ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIOVANNI RICCI

Maggiorazione del resto delle serie di potenze sul cerchio di convergenza

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 8, nº 3-4 (1954), p. 121-131

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1954_3_8_3-4_121_0>

MAGGIORAZIONE DEL RESTO DELLE SERIE DI POTENZE SUL CERCHIO DI CONVERGENZA

di GIOVANNI RICCI (a Milano)

SUNTO: *Si considerano le serie di potenze* $f(z) = \Sigma a_n z^n$ *aventi raggio di convergenza 1 e nelle quali* $a_n \to 0$ *per* $n \to +\infty$. *Come complemento al noto teorema di* P. FATOU *e* M. RIESZ *che garantisce la convergenza di tali serie nei punti regolari* $e^{i\theta}$, *e uniforme in ogni insieme* E *chiuso di tali punti, si assegna una maggiorazione della differenza fra* $f(e^{i\theta})$ *e la somma* $\sum_0^n a_k e^{ik\theta}$ *che vale uniformemente in* E. *Se ne fa applicazione al caso* $a_n = O(n^{-\gamma})$.

1. Sia $\sum_0^\infty a_n z^n$ una serie di potenze avente raggio di convergenza 1; denotiamo con $f(z)$ la funzione analitica definita da questa serie per prolungamento rettilineo (cioè entro la stella di MITTAG-LEFFLER) e poniamo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

È noto il classico teorema di P. FATOU-M. RIESZ [1] «Se, per $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$, i punti $e^{i\theta}$ sono punti regolari di $f(z)$ e inoltre $a_n \to 0$, allora $f_n(e^{i\theta}) \to f(e^{i\theta})$ (per $n \to +\infty$), uniformemente in $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$».

È evidente, come conseguenza del lemma di PINCHERLE-HEINE-BOREL, che la tendenza al limite risulta uniforme su ogni insieme *chiuso* di punti $e^{i\theta}$ regolari, poichè ogni tale insieme si può ricoprire con un numero finito di archi di regolarità.

Può presentarsi l'utilità di maggiorare, in funzione di n, il resto $f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})$, uniformemente rispetto a θ, mentre $e^{i\theta}$ descrive un arco di regolarità o, più in generale, un insieme E, chiuso, costituito di punti regolari di $f(z)$: a questo problema risponde la presente Nota. L'esame del caso in cui la successione $\{a_n\}$ non è a fluttuazione finita conduce ai due teoremi del n. 4.

---

(1) Vedi E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin., 2. Aufl., 1929, pp. 15, 73-76: ivi si trovano anche le indicazioni bibliografiche.

2. Il caso elementare della fluttuazione finita. Conviene prendere in considerazione preliminare un caso elementare che rispecchia un classico teorema di E. PICARD [2] che di solito si enuncia per le serie $\sum_0^\infty a_n z^n$ con a_n reale, $a_n \geqq a_{n+1}$, $a_n \to 0$.

Diremo, seguendo l'uso comune, che *una successione* $\{a_n\}$ *di numeri complessi è a fluttuazione finita* quando è limitato superiormente il perimetro della poligonale avente per vertici $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; l'estremo superiore L di tale perimetro si dirà *fluttuazione totale* di $\{a_n\}$. Questo si verifica se e soltanto se $\sum_0^\infty |a_n - a_{n+1}|$ è convergente: si pone allora

$$L = \sum_0^\infty |a_n - a_{n+1}|, \qquad \lambda_n = \sum_n^\infty |a_k - a_{k+1}| \tag{2.1}$$

ed è $\lambda_n \leqq L$, $\lambda_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

È evidente che se $\{a_n\}$ è a fluttuazione finita necessariamente esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$ e sia $a_n \to \alpha$; può essere $\alpha = 0$ o $\alpha \neq 0$.

