendo i suoi termini funzioni armoniche, essa converge uniformemente in ogni dominio contenuto nel campo A — cfr. teorema I, capitolo II. — Esisterà quindi una funzione armonica φ , appartenente a $C_2^{(2)}$, tale che:

$$\varphi(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(z).$$

Si ha pertanto:

$$a_k = \iint_{\mathcal{FA}} \left\{ u^*(\zeta) \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial \nu_\zeta} - v^*(\zeta) v_k(\zeta) \right\} d_\zeta s = - \iint_A \varphi(\zeta) v_k(\zeta) d_\zeta \tau;$$

dall'essere

$$(2) \quad \iint_{\mathcal{FA}} \left\{ u^*(\zeta) \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial \nu_\zeta} - v^*(\zeta) v_k(\zeta) \right\} d_\zeta s + \iint_A \varphi(\zeta) v_k(\zeta) d_\zeta \tau = 0,$$

(3) Si tenga presente che, se $v(z)$ è una funzione armonica in A e di classe uno in $A + \mathcal{FA}$, e se la $U(z)$ appartiene a $C_2^{(2)}$, sussiste la seguente formula di Green:

$$\int_{\mathcal{FA}} \left(U \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) ds = - \iint_A v \Delta_2 U d\tau,$$

essendo la normale ν orientata verso l'esterno di A . Ciò in virtù del teorema I, capitolo I.

(4) Cfr. [18].

segue che, per ogni punto z esterno ad A , riesce:

$$\int_{\mathcal{F}A} \left\{ u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| - v^*(\zeta) \log |z - \zeta| \right\} d_\zeta s + \iint_A \varphi(z) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau = 0.$$

Ricordando l'espressione di $v_k(\zeta)$, la (2) diviene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) d_\zeta s \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \iint_B \psi_k(z) \log |z - \zeta| d_z \tau - \int_{\mathcal{F}A} v^*(\zeta) d_\zeta s \iint_B \psi_k(z) \log |z - \zeta| d_z \tau + \\ + \iint_A \varphi(\zeta) d_\zeta \tau \iint_B \psi_k(z) \log |z - \zeta| d_z \tau = 0. \end{aligned}$$

Fissato ζ su $\mathcal{F}A$, la funzione di z : $|\psi_k(z)| |\log |z - \zeta||$ è sommabile in B , e la funzione di ζ : $|v^*(\zeta)| \iint_B |\psi_k(z)| |\log |z - \zeta|| d_z \tau$ è sommabile su $\mathcal{F}A$. Per il teorema di Tonelli allora, la funzione $|v^*(\zeta)| |\psi_k(z)| |\log |z - \zeta||$ è sommabile in $B \times \mathcal{F}A$ ($z \subset B, \zeta \subset \mathcal{F}A$), e per il teorema di Fubini riesce:

$$\int_{\mathcal{F}A} v^*(\zeta) d_\zeta s \iint_B \psi_k(z) \log |z - \zeta| d_z \tau = \iint_B \psi_k(z) d_z \tau \int_{\mathcal{F}A} v^*(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta s.$$

In maniera perfettamente analoga, si prova che:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) d_\zeta s \iint_B \psi_k(z) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| d_z \tau = \\ = \iint_B \psi_k(z) d_z \tau \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| d_\zeta s. \end{aligned}$$

Fissato ζ in A , la funzione di z : $|\psi_k(z)| |\log |z - \zeta||$ è sommabile in B , e la funzione di ζ : $\iint_B |\psi_k(z)| |\log |z - \zeta|| d_z \tau$ riesce continua e limitata in A .

Pertanto la funzione $|\varphi(\zeta)| |\psi_k(z)| |\log |z - \zeta||$ è sommabile in $A \times B$ ($\zeta \subset A, z \subset B$) e per il teorema di Fubini è lecito invertire l'ordine d'integrazione.

grazione. Si ha dunque:

$$\iint_B \psi_k(z) d_z \tau \left[\iint_{\mathcal{F}A} \left\{ u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| - v^*(\zeta) \log |z - \zeta| \right\} d_\zeta s + \right. \\ \left. + \iint_A \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau \right] = 0.$$

La funzione

$$F(z) = \iint_{\mathcal{F}A} \left\{ u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| - v^*(\zeta) \log |z - \zeta| \right\} d_\zeta s + \\ + \iint_A \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau$$

è continua in B ed appartiene ad $L^{(2)}(B)$; verificando le relazioni:

$$\iint_B \psi_k(z) F(z) d_z \tau = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

essa è identicamente nulla in B , e, per la sua analiticità, riesce nulla in ogni punto esterno ad A . Ebbene, la funzione definita in A al modo seguente:

$$(3) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{F}A} \left\{ u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| - v^*(\zeta) \log |z - \zeta| \right\} d_\zeta s + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau$$

è la soluzione del problema.

Proviamo anzitutto che essa è biarmonica in A . La funzione di z :

$$(4) \quad \iint_{\mathcal{F}A} \left\{ u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| - v^*(\zeta) \log |z - \zeta| \right\} d_\zeta s$$

è ovviamente biarmonica in A ; il secondo integrale che compare nella (3) è un potenziale logaritmico con densità armonica in A , e pertanto riesce biarmonico in A . Facciamo vedere che la $u(z)$ appartiene a $C_2^{(2)}$. Per vedere che le derivate prime e seconde di $u(z)$ appartengono ad $L^{(2)}(A)$, consideriamo il

campo A_ρ contenuto in A , definito nel capitolo I, ed il dominio circolare $I_\eta(z)$ di centro z e raggio η , interno ad A_ρ ; se U è una funzione di $\bar{O}_2^{(2)}$ riesce, per il lemma di Green :

$$\int_{\mathcal{F}(A_\rho - I_\eta)} \left\{ \frac{\partial U(\zeta)}{\partial \nu} \log |z - \zeta| - U(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| \right\} d_\zeta s -$$

$$- \iint_{A_\rho - I_\eta} \Delta_2 U(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau = 0.$$

Facendo tendere η a zero, si ottiene il valore di U in un punto z interno ad A_ρ :

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A_\rho} \left\{ U(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| - \frac{\partial U(\zeta)}{\partial \nu} \log |z - \zeta| \right\} d_\zeta s +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{A_\rho} \Delta_2 U(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau.$$

Per l'uniforme sommabilità di U e di $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ sulle frontiere dei campi A_ρ , e per la sommabilità di $\Delta_2 U$ in A , si ottiene, se ρ tende a zero :

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} \left\{ u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| - v^*(\zeta) \log |z - \zeta| \right\} d_\zeta s +$$

$$(5) \quad + \frac{1}{2\pi} \iint_A \Delta_2 U(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau.$$

Siccome $U(z)$ è dotata di derivate parziali prime e seconde appartenenti ad $L^{(2)}(A)$, anche la funzione di z : $\iint_A \Delta_2 U(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau$ ha derivate prime e seconde di quadrato sommabile in A — cfr. teorema VII, capitolo I; ne segue che le derivate prime e seconde della funzione (4) appartengono ad $L^{(2)}(A)$. La funzione di z : $\iint_A \varphi(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau$ ha certamente le derivate prime e seconde di quadrato sommabile in A , dato che φ appartiene essa stessa ad $L^{(2)}(A)$. È così provato l'asserto.

Fissato su $\mathcal{F}A$, un punto regolare $\bar{\zeta}$, diciamo w un punto di A sulla normale in $\bar{\zeta}$ ad $\mathcal{F}A$, e w' il suo simmetrico rispetto a $\bar{\zeta}$.

Riesce:

$$\begin{aligned} u(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial r_\zeta} \log \frac{|w - \zeta|}{|w' - \zeta|} d_\zeta s - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} v^*(\zeta) \log \frac{|w - \zeta|}{|w' - \zeta|} d_\zeta s + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(\zeta) \log \frac{|w - \zeta|}{|w' - \zeta|} d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

L'integrale $\iint_A \varphi(\zeta) \log |w - \zeta| d_\zeta \tau$ risulta una funzione di w continua in tutto il piano, dato che riesce:

$$\left| \iint_A \varphi(\zeta) \log |w - \zeta| d_\zeta \tau \right| \leq \left(\iint_A |\varphi(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\log |w - \zeta||^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Passando al limite per w che tende a $\bar{\zeta}$, ricordando i teoremi III e V del capitolo I riesce:

$$(6) \quad \lim_{w \rightarrow \bar{\zeta}} u(w) = u^*(\bar{\zeta}).$$

Si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(w)}{\partial r_{\bar{\zeta}}} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r_{\bar{\zeta}}} \int_{\mathcal{F}A} u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial r_\zeta} \log \frac{|w - \zeta|}{|w' - \zeta|} d_\zeta s - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} v^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial r_{\bar{\zeta}}} \log \frac{|w - \zeta|}{|w' - \zeta|} d_\zeta s + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial r_{\bar{\zeta}}} \log \frac{|w - \zeta|}{|w' - \zeta|} d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Per il teorema IV del capitolo I, per il teorema (5) concernente le derivate del potenziale di doppio strato, e per il teorema VIII del capitolo I, si ha:

$$(7) \quad \lim_{w \rightarrow \bar{\zeta}} \frac{\partial u(w)}{\partial \nu_{\bar{\zeta}}} = v^*(\bar{\zeta}) \quad (6).$$

Il teorema d'esistenza è così provato.

Per conseguire l'unicità della soluzione (7) occorre provare che, se $u_1(z)$ e $u_2(z)$ sono due funzioni biarmoniche in A ed appartenenti a $\overline{C}_2^{(2)}$, esse devono necessariamente coincidere in A . Posto:

$$v(z) = u_1(z) - u_2(z),$$

in ogni campo A_e di cui al capitolo I, riesce:

$$\iint_{A_e} (\Delta_2 v)^2 d\tau = \iint_{\mathcal{F}A_e} \left\{ \Delta_2 v \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial (\Delta_2 v)}{\partial \nu} \right\} ds.$$

Per la sommabilità in A della funzione integranda, si ha:

$$\lim_{e \rightarrow 0} \iint_{A_e} (\Delta_2 v)^2 d\tau = \iint_A (\Delta_2 v)^2 d\tau,$$

e pertanto esiste il limite:

$$\lim_{e \rightarrow 0} \iint_{\mathcal{F}A_e} \left\{ \Delta_2 v \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial (\Delta_2 v)}{\partial \nu} \right\} ds.$$

(5) Si può dimostrare che — cfr. [15] — se $u^*(\zeta)$ è sommabile su $\mathcal{F}A$, per quasi tutti i punti $\bar{\zeta}$ di $\mathcal{F}A$ la differenza:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{\bar{\zeta}}} \iint_{\mathcal{F}A} \left\{ u^*(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_{\zeta}} \log |w - \zeta| - \frac{\partial}{\partial \nu_{\zeta}} \log |w' - \zeta| \right\} d_{\zeta} s$$

[w e w' essendo due punti di $\nu_{\bar{\zeta}}$ simmetrici rispetto a $\bar{\zeta}$] tende a zero quando w tende a $\bar{\zeta}$.

(6) Le relazioni (6) e (7) sono state dimostrate al tendere di w a $\bar{\zeta}$ lungo la particolare direzione della normale, ma può ovviamente ripetersi quanto detto nel capitolo II, (40).

(7) Cfr. [14].

Applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ed i teoremi I e II del capitolo I, riesce:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{F}A_\epsilon} \Delta_2 v \frac{\partial v}{\partial \nu} d s \right| \leq \\ & \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathcal{F}A_\epsilon} |\Delta_2 v|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A_\epsilon} |\text{grad } v|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq 2 Q^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A \left| \text{grad} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right|^2 + \right. \\ & \left. + \left| \text{grad} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right|^2 \right) d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(2 \epsilon \iint_{\mathcal{F}A_\epsilon} \left| \text{grad} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right|^2 + \left| \text{grad} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right|^2 \right) d s \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Vogliamo ora provare che:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}A_\epsilon} v \frac{\partial (\Delta_2 v)}{\partial \nu} d s = 0.$$

A tal proposito ci serviremo di un teorema di K. O. Friedrichs⁽⁸⁾, il quale afferma che, se A è un campo limitato di classe uno, e $f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$ è una funzione olomorfa in A , tale che il coefficiente dell'immaginario $f_2(z)$ appartenga ad $L^{(2)}(A)$ e tale che:

$$\iint_A f_1(z) d_z \tau = 0,$$

allora esiste una costante $\Gamma(A)$, dipendente unicamente da A , tale che:

$$\iint_A [f_1(z)]^2 d_z \tau \leq \Gamma(A) \iint_A [f_2(z)]^2 d_z \tau.$$

Il campo A che consideriamo in questo lavoro, essendo limitato e di classe due, ha ordine di connessione lineare finito; pertanto esso sarà costituito da un continuo, privato di p continui a due a due senza punti in comune,

⁽⁸⁾ Cfr. [24].

le cui frontiere indicheremo con C_1, C_2, \dots, C_p . Indicato con (x_k, y_k) un punto interno al continuo avente per frontiera C_k ($k = 1, 2, \dots, p$), poniamo :

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^p \left[\int_{C_k} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\Delta_2 v) dy - \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_2 v) dx \right\} \log [(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2] \right].$$

La funzione $\Delta_2 v - \Psi$ è armonica in A , ed è tale che per ogni curva regolare chiusa contenuta in A si abbia :

$$\int_C \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta_2 v - \Psi) ds = 0.$$

Esiste allora in A una funzione armonica w , tale che

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (\Delta_2 v - \Psi), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} (\Delta_2 v - \Psi), \quad \iint_A w d\tau = 0.$$

Per il ricordato teorema di Friedrichs, la w appartiene ad $L^{(2)}(A)$.

Riesce pertanto :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}A_e} v \frac{\partial (\Delta_2 v)}{\partial \nu} ds &= \int_{\mathcal{F}A_e} v \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} ds - \int_{\mathcal{F}A_e} v \frac{\partial w}{\partial s} ds = \\ &= \int_{\mathcal{F}A_e} v \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} ds + \int_{\mathcal{F}A_e} w \frac{\partial v}{\partial s} ds, \end{aligned}$$

e quindi, col solito ragionamento, si trova :

$$\lim_{e \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}A_e} v \frac{\partial (\Delta_2 v)}{\partial \nu} ds = 0.$$

Siamo pervenuti così alla relazione seguente :

$$\iint_A (\Delta_2 v)^2 d\tau = 0,$$

che comporta $\Delta_2 v = 0$ in A . La funzione v , appartenendo a $C_1^{(2)}$, essendo nulla su $\mathcal{F}A$ ed armonica in A , riesce — cfr. teorema I, capitolo II — identicamente nulla in A .

Vogliamo infine dimostrare la proprietà di minimo enunciata. Indichiamo con $\{\varphi_i(z)\}$ un sistema di funzioni definite in A , appartenenti ad $L^{(2)}(A)$, ed ivi completo. Ebbene, le funzioni $w_i(z)$ definite in A al modo seguente:

$$w_i(z) = \varphi_i(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\iint_A \varphi_i(\zeta) v_k(\zeta) d_\zeta \tau \right) v_k(z)$$

sono tali che il sistema costituito dalle due successioni $\{v_k(z)\}$ e $\{w_i(z)\}$ è completo in $L^{(2)}(A)$ ⁽⁹⁾. Infatti, se $f(z)$ è una funzione di $L^{(2)}(A)$ verificante le infinite equazioni integrali:

$$\iint_A f(z) v_k(z) d_z \tau = 0, \quad \iint_A f(z) w_i(z) d_z \tau = 0 \quad (k, i = 1, 2, \dots),$$

essa verifica anche le relazioni:

$$\iint_A f(z) \varphi_i(z) d_z \tau = 0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

per modo che riesce: $f(z) \equiv 0$ in A .

Supposto poi ortonormalizzato in A il sistema $\{w_i(z)\}$, il sistema costituito dalle successioni $\{v_k(z)\}$ e $\{w_i(z)\}$ è ortonormale in A , dato che:

$$\begin{aligned} \iint_A v_k(z) v_i(z) d_z \tau &= \iint_A v_k(z) \varphi_i(z) d_z \tau - \\ &- \iint_A v_k(z) \left[\sum_{h=1}^{\infty} \left(\iint_A \varphi_i(\zeta) v_h(\zeta) d_\zeta \tau \right) v_h(z) \right] d_z \tau = \\ \iint_A v_k(z) \varphi_i(z) d_z \tau - \sum_{h=1}^{\infty} \iint_A \varphi_i(\zeta) v_h(\zeta) d_\zeta \tau \iint_A v_k(z) v_h(z) d_z \tau &= 0. \end{aligned}$$

Se U è una funzione di $\overline{O}_2^{(2)}$, per il teorema di Parseval ⁽¹⁰⁾ riesce:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[U] &= \iint (\Delta_2 U)^2 d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\iint v_k(\zeta) \Delta_2 U(\zeta) d_\zeta \tau \right)^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\iint w_i(\zeta) \Delta_2 U(\zeta) d_\zeta \tau \right)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\iint w_i(\zeta) \Delta_2 U(\zeta) d_\zeta \tau \right)^2; \end{aligned}$$

⁽⁹⁾ Cfr. [18].

⁽¹⁰⁾ Cfr. [18].

ne segue che

$$\mathcal{J}[U] \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

Poichè per la u definita dalla (3) si ha :

$$\Delta_2 u = - \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k,$$

riesce :

$$\mathcal{J}[u] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

Rimane così provato che $\mathcal{J}[U]$ è dotato di minimo in $\overline{C}_2^{(2)}$, e che la funzione minimante è proprio la funzione biarmonica u di $\overline{C}_2^{(2)}$.

2. Funzione di Green $\Gamma(w, z)$ e studio dell'integrale : $\iint_A \varphi(\zeta) \Gamma(z, \zeta) d\zeta \tau.$

Fissato w in A , poniamo su \mathcal{FA} :

$$u^*(\zeta) = |w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|, \quad v^*(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} [|w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|].$$

La classe $\overline{C}_2^{(2)}$ è in questo caso non vuota dato che, detto $I_{\varrho_0}(w)$ il dominio circolare di centro w e raggio ϱ_0 interno ad A , appartiene ad essa la funzione U così definita in A :

$$U(w, z) \begin{cases} = |w - z|^2 \log |w - z| & \text{per } z \in A - I_{\varrho_0}(w) \\ = |w - z|^2 \log \varrho_0 + \frac{1}{24} \frac{|w - z|^8}{\varrho_0^6} - \frac{1}{4} \frac{|w - z|^6}{\varrho_0^4} + \\ + \frac{3}{4} \frac{|w - z|^4}{\varrho_0^2} - \frac{5}{12} |w - z|^2 - \frac{1}{8} \varrho_0^2 & \text{per } z \in I_{\varrho_0}(w). \end{cases}$$

Si constata infatti semplicemente che U è continua in A assieme alle derivate parziali del primo e second'ordine.

Rifacendoci al procedimento esistenziale di cui al n. 1, fissato w in A , indichiamo con $\gamma(w, z)$ la funzione biarmonica, appartenente alla classe $C_2^{(2)}$, che in quasi tutti i punti ζ di \mathcal{FA} verifica le seguenti relazioni :

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \gamma(w, z) = |w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|,$$

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \gamma(w, z) = \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} [|w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|].$$

Per la (3) si ha :

$$\begin{aligned} \gamma(w, z) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}^A} \left\{ |w - \zeta|^2 \log |w - \zeta| \frac{\partial}{\partial v_\zeta} \log |z - \zeta| - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial v_\zeta} [|w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|] \left[\log |z - \zeta| \right] \right\} d_\zeta s - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_A \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) v_k(\zeta) \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau, \end{aligned}$$

• ove si è posto :

$$(8) \quad \begin{aligned} a_k(w) = & \int_{\mathfrak{F}^A} \left\{ |w - \zeta|^2 \log |w - \zeta| \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial v} - \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial v_\zeta} [|w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|] v_k(\zeta) \right\} d_\zeta s = -4 \iint_A v_k(\zeta) \log |w - \zeta| d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Fissato il punto z in A , sia I un dominio circolare di centro z , contenuto in A .

$$\begin{aligned} \iint_A \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) v_k(\zeta) \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau = & \iint_I \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) v_k(\zeta) \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau + \\ & + \iint_{A-I} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) v_k(\zeta) \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

In I la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) v_k(\zeta)$ converge uniformemente, e la funzione $\log |z - \zeta|$ vi è sommabile; in $A - I$ la serie converge in media e la funzione $\log |z - \zeta|$ vi è continua, dimodochè è lecito scambiare il simbolo d'integrazione con quello di sommazione in tutto A :

$$\iint_A \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) v_k(\zeta) \log |z - \zeta| \right] d_\zeta \tau = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) \iint_A v_k(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau.$$

In forza delle (8), si ottiene :

$$(9) \quad \gamma(w, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{F}^A} \left\{ |w - \zeta|^2 \log |w - \zeta| \frac{\partial}{\partial v_\zeta} \log |z - \zeta| - \right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial v_\zeta} [|w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|] \log |z - \zeta| \Big\} d_\zeta s + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A v_k(\zeta) \log |w - \zeta| d_\zeta \tau \iint_A v_k(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau .$$

Poniamo :

$$\Gamma(w, z) = \gamma(w, z) - |w - z| \log |w - z| ;$$

per la (5) si ha :

$$|w - z|^2 \log |w - z| = \frac{1}{2\pi} \iint_A \left\{ |w - \zeta|^2 \log |w - \zeta| \frac{\partial}{\partial v_\zeta} \log |z - \zeta| - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial v_\zeta} [|w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|] \log |z - \zeta| \right\} d_\zeta s + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_A [4 + 4 \log |w - \zeta|] \log |z - \zeta| d_\zeta \tau ,$$

e pertanto riesce

$$\Gamma(w, z) = -\frac{2}{\pi} \iint_A \log |w - \zeta| \log |z - \zeta| d_\zeta \tau + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A v_k(\zeta) \log |w - \zeta| d_\zeta \tau \iint_A v_k(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau .$$

Siamo pervenuti in tal modo⁽¹⁴⁾ alla funzione di Green: $\Gamma(w, z)$ per il cosiddetto problema biarmonico.

Essa è funzione simmetrica di w e z .

Detta $\varphi(\zeta)$ una funzione di quadrato sommabile in A , poichè $\Gamma(z, \zeta)$, per ogni fissato z in A , è funzione di ζ di quadrato sommabile in A , ne viene che per ogni z in A , ha senso l'integrale: $\iint_A \varphi(\zeta) \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau$.

Stabiliremo ora un importante teorema relativo alla funzione di z definita da tale integrale.

⁽¹⁴⁾ Cfr. [11].

II. — Se $\varphi(\zeta)$ è una funzione appartenente ad $L_h^{(2)}(A)$, la funzione $u(z)$ definita in A al modo seguente :

$$u(z) = \iint_A \varphi(\zeta) \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau$$

è di classe quattro in A , appartiene a $C_2^{(2)}$ ed è tale che :

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta_4 u = -8\pi\varphi & \dots \dots \dots \text{ in } A \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \dots \dots \dots \text{ su } \mathcal{F}A. \end{cases}$$

La funzione $v^*(\zeta)$ definita in A al modo seguente :

$$(11) \quad v^*(\zeta) = \iint_A \varphi(w) |\zeta - w|^2 \log |\zeta - w| d_w \tau$$

è tale che :

$$\Delta_4 v^*(\zeta) = 8\pi\varphi(\zeta).$$

Ne segue che, se $v(z)$ è la soluzione del seguente problema :

$$(12) \quad \begin{cases} \Delta_4 v = 0 & \dots \dots \dots \text{ in } A \\ v = v^*, \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial v^*}{\partial \nu} & \dots \dots \dots \text{ su } \mathcal{F}A, \end{cases}$$

la funzione :

$$u^* = v - v^*$$

verifica ovviamente le (10).

Per la funzione v appartenente a $C_2^{(2)}$, e soluzione del problema (12), tenendo presente la (3) e la (11), si ha :

$$\begin{aligned} v(z) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| d_\zeta s \iint_A \varphi(w) |\zeta - w|^2 \log |\zeta - w| d_w \tau - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} \log |z - \zeta| d_\zeta s \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \iint_A \varphi(w) |\zeta - w|^2 \log |\zeta - w| d_w \tau - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iint_A \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(\zeta) \right] \log |z - \zeta| d_\zeta \tau, \end{aligned}$$

avendo posto :

$$a_k = \int_{\mathcal{F}A} \left\{ v^*(\zeta) \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial \nu} - \frac{\partial v^*(\zeta)}{\partial \nu} v_k(\zeta) \right\} d_\zeta s .$$

Al n.º 2 è stato dimostrato che nell'ultimo integrale è lecito scambiare fra loro i simboli di integrazione e di sommazione; quanto ai primi due integrali, vogliamo provare che è possibile invertire l'ordine di integrazione.

