ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CARMELO MAMMANA

Sulla varietà delle curve algebriche piane spezzate in un dato modo

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 8, nº 1-2 (1954), p. 53-75

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1954_3_8_1-2_53_0>

SULLA VARIETÀ DELLE CURVE ALGEBRICHE PIANE SPEZZATE IN UN DATO MODO

di CARMELO MAMMANA (Pisa)

Rappresentiamo le curve algebriche piane C^n di ordine n, con i punti di uno spazio S_N, ad $N = \frac{n(n+3)}{2}$ dimensioni, facendo corrispondere ad una data curva

$$f \equiv \Sigma\, a_{i_0 i_1 i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = 0 \qquad (i_0 + i_1 + i_2 = n)$$

il punto di S_N che ha per coordinate omogenee i coefficienti $a_{i_0 i_1 i_2}$ della forma f, considerati in un dato ordine.

Come è ben noto, in questa rappresentazione (che è biunivoca e senza eccezioni) le curve C^n con un punto doppio non assegnato hanno per immagine i punti di una ipersuperficie V_{N-1}^{δ} di S_N, la quale è irriducibile, razionale, ed ha l'ordine $\delta = 3(n-1)^2$.

Le curve C^n dotate di particolari singolarità vengono rappresentate in S_N, dai punti di certe varietà immerse nell'ipersuperficie V_{N-1}^{δ}. Così, per esempio, le C^n con due punti doppi (non assegnati) hanno per immagine i punti di una varietà V_{N-2} immersa nella V_{N-1} e doppia per questa; le C^n con un punto doppio cuspidale hanno per immagine i punti di un'altra V_{N-2}, di dimensione $N-2$ come la precedente, immersa nella V_{N-1} e doppia per questa. In generale le C^n con un punto s-uplo non assegnato ($s \geq 2$) hanno per immagine i punti di una varietà $V^{(s)}$ di ordine $\binom{s'}{2}(n-s+1)^2$, con $s' = \binom{s+1}{2}$, la quale è contenuta nell'ipersuperficie V_{N-1} ed ha molteplicità $(s+1)^2$ per questa V_{N-1} (1).

---

(1) La varietà $V^{(s)}$ delle curve piane (e più in generale quella delle ipersuperficie) di dato ordine n e con un punto s-uplo ($s \geq 2$), non assegnato, è stata considerata (più o meno esplicitamente) da vari Autori:

Nel presente lavoro ci proponiamo di studiare la varietà V_d immagine in S_N della totalità delle curve piane C^n spezzate in un dato modo; cioè la varietà V_d i cui punti rappresentano, in S_N, le curve piane C^n, di ordine n, le quali hanno una èquazione del tipo

$$f \equiv f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \dots f_t^{\nu_t} = 0$$

dove $f_1, f_2, \dots, f_t$, sono forme di gradi assegnati $n_1, n_2, \dots, n_t$, e gli interi positivi $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_t$, sono pure assegnati. Naturalmente è $\sum_{i=1}^{t} n_i \nu_i = n$, e la varietà V_d è immersa nella ipersuperficie V_{N-1}^{δ} (2).

Nel n. 1 dimostriamo che:

Lo spazio S_d, tangente alla V_d in un suo punto generico, immagine della curva

$$\bar{f} \equiv \bar{f}_1^{\nu_1} \bar{f}_2^{\nu_2} \dots \bar{f}_t^{\nu_t} = 0 \tag{1}$$

C. SEGRE, *Intorno ad un carattere ecc.*, Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, 1896, pag. 485.

P. LORENZOLA, *Sul luogo dei punti di contatto ecc.*, Giorn. di Mat., 1905, pag. 213.

F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Teubner, Berlino, 1921, pag. 313.

E. BOMPIANI, *Sulla rappresentazione iperspaziale ecc.*, Rend. Acc. Lincei, 1922, pag. 471.

B. SEGRE: a) *Dei sistemi lineari tangenti ecc.*, Rend. Acc. Lincei, 1924, pag. 182.
b) *Sulle varietà di Veronese a due indici*, Rend. Acc. Lincei, 1936, pag. 303 e 391.
c) *Un'estensione delle varietà di Veronese ecc.*, Rend. Acc. Lincei, 1946, pag. 313 e 559.
d) *Sui sistemi continui di ipersuperficie algebriche*, Rend. Acc. Lincei, 1946, pag. 564.

V. E. GALAFASSI, *Criteri di equivalenza ecc.*, Rend. Ist. Lombardo, 1945, pag. 345.

G. DANTONI: a) *Sulle singolarità della jacobiana ecc.*, Annali della Sc. Norm. Sup., 1949, pag. 1.
b) *Sui sistemi continui ecc.*, 1950.

(2) Varietà di curve spezzate, di ordine $n = 2, 3, 4$, sono considerate in:

C. SEGRE, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche ecc.*, Atti R. Acc. Sc. di Torino, 1885, pag. 487.

N. SPAMPINATO, *Geometria delle cubiche piane*, Atti Acc. Gioenia in Catania, 1919-20 e 1921-22.

L. SAPIENZA, *Sulla geometria delle quadriche piane*, Acta Soc. Gioeniae Catinensis, 1933.

La varietà delle curve piane di ordine n, spezzate in rette (in un dato modo) è studiata, nell'aspetto duale, in:

G. BORDIGA, *Sul modello minimo delle varietà ecc.*, Annali di Mat., 1918, pag. 1.

In questo lavoro l'A. determina anche l'ordine della suddetta varietà e osserva che il risultato si estende alla varieta delle ipersuperficie di dato ordine n che sono spezzate in iperpiani (in un dato modo).