Il classico teorema di E. PICARD può assumere la forma seguente:

TEOREMA — *La successione* $\{a_n\}$ *sia a fluttuazione finita e sia* $a_n \to 0$; *poniamo*

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^\infty |a_k - a_{k+1}| .$$

La serie $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *ha il raggio di convergenza almeno uguale a* 1 *e converge in ogni punto* $z = e^{i\theta}$ $(0 < \theta < 2\pi)$; *il resto risulta maggiorato al modo seguente*

$$|f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| \leqq \lambda_n / \sin(\theta/2), \quad (0 < \theta < 2\pi). \tag{2.2}$$

Il raggio di convergenza è almeno 1 poichè $|a_n|$ è limitato, inoltre è

$$f_n(e^{i\theta}) \cdot (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) = \sum_{k=0}^n a_k e^{ik\theta} (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})$$

$$= - a_0 e^{-i\theta/2} + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) e^{i(2k+1)\theta/2} + a_n e^{i(2n+1)\theta/2} .$$

---

[2] Vedi E. PICARD, Traité d'Analyse, II, 3e éd., Paris 1925, pp. 77-78. S. PINCHERLE, *Teoria delle funzioni analitiche*, Bologna, 1922, pp. 61-62. G. SANSONE, *Teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Vol. I, Padova 1950, p. 18.

Per ogni $m > n$, da questa uguaglianza, mediante sottrazione, otteniamo

$$\{f_m(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})\}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}) = \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1})\, e^{i(2k+1)\theta/2}$$

$$- a_n\, e^{i(2n+1)\theta/2} + a_m\, e^{i(2m+1)\theta/2}$$

e passando ai moduli ricaviamo

$$|f_m(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})| \,.\, 2 \sin(\theta/2) \leqq \sum_{k=n}^{m-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n| + |a_m| \,. \tag{2.3}$$

Adesso osserviamo che $|a_n - a_m| \leqq \lambda_n - \lambda_m$ e passando al limite per $m \to \infty$, risulta $a_m \to 0$, $\lambda_m \to 0$ e quindi $|a_n| \leqq \lambda_n$; analogamente $|a_m| \leqq \lambda_m$. La somma Σ al secondo membro è $\lambda_n - \lambda_m$ e si conclude

$$| f_m(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta}) | \,.\, 2 \sin(\theta/2) \leqq \lambda_n - \lambda_m + \lambda_n + \lambda_m = 2\,\lambda_n$$

e quindi

$$| f_m(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta}) | \leqq \lambda_n / \sin(\theta/2)\,, (0 < \theta < 2\pi)$$

dove il secondo membro è indipendente da m. Per ogni θ fissato, il criterio generale di convergenza ci dice che $f_n(e^{i\theta})$ converge ed è $f_n(e^{i\theta}) \to f(e^{i\theta})$ e vale la (2.2).

OSSERVAZIONE. — Sia $\{a_n\}$ a fluttuazione finita e $a_n \to \alpha$ con $\alpha \neq 0$; si può porre $a_n = \alpha + b_n$, e

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n = \alpha \sum_0^\infty z^n + \sum_0^\infty b_n z^n = \alpha \sum_0^\infty z^n + g(z).$$

Allora $a_n - a_{n+1} = b_n - b_{n+1}$ e quindi $\{b_n\}$ è a fluttuazione finita e $b_n \to 0$.

$$f_n(e^{i\theta}) = \alpha \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} + g_n(e^{i\theta})$$

$$= \alpha \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} + g(e^{i\theta}) + \tau\, \lambda_n / \sin(\theta/2) \tag{2.4}$$

dove $|\tau| \leqq 1$ (τ complesso).

Si può dimostrare, basandosi sulla (2.3), che l'insieme dei punti $\{f_n(e^{i\theta}), f_{n+1}(e^{i\theta}), f_{n+2}(e^{i\theta}), \ldots\}$ ha un diametro non superiore a $(|\alpha| + \lambda_n)/\sin(\theta/2)$: basta osservare che $a_n = \alpha + \tau_n \lambda_n$, $a_m = \alpha + \tau_m \lambda_m$ ($|\tau_n| \leqq 1$, $|\tau_m| \leqq 1$) e il secondo membro in (2.3) ha il modulo non superiore a $2(|\alpha| + \lambda_n)$.

