ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

UGO BARBUTI

Su alcuni teoremi di stabilità

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 8, nº 1-2 (1954), p. 81-91
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1954_3_8_1-2_81_0>

SU ALCUNI TEOREMI DI STABILITÀ

di Ugo Barbuti (Pisa)

Il problema della stabilità degli integrali della equazione:

$$y'' + B(x)\, y = 0 \tag{1}$$

ha dato luogo a varie ricerche, anche recenti ([1]). Nel caso $B(x) > 0$, si conoscono alcuni teoremi, aventi campi d'applicazione distinti, e, si presenta, per essi, l'esigenza di stabilire proposizioni che li comprendano, coordinandoli in una visione unitaria del problema. Questa esigenza appare fondamentale anche ai fini di future indagini sulla stabilità di equazioni lineari di ordine superiore e dei sistemi differenziali.

Vale per la (1), ad es., il seguente notevole teorema:

Gli integrali della (1) *sono limitati con le loro derivate se si ha* $0 < a^2 \leq B(x) \leq b^2$ *e* $B(x)$ *ammette derivata a variazione limitata* (scriveremo v. l.) *in* $(x_0, +\infty)$.

Questo criterio, dovuto ad L. A. Gusarov (1949) [2], presenta una certa affinità, nella natura delle condizioni richieste (pure essendo da esso distinto), col noto criterio di R. Caccioppoli (1930) [3], nel quale, per la stessa tesi, si esige che $B(x)$ *sia v. l. in* $(x^0, +\infty)$ *e il limite a cui tende sia positivo.* Proponendoci la ricerca di un criterio che li comprenda entrambi, abbiamo raggiunto lo scopo (n. 6) attraverso la osservazione (n. 5) che il teorema di Caccioppoli può farsi dipendere da quello di Gusarov, mediante i noti teoremi di stabilità per confronto di Ascoli-Caligo.

Questi ultimi teoremi ci hanno anche condotto (sempre nello spirito della esigenza su dichiarata) a formulare un criterio di stabilità ridotta (n.i 2,3) per la (1) (dal quale discende la proposizione di Gusarov), che potrebbe mettersi a raffronto con noti risultati di A. Wiman, G. Armellini,

([1]) Per una bibliografia si veda l'opera [1].

L. Tonelli, G. Sansone ed altri, riflettenti il caso che lim $B(x) = +\infty$. (Cfr. [1], pp. 52-67). Con ciò tutti i più interessanti criteri di stabilità per la (1), nella ipotesi detta che $B(x) > 0$, appaiono così deducibili dagli importanti teoremi di confronto prima accennati

Il procedimento dimostrativo, che abbiamo seguito, si poggia su questi ultimi e ci è stato utile anche in altre ricerche (Cfr. [4], [5]); esso conduce pure (n. 7) ad alcune formule asintotiche, che valgono, in particolare, nelle ipotesi di Caccioppoli e Gusarov.

Il teorema di confronto ed alcuni sviluppi formali.

1. Supposto $B(x)$ integrabile (nel senso di Lebesgue) in ogni tratto finito di $(x^0, +\infty)$, vale il seguente teorema di stabilità di G. Ascoli [6], che ci sarà nel seguito utile:

Gli integrali della (1) *sono limitati in* $(x^0, +\infty)$ *se lo sono quelli della equazione:*

$$y'' + A(x)\,y = 0\,, \tag{2}$$

e, se è $A(x) = B(x) + \lambda(x)$, *con* $\lambda(x)$ *assolutamente integrabile* (scriveremo a. i.) *in* $(x^0, +\infty)$.