Consideriamo dapprima l'integrale :

$$\int_{\mathcal{F}A} \log |z - \zeta| d_\zeta s \iint_A \varphi(w) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} [|\zeta - w|^2 \log |\zeta - w|] d_w \tau .$$

La funzione : $|\varphi(w)| \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} [|\zeta - w|^2 \log |\zeta - w|]$ è sommabile nel prodotto topologico $\mathcal{F}A \times A$ ($\zeta \in \mathcal{F}A, w \in A$).

Infatti :

$$|\varphi(w)| \int_{\mathcal{F}A} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} [|\zeta - w|^2 \log |\zeta - w|] d_\zeta s$$

è il prodotto di una funzione sommabile — la $\varphi(w)$ — per una funzione continua : la $\int_{\mathcal{F}A} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} [|\zeta - w|^2 \log |\zeta - w|] d_\zeta s$.

Per il teorema di Tonelli, segue l'asserto.

Pertanto moltiplicando la funzione : $|\varphi(w)| \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} [|\zeta - w|^2 \log |\zeta - w|] \right|$ per la funzione continua di ζ : $\log |z - \zeta|$ (z è interno ad A), si ottiene sempre una funzione sommabile in $\mathcal{F}A \times A$. Con considerazioni perfettamente analoghe, si prova che la funzione $\left| \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| \right| |\varphi(w)| |\zeta - w|^2 \cdot \log |\zeta - w|$ riesce sommabile nel prodotto topologico $\mathcal{F}A \times A$ ($\zeta \in \mathcal{F}A, w \in A$).

Applicando il teorema di Fubini, abbiamo dunque :

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(w) d_w \tau \int_{\mathcal{F}A} |\zeta - w|^2 \log |\zeta - w| \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| d_\zeta s - \\ &- \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(w) d_w \tau \int_{\mathcal{F}A} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} [|\zeta - w|^2 \log |\zeta - w|] \log |z - \zeta| d_\zeta s - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \iint_A v_k(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau . \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i coefficienti a_k :

$$a_k = \int_{\mathcal{F}^A} \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial \nu} d_\zeta s \iint_A \varphi(w) |\zeta - w|^2 \log |\zeta - w| d_w \tau - \\ - \int_{\mathcal{F}^A} v_k(\zeta) d_\zeta s \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \iint_A \varphi(w) |\zeta - w|^2 \log |\zeta - w| d_w \tau.$$

Ragionando analogamente a come testè fatto, si ha (teorema di Fubini):

$$a_k = \iint_A \varphi(w) d_w \tau \int_{\mathcal{F}^A} \frac{\partial v_k(\zeta)}{\partial \nu} |\zeta - w|^2 \log |\zeta - w| d_\zeta s - \\ - \iint_A \varphi(w) d_w \tau \int_{\mathcal{F}^A} v_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} [|\zeta - w|^2 \log |\zeta - w|] d_\zeta s = \\ = 4 \iint_A \varphi(w) d_w \tau \iint_A v_k(\zeta) \log |w - \zeta| d_\zeta \tau.$$

Sostituendo si trova:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \varphi(w) d_w \tau \left\{ \int_{\mathcal{F}^A} |\zeta - w|^2 \log |\zeta - w| \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} \log |z - \zeta| d_\zeta s - \right. \\ (13) \quad \left. - \int_{\mathcal{F}^A} \frac{\partial}{\partial \nu_\zeta} [|\zeta - w|^2 \log |\zeta - w|] \log |z - \zeta| d_\zeta s \right\} + \\ + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A \varphi(w) d_w \tau \iint_A v_k(\zeta) \log |w - \zeta| d_\zeta \tau \iint_A v_k(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau.$$

Sia:

$$\alpha_k(w) = \iint_A v_k(\zeta) \log |w - \zeta| d_\zeta \tau,$$

e quindi:

$$\alpha_k(z) = \iint_A v_k(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau.$$

La ridotta n -esima della serie $\left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(w) \alpha_k(z) \right] \varphi(w)$ è maggiorata da una funzione sommabile rispetto a w .

Infatti, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, riesce :

$$\left| \varphi(w) \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k(w) \alpha_k(z) \right] \right| \leq |\varphi(w)| \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k(w)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

si ha poi :

$$\alpha_k(w) = \frac{1}{4} \iint_A v_k(\zeta) A_2[|w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|] d_\zeta \tau,$$

ossia $\alpha_k(w)$ rappresenta il k -esimo coefficiente di Fourier di $\frac{1}{4} A_2[|w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|]$ rispetto al sistema ortonormale $\{v_k(\zeta)\}$.

Ne segue, per il teorema di Bessel, che la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(w)|^2$ è convergente, e che si ha :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(w)|^2 &\leq \frac{1}{16} \iint_A (A_2[|w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|])^2 d_\zeta \tau = \\ &= \iint_A (1 + \log |w - \zeta|)^2 d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Pertanto, qualunque sia n , riesce :

$$\begin{aligned} &\left| \varphi(w) \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k(z) \alpha_k(w) \right] \right| \leq \\ &\leq |\varphi(w)| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k(z)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A (1 + \log |w - \zeta|)^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}}; \end{aligned}$$

siccome a secondo membro si ha una funzione di w sommabile, si conclude che è lecito nella (13) scambiare il simbolo di integrazione con quello di sommazione :

$$\begin{aligned} v(z) &= \iint_A \varphi(w) d_w \tau \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} |w - \zeta|^2 \log |w - \zeta| \frac{\partial}{\partial v_\zeta} \log |z - \zeta| d_\zeta s - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A} \frac{\partial}{\partial v_\zeta} [|w - \zeta|^2 \log |w - \zeta|] \log |z - \zeta| d_\zeta s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A v_k(\zeta) \log |w - \zeta| d_\zeta \tau \int_A v_k(\zeta) \log |z - \zeta| d_\zeta \tau \right\}. \end{aligned}$$

Ricordando la (9), si ha infine :

$$v(z) = \iint_A \varphi(w) \gamma(w, z) d_w \tau.$$

Ne segue che :

$$\begin{aligned} u^*(z) = v(z) - v^*(z) &= \iint_A \varphi(w) \gamma(w, z) d_w \tau - \iint_A \varphi(w) |z-w|^2 \log |z-w| d_w \tau = \\ &= \iint_A \varphi(\zeta) \Gamma(\zeta, z) d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

E quindi, ricordando la simmetria della funzione $\Gamma(\zeta, z)$ rispetto ζ e z :

$$u^*(z) = u(z).$$

Rimangono da esaminare le proprietà qualitative della funzione $u(z)$.

Essendo :

$$u(z) = v(z) - \iint_A \varphi(\zeta) |z-\zeta|^2 \log |z-\zeta| d_\zeta \tau,$$

il primo addendo $v(z)$ appartiene a $C_2^{(2)}$, ed è funzione analitica in A . Quanto al secondo addendo, esso — per ben note proprietà del potenziale biarmonico — appartiene a $C_4^{(2)}$. In definitiva, $u(z)$ è di classe quattro in A , ed appartiene a $C_2^{(2)}$.

Il teorema è così dimostrato.

Osservazione importante.

Si noti che, per l'appartenenza di $u(z)$ a $C_2^{(2)}$, non occorre che $\varphi(\zeta)$ appartenga ad $L_h^{(2)}(A)$, basta che appartenga ad $L^{(2)}(A)$. Infatti la dimostrazione richiede l'appartenenza di $\varphi(\zeta)$ ad $L_h^{(2)}(A)$, solo per assicurare che :

$$v^*(\zeta) = \iint_A \varphi(w) |\zeta-w|^2 \log |\zeta-w| d_w \tau$$

appartenga a $C_4^{(2)}$ e verifichi l'equazione :

$$\Delta_4 v^* = 8 \pi \varphi.$$

Il seguente teorema fornisce ulteriori notevoli proprietà della funzione $u(z)$:

III. — Se la funzione $\varphi(\zeta)$ appartiene ad $L^{(2)}(A)$, per ogni fissato $z \equiv (x, y)$ nel campo A , sono sommabili in A le funzioni di ζ :

$$\varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta) \quad , \quad \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta)$$

e si ha:

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \iint_A \varphi(\zeta) \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau &= \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau \\ \frac{\partial}{\partial y} \iint_A \varphi(\zeta) \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau &= \iint_A \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau. \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\Gamma_0(z, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A v_k(w) \log |z - w| d_w \tau \iint_A v_k(w) \log |\zeta - w| d_w \tau.$$

Facciamo vedere che, fissato z in A , la funzione di ζ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta)$$

è di quadrato sommabile in A .

Fissato z in A , la funzione di ζ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_A \log |\zeta - w| \log |z - w| d_w \tau = \iint_A \log |\zeta - w| \frac{\partial}{\partial x} \log |z - w| d_w \tau$$

appartiene ad $L^{(2)}(A)$.

Occupiamoci di $\Gamma_0(z, \zeta)$, e facciamo vedere anzitutto che è lecito derivare termine a termine la serie.

Ciò segue immediatamente dall'osservare che la serie derivata:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \iint_A v_k(w) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - w| d_w \tau \iint_A v_k(w) \log |\zeta - w| d_w \tau$$

è uniformemente convergente al variare di z in ogni dominio contenuto in A , dato che i suoi termini sono funzioni biarmoniche in A .

Si ha poi :

$$\begin{aligned}
 & \iint_A v_k(w) \frac{\partial}{\partial x} \log |z-w| d_w \tau = \\
 & = \frac{1}{4} \iint_{\mathcal{FA}} v_k(w) \frac{\partial}{\partial v_w} \left(\frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) - \\
 & \quad - \frac{\partial v_k(w)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \Big\} d_w s = \\
 & = \frac{1}{4} \iint_{\mathcal{FA}} \left\{ v_k(w) \frac{\partial}{\partial v_w} U(z, w) - \frac{\partial v_k(w)}{\partial v} U(z, w) \right\} d_w s = \\
 & = \frac{1}{4} \iint_A v_k(w) \Delta_{2w} U(z, w) d_w \tau,
 \end{aligned}$$

avendo indicato con $U(z, w)$ una funzione appartenente a $C_2^{(2)}$, e tale che su \mathcal{FA} riesca :

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & U(z, w) = \frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \\
 & \frac{\partial}{\partial v_w} U(z, w) = \frac{\partial}{\partial v_w} \left(\frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right).
 \end{aligned}$$

Detto $I_{\varrho_0}(z)$ un dominio circolare di centro z e raggio ϱ_0 , contenuto in A , ed introdotto in A un sistema di coordinate polari ϱ e θ , di polo z , come funzione di cui sopra, si può prendere la funzione definita in A al modo seguente :

$$U(\varrho, \theta) \left\{ \begin{aligned}
 & = (2 \varrho \log \varrho + \varrho) \cos \theta \quad \text{in } A - I_{\varrho_0}(z) \\
 & = \left[\left(\frac{15}{4} \frac{\varrho^8}{\varrho_0^7} - \frac{21}{2} \frac{\varrho^6}{\varrho_0^5} + \frac{35}{4} \frac{\varrho^4}{\varrho_0^3} \right) \log \varrho_0 + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{11}{8} \frac{\varrho^4}{\varrho_0^3} - \frac{1}{4} \frac{\varrho^6}{\varrho_0^5} - \frac{1}{8} \frac{\varrho^8}{\varrho_0^7} \right] \cos \theta \quad \text{in } I_{\varrho_0}(z).
 \end{aligned} \right.$$

Si constata infatti facilmente che tale funzione verifica le (15), e che inoltre è continua assieme alle derivate del primo e second'ordine in A .

Applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ed il teorema di Bessel, si ha allora :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_0(z, \zeta) \right|^2 &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_A v_k(w) \frac{\partial}{\partial x} \log |z-w| d_w \tau \int_A v_k(w) \log |\zeta-w| d_w \tau \right|^2 \leq \\ &\leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_A v_k(w) \frac{\partial}{\partial x} \log |z-w| d_w \tau \right)^2 \right] \left[\sum_{h=1}^{\infty} \left(\int_A v_h(w) \log |\zeta-w| d_w \tau \right)^2 \right] = \\ &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \int_A v_k(w) \Delta_{2w} U(z, w) d_w \tau \right)^2 \right] \left[\sum_{h=1}^{\infty} \left(\int_A v_h(w) \log |\zeta-w| d_w \tau \right)^2 \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{16} \left(\int_A [\Delta_{2w} U(z, w)]^2 d_w \tau \right) \left(\int_A [\log |\zeta-w|]^2 d_w \tau \right) \end{aligned}$$

Essendo :

$$\begin{aligned} &\int_A [\Delta_{2w} U(z, w)]^2 d_w \tau = \\ &\int_{\mathcal{F}A} \left\{ \Delta_{2w} \left(\frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) \frac{\partial}{\partial v_w} \left(\frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \frac{\partial}{\partial v_w} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta_{2w} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) \right\} d_w s - \\ &\int_{\mathcal{F}I_{\varrho_0}(z)} \left\{ \Delta_{2w} \left(\frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) \frac{\partial}{\partial v_w} \left(\frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \frac{\partial}{\partial v_w} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta_{2w} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) \right\} d_w s + \\ &\quad + \int_{I_{\varrho_0}(z)} [\Delta_{2w} U(z, w)]^2 d_w \tau = \\ &\int_{\mathcal{F}A} \left\{ \Delta_{2w} \left[\frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \frac{\partial}{\partial v_w} \left(\frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \frac{\partial}{\partial v_w} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta_{2w} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) \right] \right\} d_w s + \\ &\quad + \frac{1155}{32} \pi \log^2 \varrho_0 - \frac{407}{32} \pi \log \varrho_0 + \frac{111}{128} + \pi, \end{aligned}$$

la funzione di z : $\iint_A [\Delta_{2w} U(z, w)]^2 d_w \tau$ riesce una funzione sommabile in A ; facendo tendere ϱ_0 a $\delta(z)$, si ha:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_0(z, \zeta) \right|^2 \leq \\ & \leq \left(\frac{1}{16} \iint_A \left\{ \Delta_{2w} \left(\frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) \frac{\partial}{\partial v_w} \left(\frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) - \right. \right. \\ (16) \quad & \left. \left. \frac{\partial}{\partial x} [|z-w|^2 \log |z-w|] \frac{\partial}{\partial v_w} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta_{2w} [|z-w|^2 \log |z-w|] \right) \right\} d_w s + \right. \\ & \left. + \frac{1155}{512} \pi \log^2 \delta(z) - \frac{407}{512} \pi \log \delta(z) + \frac{111}{2048} \pi \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left(\iint_A [\log |\zeta - w|]^2 d_w \tau \right) \right); \end{aligned}$$

il primo fattore è una funzione sommabile di z , — cfr. dimostrazione del teorema IV capitolo II — il secondo è una funzione addirittura continua di ζ ; ne segue che, fissato z in A , la funzione di ζ : $\left| \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_0(z, \zeta) \right|^2$ appartiene ad $L^{(2)}(A)$.

Vogliamo provare, ad esempio, la prima delle (14).

Occorre far vedere che la funzione: $\left| \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta) \right|$ è maggiorata in un intorno di ogni fissato z , da una funzione del punto ζ sommabile in A ; il chè segue ovviamente dalla (16).

Il teorema è così dimostrato.

CAPITOLO VI

IL SISTEMA DI EQUAZIONI DELLE VOLTE CILINDRICHE

1. Un problema al contorno che generalizza quello dell'equilibrio delle volte cilindriche incastrate.

In questo capitolo considereremo il seguente sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali:

$$(1) \quad \begin{cases} A_2 u_1 + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \sum_{h=1}^3 \left(\alpha_{h1}^{(1)} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \alpha_{h2}^{(1)} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \beta_h^{(1)} u_h \right) = F_1 \\ A_2 u_2 + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \sum_{h=1}^3 \left(\alpha_{h1}^{(2)} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \alpha_{h2}^{(2)} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \beta_h^{(2)} u_h \right) = F_2 \\ A_4 u_3 + \sum_{h=1}^3 \left(\alpha_{h1}^{(3)} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \alpha_{h2}^{(3)} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \beta_h^{(3)} u_h \right) = F_3, \end{cases}$$

ove le F_i , $\alpha_{h1}^{(i)}$, $\alpha_{h2}^{(i)}$, $\beta_h^{(i)}$ sono funzioni definite nel campo A . Ci proponiamo di stabilire anzitutto un teorema d'esistenza per il vettore $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z), u_3(z)]$ soluzione in A del sistema (1), e verificante su $\mathcal{F}A$ le seguenti condizioni al contorno:

$$(2) \quad u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0.$$

Sul campo A faremo l'ipotesi, costantemente adottata in questa trattazione, che sia limitato, regolare e di classe due.

2. Traduzione del problema al contorno in un sistema di equazioni integrali.

Indicheremo con \mathcal{C} la classe dei vettori $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z), u_3(z)]$ le cui componenti godono delle seguenti proprietà:

- 1) u_1 e u_2 appartengono a $C_1^{(2)}$ e sono di classe due in A ,
- 2) u_3 appartiene a $C_2^{(2)}$ ed è di classe quattro in A .

Sulle funzioni $\alpha_{h1}^{(i)}(z)$, $\alpha_{h2}^{(i)}(z)$ e $\beta_h^{(i)}(z)$ faremo le ipotesi che $\alpha_{h1}^{(i)}(z)$ e $\alpha_{h2}^{(i)}(z)$ siano di classe uno in $A + \mathcal{FA}$, e $\beta_h^{(i)}(z)$ siano funzioni continue in $A + \mathcal{FA}$ ed hölderiane in A . Avvertiamo che tali ipotesi su $\alpha_{h1}^{(i)}(z)$, $\alpha_{h2}^{(i)}(z)$, $\beta_h^{(i)}(z)$ saranno costantemente mantenute in tutto questo capitolo.

Per stabilire un teorema d'esistenza nella classe \mathcal{C} sopra definita, per il problema al contorno (1), (2), ci serviremo di una traduzione in equazioni integrali di tale problema al contorno. Precisamente ci fonderemo sul seguente teorema :

I. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè, assegnato in $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$ il vettore $\vec{F}(z) \equiv [F_1(z), F_2(z), F_3(z)]$, esista la soluzione $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z), u_3(z)]$ del problema al contorno (1), (2) nella classe \mathcal{C} , è che esista in $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$ un vettore $\vec{\varphi}(z) \equiv [\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z)]$ soluzione del seguente sistema di equazioni integrali :*

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \iint_A \{\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{H}^{(1)}(z, \zeta)\} d_\zeta \tau - 8\pi \varphi_1(z) &= F_1(z) \\ \iint_A \{\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{H}^{(2)}(z, \zeta)\} d_\zeta \tau - 8\pi \varphi_2(z) &= F_2(z) \\ \iint_A \{\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{H}^{(3)}(z, \zeta)\} d_\zeta \tau - 8\pi \varphi_3(z) &= F_3(z), \end{aligned} \right.$$

dove, indicate con x e y le coordinate del punto z , il vettore $\vec{H}^{(i)}(z, \zeta) \equiv [H_1^{(i)}(z, \zeta), H_2^{(i)}(z, \zeta), H_3^{(i)}(z, \zeta)]$ ($i = 1, 2, 3$) è definito in $A \times A$ al modo seguente :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1^{(i)}(z, \zeta) &= \alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} G_1^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} G_1^{(2)}(z, \zeta) + \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} G_1^{(1)}(z, \zeta) + \\ &+ \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} G_1^{(2)}(z, \zeta) + \beta_1^{(i)}(z) G_1^{(1)}(z, \zeta) + \beta_2^{(i)}(z) G_1^{(2)}(z, \zeta) \\ H_2^{(i)}(z, \zeta) &= \alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} G_2^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} G_2^{(2)}(z, \zeta) + \\ &+ \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} G_2^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} G_2^{(2)}(z, \zeta) + \\ &+ \beta_1^{(i)}(z) G_2^{(1)}(z, \zeta) + \beta_2^{(i)}(z) G_2^{(2)}(z, \zeta) \\ H_3^{(i)}(z, \zeta) &= \alpha_{31}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta) + \alpha_{32}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta) + \beta_3^{(i)}(z) \Gamma(z, \zeta), \end{aligned} \right.$$

essendo $G_k^{(h)}(z, \zeta)$ l'elemento della matrice di Green introdotta nel capitolo IV, n. 6 e $\Gamma(z, \zeta)$ la funzione di Green introdotta nel capitolo V, n. 2.

La condizione è necessaria. Sia $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z), u_3(z)]$ un vettore di \mathfrak{e} , soluzione del problema (1), (2).

Poniamo :

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{8\pi} \left[A_2 u_1 + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right]$$

$$\varphi_2(z) = -\frac{1}{8\pi} \left[A_2 u_2 + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right]$$

$$\varphi_3(z) = -\frac{1}{8\pi} A_4 u_3 .$$

Riesce allora

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{8\pi} \left[F_1 - \sum_{h=1}^3 \left(\alpha_{h1}^{(1)} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \alpha_{h2}^{(1)} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \beta_h^{(1)} u_h \right) \right]$$

$$\varphi_2(z) = -\frac{1}{8\pi} \left[F_2 - \sum_{h=1}^3 \left(\alpha_{h1}^{(2)} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \alpha_{h2}^{(2)} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \beta_h^{(2)} u_h \right) \right]$$

$$\varphi_3(z) = -\frac{1}{8\pi} \left[F_3 - \sum_{h=1}^3 \left(\alpha_{h1}^{(3)} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \alpha_{h2}^{(3)} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \beta_h^{(3)} u_h \right) \right],$$

per modo che, appartenendo $\vec{F}(z)$ a $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$ e $\vec{u}(z)$ a \mathfrak{e} , e per le ipotesi fatte su $\alpha_{h1}^{(v)}, \alpha_{h2}^{(v)}, \beta_h^{(v)}$, il vettore $\vec{\varphi}(z)$ appartiene esso stesso a $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$. In virtù del teorema IX del capitolo IV e del teorema II del capitolo V, si ha :

$$u_1(z) = \iint_A [\varphi_1(\zeta) G_1^{(1)}(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) G_2^{(1)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

$$(5) \quad u_2(z) = \iint_A [\varphi_1(\zeta) G_1^{(2)}(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) G_2^{(2)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

$$u_3(z) = \iint_A \varphi_3(\zeta) \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau$$

ed inoltre — cfr. teorema X capitolo IV e teorema III capitolo V — riesce:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \iint_A [\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} G_1^{(1)}(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} G_2^{(1)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \iint_A [\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} G_1^{(1)}(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} G_2^{(1)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \iint_A [\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} G_1^{(2)}(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} G_2^{(2)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \iint_A [\varphi_1(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} G_1^{(2)}(z, \zeta) + \varphi_2(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} G_2^{(2)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = \iint_A \varphi_3(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = \iint_A \varphi_3(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau.$$

Sostituendo nel sistema (1), si trova:

$$\begin{aligned} & - 8\pi \varphi_i(z) + \iint_A \left\{ \varphi_1(\zeta) \left[\alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} G_1^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} G_1^{(2)}(z, \zeta) + \right. \right. \\ & + \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} G_1^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} G_1^{(2)}(z, \zeta) + \beta_1^{(i)}(z) G_1^{(1)}(z, \zeta) + \\ & + \beta_2^{(i)}(z) G_1^{(2)}(z, \zeta) \left. \right] + \varphi_2(\zeta) \left[\alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} G_2^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} G_2^{(2)}(z, \zeta) + \right. \\ & + \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} G_2^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} G_2^{(2)}(z, \zeta) + \beta_1^{(i)}(z) G_2^{(1)}(z, \zeta) + \\ & + \beta_2^{(i)}(z) G_2^{(2)}(z, \zeta) \left. \right] + \varphi_3(\zeta) \left[\alpha_{31}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta) + \alpha_{32}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta) + \right. \\ & \left. + \beta_3^{(i)}(z) \Gamma(z, \zeta) \right\} d_\zeta \tau = F_i(z) \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

donde, ricordando le posizioni (4), ne scendono le (3).