L'uguaglianza (2.4) ci dice che, fissato $\theta\,(0 < \theta < 2\pi)$, l'indeterminazione di $f_n(e^{i\theta})$, partendo da $g(e^{i\theta})$, segue quella della somma parziale della serie geometrica $\alpha(1 + e^{i\theta} + \ldots + e^{in\theta})$ con l'aggiunta di un termine «satellite» infinitesimo $\tau\,\lambda_n/\sin(\theta/2)$.

ESEMPI. — Quando $a_n = O(n^{-\gamma})$, $\gamma > 1$, la serie $f(z) = \sum\limits_0^\infty a_n z^n$ converge assolutamente e uniformemente in $|z| \leqq 1$ ed è $f(e^{i\theta}) = f_n(e^{i\theta}) + O(n^{-\gamma+1})$ uniformemente rispetto a θ. L'ipotesi della fluttuazione finita ci consente di migliorare questa valutazione e anche di considerare il caso $0 < \gamma \leqq 1$ nel quale la convergenza della serie non è più assicurata a priori per $|z| = 1$. Consideriamo il seguente esempio.

Sia $a_n = e^{i\varphi_n}/n^\gamma\ (\gamma > 0)$ *e poniamo*

$$\Phi_n = \operatorname*{Max}_{n \leqq k} |\varphi_k - \varphi_{k+1}|\,;$$

allora, se la serie $\sum\limits_0^\infty \Phi_n/n^\gamma$ *converge, la successione* $\{a_n\}$ *è a fluttuazione finita.*

Sia inoltre $\Phi_n \to 0$; *allora per ogni* $\delta > 0$ *risulta*

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| < (1+\delta)\left\{\frac{1}{n^\gamma} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Phi_k}{k^\gamma}\right\}, \tag{2.5}$$

quando n *è abbastanza grande.*

Per $\gamma > 1$ l'affermazione è ovvia, poichè $\sum\limits_0^\infty \Phi_n/n^\gamma$ converge e $\{a_n\}$ risulta a fluttuazione finita; in questo caso potrebbe anche non essere $\Phi_n \to 0$.

Sia $0 < \gamma \leqq 1$, allora necessariamente $\Phi_n \to 0$; sia anche $\gamma > 0$ qualunque con $\Phi_n \to 0$. Allora è

$$a_n - a_{n+1} = \frac{e^{i\varphi_n}}{n^\gamma}\left\{1 - e^{i(\varphi_{n+1}-\varphi_n)}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma}\right\}$$

ed essendo $|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leqq \Phi_n \to 0$, per n abbastanza grande, risulta (tenendo conto degli sviluppi in serie):

$$\begin{cases} e^{i(\varphi_{n+1}-\varphi_n)} = 1 + \tau'\,\Phi_n, & |\tau'| < 1 + \delta/2\,, \\ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-\gamma} = 1 - \tau''\,\dfrac{\gamma}{n}, & |\tau''| < 1 + \delta/2\,, \end{cases}$$

e quindi

$$| a_n - a_{n+1} | < \frac{1 + \delta/2}{n^\gamma} \left\{ \Phi_n + \frac{\gamma}{n} + (1 + \delta/2)\, \Phi_n \frac{\gamma}{n} \right\},$$

ed essendo $\Phi_n \to 0$, anche

$$| a_n - a_{n+1} | < (1 + \delta) \left\{ \frac{\gamma}{n^{1+\gamma}} + \frac{\Phi_n}{n^\gamma} \right\}.$$

Questa maggiorazione, passando alla serie che assegna λ_n, conduce alla (2.5) valida per n abbastanza grande.

L'osservazione precedente conduce alle proposizioni seguenti

Sia $a_n = e^{i\varphi_n} / n^\gamma$

1) *Da* $\varphi_n - \varphi_{n+1} = O(1/n)$ *segue*

$$| f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta}) | < K/(n^\gamma \sin(\theta/2))$$

(*K indipendente da n e da θ*).

2) *Se* $0 < \gamma \leqq 1$ *e* $\varphi_n - \varphi_{n+1} = o\,(n^{\gamma-1})$ *allora* $f_n(e^{i\theta})$ *converge per* $n \to +\infty$.