Ricordiamo anche che questo teorema può essere completato col seguente, che è un caso particolare di un noto teorema di D. Caligo [7]:

Nelle ipotesi del teorema precedente, gli integrali della (1) *e le loro derivate sono limitati in* $(x^0, +\infty)$ *se lo sono quelli della* (2) *con le loro derivate.*

Ci saranno anche utili alcune trasformazioni. Se imponiamo alla equazione (2) di avere come integrali le funzioni:

$$y_1 = R\cos v\,, \qquad y_2 = R\,\mathrm{sen}\,v \tag{3}$$

con

$$v = \int_{x_0}^{x} \sqrt{B(t)}\,dt\,, \qquad R = B^{-1/4} \tag{4}$$

e $B(x)$ funzione, *positiva, dotata quasi ovunque, in* $(x^0, +\infty)$, *di derivate prima e seconda* (ipotesi che supporremo sempre verificate per il seguito, salvo esplicito avvertimento), la $A(x)$ assume la forma:

$$A(x) = B(x) + \frac{1}{4}\frac{B''(x)}{B(x)} - \frac{5}{16}\left(\frac{B'(x)}{B(x)}\right)^2, \tag{5}$$

valida, quasi ovunque, in $(x^0, +\infty)$.

Tutto ciò per dedursi dal n. 2 della mia nota [5], od essere anche, con facilità, direttamente controllato. Si noti pure che, per il Wronskiano delle funzioni (3), si ha $W = 1$, le (3) medesime riescono, perciò, linearmente indipendenti.

Un teorema di stabilità.

2. Vogliamo provare il seguente teorema di stabilità ridotta:

Teorema (*A*).

$B(x)$ soddisfi alle condizioni seguenti:

I) $0 < a^2 \leq B(x)$

II) *$B'(x)$ si può scrivere quasi ovunque nella forma $B'(x) = \beta(x) + \alpha(x)$, con $\dfrac{\beta(x)}{B(x)}$ v. l. in $(x^0, +\infty)$, inoltre α, α' a. i. e B'/B limitata nello stesso intervallo.*

III) $\left(\dfrac{B'(x)}{B(x)}\right)^2$ *sia integrabile in $(x^0, +\infty)$.*

In queste condizioni tutti gli integrali della (1) *sono limitati in (x^0, ∞).*

Per I) gli integrali (3) della (2) sono limitati in $(x^0, +\infty)$. Nella (5) si può sopprimere, a causa della III) il termine $-\dfrac{5}{16}(B'/B)^2$, per il teorema di confronto, e, le soluzioni della (2) restano limitate. Inoltre si osservi che per II) si ha:

$$D\left(\frac{B'}{B}\right) = D\left(\frac{\beta}{B}\right) + \frac{\alpha'}{B} - \frac{\alpha B'}{B^2};$$

ed anche, quasi ovunque, in $(x^0, +\infty)$:

$$D\left(\frac{B'}{B}\right) = \frac{B''}{B} - \left(\frac{B'}{B}\right)^2; \tag{6}$$

onde si ha:

$$\frac{|B''|}{B} \leq \left| D\left(\frac{\beta}{B}\right)\right| + \frac{|\alpha'|}{B} + \frac{|\alpha|}{B}\frac{|B'|}{B} + \left(\frac{B'}{B}\right)^2 \tag{7}$$

Per la ipotesi II) $|B'|/B$ è limitata nell'intervallo $(x^0, +\infty)$ e perciò, gli ultimi tre addendi, a secondo membro della (7), sono integrabili in $(x^0, +\infty)$ per II) e III); inoltre, indicando con $V(\beta/B)$ la variazione totale in (x^0, x) di β/B, si ha:

$$\int_{x_0}^{x} |D(\beta(t)/B(t))|\,dt \leq V(\beta/B),$$

e, poichè $V(\beta/B)$ è limitata per $x \to +\infty$ (ipotesi II)), ne viene la convergenza dell'integrale a primo membro della precedente in $(x^0, +\infty)$, e, quindi anche, per la (7), l'assoluta integrabilità nello stesso intervallo di B''/B. Da ciò segue, sempre per il teorema di confronto, che si può sopprimere nella (5) il termine $\frac{1}{4}\,B''/B$ e le soluzioni della (2), che diviene la (1), restano limitate in $(x^0, +\infty)$; con ciò il teorema è provato.

Utilizzando questo teorema si può, ad es., asserire che sono limitati tutti gli integrali delle equazioni:

$$y'' + x^n y = 0 \qquad (n \text{ reale positivo nullo})$$

$$y'' + y \log x = 0\,.$$

Vogliamo anche, esplicitamente, avvertire che *la condizione II) è certo verificata se B'/B è v. l. in* $(x^0, +\infty)$. Ciò avviene negli esempi ora mostrati.