La varietà $V^{(m)}$ delle ipersuperficie di dato ordine n che contengono come parte un iperpiano m-uplo (non assegnato) è studiata nelle due Note c) di B. SEGRE, citate in (1). In questi lavori l'A. determina l'ordine della varietà $V^{(m)}$ (con $m \geq 2$) e la molteplicità che essa ha nella varietà $V^{(m')}$ delle ipersuperficie di ordine n che contengono come parte un iperpiano m'-uplo, con $m' < m$.

è l'immagine delle curve del sistema lineare

$$\bar{f}_1^{\nu_1-1}\,\bar{f}_2^{\nu_2-1}\dots\bar{f}_t^{\nu_t-1}\,g=0$$

dove $g=0$ *è l'equazione del sistema lineare delle curve piane di ordine* $\sum_{i=1}^{t} n_i$ *passanti per tutti i punti* (f_i, f_j) *comuni alle* $\binom{t}{2}$ *coppie di curve* $f_i=0$, $f_j=0$.

Nel n. 2 osserviamo che la generica curva del sistema lineare $g=0$ è irriducibile; nel n. 3 proviamo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè lo spazio S_d, *tangente alla varietà* V_d *in un suo punto generico, tocchi la* V_d *nei punti di una varietà* V_α *di dimensione* $\alpha \geq 1$, *è che per un opportuno valore di i sia*

$$2\,n_i \geq \sum_{j=1}^{t} n_j \quad , \quad \nu_i = 1$$

Se queste due condizioni sono soddisfatte per l'indice i, allora la V_α *è uno spazio lineare* S_α, *e la sua dimensione è*

$$\alpha = \binom{2\,n_i - \sum_{j=1}^{t} n_j + 2}{2}$$

tranne quando è (contemporaneamente) $t=2$, $n_1=n_2$, $\nu_1=\nu_2=1$, *nel qual caso la detta dimensione è* $\alpha=2$.

Nei nn. 4,5, consideriamo la varietà $V_{d'}$ luogo degli S_d tangenti alla V_d. La varietà $V_{d'}$ ha dimensione $d'=2\,d-\alpha-\beta$, dove β indica la dimensione della totalità degli S_d tangenti a V_d che passano per un punto generico di $V_{d'}$. Vedremo (n. 4) che se tutti gli interi ν_i uno al più escluso, sono maggiori di uno, allora è $\beta=0$; mentre se almeno due dei numeri ν_i sono uguali ad uno, allora può essere (n. 5) $\beta>0$ (sia quando è $\alpha=0$, sia quando è $\alpha>0$) (3).

Nel n. 6 osserviamo che la varietà i cui punti sono le immagini in S_N delle curve piane C^n di ordine n, *spezzate in tutti i modi possibili,* è spezzata

---

(3) Otteniamo così esempi di varietà i cui spazi tangenti ricoprono una varietà di dimensione inferiore alla ordinaria. Le varietà di questo tipo sono state studiate, dal punto di vista differenziale, da vari Autori (C. SEGRE, A. TERRACINI, E. BOMPIANI, L. MURACCHINI, ecc.). Per le relative indicazioni bibliografiche vedasi:

L. MURACCHINI, Le *varietà* V_5 *ecc.*, Riv. di Mat. della Univ. di Parma, 1951, pag. 435 e 1952, pag. 75.

in $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ [4] parti distinte che non sono irriducibili e razionali

$$V_{d_1}, V_{d_2}, \ldots, V_{d_m}$$

essendo V_{d_i} la varietà i cui punti sono le immagini delle curve C^n che contengono come parte una curva di ordine i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Queste m varietà contengono tutte la superficie $V_2^{n^2}$ (di VERONESE) i cui punti sono le immagini in S_N delle C^n spezzate in una retta n-upla. Inoltre se si considera la successione di varietà

$$V_2^{n^2} \equiv V_{d_{1n[-1]}}, V_{d_{1n-1}} \ldots V_{d_{11}} \equiv V_{d_1}$$

dove $V_{d_{ij}}$ indica la varietà i cui punti sono le immagini in S_N delle C^n che contengono come parte una retta j-upla $(j = 1, 2, \ldots, n)$, si ha che ognuna di esse è il luogo degli spazi tangenti S_d della precedente. Questa proprietà era nota e trovasi dimostrata nelle Note c) di B. SEGRE citate in (1).

Orbene *l'analoga proprietà vale per la* V_{d_2}, cioè per la varietà i cui punti sono le immagini delle C^n che contengono come parte una conica, e ciò sia per n pari, sia per n dispari, *ed anche per la* V_{d_m}, *per* n *pari. Invece la detta proprietà non è più vera per le varietà* $V_{d_3}, V_{d_4}, \ldots, V_{d_{m-1}}$, *e per la varietà* V_{d_m}, *per* n *dispari.*

Nel numero 7 ritorniamo a considerare in generale la varietà V_d definita al n. 1 e osserviamo che essa è razionale ed appartiene ad S_N. Inoltre dimostriamo che:

L'ordine della varietà V_d *è*

$$K = \eta \, \nu_1^{m_1} \nu_2^{m_2} \ldots \nu_t^{m_t} \qquad \left(m_i = \frac{1}{2} n_i (n_i + 3)\right)$$

dove η *è l'indice del sistema continuo di curve* C^n *definito da* V_d.

Se nelle t coppie di numeri interi $(n_1, \nu_1), (n_2, \nu_2), \ldots, (n_t, \nu_t)$, ce ne sono h_1 uguali fra loro, h_2 uguali fra loro e distinte dalle precedenti h_1, ecc., allora si ha

$$\eta = \frac{1}{h_1! \, h_2! \ldots h_q!} \, \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_t)!}{m_1! \, m_2! \ldots m_t!}$$

---

(4) Col simbolo $\left[\frac{n}{2}\right]$ indichiamo il massimo intero positivo che è $\leq \frac{n}{2}$.