3) *Se* $\Phi_n = O\left(\frac{1}{n^{1-\gamma} \log^{1+\varepsilon} n}\right)$ $(\varepsilon > 0,\ 0 < \gamma \leqq 1)$
allora $f_n(e^{i\theta})$ *converge per* $n \to +\infty$.

4) *Se* $0 < \delta < \gamma$ *e* $\varphi_n - \varphi_{n+1} = O(n^{\gamma-1-\delta})$ *allora*

$$| f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta}) | < K/(n^\delta \sin(\theta/2))$$

(*K indipendente da n e da θ*).

Veniamo adesso al problema più delicato di maggiorare $f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta})$ nel caso in cui, pur essendo $a_n \to 0$, non si faccia l'ipotesi che sia finita la fluttuazione della successione $\{a_n\}$.

3. Definizione della successione infinitesima $\{\omega_n\}$. Sia $a_n \to 0$ e poniamo

(3.1) $$A_n = | a_0 | + | a_1 | + \ldots + | a_n |,$$

(3.2) $$\varepsilon(u, v) = \mathrm{Max}\,(| a_{u+1} |, | a_{u+2} |, \ldots, | a_v | ,$$

(3.3) $$\varepsilon(v, \infty) = \mathrm{Max}\,(| a_{v+1} |, | a_{v+2} |, | a_{v+3} |, \ldots).$$

È evidente che $A_n/n \to 0$ per $n \to +\infty$, $\varepsilon(u, v) \to 0$ per $u \to +\infty, \varepsilon(v, \infty) \to 0$ per $v \to +\infty$. Fissato δ, con $0 < \delta < 1$, si consideri il seguente minimo conseguito al variare di u e v

$$\omega_n = \omega_n(\delta) = \operatorname*{Min}_{0 \leq u \leq n \leq v} \left(\frac{A_u}{v - u} + \varepsilon(u, n) + \frac{\varepsilon(n, \infty)}{(1-\delta)^{v-n}} \right). \tag{3.4}$$

È ancora evidente che $\omega_n(\delta) < \omega_n(\delta')$ per $0 < \delta < \delta'$ e si può considerare la seguente espressione η_n, indipendente da δ, ottenuta con $v = n$ (limitando la variabilità della coppia (u, v)) e quindi tale che $\omega_n(\delta) \leqq \eta_n$ per ogni $\delta > 0$

$$\eta_n = \operatorname*{Min}_{0 \leq u \leq n} \left(\frac{A_u}{n - u} + \varepsilon(u, n) + \varepsilon(n, \infty) \right). \tag{3.5}$$

Il comportamento di A_u/n, $\varepsilon(n, n)$, $\varepsilon(n, \infty)$ assicura che, per $n \to +\infty$, risulta $\eta_n \to 0$: infatti tutti e tre i termini della somma entro parentesi convergono a zero quando si scelga, per esempio, $u(n) < n/2$, $u(n) \to +\infty$.

4. **La maggiorazione.** — Sussiste il seguente

TEOREMA I. *La serie di potenze* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *abbia raggio di convergenza* 1 *e sia* $a_n \to 0$.

Sia E *un insieme chiuso di punti* $e^{i\theta}$ *regolari della circonferenza di convergenza e* $f(z)$ *la funzione definita da* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *per prolungamento rettilineo.*

Allora esiste una costante $K = K(E, f)$ *indipendente da* n, *tale che si abbia*

$$| f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta}) | < K\,\omega_n \;(\leqq K\,\eta_n) \tag{4.1}$$

per ogni $e^{i\theta}$ *dell'insieme* E.

OSSERVAZIONE. Questo teorema contiene ovviamente quello di FATOU-RIESZ e risponde all'informazione richiesta.

Il numero $\delta > 0$, che definisce $\omega_n(\delta)$, può essere assunto piccolo quanto si vuole, ma deve essere indipendente da n.