3. Vale anche il seguente teorema di stabilità incondizionata:

Teorema (*B*)

Nelle ipotesi II), III) *del teorema precedente e supponendo che sia*:

I′) $$0 < a^2 \leq B(x) \leq b^2$$

gli integrali della (1) *e le loro derivate sono tutti limitati in* $(x^0, +\infty)$.

Infatti le condizioni del teorema precedente sono tutte verificate, e perciò, $A(x)$ differisce da $B(x)$ per termini a. i. in $(x^0, +\infty)$. Inoltre per la I′) gli integrali della (2) con le loro derivate sono limitati in $(x^0, +\infty)$; si ha infatti dalle (3):

$$y_1' = -\frac{1}{4} B^{-1/4}(B'/B)\cos v - B^{1/4}\operatorname{sen} v$$

$$y_2' = -\frac{1}{4} B^{-1/4}(B'/B)\operatorname{sen} v + B^{1/4}\cos v\,,$$

e il rapporto $\dfrac{B'}{B}$ risulta limitato per $t \to \infty$. Per il teorema di confronto di Caligo, segue allora subito il teorema (*B*).

Una estensione dei teoremi di Gusarov e Caccioppoli.

4. Vogliamo osservare che le condizioni II) e III) del teorema (A) o (B) *sono verificate se* $B(x)$ *ammette ovunque derivata* $B'(x)$ *e questa è v. l. in* $(x^0, +\infty)$; con ciò il teorema di Gusarov *è contenuto* nel teorema (B). Si ha intanto che esiste, quasi ovunque in $(x^0, +\infty)$, la derivata seconda $B''(x)$: ed essa riesce, evidentemente, a. i. in tale intervallo.

Inoltre, preso un $\delta > 0$, si consideri la successione di punti $x^0 + n\,\delta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e indichiamo con $\beta(x)$ la funzione che è eguale a $B'(x)$ nei punti $x^0 + n\,\delta$ e varia linearmente tra due di essi consecutivi. Per una osservazione di G. Ascoli (Cfr. [8] p. 200), scrivendo:

$$B'(x) = \beta(x) + \alpha(x) \tag{8}$$

risulta $\beta(x)$ assolutamente continua in ogni tratto finito di $(x^0, +\infty)$ e v. l. in $(x^0, +\infty)$, inoltre, $\alpha(x)$ riesce a. i. nel medesimo intervallo. Si può pure asserire che $\alpha(x)$ è quasi ovunque derivabile, in $(x^0, +\infty)$, e la sua derivata $\alpha'(x)$ è a. i. nel medesimo intervallo. Infatti $\alpha(x)$ è quasi ovunque derivabile, per essere la differenza di due siffatte funzioni, e, si ha:

$$\alpha'(x) = B''(x) - \beta'(x).$$

Per provare che $\alpha'(x)$ è a. i. nel detto intervallo, basterà mostrare che lo è $\beta'(x)$. Si ha subito (ricordando la definizione di $\beta(x)$):

$$\int_{x^0+(r-1)\delta}^{x^0+r\delta} |\beta'(t)|\,dt = |B'(x^0 + r\,\delta) - B'(x^0 + (r-1)\,\delta)| \leq V_r \qquad (r = 1, 2, \ldots n),$$

dove abbiamo indicato con V_r la variazione totale di $B'(x)$ in $(x^0 + (r-1)\,\delta,\ x^0 + r\,\delta)$. È perciò:

$$\int_{x_0}^{x^0+n\delta} |\beta'(t)|\,d\,t \leq \sum_1^n V_r\,,$$

e poichè il secondo membro della precedente è limitato per $n \to +\infty$, ne segue l'asserto.

Ciò prova intanto che le proprietà della decomposizione, richiesta in II) per $B'(x)$, sono in parte verificate.