Da ciò segue che è $k = \eta$ allora e solo quando si ha $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \ldots \nu_t = 1$. Cioè: *L'ordine della varietà V_d coincide con l'indice del sistema continuo di curve spezzate C^n, definito da V_d, allora e solo quando la generica delle dette curve C^n non ha componenti multipli* (5).

Insomma accade che gli spazi S_{N-d}, i cui punti sono le immagini delle curve piane di ordine n che passano per d punti *generici* del piano, hanno a comune con la varietà V_d, η punti distinti, ma ognuno di questi η punti è una intersezione di molteplicità $\nu_1^{m_1} \nu_2^{m_2} \ldots \nu_t^{m_t}$.

Nel numero 8 esponiamo in altra forma il risultato precedente sul valore dell'ordine K della varietà V_d, e, come immediata applicazione, determiniamo il numero delle curve spezzate che sono contenute in un generico sistema lineare ∞^r di curve piane di ordine n.

Infine nei nn. 9, 10, 11, 12, calcolando quanto conta una curva piana del tipo (1) agli effetti del computo dell'invariante di ZEUTHEN-SEGRE, dimostriamo che:

La varietà V_d ha molteplicità

$$s = \left(2n + \sum_{i=1}^{t} n_i - 3\right)\left(n - \sum_{i=1}^{t} n_i\right) + \Sigma\, n_i\, n_j \ (^6)$$

per l'ipersuperficie V_{N-1} i cui punti rappresentano in S_N le curve piane di ordine n con un punto doppio non assegnato.

1. — Rappresentiamo, come abbiamo già detto, le curve algebriche piane C^n di ordine n con i punti di uno spazio S_N, ad $N = \frac{n(n+3)}{2}$ dimensioni facendo corrispondere ad una tale curva, di equazione $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, il punto di S_N che ha per coordinate omogenee i coefficienti della forma f, considerati in un dato ordine.

---

(5) Si confronti questo risultato col classico teorema che afferma la linearità dei sistemi algebrici ∞^r di indice uno, di ipersuperficie, nell'ipotesi che la generica ipersuperficie non abbia parte fissa e *non sia multipla* (e che il sistema non costi di parti di differenti dimensioni).

Vedasi anche il n. 5 della Nota *a*) di B. SEGRE, citata in (1), dove però non sono enunciate le condizioni di validità del risultato ivi esposto. E infine vedasi il n. 8 della Memoria:

F. SEVERI, *Sul teorema fondamentale dei sistemi continui ecc.* Ann. di Mat., 1944, pag. 149.

(6) L'ultima sommatoria si intende estesa a tutte le $\binom{t}{2}$ combinazioni degli indici 1, 2, 3, ..., t, a due a due.

Entro lo spazio S_N consideriamo la varietà V_d i cui punti rappresentano le curve spezzate C^n che hanno un'equazione del tipo

$$f \equiv f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \dots f_t^{\nu_t} = 0 \tag{2}$$

dove $f_1, f_2, \dots, f_t$, sono forme di gradi assegnati $n_1, n_2, \dots, n_t$, e gli interi positivi $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_t$, sono pure assegnati. Evidentemente si ha $\sum_{i=1}^{t} n_i \nu_i = n$, e la dimensione d della varietà V_d è

$$d = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{t} n_i (n_i + 3).$$

Consideriamo un generico punto P_0 di V_d. Esso è immagine di una C^n, di equazione

$$\bar{f} \equiv \bar{f}_1^{\nu_1} \bar{f}_2^{\nu_2} \dots \bar{f}_t^{\nu_t} = 0 .$$

Sia Γ un ramo lineare avente per origine P_0 e giacente in V_d ed $f(x_0, x_1, x_2; u) = 0$ l'equazione del sistema ∞^1 di curve C^n che hanno per immagine i punti di Γ. Se supponiamo che l'origine P_0 del ramo corrisponda al valore $u = 0$ del parametro u, si ha

$$f(x_0, x_1, x_2; 0) \equiv \bar{f}(x_0, x_1, x_2)$$

e il fascio tangente in P_0 a Γ ha per equazione

$$\bar{f} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u=0} = 0$$

la quale, per il modo come sono spezzate le nostre curve, è del tipo

$$\bar{f}_1^{\nu_1 - 1} \bar{f}_2^{\nu_2 - 1} \dots \bar{f}_t^{\nu_t - 1} \left(F + \lambda \sum_{t=1}^{t} \nu_i F_i\right) = 0$$

con $F = \bar{f}_1 \bar{f}_2 \dots \bar{f}_t$ ed $F_i = \bar{f}_1 \bar{f}_2 \dots \bar{f}_{i-1} \bar{f}_{i+1} \dots \bar{f}_t \left(\frac{\partial f_i}{\partial u}\right)_{u=0}$. Queste curve C^n si spezzano tutte nella $\bar{f}_1^{\nu_1 - 1} \bar{f}_2^{\nu_2 - 1} \dots \bar{f}_t^{\nu_t - 1}$ e in una parte rimanente, $g = 0$, la quale ha ordine $\sum_{i=1}^{t} n_i$ e passa per tutti i punti $(\bar{f}_i, \bar{f}_j)$ comuni alle curve $\bar{f}_1 = 0$, $\bar{f}_2 = 0, \dots \bar{f}_t = 0$, due a due. Ne segue che lo spazio S_d tangente in P_0 alla V_d è immagine di curve C^n del tipo

$$\bar{f}_1^{\nu_1 - 1} \bar{f}_2^{\nu_2 - 1} \dots \bar{f}_t^{\nu_t - 1} g = 0 \tag{3}$$

con $g = 0$ curva di ordine $\sum_{i=1}^{t} n_i$ e passante per i punti $(\bar{f}_i, \bar{f}_j)$.