La condizione è sufficiente.

Se $\vec{\varphi}(z)$ è una soluzione del sistema (3) che appartiene ad $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$, il vettore $\vec{u}(z)$ definito dalle (5) è la richiesta soluzione del problema (1), (2) nella classe \mathcal{e} , come segue dal teorema IX del capitolo IV e dal teorema II del capitolo V.

Il problema al contorno (1), (2) è così ricondotto allo studio del sistema di equazioni integrali (3), che veniamo a scrivere in maniera più concisa. Introdotta la matrice:

$$\mathcal{H}(z, \zeta) \equiv \| H_j^{(i)}(z, \zeta) \| \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

dove $H_j^{(i)}(z, \zeta)$ è una funzione definita in $A \times A$ dalle (4), il sistema di equazioni integrali (3), infatti, può mettersi sotto forma della seguente equazione integrale vettoriale:

$$(3_0) \quad \iint_A \{ \vec{\varphi}(\zeta) * \mathcal{H}(z, \zeta) \} d_\zeta \tau - 8 \pi \vec{\varphi}(z) = \vec{F}(z).$$

3. Dimostrazione della totale continuità della trasformazione:

$$T(\vec{\varphi}) = \iint_A \{ \vec{\varphi}(\zeta) * \mathcal{H}(z, \zeta) \} d_\zeta \tau.$$

Premettiamo il seguente teorema:

II. — Posto $(z \equiv (x, y)$ e ζ essendo due punti di A):

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} H_{01}^{(i)}(z, \zeta) &= \frac{k}{k+1} \alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial^3}{\partial x^3} [|z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|] + \\ &+ \frac{k}{k+1} \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} [|z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|] + \\ &+ \frac{k}{k+1} \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} [|z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|] + \\ &+ \frac{k}{k+1} \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} [|z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|] - \\ &- 4 \alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - \zeta| - 4 \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \log |z - \zeta| \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
H_{02}^{(i)}(z, \zeta) &= \frac{k}{k+1} \alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} [|z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|] + \\
&+ \frac{k}{k+1} \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} [|z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|] + \\
&+ \frac{k}{k+1} \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} [|z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|] + \\
&+ \frac{k}{k+1} \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial^3}{\partial y^3} [|z - \zeta|^2 \log |z - \zeta|] - \\
&- 4 \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} \log |z - \zeta| - 4 \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \log |z - \zeta| \\
H_{03}^{(i)}(z, \zeta) &\equiv 0 \\
(6) \quad H_{11}^{(i)}(z, \zeta) &= \alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} g_1^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} g_1^{(2)}(z, \zeta) + \\
&+ \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} g_1^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} g_1^{(2)}(z, \zeta) + \\
&+ \beta_1^{(i)}(z) G_1^{(1)}(z, \zeta) + \beta_2^{(i)}(z) G_1^{(2)}(z, \zeta) \\
H_{12}^{(i)}(z, \zeta) &= \alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} g_2^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} g_2^{(2)}(z, \zeta) + \\
&+ \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} g_2^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} g_2^{(2)}(z, \zeta) + \\
&+ \beta_1^{(i)}(z) G_2^{(1)}(z, \zeta) + \beta_2^{(i)}(z) G_2^{(2)}(z, \zeta) \\
H_{13}^{(i)}(z, \zeta) &= \alpha_{31}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta) + \alpha_{32}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta) + \beta_3^{(i)}(z) \Gamma(z, \zeta),
\end{aligned}$$

le funzioni $H_{0j}^{(i)}(z, \zeta)$ e $H_{1j}^{(i)}(z, \zeta)$ soddisfano in $A \times A$ alle condizioni seguenti:

$$\begin{aligned}
(7) \quad |H_{0j}^{(i)}(z, \zeta)| &\leq \frac{P_j^{(i)}}{|z - \zeta|} && (i, j = 1, 2, 3) \\
\iiint\limits_{A \times A} |H_{1j}^{(i)}(z, \zeta)|^2 d_z \tau d_\zeta \tau &< +\infty;
\end{aligned}$$

con $P_j^{(i)}$ si è indicata un'opportuna costante positiva.

Si ha:

$$\begin{aligned}
 |H_{01}^{(i)}(z, \zeta)| = & \left| \frac{k}{k+1} \alpha_{11}^{(i)}(z) \left[6 \frac{x-\xi}{|z-\zeta|^2} - 4 \frac{(x-\xi)^3}{|z-\zeta|^4} \right] + \right. \\
 & + \frac{k}{k+1} \alpha_{21}^{(i)}(z) \left[2 \frac{y-\eta}{|z-\zeta|^2} - 4 \frac{(x-\xi)^2(y-\eta)}{|z-\zeta|^4} \right] - 4 \alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{(x-\xi)}{|z-\zeta|^2} + \\
 & + \frac{k}{k+1} \alpha_{12}^{(i)}(z) \left[2 \frac{y-\eta}{|z-\zeta|^2} - 4 \frac{(x-\xi)^2(y-\eta)}{|z-\zeta|^4} \right] + \\
 & \left. + \frac{k}{k+1} \alpha_{22}^{(i)}(z) \left[2 \frac{x-\xi}{|z-\zeta|^2} - 4 \frac{(x-\xi)(y-\eta)^2}{|z-\zeta|^4} \right] - 4 \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{y-\eta}{|z-\zeta|^2} \right| \leq \frac{P_1^{(i)}}{|z-\zeta|},
 \end{aligned}$$

dove $P_1^{(i)}$ denota il massimo assunto in $A + \mathcal{FA}$ dalla funzione:

$$\begin{aligned}
 10 \left| \frac{k}{k+1} \alpha_{11}^{(i)}(z) \right| + 6 \left| \frac{k}{k+1} \alpha_{21}^{(i)}(z) \right| + 6 \left| \frac{k}{k+1} \alpha_{12}^{(i)}(z) \right| + \\
 + 6 \left| \frac{k}{k+1} \alpha_{22}^{(i)}(z) \right| + 4 |\alpha_{11}^{(i)}(z)| + 4 |\alpha_{12}^{(i)}(z)|.
 \end{aligned}$$

Analogamente, se $P_2^{(i)}$ è il massimo in $A + \mathcal{FA}$ della funzione:

$$\begin{aligned}
 6 \left| \frac{k}{k+1} \alpha_{11}^{(i)}(z) \right| + 6 \left| \frac{k}{k+1} \alpha_{21}^{(i)}(z) \right| + 6 \left| \frac{k}{k+1} \alpha_{12}^{(i)}(z) \right| + \\
 + 10 \left| \frac{k}{k+1} \alpha_{22}^{(i)}(z) \right| + 4 |\alpha_{21}^{(i)}(z)| + 4 |\alpha_{22}^{(i)}(z)|,
 \end{aligned}$$

riesce:

$$|H_{02}^{(i)}(z, \zeta)| \leq \frac{P_2^{(i)}}{|z-\zeta|}.$$

Rimane così provata la prima delle (7). Quanto alla seconda di quelle relazioni, incominciamo col far vedere che la funzione

$$\begin{aligned}
 |H_{11}^{(i)}(z, \zeta)| = & \left| \alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} g_1^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} g_1^{(2)}(z, \zeta) + \right. \\
 & + \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} g_1^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} g_1^{(2)}(z, \zeta) + \\
 & \left. + \beta_1^{(i)}(z) G_1^{(1)}(z, \zeta) + \beta_2^{(i)}(z) G_1^{(2)}(z, \zeta) \right| \quad (i = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

è di quadrato sommabile in $A \times A$. Basta per ciò provare che ciascuna delle funzioni

$$(8) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} g_1^{(1)}(z, \zeta), & \frac{\partial}{\partial x} g_1^{(2)}(z, \zeta), & \frac{\partial}{\partial y} g_1^{(1)}(z, \zeta), & \frac{\partial}{\partial y} g_1^{(2)}(z, \zeta), \\ & & G_1^{(1)}(z, \zeta), & G_1^{(2)}(z, \zeta) \end{aligned}$$

è di quadrato sommabile in $A \times A$. Consideriamone la prima — il ragionamento valendo ovviamente per le prime quattro delle funzioni (8); se k e λ verificano le ipotesi del teorema VI, capitolo IV, per la (19) del capitolo IV riesce:

$$\begin{aligned} & \iint_A \left| \frac{\partial}{\partial x} g_1^{(1)}(z, \zeta) \right|^2 d_z \tau \leq \iint_A |\text{grad}_z g_1^{(1)}(z, \zeta)|^2 d_z \tau \leq \\ & \int_{\mathcal{F}A} \{\vec{s}^{(1)}(\zeta, z) \times P_z[\vec{s}^{(1)}(\zeta, z)]\} d_z s + N_1 \log \delta(\zeta) + N_2, \end{aligned}$$

dove al solito $\delta(\zeta)$ rappresenta la distanza di ζ da $\mathcal{F}A$. Siccome la funzione a secondo membro è sommabile al variare di ζ in A — cfr. teorema VIII, capitolo IV, riesce:

$$\iiint_{A \times A} \left| \frac{\partial}{\partial x} g_1^{(1)}(z, \zeta) \right|^2 d_z \tau d_\zeta \tau < +\infty.$$

Quanto alle ultime due funzioni delle (8), facciamo vedere, ad esempio, che è di quadrato sommabile in $A \times A$ la $G_1^{(1)}(z, \zeta)$, per il che basta provare che è tale la $g_1^{(1)}(z, \zeta)$. Infatti, fissato z in A , per il teorema VII del capitolo IV si ha:

$$\iint_A |g_1^{(1)}(z, \zeta)|^2 d_\zeta \tau \leq \iint_A |\vec{g}^{(1)}(z, \zeta)|^2 d_\zeta \tau \leq H(A) \int_{\mathcal{F}A} |\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)|^2 d_\zeta s;$$

dalla sommabilità in A della funzione di z : $\int_{\mathcal{F}A} |\vec{s}^{(1)}(z, \zeta)|^2 d_\zeta s$, segue l'asserto.

In maniera perfettamente analoga, si prova che:

$$\iiint_{A \times A} |H_{12}^{(1)}(z, \zeta)|^2 d_z \tau d_\zeta \tau < +\infty.$$

Consideriamo infine la funzione:

$$H_{13}^{(i)}(z, \zeta) = \alpha_{31}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta) + \alpha_{32}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta) + \beta_3^{(i)}(z) \Gamma(z, \zeta).$$

Dalla (16) del capitolo V e da un'analogha diseguaglianza che si può stabilire per la $\frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta)$, si trae la sommabilità in $A \times A$ delle funzioni $\frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta)$ e $\frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta)$. Dobbiamo provare che riesce pure:

$$\iiint_{A \times A} |\Gamma(z, \zeta)|^2 d_z \tau d_\zeta \tau < +\infty.$$

Fissato z in A , la funzione di $\zeta: \Gamma(z, \zeta)$ è certamente di quadrato sommabile in A , data la sua appartenenza a $C_2^{(2)}$. Per provare che essa è di quadrato sommabile in $A \times A$, andiamo a stabilire una diseguaglianza analoga alla (16) del capitolo V. Poniamo:

$$\Gamma(z, \zeta) = -\frac{2}{\pi} \iint_A \log |z - w| \log |\zeta - w| d_w \tau + \frac{2}{\pi} \Gamma_0(z, \zeta),$$

essendo:

$$\Gamma_0(z, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \iint_A v_k(w) \log |z - w| d_w \tau \iint_A v_k(w) \log |\zeta - w| d_w \tau.$$