Proviamo ora la III). La (6) dà anche:

$$d\left(\frac{B'}{B}\right)=-\left(\frac{B'}{B}\right)^2 d\,x+\frac{B''}{B}\,d\,x \tag{6'}$$

e, sostituendo, nel primo membro della precedente, a B' la sua espressione, data dalla (8), si ha:

$$d\left(\frac{B'}{B}\right)=d\left(\frac{\beta}{B}\right)-\frac{\alpha\,B'}{B^2}\,d\,x+\frac{\alpha'}{B}\,d\,x=-\left(\frac{B'}{B}\right)^2 d\,x+\frac{B''}{B}\,d\,x.$$

Da quest'ultima si deduce (osservando che β/B è assolutamente continua in ogni tratto finito di $(x_0+\infty)$, integrando sull'intervallo (x^0, x):

$$\int_{x_0}^{x}\left(\frac{B'}{B}\right)^2 dt=-\left(\frac{\beta}{B}\right)_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}\frac{\alpha\,B'}{B^2}\,d\,t-\int_{x_0}^{x}\frac{\alpha'}{B}\,d\,t+\int_{x_0}^{x}\frac{B''}{B}\,d\,t\,.$$

Si osservi che, essendo B' e β v. l. in $(x^0, +\infty)$ e per la condizione $B(x)\geq a^2$, le funzioni B'/B^2, β/B sono limitate nel medesimo intervallo. Da ciò segue che, essendo α, α', B'' a. i. in $(x^0, +\infty)$, l'integrale a primo membro della precedente eguaglianza è convergente in $(x^0, +\infty)$; la III) è dunque vera. Per provare completamente la II), si osservi che, essendo (come abbiamo già osservato) B, β assolutamente continue, in ogni tratto finito di $(x^0, +\infty)$, si ha:

$$\int_{x_0}^{x}\left|D\left(\frac{\beta}{B}\right)\right|d\,t=V\left(\frac{\beta}{B}\right),$$

e, poichè dalle (6), e, per quanto già visto, segue che il primo membro della precedente è convergente per $x\to+\infty$, ne segue che β/B è v. l. in $(x^0, +\infty)$; la decomposizione (8) verifica dunque le condizioni II).

Si osservi, per altro, che le condizioni II) possono essere verificate senza che $B'(x)$ sia v. l. in $(x^0, +\infty)$, così avviene nel primo degli esempi su dati (n. 2) se $n\geq 1$.

Si potrebbe, inoltre, provare, ripetendo opportunamente il ragionamento su fatto, che le condizioni II) e III) del teorema (A) o (B) sono verificate da $B(x)$ se questa è *assolutamente continua in ogni tratto finito ed ha derivata che riesce v. l. in* $(x_0, +\infty)$.

5. Vogliamo mostrare, ora, che il teorema di Caccioppoli *si può derivare,* sempre attraverso il criterio di stabilità per confronto, da quello di Gusarov. Sia infatti $B(x)$ v. l. in $(x^0, +\infty)$ e il limite a cui tende sia positivo. Consideriamo la decomposizione:

$$B(x) = \beta(x) + \alpha(x),$$

già utilizzata per $B'(x)$, nel n⁰ precedente. Poichè la funzione $\alpha(x)$ risulta a. i. in $(x^0, +\infty)$ (per la citata osservazione di G. Ascoli), si può, al fine di decidere della stabilità degli integrali della (1), sostituire, per il teorema di confronto, a $B(x)$ la funzione $\beta(x)$. Si può, per altro, provare che $\beta(x)$ *ha derivata v. l. in* $(x^0, +\infty)$. Infatti $\beta(x)$ ha derivata (costante) per ogni x tale che $x^0 + (r-1)\delta < x < x^0 + r\delta$ $(r = 1, 2, \ldots)$ e ne manca nei punti $x = x^0 + r\delta$. Se definiamo convenzionalmente $\beta'(x^0 + r\delta) = 0$, avremo che $\beta'(x)$ sarà ovunque definita. In ogni tratto $(x^0 + (r-1)\delta, x^0 + r\delta)$ si ha, per la variazione totale V_r di $\beta'(x)$:

$$V_r = 2\,|\beta'(x_r)| = 2\,\frac{|\beta(x^0 + r\delta) - \beta(x^0 + (r-1)\delta)|}{\delta} \leq 2\,\frac{\overline{V}_r}{\delta},$$

$$(x^0 + (r-1)\delta < x_r < x^0 + r\delta)$$

dove abbiamo indicato con $\overline{V}_r$ la variazione totale, nel medesimo intervallo, di $B(x)$. Perciò, considerato un qualunque tratto (x^0, x) $(x^0 < x)$, e, detto n un intero positivo tale che $x^0 + (n-1)\delta \leq x < x^0 + n\delta$, sarà:

$$V(\beta'(x);\ (x^0, x)) \leq \sum_1^n V_r \leq \frac{2}{\delta}\sum_1^n \overline{V}_r\,.$$