Dimostriamo ora che, viceversa, una generica curva C^n del sistema lineare (3) ha per immagine in S_N, un punto dello spazio tangente S_d. Basterà provare che il sistema lineare (3) ha dimensione d. E poichè i punti $(\overline{f}_i, \overline{f}_j)$ sono in numero di $\Sigma\, n_i\, n_j$ (dove la sommatoria si intende estesa alle $\binom{t}{2}$ combinazioni semplici degli indici $1, 2, 3, \ldots, t$, due a due) e inoltre è

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{t} n_i\right)\left(\sum_{i=1}^{t} n_i + 3\right) - \Sigma\, n_i\, n_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} n_i\,(n_i+3) = d$$

per dimostrare che il sistema lineare (3) ha dimensione d, basterà provare che le $\Sigma\, n_i\, n_j$ condizioni che si ottengono imponendo alle curve piane di ordine $\sum\limits_{i=1}^{t} n_i$ di passare per i punti $(\overline{f}_i, \overline{f}_j)$, sono tutte indipendenti.

Ora si osservi che se le suddette condizioni fossero dipendenti per le $\overline{f}_i$ (che sono generiche nei loro ordini) esse sarebbero dipendenti anche quando le $\overline{f}_i$ si particolarizzano in modo che ciascuna di esse risulti spezzata in fattori lineari (generici). Supponiamo dunque che ciascuna delle curve $\overline{f}_i = 0$ sia spezzata in n_i rette generiche e sia A uno qualunque dei punti $(\overline{f}_i, \overline{f}_j)$. Il punto A è l'intersezione di due rette r, s che fanno parte di due curve $\overline{f}_i = 0$ distinte e la curva ottenuta dalla $\overline{f}_1\,\overline{f}_2 \ldots \overline{f}_t = 0$ togliendo le rette r, s, e aggiungendo una conica non passante per A, ha ordine $\sum\limits_{i=1}^{t} n_i$ e passa per tutti i punti $(\overline{f}_i, \overline{f}_j)$, eccetto A. Ciò vuol dire che le condizioni ottenute imponendo alle curve piane di ordine $\sum\limits_{i=1}^{t} n_i$ di passare per i punti $(\overline{f}_i, \overline{f}_j)$ sono indipendenti, quando le $\overline{f}_i$ sono spezzate in fattori lineari generici, e quindi (per quanto abbiamo sopra osservato) le dette condizioni sono indipendenti anche quando le $\overline{f}_i$ sono generiche.

Risulta dunque dimostrato che:

Lo spazio S_d tangente alla varietà V_d in un suo punto generico, immagine della curva $\overline{C}^n$

$$\overline{f} \equiv \overline{f}_1^{\,\nu_1}\, \overline{f}_2^{\,\nu_2} \ldots \overline{f}_t^{\,\nu_t} = 0 \tag{4}$$

è l'immagine delle curve del sistema lineare

$$\overline{f}_1^{\,\nu_1-1}\, \overline{f}_2^{\,\nu_2-1} \ldots \overline{f}_t^{\,\nu_t-1}\, g = 0 \tag{5}$$

dove $g = 0$ è l'equazione del sistema lineare delle curve piane di ordine $\sum\limits_{i=1}^{t} n_i$ passanti per tutti i punti $(\overline{f}_i, \overline{f}_j)$ comuni alla $\binom{t}{2}$ coppie di curve $\overline{f}_i = 0$, $\overline{f}_j = 0$.

2. — Osserviamo che la generica curva del sistema lineare $g=0$, di cui all'enunciato precedente, è irriducibile.

Infatti, supponiamo che le curve $g=0$ abbiano una parte fissa $\overline{\varphi}=0$; poichè fra di esse vi è la curva $\overline{f}_1\,\overline{f}_2\ldots\overline{f}_t=0$ la $\overline{\varphi}=0$ deve essere una parte di questa $\overline{f}_1\,\overline{f}_2\ldots\overline{f}_t=0$. Ordinando opportunamente le $\overline{f}_i$ possiamo supporre che sia $\overline{\varphi}\equiv\overline{f}_1\,\overline{f}_2\ldots\overline{f}_\tau$, e posto $g\equiv\overline{\varphi}\,\psi$ si ha subito che il sistema lineare $\psi=0$ è formato da tutte e sole le curve piane di ordine $n_{\tau+1}+n_{\tau+2}+\ldots+n_t$ che passano per tutti i punti comuni alle curve $\overline{f}_{\tau+1}=0, \overline{f}_{\tau+2}=0, \ldots, \overline{f}_t=0$, a due a due. Ma, allora, per quanto abbiamo visto al n. 1, la dimensione del sistema lineare $\psi=0$ (e quindi quella del sistema lineare $g=0$) sarebbe

$$\frac{1}{2}\sum_{j=\tau+1}^{t} n_j\,(n_j+3) \text{ e non } d=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} n_i\,(n_i+3).$$

Poichè il sistema lineare $g=0$ non ha parte fissa, per un noto teorema di BERTINI (7), se la sua generica curva è spezzata, essa non può essere spezzata che in un certo numero q di parti variabili in un fascio. Allora, detto m l'ordine delle curve di detto fascio, sarebbe $\sum_{i=1}^{t} n_i=q\,m$ e $d\leq q$, e quindi $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} n_i\,(n_i+3)\leq\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{t} n_i\leq\sum_{i=1}^{t} n_i$, cioè $\sum_{i=1}^{t} n_i\,(n_i+1)\leq 0$, il che è assurdo.