La funzione di z e $\zeta: \iint_A \log |z - w| \log |\zeta - w| d_w \tau$ è di quadrato sommabile in $A \times A$. Quanto a $\Gamma_0(z, \zeta)$, calcoliamo anzitutto i coefficienti di Fourier della funzione $\log |z - w|$ rispetto al sistema ortonormale $\{v_k(w)\}$:

$$\begin{aligned} \iint_A v_k(w) \log |z - w| d_w \tau &= \frac{1}{4} \iint_A v_k(w) \Delta_{2w} [|z - w|^2 \log |z - w|] d_w \tau = \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathcal{E}A} \left\{ v_k(w) \frac{\partial}{\partial v_w} [|z - w|^2 \log |z - w|] - \frac{\partial v_k(w)}{\partial v} [|z - w|^2 \log |z - w|] \right\} d_w s = \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathcal{E}A} \left\{ v_k(w) \frac{\partial}{\partial v_w} V(z, w) - \frac{\partial v_k(w)}{\partial v} V(z, w) \right\} d_w s = \frac{1}{4} \iint_A v_k(w) \Delta_{2w} V(z, w) d_w \tau, \end{aligned}$$

ove con $V(z, w)$ si è indicata una qualsiasi funzione di $C_2^{(2)}$, tale che, se z è in A e w su \mathcal{FA} , riesca:

$$V(z, w) = |z - w|^2 \log |z - w|$$

$$\frac{\partial}{\partial r_w} V(z, w) = \frac{\partial}{\partial r_w} [|z - w|^2 \log |z - w|].$$

Si ha, applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ed il teorema di Bessel:

$$\begin{aligned} |\Gamma_0(z, \zeta)|^2 &\leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\iint_A v_k(w) \log |z - w| d_w \tau \right)^2 \right] \left[\sum_{h=1}^{\infty} \left(\iint_A v_h(w) \log |\zeta - w| d_w \tau \right)^2 \right] \leq \\ &\leq \left[\frac{1}{16} \iint_A [\Delta_{2w} V(z, w)]^2 d_w \tau \right] \left[\iint_A (\log |\zeta - w|)^2 d_w \tau \right]. \end{aligned}$$

Come funzione $V(z, w)$ possiamo assumere quella introdotta nel capitolo V, n. 2; precisamente, indicato con $I_{\varrho_0}(z)$ un dominio circolare di centro z e raggio ϱ_0 , contenuto in A , definiamo la $V(z, w)$ al modo seguente:

$$V(z, w) \begin{cases} = |z - w|^2 \log |z - w| & \dots \dots \dots \text{ se } w \in A - I_{\varrho_0}(z) \\ = |z - w|^2 \log \varrho_0 + \frac{1}{24} \frac{|z - w|^8}{\varrho_0^6} - \frac{1}{4} \frac{|z - w|^6}{\varrho_0^4} + \\ + \frac{3}{4} \frac{|z - w|^4}{\varrho_0^2} - \frac{5}{12} |z - w|^2 - \frac{1}{8} \varrho_0^2 & \dots \text{ se } w \in I_{\varrho_0}(z). \end{cases}$$

Riesce allora:

$$\begin{aligned} \iint_A [\Delta_{2w} V(z, w)]^2 d_w \tau &= \int_{\mathcal{FA}} \left\{ \Delta_{2w} [|z - w|^2 \log |z - w|] \frac{\partial}{\partial r_w} [|z - w|^2 \log |z - w|] - \right. \\ &\quad \left. - [|z - w|^2 \log |z - w|] \frac{\partial}{\partial r_w} (\Delta_{2w} [|z - w|^2 \log |z - w|]) \right\} d_w s - \\ &\quad - \frac{10}{7} \pi \varrho_0^2; \end{aligned}$$

facendo tendere ϱ_0 a $\delta(z)$, si ha quindi:

$$| \Gamma_0(z, \zeta) |^2 \leq \left(\frac{1}{16} \int_{\overline{\mathcal{F}}A} \left\{ \Delta_{2w} [|z - w|^2 \log |z - w|] \frac{\partial}{\partial \nu_w} [|z - w|^2 \log |z - w|] - \right. \right. \\ \left. \left. - |z - w|^2 \log |z - w| \frac{\partial}{\partial \nu_w} (\Delta_{2w} [|z - w|^2 \log |z - w|]) \right\} d_w s - \right. \\ \left. - \frac{5}{56} \pi [\delta(z)]^2 \right) \left(\iint_A [\log |\zeta - w|]^2 d_w \tau \right).$$

Il primo fattore al secondo membro è una funzione sommabile rispetto a z ; il secondo fattore è una funzione continua di ζ ; ne viene che $\Gamma_0(z, \zeta)$ è di quadrato sommabile in $A \times A$.

Il teorema è così dimostrato.

Con considerazioni analoghe a quelle seguite per dimostrare il teorema IV del capitolo III, si trae che:

La trasformazione:

$$T(\vec{\varphi}) = \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) * \mathcal{H}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

è definita per ogni vettore $\vec{\varphi}(\zeta) \in \mathcal{L}^{(2)}(A)$, e muta il vettore $\vec{\varphi}(\zeta)$ in un vettore di $\mathcal{L}^{(2)}(A)$ definito quasi ovunque in A . Inoltre, la $T(\vec{\varphi})$ è totalmente continua in $\mathcal{L}^{(2)}(A)$.

Dimostriamo ora che:

III. — Se $\vec{F}(z)$ appartiene a $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$, e se $\vec{\varphi}(\zeta)$ appartiene a $\mathcal{L}^{(2)}(A)$ ed è soluzione dell'equazione integrale:

$$(3_0) \quad \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) * \mathcal{H}(z, \zeta)] d_\zeta \tau - 8 \pi \vec{\varphi}(z) = \vec{F}(z),$$

dove la matrice $\mathcal{H}(z, \zeta)$ è quella sopra introdotta, $\vec{\varphi}(z)$ appartiene a $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$.

Poniamo:

$$\Phi^{(i)}(z) = \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{H}_0^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

$$\Psi^{(i)}(z) = \iint_A [\vec{\varphi}(\zeta) \times \vec{H}_1^{(i)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau$$

$$\begin{aligned}
\Psi_0^{(i)}(z) = & \iint_A \left\{ \varphi_1(\zeta) \left[\alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} g_1^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} g_1^{(2)}(z, \zeta) + \right. \right. \\
& + \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} g_1^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} g_1^{(2)}(z, \zeta) + \beta_1^{(i)}(z) g_1^{(1)}(z, \zeta) + \beta_2^{(i)}(z) g_1^{(2)}(z, \zeta) \left. \right] + \\
& + \varphi_2(\zeta) \left[\alpha_{11}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} g_2^{(1)}(z, \zeta) + \alpha_{21}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} g_2^{(2)}(z, \zeta) + \alpha_{12}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} g_2^{(1)}(z, \zeta) + \right. \\
& + \alpha_{22}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} g_2^{(2)}(z, \zeta) + \beta_1^{(i)}(z) g_2^{(1)}(z, \zeta) + \beta_2^{(i)}(z) g_2^{(2)}(z, \zeta) \left. \right] + \\
& + \varphi_3(\zeta) \left[\alpha_{31}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta) + \alpha_{32}^{(i)}(z) \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta) + \beta_3^{(i)}(z) \Gamma(z, \zeta) \right] \left. \right\} d_\zeta \tau,
\end{aligned}$$

dimodochè si ha :

$$(9) \quad 8 \pi \varphi_i(z) = \Phi^{(i)}(z) + \Psi^{(i)}(z) - F_i(z) \quad (i = 1, 2, 3),$$

con :

$$\begin{aligned}
(10) \quad \Psi^{(i)}(z) = & \Psi_0^{(i)}(z) - \iint_A \left\{ \varphi_1(\zeta) [\beta_1^{(i)}(z) s_1^{(1)}(z, \zeta) + \beta_2^{(i)}(z) s_1^{(2)}(z, \zeta)] + \right. \\
& \left. + \varphi_2(\zeta) [\beta_1^{(i)}(z) s_2^{(1)}(z, \zeta) + \beta_2^{(i)}(z) s_2^{(2)}(z, \zeta)] \right\} d_\zeta \tau.
\end{aligned}$$

In un primo momento, dimostreremo la continuità in A di $\varphi_i(z)$, poi proveremo la sua hölderianità.

Per far vedere che $\varphi_i(z)$ è continua in A , siccome $F_i(z)$ è tale per ipotesi, basta far vedere che sono continue in A le funzioni $\Psi^{(i)}(z)$ e $\Phi^{(i)}(z)$.

Consideriamo $\Psi^{(i)}(z)$. Dalla (10) si vede che, essendo notoriamente l'integrale a secondo membro funzione continua in A , basta provare la continuità di $\Psi_0^{(i)}(z)$, ossia di tutte le funzioni del tipo :

$$\begin{aligned}
(11) \quad & \iint_A \varphi_h(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} g_h^{(r)}(z, \zeta) d_\zeta \tau, \iint_A \varphi_h(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} g_h^{(r)}(z, \zeta) d_\zeta \tau, \iint_A \varphi_h(\zeta) g_h^{(r)}(z, \zeta) d_\zeta \tau \\
& (h, r, = 1, 2)
\end{aligned}$$

$$(12) \quad \iint_A \varphi_3(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau, \iint_A \varphi_3(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau, \iint_A \varphi_3(\zeta) \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau.$$

Applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ed il teorema VII del capitolo IV, si ha :

$$\left| \iint_A \varphi_h(\zeta) \left[\frac{\partial}{\partial x} g_h^{(r)}(z + \Delta z, \zeta) - \frac{\partial}{\partial x} g_h^{(r)}(z, \zeta) \right] d_\zeta \tau \right| \leq$$

$$\left(\iint_A |\varphi_h(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A \left| \frac{\partial}{\partial x} g_h^{(r)}(z + \Delta z, \zeta) - \frac{\partial}{\partial x} g_h^{(r)}(z, \zeta) \right|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$[H(A)]^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\varphi_h(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{\mathcal{F}A} \left| \frac{\partial}{\partial x} \vec{s}^{(r)}(z + \Delta z, \zeta) - \frac{\partial}{\partial x} \vec{s}^{(r)}(z, \zeta) \right|^2 d_\zeta s \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde scende la continuità in A della prima delle funzioni (11).

Lo stesso ragionamento può ripetersi per la seconda delle (11); quanto alla terza, essa pure è continua in A , dato che, ragionando come sopra, si trova :

$$\left| \iint_A \varphi_h(\zeta) [g_h^{(r)}(z + \Delta z, \zeta) - g_h^{(r)}(z, \zeta)] d_\zeta \tau \right| \leq$$

$$[H(A)]^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\varphi_h(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{\mathcal{F}A} |\vec{s}^{(r)}(z + \Delta z, \zeta) - \vec{s}^{(r)}(z, \zeta)|^2 d_\zeta s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La continuità in A delle funzioni (12), poi, scende immediatamente dall'osservazione fatta alla fine del teorema II del capitolo V.

Abbiamo dimostrato in tal modo che $\Psi^{(v)}(z)$ è funzione continua in A ; occupiamoci ora di $\Phi^{(v)}(z)$:

$$\Phi^{(v)}(z) = \iint_A \varphi_1(\zeta) H_{01}^{(v)}(z, \zeta) d_\zeta \tau + \iint_A \varphi_2(\zeta) H_{02}^{(v)}(z, \zeta) d_\zeta \tau.$$

Dalla (9), avendosi :

$$\varphi_i(z) = \frac{1}{8\pi} \iint_A \varphi_1(\zeta) H_{01}^{(v)}(z, \zeta) d_\zeta \tau + \frac{1}{8\pi} \iint_A \varphi_2(\zeta) H_{02}^{(v)}(z, \zeta) d_\zeta \tau +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} [\Psi^{(v)}(z) - F_i(z)],$$

si trae:

$$\begin{aligned} & \iint_A \varphi_1(\zeta) H_{01}^{(i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau + \iint_A \varphi_2(\zeta) H_{02}^{(i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau = \\ & \frac{1}{8\pi} \left\{ \iint_A \varphi_1(\zeta) H_{011}^{(1i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau + \iint_A \varphi_2(\zeta) H_{012}^{(1i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau + \right. \\ & + \iint_A [\Psi^{(1)}(\zeta) - F_1(\zeta)] H_{01}^{(i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau + \iint_A \varphi_1(\zeta) H_{012}^{(2i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau + \\ & \left. + \iint_A \varphi_2(\zeta) H_{022}^{(2i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau + \iint_A [\Psi^{(2)}(\zeta) - F_2(\zeta)] H_{02}^{(i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau \right\}, \end{aligned}$$

ove si è posto:

$$\begin{aligned} H_{011}^{(1i)}(z, \zeta) &= \iint_A H_{01}^{(1)}(z, w) H_{01}^{(1)}(w, \zeta) d_w \tau, \\ H_{012}^{(1i)}(z, \zeta) &= \iint_A H_{02}^{(1)}(z, w) H_{01}^{(1)}(w, \zeta) d_w \tau, \\ H_{012}^{(2i)}(z, \zeta) &= \iint_A H_{01}^{(2)}(z, w) H_{02}^{(i)}(w, \zeta) d_w \tau, \\ H_{022}^{(2i)}(z, \zeta) &= \iint_A H_{02}^{(2)}(z, w) H_{02}^{(i)}(w, \zeta) d_w \tau. \end{aligned} \tag{13}$$