Al tendere di $x \to +\infty$ avremo che $n \to +\infty$ e l'ultimo membro scritto della precedente è per ipotesi limitato, si ha dunque che:

Ogni funzione v. l. in $(x^0, +\infty)$ è somma di una funzione avente quasi ovunque derivata, che risulta anch'essa v. l. in $(x_0, +\infty)$ con una funzione a. i. nel medesimo intervallo.

Questa osservazione prova l'asserzione su fatta.

6. Una conseguenza notevole di questa osservazione è il seguente criterio di stabilità incondizionata, che estende i teoremi di Caccioppoli-Gusarov come quello di G. Ascoli [6] estende i teoremi di Hukuhara-Nagumo e Caccioppoli:

Se $B(x)$ è la somma di due funzioni:

$$B(x) = B_1(x) + B_2(x)$$

in modo che, in $(x^0, +\infty)$, B_1 *sia v. l. e il limite a cui tende sia positivo, e* B_2, *compresa tra numeri positivi e avente ovunque derivata v. l. nel medesimo intervallo, allora gli integrali della* (1) *sono incondizionatamente stabili.*

Potremo infatti scrivere, per la osservazione precedente:

$$B(x) = B_1(x) + B_2(x) = \beta(x) + \alpha(x) + B_2(x) = (\beta(x) + B_2(x)) + \alpha(x);$$

poichè ora $\beta(x)$ e $B_2(x)$ hanno derivata v. l. in $(x^0, +\infty)$, la stessa cosa vale per la loro somma, la quale varia tra numeri positivi, ed essendo $\alpha(x)$ a. i. nello stesso intervallo, ne viene subito la tesi, dal teorema di Gusarov e dal criterio di confronto. Sono, ad es., stabili gli integrali della equazione:

$$y'' + \left(b^2 + \frac{1}{x} + \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}\right) y = 0 \qquad (b^2 > 1)$$

Notiamo esplicitamente che una funzione $B(x)$ può non essere v. l. nè avere derivata v. l. in $(x^0, +\infty)$ $\left(\text{come } 2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$ e la (1) avere per essa integrali stabili (Cfr., ad es., [4]).

Alcune formule asintotiche.

7. Allo scopo di avere formule asintotiche per gli integrali della (1), ricordiamo che ad ogni integrale della (2) ne corrisponde uno della (1) differente da esso per termini $e(x)$, che sono dell'ordine di:

$$\int_x^{+\infty} |\lambda(t)|\, dt,$$

con $\lambda(x) = \frac{1}{4}\frac{B''}{B} - \frac{5}{16}\left(\frac{B'}{B}\right)^2$ (ammesso che λ sia a. i.), vale a dire, si ha:

$$|e(x)| \leq M \int_x^{+\infty} |\lambda(t)|\, dt \qquad (M \text{ costante positiva opportuna}).$$

E perciò anche:

$$|e(x)| \leq \frac{M}{4a^2} \int_x^{+\infty} |B''|\, dt + \frac{5}{16} M \int_x^{+\infty} \left(\frac{B'}{B}\right)^2 dt. \tag{9}$$

Supponiamo ora, per semplicità, che sia verificata la condizione I) e inoltre esista ovunque $B'(x)$, sia v. l. in $(x^0, +\infty)$ e *assolutamente continua in ogni tratto finito* dello stesso intervallo, ciò che porta, senz'altro, valide le condizioni II) e III) del teorema A o B (n.º 4) e quindi l'assoluta integrabilità di $\lambda(t)$. In questa ipotesi integrando la (6)′ sull'intervallo (x^0, x), si ottiene:

$$\int_{x_0}^{x} \left(\frac{B'}{B}\right)^2 d\,t = \left(-\frac{B'}{B}\right)_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{B''}{B}\,d\,t\,, \tag{10}$$

facendo tendere $x \to +\infty$, ed osservando che B'/B tende a zero, si ha:

$$\int_{x_0}^{+\infty} \left(\frac{B'}{B}\right)^2 d\,t = \frac{B'(x^0)}{B(x^0)} + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{B''}{B}\,d\,t\,.$$