3. — Conservando le notazioni del n. 1, supponiamo che il punto P_0 (che è generico in V_d) possa variare in una varietà V_α, immersa in V_d e di dimensione $\alpha>0$, in modo che lo spazio S_d tangente alla V_d in P_0 non vari al variare di P_0 in V_α. Cioè supponiamo che la curva (4) possa variare in un sistema continuo di dimensione $\alpha>0$ (di curve C^n spezzate come la (4)) e in modo che il corrispondente sistema lineare (5) non vari. In questa ipotesi, al variare nel modo suddetto della curva (4), c'è almeno una componente della (4), e sia $\overline{f}_i=0$, la quale varia, e varia passando sempre per gli $n_i\left(\sum_{j=1}^{t} n_j-n_i\right)$ punti $(\overline{f}_i, \overline{f}_j)$ $(j=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots t)$. Da ciò (tenendo presente la (5) segue anzitutto che deve essere $\nu_i=1$; inoltre, poichè la $\overline{f}_i=0$ è irriducibile perchè ge-

(7) E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Principato, Messina, 1923, pag. 276.

nerica nel suo ordine n_i, e poichè due curve di ordine n_i, di cui una irriducibile, possono avere a comune al più n_i^2 punti distinti, si ha

$$n_i^2 \geq n_i \left(\sum_{j=1}^{t} n_j - n_i \right), \text{ cioè } n_i \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} n_j .$$

Viceversa, supponiamo che per un opportuno valore di i si abbia $\nu_i = 1$ ed $n_i \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} n_j$. In questa ipotesi, o contemporaneamente è $t = 2$, $n_1 = n_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$ (cioè le nostre curve C^n sono le curve del tipo $\bar{f} \equiv \bar{f}_1 \bar{f}_2 = 0$ con $\bar{f}_1$ ed $\bar{f}_2$ dello stesso ordine), oppur no.

Nel primo caso lo spazio S_d tangente in P_0 alla V_d non varia quando P_0 varia nell'S_2 immagine delle curve spezzate in due generiche curve del fascio $\bar{f}_1 + \lambda \bar{f}_2$ perchè non varia il gruppo di punti $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$. E poichè questo è il modo più generale di variare della curva $\bar{f} \equiv \bar{f}_1 \bar{f}_2 = 0$ senza che vari il gruppo $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$, si ha che in questo caso è $\alpha = 2$.

Nel secondo caso, si vede subito che non possono esistere due valori di i, per i quali è $\nu_i = 1$ e $n_i \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} n_j$. Infatti, se ciò accadesse per esempio per $i = 1$ e per $i = 2$, allora sarebbe $n_1 \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} n_j$, $n_2 \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} n_j$ e quindi (sommando) $n_3 + n_4 + \ldots + n_t \leq 0$, da cui segue $t = 2$; sarebbe anche $n_1 \geq n_2$ ed $n_2 \geq n_1$, da cui segue $n_1 = n_2$. Nel nostro caso dunque c'è un solo valore dell'indice i per il quale si ha $\nu_i = 1$ e $n_i \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{t} n_j$. Ciò vuol dire, che, nel nostro caso, c'è una sola componente irriducibile della curva (4) che può variare senza che vari il sistema lineare (5). Sia la $\bar{f}_1 = 0$ la detta componente $(i = 1)$. Il modo più generale di far variare la $\bar{f}_1 = 0$ senza che varino i punti $(\bar{f}_1, \bar{f}_2), (\bar{f}_1, \bar{f}_3), \ldots, (\bar{f}_1, \bar{f}_t)$, è quello di far descrivere ad $\bar{f}_1$ il sistema lineare

$$(6) \qquad \lambda \bar{f}_1 + \bar{f}_2 \, \bar{f}_3 \ldots \bar{f}_t \, \varphi = 0$$

dove $\varphi = 0$ è l'equazione del sistema lineare di tutte le curve piane di ordine $n_1 - \sum_{j=2}^{t} n_j$. Ne segue che α, nel nostro caso, è uguale alla dimensione del sistema lineare (6), cioè $\alpha = \binom{n_1 - \sum_{j=2}^{t} n_j + 2}{2}$.

Si noti che in entrambi i casi la varietà V_α dei punti di contatto è uno spazio lineare, ciò che, del resto, si poteva affermare subito per un ben noto teorema (8).

Concludendo si ha che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè lo spazio S_d, tangente alla varietà V_d in un suo punto generico, tocchi la V_d nei punti di una varietà V_α di dimensione $\alpha \geq 1$, è che per un opportuno valore di i sia

$$2\,n_i \geq \sum_{j=1}^{t} n_j\,, \qquad \nu_i = 1\,.$$

Se queste due condizioni sono soddisfatte per l'indice i, allora la. V_α è uno spazio lineare S_α e la sua dimensione è

$$\alpha = \left(\frac{2\,n_i - \sum_{j=1}^{t} n_j + 2}{2}\right)$$

tranne quando è (contemporaneamente) $t = 2$, $n_1 = n_2$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$ nel qual caso la detta dimensione è $\alpha = 2$.