Come corollario del precedente teorema ricaviamo la proposizione seguente:

TEOREMA II. — *Sia* $a_n = O(n^{-\gamma})$ $(\gamma > 0)$: *conservando per* $f(z)$, E, θ, $K = K(E, f)$ *il significato del Teor. I risulta:*

$$per \quad 0 < \gamma < 1, \quad | f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta}) | < K/n^\gamma,$$

$$per \quad \gamma = 1 , \qquad | f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta}) | < K \log n / n ,$$

$$per \quad 1 < \gamma < 2 , \qquad | f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta}) | < K/n ,$$

$$per \quad 2 \leqq \gamma , \qquad | f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta}) | < K/n^{\gamma-1} .$$

OSSERVAZIONE. — L'espressione maggiorante contiene al denominatore una potenza di n: in questa potenza, al variare di γ, l'esponente rimane invariato col valore 1 per tutto l'intervallo $1 < \gamma \leqq 2$. Rimane aperto il problema di stabilire se questo fenomeno è essenziale oppure se è dovuto accidentalmente al processo dimostrativo.

La dimostrazione di questo Teor. II è immediata, quando si parte dal Teor. I. Si considerino i tre addendi dell'espressione entro parentesi che figura al secondo membro di (3.5): essi sono maggiorati nei diversi casi al modo seguente

1). $0 < \gamma < 1$, $A_u = O(n^{1-\gamma})$, $u = [n/2]$,

$$O(n^{-\gamma}), \quad O(n^{-\gamma}), \quad O(n^{-\gamma}).$$

2). $\gamma = 1$, $A_u = O(\log u/u)$, $u = [n/\log n]$,

$$O(\log n/n), \quad O(\log n/n), \quad O(1/n).$$

3). $1 < \gamma < 2$, $A_u = O(1)$, $u = [n^{(1+\gamma)/(2\gamma)}]$,

$$O(n^{-1}), \quad O(n^{-(1+\gamma)/2}), \quad O(n^{-\gamma}).$$

4). $\gamma \geqq 2$. In questo caso si ricorre alla maggiorazione immediata della serie $\sum_{n+1}^{\infty} | a_k z^k |$ e si ottiene $O(n^{-\gamma+1})$.

Possiamo esaminare un altro caso:

Sia $a_n = O\left(\frac{1}{n \log n}\right)$; allora, con le solite notazioni, abbiamo $A_u = |a_0| + | a_1 | + \ldots + | a_u | = O(\log \log u)$ e, assumendo $u = [n/(\log n \log\log n)]$ otteniamo $\eta_n = O(\log \log n/n)$ e quindi

$$| f(e^{i\theta}) - f_n(e^{i\theta}) | < K \log \log n/n \qquad (n \geqq 3)$$

su ogni insieme (chiuso) E di regolarità per $f(z)$.

5. — **Dimostrazione del teorema** I [3]. Denotiamo con $\gamma . E$ (γ numero complesso) l'insieme dei punti γz, essendo $z \in E$.

Denotiamo con 4δ un qualunque numero minore della distanza dell'insieme E dal contorno della stella rettilinea di MITTAG-LEFFLER di centro 0. L'insieme chiuso $\lambda e^{i\varphi} \cdot E (1 - \delta \leqq \lambda \leqq 1 + \delta, \ -\delta \leqq \varphi \leqq \delta)$ è strettamente interno a detta stella: denotiamo con $M(\delta)$ il massimo di $|f(z)|$ in questo insieme chiuso.

Sia $Z = e^{i\theta}$ un punto di E; il suo intorno $[Z, \delta]$ costituito dal quadrilatero $\lambda e^{i\varphi} Z (1 - \delta \leqq \lambda \leqq 1 + \delta, \ -\delta \leqq \varphi \leqq \delta)$ è contenuto in $\lambda e^{i\varphi} . E$. È sufficiente dimostrare la validità di (4.1) per il punto Z con una costante K dipendente soltanto da f e da δ, e allora la sua validità è assicurata uniformemente.