Siccome riesce:

$$|H_{0j}^{(i)}(z, \zeta)| \leq \frac{P_j^{(i)}}{|z - \zeta|},$$

dalle (13), denotando con $B_{11}^{(1i)}, B_{12}^{(1i)}, B_{12}^{(2i)}, B_{22}^{(2i)}$ costanti opportune, si trae⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} |H_{011}^{(1i)}(z, \zeta)| &< \log \frac{B_{11}^{(1i)}}{|z - \zeta|}, & |H_{012}^{(1i)}(z, \zeta)| &< \log \frac{B_{12}^{(1i)}}{|z - \zeta|} \\ |H_{012}^{(2i)}(z, \zeta)| &< \log \frac{B_{12}^{(2i)}}{|z - \zeta|}, & |H_{022}^{(2i)}(z, \zeta)| &< \log \frac{B_{22}^{(2i)}}{|z - \zeta|}, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Cfr. [36].

e quindi la continuità in A delle funzioni di z :

$$\iint_A \varphi_1(\zeta) H_{011}^{(1i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau, \iint_A \varphi_2(\zeta) H_{012}^{(1i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau,$$

$$\iint_A \varphi_1(\zeta) H_{012}^{(2i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau, \iint_A \varphi_2(\zeta) H_{022}^{(2i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau.$$

Anche la funzione:

$$\iint_A [\Psi^{(j)}(\zeta) - F_j(\zeta)] H_{0j}^{(i)}(z, \zeta) d_\zeta \tau \quad (j = 1, 2)$$

è continua in A , dato che $\Psi^{(j)}(\zeta) - F_j(\zeta)$ riesce tale, e:

$$|H_{0j}^{(i)}(z, \zeta)| \leq \frac{P_j^{(i)}}{|z - \zeta|}.$$

È provato in tal modo che $\vec{\varphi}(z)$ è un vettore continuo in A .

Dobbiamo provare infine che la funzione $\varphi_i(z)$ data dalla (9) è hölderiana in A . La $F_i(z)$ è tale per ipotesi; la $\Phi^{(i)}(z)$ è essa pure hölderiana in A , dato che⁽²⁾ il vettore $\vec{\varphi}(\zeta)$ è continuo in A , e riesce:

$$|H_{0j}^{(i)}(z, \zeta)| \leq \frac{P_j^{(i)}}{|z - \zeta|} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Consideriamo da ultima la funzione $\Psi^{(i)}(z)$ espressa dalla (10). L'integrale a secondo membro è certamente funzione hölderiana in A ; perciò basta rivolgere la nostra attenzione sulla $\Psi_0^{(i)}(z)$, ossia sulle funzioni (11) e (12). La tesi sarà conseguita se proveremo che dette funzioni sono parzialmente derivabili rispetto a x e y , e che le loro derivate sono limitate in ogni dominio contenuto in A .

Consideriamo la prima delle funzioni (11); ripetendo il ragionamento fatto nella dimostrazione del teorema X, capitolo IV, e ricordando il teorema VII del capitolo IV, si prova che:

$$\frac{\partial}{\partial x} \iint_A \varphi_h(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} g_h^{(r)}(z, \zeta) d_\zeta \tau = \iint_A \varphi_h(\zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_h^{(r)}(z, \zeta) d_\zeta \tau,$$

⁽²⁾ Cfr. [29].

onde, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e detto teorema VII, capitolo IV, si trae:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \iint_A \varphi_h(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} g_h^{(r)}(z, \zeta) d_\zeta \tau \right| \leq \left(\iint_A |\varphi_h(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_h^{(r)}(z, \zeta) \right|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq [H(A)]^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\varphi_h(\zeta)|^2 d_\zeta \tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{\mathcal{F}A} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} s^{(r)}(z, \zeta) \right|^2 d_\zeta s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da questa disuguaglianza e dalle analoghe che si possono stabilire per le derivate rispetto a y , e per le altre funzioni, segue l'holderianità in A delle (11).

Quanto alle (12), esse sono holderiane in virtù della osservazione fatta alla fine del teorema II, capitolo V.

Il teorema è così completamente provato.

4. Teorema d'esistenza nella classe \mathcal{C} .

IV. — *Se l'unica soluzione appartenente a \mathcal{C} del problema omogeneo*

$$(14) \quad \begin{cases} \Delta_2 u_1 + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \sum_{h=1}^3 \left(\alpha_{h1}^{(1)} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \alpha_{h2}^{(1)} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \beta_h^{(1)} u_h \right) = 0 \\ \Delta_2 u_2 + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \sum_{h=1}^3 \left(\alpha_{h1}^{(2)} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \alpha_{h2}^{(2)} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \beta_h^{(2)} u_h \right) = 0 \\ \Delta_4 u_3 + \sum_{h=1}^3 \left(\alpha_{h1}^{(3)} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \alpha_{h2}^{(3)} \frac{\partial u_h}{\partial y} + \beta_h^{(3)} u_h \right) = 0 \\ u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0 \dots \dots \dots \text{su } \mathcal{F}A \end{cases}$$

$$u_1 \equiv u_2 \equiv u_3 \equiv 0,$$

esiste, assegnato comunque il vettore $\vec{F}(z) \equiv [F_1(z), F_2(z), F_3(z)]$ in $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$, la soluzione $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z), u_3(z)]$ del problema al contorno (1), (2).

Infatti, se il problema al contorno (14) non ha autosoluzioni in \mathcal{C} , per il teorema I l'equazione integrale:

$$\iint_A \{ \vec{\varphi}(\zeta) * \mathcal{K}(z, \zeta) \} d_\zeta \tau - 8 \pi \vec{\varphi}(z) = 0$$

è sprovvista di autosoluzioni $\vec{\varphi}$ appartenenti a $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$, dimodochè 8π non è autovalore della trasformazione totalmente continua $T(\vec{\varphi})$. Ne segue⁽³⁾ che esiste in $\mathcal{L}^{(2)}(A)$, e quindi — cfr. teor. III — in $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$, la soluzione $\vec{\varphi}$ dell'equazione integrale:

$$\iint_A \{ \vec{\varphi}(\zeta) * \mathcal{H}(z, \zeta) \} d_\zeta \tau - 8\pi \vec{\varphi}(z) = \vec{F}(z)$$

e quindi, per il teorema I, esiste pure la soluzione \vec{u} del problema (1), (2) nella classe \mathcal{C} .

Il teorema è così dimostrato.

5. Il problema al contorno relativo all'equilibrio delle volte cilindriche incastrate.

Vogliamo ora considerare, come caso particolare del sistema (1), il sistema delle equazioni indefinite che reggono l'equilibrio di una volta elastica di forma cilindrica. Si tratta del seguente sistema di equazioni:

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 u_1 + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (b u_3) = F_1 \\ \Delta_2 u_2 + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (c u_3) = F_2 \\ b \frac{\partial u_1}{\partial x} + c \frac{\partial u_2}{\partial y} + \Delta_4 u_3 + a u_3 = F_3, \end{array} \right.$$

nel quale supporremo, in accordo col loro significato fisico, che le funzioni $b(z)$ e $c(z)$ siano di classe uno in $A + \mathcal{FA}$, e che la funzione $a(z)$ sia continua in $A + \mathcal{FA}$, ed hölderiana in A .

Al sistema (1') assoceremo le seguenti condizioni al contorno:

$$(2) \quad u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \quad \text{ su } \mathcal{FA},$$

in modo che il problema al contorno (1'), (2) traduce analiticamente quello dell'elastostatica di una volta cilindrica incastrata lungo il suo bordo.

⁽³⁾ Cfr. [2].

6. Forma quadratica associata ai problemi dell'elastostatica delle volte cilindriche.

Dimostriamo un lemma, che ci permetterà di conseguire il teorema d'unicità, nella classe \mathcal{C} , del problema al contorno (1'), (2):

V. — *La seguente forma quadratica:*

$$\pi = (k + 1) \varepsilon_1^2 + 2k \varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2b \varepsilon_1 \varepsilon_3 + (k + 1) \varepsilon_2^2 + 2c \varepsilon_2 \varepsilon_3 + a \varepsilon_3^2$$

nelle tre variabili indipendenti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ è definita (positiva) allora ed allora soltanto che siano verificate le seguenti condizioni:

$$(15) \quad \begin{cases} k > -\frac{1}{2} \\ 2ak - (b - c)^2 k - (b^2 + c^2 - a) > 0. \end{cases}$$

Infatti, indicato con Δ il discriminante di π :

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} k + 1 & k & b \\ k & k + 1 & c \\ b & c & a \end{vmatrix},$$

perchè π risulti definita positiva occorre che:

$$\begin{cases} k + 1 > 0 \\ 2k + 1 > 0 \\ (2a - c^2 + 2bc - b^2)k + a - c^2 - b^2 > 0, \end{cases}$$

donde la (15).

7. Teorema di esistenza ed unicità nella classe \mathcal{C} .

VI. — *Se sono soddisfatte le (15), il seguente sistema:*

$$(1'') \quad \begin{cases} \Delta_2 u_1 + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (b u_3) = 0 \\ \Delta_2 u_2 + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (c u_3) = 0 \\ b \frac{\partial u_1}{\partial x} + c \frac{\partial u_2}{\partial y} + \Delta_4 u_3 + a u_3 = 0 \end{cases}$$

è sprovvisto di autosoluzioni $\vec{u}(z) \equiv [u_1(z), u_2(z), u_3(z)]$ appartenenti a \mathcal{C} , e verificanti su \mathcal{FA} le relazioni:

$$(2) \quad u_1 = u_2 = u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0.$$

Infatti, sia $\vec{u}(z)$ un'autosoluzione del problema (1''), (2). Nel campo A_e (definito nel capitolo I) sussiste la seguente relazione integrale:

$$\begin{aligned} & \iint_{A_e} \left\{ u_1 \left[\Delta_2 u_1 + k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (b u_3) \right] + \right. \\ & + u_2 \left[\Delta_2 u_2 + k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (c u_3) \right] - u_3 \left[b \frac{\partial u_1}{\partial x} + c \frac{\partial u_2}{\partial y} + \Delta_4 u_3 + a u_3 \right] \left. \right\} d\tau = \\ & - \iint_{A_e} \left\{ |\text{grad } u_1|^2 + |\text{grad } u_2|^2 + k \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + 2 b u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \\ & \quad \left. + 2 c u_3 \frac{\partial u_2}{\partial y} + (\Delta_2 u_3)^2 + a u_3^2 \right\} d\tau + \\ & + \iint_{\mathcal{FA}_e} \left\{ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} + k(u_1 \alpha + u_2 \beta) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) - b u_1 u_3 \alpha - c u_2 u_3 \beta + \Delta_2 u_3 \frac{\partial u_3}{\partial \nu} - \right. \\ & \quad \left. - u_3 \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta_2 u_3) \right\} ds = 0. \end{aligned}$$

Dato che \vec{u} appartiene a \mathcal{C} e $u_3, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}$ appartengono ad $L^{(2)}(A)$ (4), riesce:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{A_e} \left\{ |\text{grad } u_1|^2 + |\text{grad } u_2|^2 + k \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + 2 b u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \\ & \quad \left. + 2 c u_3 \frac{\partial u_2}{\partial y} + (\Delta_2 u_3)^2 + a u_3^2 \right\} d\tau = \\ & \iint_A \left\{ |\text{grad } u_1|^2 + |\text{grad } u_2|^2 + k \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + 2 b u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \\ & \quad \left. + 2 c u_3 \frac{\partial u_2}{\partial y} + (\Delta_2 u_3)^2 + a u_3^2 \right\} d\tau. \end{aligned}$$

(4) Cfr. cap. III, (2).

Consideriamo gli integrali estesi a $\mathcal{F}A$.