4. — Indichiamo con $V_{d'}$ la varietà luogo degli S_d tangenti alla nostra V_d. La dimensione di $V_{d'}$ è

$$d' = 2\,d - \alpha - \beta$$

dove $\alpha \geq 0$ ha il significato detto nel n. 3, e β è la dimensione della totalità degli S_d tangenti a V_d che passano per un generico punto di $V_{d'}$.

a) Se nella (2) tutti i ν_i sono ≥ 2, cioè se la generica delle nostre C^n non ha componenti semplici, allora un generico punto Q di $V_{d'}$ è immagine di una curva del tipo:

$$\overline{f}_1^{\,\nu_1-1}\, \overline{f}_2^{\,\nu_2-1} \ldots \overline{f}_t^{\,\nu_t-1}\, \overline{g} = 0$$

dove le curve $\overline{f}_i = 0$ sono generiche nei loro ordini n_i, e $\overline{g} = 0$ è una generica curva di ordine $\sum_{i=1}^{t} n_i$ passante per i punti $(\overline{f}_i, \overline{f}_j)$. La $\overline{g} = 0$ è irriducibile (n. 2) e l'unico S_d tangente a V_d e passante per Q è l'S_d im-

(8) E. BERTINI, *Loc. cit.*, pag. 236.

magine delle curve del sistema lineare

$$\bar{f}_1^{\nu_1-1}\,\bar{f}_2^{\nu_2-1}\ldots\bar{f}_t^{\nu_t-1}\,g=0$$

dove $g=0$ è l'equazione del sistema lineare delle curve di ordine $\sum_{i=1}^{t} n_i$ passanti per i punti $(\bar{f}_i\,,\,\bar{f}_j)$, a meno che sia $t=1$ e $\nu_1=2$ nel quale caso Q sta nell'S_d tangente a V_d nel punto immagine della curva $\bar{g}^2=0$. In entrambi i vasi è $\beta=0$; e poichè dall'ipotesi che tutti i ν_i siano ≥ 2 segue (n. 3) che è anche $\alpha=0$, si ha che:

Se nella (2) *tutti i ν_i sono maggiori di uno, allora è $\alpha=0$, $\beta=0$.*

b) Se nella (2) è $\nu_1=1$ e tutti i rimanenti ν_i sono ≥ 2, allora le nostre C^n sono del tipo $\bar{f}_1\,\bar{f}_2^{\nu_2}\ldots\bar{f}_t^{\nu_t}=0$ e il punto Q è l'immagine di una curva del tipo $\bar{f}_2^{\nu_2-1}\,\bar{f}_3^{\nu_3-1}\ldots\bar{f}_t^{\nu_t-1}\,\bar{g}=0$, con $\bar{g}=0$ curva irriducibile, di ordine $\sum_{i=1}^{t} n_i$, e passante per i punti $(\bar{f}_i,\bar{f}_j)$ $(i\,,j=2\,,\ldots,t)$ e per i punti

(7) $$(\bar{f}_1\,,\,\bar{f}_2)\,,\,(\bar{f}_1\,,\,\bar{f}_3)\,,\ldots,\,(\bar{f}_1\,,\,\bar{f}_t)$$

comuni ad una $\bar{f}_1=0$ ed alle $\bar{f}_2=0\,,\ldots,\bar{f}_t=0$. Un S_d tangente a V_d e passante per Q tocca la V_d nel punto che ha per immagine la curva $\bar{f}_1\,\bar{f}_2^{\nu_2}\ldots\bar{f}_t^{\nu_t}=0$, e perchè questo S_d possa variare con continuità mantenendosi tangente a V_d e passando sempre per Q, occorre (e basta) che, restando ferme le $\bar{f}_2=0\,,\ldots,\bar{f}_t=0$ la $\bar{f}_1=0$ possa variare con continuità, ma in modo che vari il gruppo di punti (7) (altrimenti non varia l'S_d tangente). Ma questo gruppo di punti non può variare con continuità, perchè fa parte dell'intersezione della $\bar{f}_2\,\bar{f}_3\ldots\bar{f}_t=0$ con la curva irriducibile $\bar{g}=0$; ne segue che per Q non possono, passare infiniti dei nostri spazi S_d, e quindi è $\beta=0$.

Concludendo si ha che:

Se nella (2) *uno degli interi ν_i è uguale ad uno, mentre i rimanenti sono tutti maggiori di uno, allora è $\beta=0$.*

Naturalmente (n. 3) è $\alpha=0$ oppure $\alpha>0$, secondo che il grado n_i che corrisponde all'esponente $\nu_i=1$ è $<\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{t} n_j$, oppure $\geq\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{t} n_j$.

5. — Nei due casi considerati nel numero precedenti abbiamo trovato che è $\beta=0$. Tuttavia si vede facilmente che per particolari valori degli interi n_i e ν_i può essere $\beta>0$, sia con $\alpha>0$ sia con $\alpha=0$. Per esempio,

se le nostre C^n sono del tipo

1) $f_1 f_2 = 0$, allora si ha $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

2) $f_1 \; f_2 \, f_3^{\nu_3} = 0$, con $\nu_3 \geq 1$ e $n_1 = n_2$, $n_3 = 1$, allora si ha $\alpha = 0$ e $\beta > 0$.

3) $f_1 \; f_2 \; f_3 = 0$, con $2 \leq n_1 = n_2 \leq 4$ e $n_3 = 2$, oppure con $n_2 = n_1 + 1 \leq 5$ e $n_3 = 2$ allora si ha $\alpha = 0$ e $\beta > 0$.

Per provare ciò basta tener presente quanto si è detto nel n. 3 per α, e inoltre osservare che la $V_{d'}$ (luogo degli S_d tangenti alla V_d), la quale ha la dimensione $d' = 2\,d - \alpha - \beta$, è contenuta nella varietà V_δ i cui punti sono le immagini (in S_N) delle curve del tipo $f_1^{\nu_1 - 1} \, f_2^{\nu_2 - 1} \ldots f_t^{\nu_t - 1} \, g' = 0$ dove $g' = 0$ sono curve arbitrarie di ordine $\sum\limits_{j=1}^{t} n_j$. Da questa osservazione segue che è $\delta \geq d'$ e quindi $\beta \geq 2\,d - \delta - \alpha$, e poichè negli esempi considerati sopra, con un facile calcolo si trova che è $2\,d - \delta - \alpha > 0$, si conclude che nei detti esempi è $\beta > 0$.