Procediamo con una serie di piccole osservazioni:

1). Sia $0 < \alpha \leqq \delta$; allora, tenendo presente (3.3), quando $|z| = 1 - \alpha$ risulta

$$|f(z) - f_n(z)| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| (1-\alpha)^k \leqq \varepsilon(n, \infty) \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-\alpha)^k$$

$$\leqq \varepsilon(n, \infty) \cdot (1-\alpha)^{n+1}/\alpha . \tag{5.1}$$

2). Sia $0 < \alpha \leqq \delta$; allora, tenendo presenti (3.1) e (3.2) e il significato di $M(\delta)$, quando $|z| = 1 + \alpha$ risulta

$$|f(z) - f_n(z)| \leqq |f(z)| + |f_n(z)|$$

$$\leqq |f(z)| + |f_u(z)| + |f_n(z) - f_u(z)|$$

$$\leqq M(\delta) + \sum_{k=0}^{u} |a_k| (1+\alpha)^k + \sum_{k=u+1}^{n} |a_k| (1+\alpha)^k$$

$$\leqq M(\delta) + A_u (1+\alpha)^u + \varepsilon(u, n) \frac{(1+\alpha)^{n+1} - 1}{\alpha}$$

$$\leqq M(\delta) + A_u (1+\alpha)^u + \varepsilon(u, n) \frac{(1+\alpha)^{n+1}}{\alpha} . \tag{5.2}$$

---

(3) Questa dimostrazione è analoga a quella esposta da E. LANDAU pel Teorema di FATOU-RIESZ (vedi loc. cit. (1)): essa si basa sul principio del massimo modulo applicato a una funzione ausiliaria $g(z)$ regolare nell'intorno di un punto $e^{i\theta}$.

3). Siano ζ_1 e ζ_2 i due punti $\zeta_1 = e^{-i\delta} Z$ e $\zeta_2 = e^{i\delta} Z$, estremi dell'arco $\widehat{\zeta_1 \zeta_2}$ di regolarità; poniamo per $v \geqq n$:

(5.3) $$g_n(z) = (z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \cdot \{f(z) - f_n(z)\}/z^{v+1}.$$

Nel punto $Z = e^{i\theta}$ è $|Z| = 1$, $|Z - \zeta_1| > \delta/2$, $|Z - \zeta_2| > \delta/2$ e quindi

$$|g_n(Z)| \geqq (\delta^2/4)\,|f(Z) - f_n(Z)|,$$

da cui

(5.4) $$|f(Z) - f_n(Z)| \leqq 4\,|g_n(Z)|/\delta^2.$$

Pel principio del massimo modulo, essendo $g_n(z)$ regolare in un campo contenente il quadrilatero $[Z, \delta]$, la (4.1) risulterà dimostrata se faremo vedere che $|g_n(z)|$ lungo il contorno di questo quadrilatero verifica

(5.5) $$|g_n(z)| < K_1\,\omega_n$$

dove $K_1 = K_1(f, \delta)$ dipende soltanto da δ e dalla successione $\{|a_n|\}$. Allora $K = 4\,K_1/\delta^2$.

4). Lungo l'arco $|z| = 1 - \delta$, $\arg Z - \delta \leqq \arg z \leqq \arg Z + \delta$ risulta $|(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)| < 5\,\delta^2$ e per la (5.1)

$$|g_n(z)| \leqq 5\,\delta^2 \cdot \varepsilon(n, \infty)(1 - \delta)^{n+1}/(\delta(1 - \delta)^{v+1})$$

(5.6) $$\leqq 5\,\delta \cdot \varepsilon(n, \infty)/(1 - \delta)^{v-n}.$$

5). Lungo il raggio $1 - \delta \leqq |z| < 1$, $\arg z = \arg Z - \delta$, risulta

$$|z - \zeta_1| = \alpha, \qquad |z - \zeta_2|^2 < 5\,\delta^2$$

e tenendo conto della (5.1) otteniamo

$$|g_n(z)| < \alpha \cdot \delta\sqrt{5} \cdot \varepsilon(n, \infty)(1 - \alpha)^{n+1}/(\alpha(1 - \alpha)^{v+1})$$