Per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz, la (2) e la (3) del capitolo I, riesce :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{F}A_\epsilon} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} d s \right| &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathcal{F}A_\epsilon} |u_1|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A_\epsilon} |\text{grad } u_1|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2 Q^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |\text{grad } u_1|^2 d \tau \right)^{\frac{1}{2}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathcal{F}A_\epsilon} |\text{grad } u_1|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

In maniera analoga si prova che :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}A_\epsilon} \left\{ u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} + (u_1 \alpha + u_2 \beta) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right\} d s = 0.$$

Essendo le funzioni u_1 e u_3 uniformemente sommabili su $\mathcal{F}A_\epsilon$, si ha :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\mathcal{F}A_\epsilon} u_1 u_3 d s \right| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathcal{F}A_\epsilon} |u_1|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{F}A_\epsilon} |u_3|^2 d s \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

e così pure :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}A_\epsilon} u_2 u_3 d s = 0.$$

Per provare che :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}A_\epsilon} \left(\Delta_2 u_3 \frac{\partial u_3}{\partial \nu} - u_3 \frac{\partial}{\partial \nu} (\Delta_2 u_3) \right) d s = 0,$$

si può ripetere invariato il ragionamento che si è fatto nel capitolo V n. 1, allorchè si voleva conseguire il teorema d'unicità della soluzione.

Riesce dunque :

$$\begin{aligned} (16) \quad &\iint_A \left\{ |\text{grad } u_1|^2 + |\text{grad } u_2|^2 + k \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\left. + 2 b u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2 c u_3 \frac{\partial u_2}{\partial y} + (\Delta_2 u_3)^2 + a u_3^2 \right\} d \tau = 0; \end{aligned}$$

con le seguenti posizioni

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = u_3,$$

la funzione integranda riesce somma di una parte non negativa:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right)^2,$$

e della forma quadratica π considerata nel teorema V, la quale, stante l'ipotesi fatta, risulta definita positiva.

Ne viene che la (16) è compatibile allora ed allora soltanto che $\vec{u}(z)$ sia identicamente nullo in A , e quindi la tesi.

Dal teorema IV si deduce pertanto il seguente:

VII. — Se sono soddisfatte le (15) assegnato comunque in $\mathcal{L}_h^{(2)}(A)$ il vettore $\vec{F}(z) \equiv [F_1(z), F_2(z), F_3(z)]$, esiste, nella classe \mathcal{C} , la soluzione del problema al contorno (1'), (2).

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. B. ANCORA: *Problemi analitici connessi alla teoria della piastra elastica appoggiata*, « Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova », 1951, vol. XX, parte 1^a, pp. 99-134.
- [2] S. BANACH: *Théorie des Opérations linéaires* — Monografie Matematyczne — 1932, Warszawa.
- [3] S. BERGMAN and M. SCHIFFER: *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics* — 1953, Academie Press inc., Publishers — New York, N.Y.
- [4] R. COURANT and D. HILBERT: *Methoden der Mathematischen Physik* (vol. II) — 1937, Berlin — Verlag von Julius Springer.
- [5] M. J. DE SCHWARZ: *Su un sistema di Equazioni differenziali a derivate parziali concernente gli spostamenti nelle volte cilindriche sottili*, « Atti del IV Congresso dell'Unione Mat. Ital. »; 1951, Taormina.
- [6] F. DISCHINGER: *Die strenge Theorie der Kreiszyinderschale in ihrer Anwendung auf Zeis-Dywidag* — Schalen. 1935, Beton u. Eisen 34, 257, 283.
- [7] G. FICHERA: *Teorema d'esistenza per il problema bi-iperarmonico*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 1948, s. VIII, vol. V, fasc. 6, pp. 319-324.
- [8] G. FICHERA: *Sui problemi analitici dell'elasticità piana*, « Rend. Sem. della Facoltà di Scienze della Univ. di Cagliari », 1949.
- [9] G. FICHERA: *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti, relativi all'equazione e ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico, auto-aggiunti*, « Ann. Scuola Norm. », Pisa 1947, s. III, vol. I, fasc. 1-4, pp. 75-100.
- [10] G. FICHERA: *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, « Ann. Scuola Norm. », Pisa 1950, s. III, vol. IV, fasc. 1-2, pp. 35-100.
- [11] G. FICHERA: *One some general integration methods employed in connection with linear differential equations*, « Journ. of Math. and Phy. », 1950, vol. XXIX, n. 2, pp. 59-69.
- [12] G. FICHERA: *Interpretazione ed estensione funzionale di recenti metodi d'integrazione delle equazioni differenziali lineari*, « Atti del IV Congresso dell'Un. Mat. Ital. », 1951.
- [13] G. FICHERA: *Esistenza del minimo in un classico problema di Calcolo delle variazioni*, « Rend. Acc. Nazionale Lincei », 1951, s. VIII, vol. XI, fasc. 1-2; pp. 34-39.
- [14] G. FICHERA: *Sui problemi al contorno per le equazioni della Fisica Matematica* — (in corso di preparazione).
- [15] G. FICHERA: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, « Ann. di Mat. pura ed applicata », 1948, s. IV, t. XXVII.
- [16] G. FICHERA: *Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione $\Delta_4 u = f$* , 1947, s. IV, v. 77,

- [17] G. FICHERA: *Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 1951, v. X, fasc. 5 e 6.
- [18] G. FICHERA: *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, 1954, Istit. Matem. Univ. Trieste.
- [19] G. FICHERA: *Sulla maggiorazione dell'errore di approssimazione nei procedimenti di integrazione numerica delle equazioni della Fisica Matematica*, « Rend. dell'Acc. delle Sc. Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Sc. Lettere ed Arti in Napoli », 1950, s. IV, vol. XVII.
- [20] G. FICHERA: *Formule di maggiorazione connesse ad una classe di trasformazioni lineari*, « Ann. di Mat. pura ed applicata », 1954, s. IV, t. XXXVI.
- [21] G. FICHERA: *Methods of functional linear analysis in Mathematical physics — « a priori » estimates for the solutions of boundary value problems* — Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam 1954, vol. I.
- [22] W. FLÜGGE: *Statik und Dynamik der Schalen* Springer, Berlin, 1934.
- [23] K. O. FRIEDRICHS: *A Theorem of Lichtenstein*, Duke Math. Journal 14, 1947, fasc. 1.
- [24] K. O. FRIEDRICHS: *An inequality for Potential Functions*, American Journal of Mathematics, 1946 (pp. 581-592).
- [25] P. R. GARABEDIAN AND M. SCHIFFER: *On existence theorems of potential Theory and conformal mapping*, Annals of Mathematics, Vol. 52 (1950).
- [26] K. GIRMANN: *Flächentragwerke*, Wien, 1946, pp. 393-412.
- [27] E. GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathématique*, Gauthier-Villars et C.ie, Editeurs, Paris, 1923 t. III.
- [28] N. M. GUNTHER: *La Théorie du Potentiel et ses Applications aux Problèmes Fondamentaux de la Physique Mathématique*, Gauthier-Villars, Editeur, Paris, 1934.
- [29] O. D. KELLOGG: *Foundations of Potential Theory*, Springer, Berlin, 1929.
- [30] P. D. LAX: *A remark on the method of orthogonal projections*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 4, (1951).
- [31] L. LICHTENSTEIN: *Über das Poissonsche Integral ecc.*, 1912, Journal für die reine u. angewandte mathem. 141, pp. 12,42.
- [32] A. E. H. LOVE: *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York, 1944.
- [33] E. MAGENES: *Sull'equazione del calore: teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di M. Picone*, 1952, nota I e II, « Rend. Sem. Mat. », Padova, vol. XXI, parte I, pp. 99-123, 136-170.
- [34] M. NICOLESCO: *Les fonctions polyharmoniques*, Hermann, Paris, 1936.
- [35] E. PICARD: *Sur quelques Applications de l'Equation fonctionnelle de M. Fredholm*, Circolo Mat. di Palermo, Paris, 1906, t. XXII.
- [36] M. PICONE: *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella-Napoli, 1940.
- [37] M. PICONE, G. FICHERA: *Neune funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen*, « Monatshefte für Math. », 1950, Band LIV, Heft 3, pp. 188-209.
- [38] B. PINI: *Un problema di valori al contorno per l'equazione $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$* . Nota I e II. « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei » s. VIII, vol. XIV, fasc. 5 e 6 — maggio e giugno 1953.
- [39] M. SCHIFFER AND D. C. SPENCER: *Functionals of finite Riemann Surfaces 1954*, Princeton, New Jersey — Princeton University Press.
- [40] S. TIMOSCHENKO: *Theory of Plates and Shells* — Engineering Societies Monographs — Harrison W. Craver, Consulting Editor, 1940.
- [41] T. VIOLA: *Sull'esistenza del minimo assoluto di taluni integrali multipli, connessi con i problemi al contorno per le funzioni iperarmoniche*, « Ann. Scuola Norm. », Pisa, 1952, s. III, vol. VI, fasc. I - II, pp. 109-145.

INDICE

INTRODUZIONE	pag. 157
CAPITOLO I	
<i>Definizioni e teoremi preliminari</i>	» 161
1. Definizioni ed ipotesi sul campo A	» 161
2. Teorema sul prolungamento alla frontiera, di una funzione dotata di derivate del prim'ordine continue e sommabili in A	» 163
3. Richiamo di alcuni teoremi relativi alla teoria del potenziale logaritmico	» 166
CAPITOLO II	
<i>L'equazione di Laplace in due variabili</i>	» 169
1. Teorema di esistenza ed unicità per il problema di Dirichlet, relativo alle funzioni armoniche nella classe $C_1^{(2)}$	» 169
2. Proprietà di minimo della soluzione	» 176
3. Diseguaglianza integrale per le funzioni armoniche	» 177
4. Funzione di Green $G(w, z)$ e studio dell'integrale $\iint_A \varphi(\zeta) G(z, \zeta) d_\zeta \tau$	» 178
CAPITOLO III	
<i>L'equazione di tipo ellittico: $\Delta_2 u + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c u = f$</i>	» 193
1. Teorema di unicità relativo alle funzioni di classe due in A ed appartenenti a $C_1^{(2)}$	» 193
2. Traduzione del problema al contorno in equazione integrale	» 195
3. Dimostrazione della totale continuità della trasformazione:	
$T(\varphi) = \iint_A \varphi(\zeta) H(z, \zeta) d_\zeta \tau$	» 197
4. Teorema d'esistenza	» 204

CAPITOLO IV

<i>Il sistema di equazioni dell'elasticità piana</i>	pag. 206
1. Richiami e premesse	» 206
2. Forma quadratica associata ai problemi dell'elasticità piana	» 213
3. Teorema di esistenza ed unicità relativo al primo problema dell'elastostatica piana, nella classe $\mathcal{C}_1^{(2)}$	» 216
4. Proprietà di minimo della soluzione	» 226
5. Diseguaglianza integrale per le soluzioni del problema omogeneo dell'elasticità piana	» 228
6. Matrice di Green $\mathcal{G}(w, z)$ per il problema dell'elastostatica piana, e studio del vettore: $\iint_A \{\vec{\varphi}(\zeta) * \mathcal{G}(z, \zeta)\} d_\zeta \tau$	» 228

CAPITOLO V

<i>L'equazione: $\Delta_4 u = f$</i>	» 245
1. Teorema di esistenza ed unicità, e proprietà di minimo della soluzione del problema biarmonico	» 245
2. Funzione di Green $\Gamma(w, z)$ e studio dell'integrale $\iint_A \varphi(\zeta) \Gamma(z, \zeta) d_\zeta \tau$	» 255

CAPITOLO VI

<i>Il sistema di equazioni delle volte cilindriche</i>	» 267
1. Un problema al contorno che generalizza quello dell'equilibrio delle volte cilindriche incastrate	» 267
2. Traduzione del problema al contorno in un sistema di equazioni integrali	» 267
3. Dimostrazione della totale continuità della trasformazione $T(\vec{\varphi}) = \iint_A \{\vec{\varphi}(\zeta) * \mathcal{S}(z, \zeta)\} d_\zeta \tau$	» 271
4. Teorema d'esistenza nella classe \mathcal{C}	» 282
5. Il problema al contorno relativo all'equilibrio delle volte cilindriche incastrate	» 283
6. Forma quadratica associata ai problemi dell'elastostatica delle volte cilindriche	» 284
7. Teorema di esistenza ed unicità nella classe \mathcal{C}	» 284

BIBLIOGRAFIA	» 288
------------------------	-------