6. — La varietà W i cui punti sono le immagini in S_N delle curve piane di ordine n spezzate *in tutti i modi possibili,* è spezzata in $m = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ (9) parti distinte, irriducibili e razionali (10)

$$V_{d_1}, \; V_{d_2}, \ldots, \; V_{d_m}$$

essendo V_{d_i} la varietà i cui punti sono le immagini delle curve piane C^n che contengono come parte una curva di ordine i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Queste m varietà hanno dimensioni decrescenti $(d_i > d_{i+1})$ e passano tutte per la superficie V_2 i cui punti sono le immagini delle curve di ordine n spezzate in una retta n-upla. E poichè questa superficie V_2 non è altro che la superficie di VERONESE relativa alle curve piane di ordine n (11) e quindi appartiene ad S_N, si ha che ciascuna delle nostre m varietà V_{d_i} appartiene ad S_N.

---

(9) Vedi nota (4).

(10) Per $i \neq \dfrac{n}{2}$ la V_{d_i} è birazionalmente identica alla varietà delle coppie di punti di due spazi lineari distinti; per $i = \dfrac{n}{2}$ la V_{d_i} è birazionalmente identica alla varietà delle coppie non ordinate di punti di uno spazio lineare. In ogni caso è quindi razionale.

(11) Cioè la V_2 si può considerare come l'immagine proiettiva del sistema lineare di tutte le curve piane di ordine n.

Si noti che la superficie V_2 è contenuta, più in generale, nella V_d definita al n. 1. Da ciò segue che *la V_d appartiene ad S_N*.

Consideriamo ora la V_{d_1} (cioè la varietà i cui punti sono le immagini delle curve piane che contengono come parte una retta) e le varietà:

$$V_2 \equiv V_{d_{1n}}\,,\ V_{d_{1n-1}}\,, \ldots,\ V_{d_{13}}\,,\ V_{d_{12}}\,,\ V_{d_{11}} \equiv V_{d_1} \tag{8}$$

dove $V_{d_{1j}}$ indica la varietà i cui punti sono le immagini in S_N delle curve piane di ordine n che contengono come parte una retta j-upla ($j=1,2,\ldots,n$). Si vede subito che ciascuna delle varietà (8) è contenuta nella successiva, anzi, tenendo presente quanto si è visto nei nn. 3,4 per α e β, si verifica che ognuna di esse (a partire dalla seconda) è il luogo degli spazi tangenti della precedente (cioè si ha $\delta = d'$) (12).

Orbene, analoga proprietà vale anche per la V_{d_2} (cioè per la varietà i cui punti sono le immagini in S_N delle curve piane di ordine n che contengono come parte una conica), e ciò sia quando n è pari ($n = 2\bar{n}$) sia quando n è dispari ($n = 2\bar{n} + 1$). Precisamente, le varietà

$$V_{d_{2\bar{n}}}\,,\ V_{d_{2\bar{n}-1}}\,, \ldots,\ V_{d_{22}}\,,\ V_{d_{21}} \equiv V_{d_2}$$

sono tali che ciascuna di esse (a partire dalla seconda) è il luogo degli spazi tangenti S_d della precedente. Analogamente si vede che tale proprietà vale, per n pari, anche per la V_{d_m}; cioè le varietà

$$V_{d_{m2}}\,,\ V_{d_{m1}} \equiv V_{d_m}$$

sono tali che la seconda è il luogo degli spazi tangenti S_d della prima. Infine, sempre tenendo presente quanto si è visto nei nn. 3,4 per α e β, verifica che la suddetta proprietà non vale per le varietà V_{d_3}, $V_{d_4}, \ldots, V_{d_{m-1}}$ e quando n è dispari per la varietà V_{d_m}.

7. — Ritorniamo ora a considerare, in generale, la varietà V_d di S_N i cui punti sono le immagini delle curve piane di ordine n (spezzate) che hanno una equazione del tipo (2), cioè: $f_1^{\nu_1}\, f_2^{\nu_2} \ldots f_t^{\nu_t} = 0$.

---

(12) Come abbiamo già detto, questa proprietà trovasi dimostrata nelle Note *c*) di B. SEGRE citate in (1).

La successione di varietà (8) si può anche ottenere (BOMPIANI, *Loc. cit.*) ampliando la $V_2 \equiv V_{d_{1n}}$ con i suoi spazi k — osculatori ($k = 1, 2, \ldots$). B. SEGRE, nel lavoro citato sopra, dimostra che, fissata una qualunque delle varietà (8), le successive si ottengono ampliando la detta varietà mediante i suoi spazi osculatori, e determina in quali casi questa proprietà si estende agli spazi di dimensione maggiore di due.

Indicando con $a^{(i)}$ i coefficienti di f_i, si ha che le equazioni parametriche della nostra varietà V_d sono del tipo

$$y_r = \varphi_r(a^{(1)}; a^{(2)}; \ldots; a^{(t)}) \quad (r = 0, 1, \ldots N) \tag{9}$$

dove φ_r sono polinomi omogenei in ciascuna serie di variabili $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(t)}$, e precisamente esse sono omogenee di grado ν_i nelle $a^{(i)}$.