$$< \delta\sqrt{5} \cdot \varepsilon(n, \infty)/(1 - \alpha)^{v-n}$$

(5.7) $$< \delta\sqrt{5} \cdot \varepsilon(n, \infty)/(1 - \delta)^{v-n}.$$

6). Lungo l'arco $|z| = 1 + \delta$, $\arg Z - \delta \leqq \arg z \leqq \arg Z + \delta$ risulta $|(z - \zeta_1)(z - \zeta_2)| < 5\,\delta^2$ e per la (5.2) si vede che $|g_n(z)|$ è minore di

$$5\,\delta^2 \left\{ M(\delta) + A_u(1 + \delta)^u + \varepsilon(u, n)\frac{(1 + \delta)^{n+1}}{\delta} \right\} / (1 + \delta)^{v+1}$$

e quindi

$$|g_n(z)| < 5\,\delta\left\{\frac{\delta\, M(\delta)}{(1+\delta)^{v+1}} + \frac{A_u\,\delta}{(1+\delta)^{v-u+1}} + \frac{\varepsilon(u,n)}{(1+\delta)^{v-n}}\right\}.$$

È evidente che, fissato δ, quando $v - u \geqq \nu(\delta)$ risulta (essendo A_u positivo e non decrescente al crescere di u e quindi $M(\delta)/A_u$ limitato)

$$\frac{\delta\, M(\delta)}{(1+\delta)^{v+1}} + \frac{\delta\, A_u}{(1+\delta)^{v-u+1}} < \frac{A_u}{v-u}$$

e pertanto è

(5.8) $$|g_n(z)| < K_2(\delta)\left\{\frac{A_u}{v-u} + \frac{\varepsilon(u,n)}{(1+\delta)^{v-n}}\right\}.$$

7). Lungo il raggio $1 < |z| \leqq 1+\delta$, $\arg z = \arg Z - \delta$ risulta

$$|z - \zeta_1| = \alpha, \qquad |z - \zeta_2| < 5\,\delta$$

e tenendo conto della (5.2) si vede che $|g_n(z)|$ è minore di

$$\alpha \cdot 5\,\delta\left\{M(\delta) + A_u(1+\alpha)^u + \varepsilon(u,n)\frac{(1+\alpha)^{n+1}}{\alpha}\right\}/(1+\alpha)^{v+1}.$$

e quindi

$$|g_n(z)| < 5\,\delta\left\{\frac{\alpha\, M(\delta)}{(1+\alpha)^{v+1}} + \frac{\alpha\, A_u}{(1+\alpha)^{v-u}} + \frac{\varepsilon(u,n)}{(1+\alpha)^{v-n}}\right\}.$$

Osserviamo che la frazione $\alpha/(1+\alpha)^m$ assume il valore massimo per $\alpha = 1/(m-1)$ ed è

$$\frac{1/(m-1)}{\{1+1/(m-1)\}^m} = \frac{1}{m-1}\cdot\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{-m} < \frac{1}{e(m-1)} < \frac{1}{m}.$$

Ne segue

$$|g_n(z)| < 5\,\delta\left\{\frac{M(\delta)}{v+1} + \frac{A_u}{v-u} + \varepsilon(u,n)\right\},$$

e poiche A_u è positivo e non decrescente al crescere di u

(5.9) $$|g_n(z)| < K_3(\delta)\left\{\frac{A_u}{v-u} + \varepsilon(u,n)\right\}.$$

8). Nel punto $z = \zeta_1$ è $g_n(z) = 0$. La maggiorazione di $| g_n(z) |$ sulla parte rimanente del contorno $1 - \delta \leqq | z | \leqq 1 + \delta$, $\arg z = \arg Z + \delta$ si ottiene per simmetria.

9). Le maggiorazioni (5.6), (5.7), (5.8) e (5.9) ci mostrano che lungo tutto il contorno di $[Z, \delta]$ risulta

$$| g_n(z) | < K_1(f, \delta) \cdot \left\{ \frac{A_u}{v - u} + \varepsilon(u, n) + \frac{\varepsilon(n, \infty)}{(1 - \delta)^{v-n}} \right\},$$

e quindi vale la (5.5) e la (4.1), tenendo conto della definizione (3.4) di ω_n.

Il teorema risulta così dimostrato.