La (10) opportunamente scritta, fornisce allora, tenendo conto della precedente:

$$\int_{x}^{+\infty} \left(\frac{B'}{B}\right)^2 d\,t = \frac{B'(x)}{B(x)} + \int_{x}^{+\infty} \frac{B''}{B}\,d\,t\,;$$

onde, si ha:

$$\int_{x}^{+\infty} \left(\frac{B'}{B}\right)^2 d\,t \leq \frac{1}{a^2}\left(|B'(x)| + \int_{x}^{+\infty} |B''|\,d\,t\right),$$

e, sostituendo nella (9), si ottiene:

$$|e(x)| \leq h\,|B'(x)| + k \int_{x}^{+\infty} |B''(t)|\,d\,t \qquad (h\,,k \text{ costanti opportune}).$$

Ora utilizzando per $B'(x)$ la decomposizione canonica di Jordan, si ha:

$$B'(x_1) = B'(x) + P(x\,, x_1) - N(x_0\,, x_1)\,, \qquad (x < x_1)\,;$$

dove $P(x, x_1)$, $N(x, x_1)$ sono la variazione totale positiva e negativa di $B'(x)$ in (x, x_1). Passando al limite per $x_1 \to +\infty$, e, osservando che $B'(x_1) \to 0$ e che P ed N tendono a limiti determinati e finiti, che indicheremo con $P(x, +\infty)$, $N(x, +\infty)$, si ottiene:

$$B'(x) = -P(x\,, +\infty) + N(x\,, +\infty)\,,$$

e quindi anche: $|B'(x)| \leq V(B')$, dove $V(B')$ è la variazione totale di B' in $(x, +\infty)$, e, siccome è anche:

$$\int_x^{+\infty} |B''(t)|\, d\,t = V(B'),$$

si ha che $e(x)$ è dell'ordine di $V(B')$.

Per gli integrali della (1) si ha dunque la rappresentazione:

$$y(x) = B^{-1/4}(x)\left(c_1 \cos \int_{x_0}^{x} \sqrt{B(t)}\, d\,t + c_2 \operatorname{sen} \int_{x_0}^{x} \sqrt{B(t)}\, d\,t\right) + e(x)$$

dove c_1, c_2 sono costanti arbitrarie e per le parti infinitesime $e(x)$ si ha:

$$e(x) = O[V(B')].$$

Si ha, per es., per gli integrali della equazione

$$y'' + y \log x = 0 \qquad (x \geq x^0 > 1)$$

la rappresentazione asintotica:

$$y = \log^{-1/4} x \left(c_1 \cos \int_{x_0}^{x} \sqrt{\log t}\, d\,t + c_2 \operatorname{sen} \int_{x_0}^{x} \sqrt{\log t}\, d\,t\right) + O(x^{-1}).$$

LAVORI CITATI

[1] G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte II; Ed. Zanichelli, Bologna, (1949).

[2] L. A. GUSAROV: in « *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.* » (N S), 68, pp. 217-20, (1949), (in russo).

[3] R. CACCIOPPOLI: *Una questione di stabilità*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », (6), II (1930), pp. 251-54.

[4] U. BARBUTI: *Sulla stabilità* ..., « Rend. Acc. dei Lincei » S. III, v. XII, f. 2°, pp.170-75, (1952).

[5] U. BARBUTI: *Sopra un caso di risonanza* ..., « Boll. U. M. I. », S. III, a. VII n. 2, pp. 154-59 (1952).

[6] G. ASCOLI: *Sul comportamento asintotico* ..., « Rend. Acc. Naz. dei Lincei » (6), 22 (1935), pp. 234-43.

[7] D. CALIGO: *Un criterio sufficiente di stabilità* ..., « Atti del 2° Congresso dell'U. M. I. » pp. 177-85, (1940).

[8] G. ASCOLI: *Sopra un caso di stabilità* ..., « Ann. di Matem. pura e applicata » Serie IV, T. XVI, (1947), pp. 199-206.