L'ordine K della nostra varietà V_d è il numero dei punti che essa ha a comune con un S_{N-d} generico di S_N, cioè con d iperpiani generici di S_N:

$$\sum_{r=0}^{N} \lambda_{jr} y_r = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, d).$$

Per calcolare K dobbiamo quindi considerare le soluzioni del sistema

$$\sum_{r=0}^{N} \lambda_{jr} \varphi_r = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, d). \tag{10}$$

Ora si osservi che, per il nostro scopo, vanno considerate come soluzioni del sistema (10) solo quelle per cui non accade che tutte le variabili di una stessa serie assumono valori tutti nulli. E vanno considerate come soluzioni distinte due soluzioni (nel senso ora detto) per le quali non accada che i valori delle variabili di una certa serie nella prima soluzione e i valori delle variabili della stessa serie nella seconda soluzione, differiscano per uno stesso fattore di proporzionalità non nullo.

Inoltre, se la generica delle nostre C^n, $f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \ldots f_t^{\nu_t} = 0$, non ha due componenenti ($f_i = 0$ ed $f_j = 0$) dello stesso ordine ($n_i = n_j$) e con la stessa molteplicità ($\nu_i = \nu_j$), allora a soluzioni distinte (nel senso sopra detto) del sistema (10) corrispondono curve C^n distinte e quindi punti distinti di V_d. Invece, se le componenti $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots, f_t = 0$ della generica C^n si distribuiscono in q gruppi G_1, $G_2, \ldots, G_q$, in modo che due componenti dello stesso gruppo hanno lo stesso ordine e la stessa molteplicità e due componenti di gruppi distinti non hanno lo stesso ordine e la stessa molteplicità allora ad una soluzione $(\overline{a}^{(1)}, \overline{a}^{(2)}, \ldots, \overline{a}^{(t)})$ ed a tutte quelle che si ottengono permutando le t serie di numeri $\overline{a}^{(1)}$, $\overline{a}^{(2)}, \ldots, \overline{a}^{(t)}$ in modo però che ciascuna serie resti sempre nel gruppo G al quale appartiene, corrisponde la stessa curva C^n, e quindi lo stesso punto di V_d. In questa ipotesi dunque la corrispondenza fra soluzioni distinte del sistema (10) e punti comuni a V_d ed ad S_{N-d} non è più biunivoca, perchè ognuno proviene da $h_1!\, h_2! \dots h_q!$ soluzioni distinte del sistema ([13]), essendo h_i il numero degli elementi del gruppo G_i.

Per calcolare il numero delle soluzioni del sistema (10) si osservi che, per la genericità delle λ, le dette soluzioni sono tutte semplici e il loro numero è uguale a quello delle soluzioni di un generico sistema del tipo

$$\psi_{j_1}(a^{(1)})\, \psi_{j_2}(a^{(2)})\, \psi_{j_3}(a^{(3)}) \dots \psi_{j_t}(a^{(t)}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots d)$$

dove le ψ_{si} sono forme generiche di grado i nelle $a^{(i)}$. E poichè il numero delle soluzioni distinte di quest'ultimo sistema è

$$\binom{m_1}{m_1}\binom{m_1+m_2}{m_2}\dots\binom{m_1+m_2+\dots m_t}{m_t}\nu_1^{m_1}\nu_2^{m_2}\dots\nu_t^{m_t} =$$

$$= \prod_{i=1}^{t}\binom{m_1+m_2+\dots+m_i}{m_i}\nu_i^{m_i} \qquad \left[m_i = \frac{1}{2}\, n_i\,(n_i+3)\right]$$

sia ha che l'ordine della nostra V_d è

$$K = \frac{1}{h_1!\, h_2! \dots h_q!}\prod_{i=1}^{t}\binom{m_1+m_2+\dots+m_i}{m_i}\nu_i^{m_i} = \tag{11}$$

$$= \frac{1}{h_1!\, h_2! \dots h_q!}\,\frac{(m_1+m_2+\dots+m_t)!}{m_1!\, m_2! \dots m_t!}\,\nu_1^{m_1}\nu_2^{m_2}\dots\nu_t^{m_t}$$

Ora si noti che il numero

$$\eta = \frac{1}{h_1!\, h_2! \dots h_q!}\prod_{i=1}^{t}\binom{m_1+m_2\dots+m_i}{m_i} = \frac{1}{h_1!\, h_2!\dots h_q!}\,\frac{(m_1+m_2+\dots+m_t)!}{m_1!\, m_2! \dots m_t!}$$

non è altro che l'indice del sistema continuo di curve C^n definito da V_d, cioè il numero delle curve piane C^n del tipo $f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \dots f_t^{\nu_t} = 0$ che passano per d punti generici del piano; si ha quindi che:

L'ordine della varietà V_d è

$$K = \eta\, \nu_1^{m_1}\nu_2^{m_2}\dots\nu_t^{m_t}$$

dove η è l'indice del sistema continuo definito da V_d ([14]).

([13]) Si noti che per la genericità dello spazio S_{N-d}, non accade che due delle t serie di numeri $\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(t)}$ abbiano valori uguali o proporzionali.

([14]) Per $n_1 = n_2 = \dots = n_t = 1$ si ricade nel caso considerato (in forma duale) da Bordiga. Per $t = 2$, $n_1 = 1$, $\nu_1 \geq 1$, $\nu_2 = 1$ e per $t = 1$, $n_1 = 1$ si ricade nel caso considerato da B. Segre. In entrambi i casi la (11) dà l'ordine determinato da questi *AA.*

Da ciò segue che gli spazi S_{N-d}, i cui punti sono le immagini delle curve piane di ordine n passanti per d punti generici del piano, hanno a comune con la varietà V_d η punti distinti, ma *ognuno di questi* η *punti è un'intersezione di molteplicità* $\nu_1^{m_1} \nu_2^{m_2} \dots \nu_t^{m_t}$. Invece un S_{N-d} generico di S_N sega la varietà V_d in $K = \eta\, \nu_1^{m_1} \nu_2^{m_2} \dots \nu_t^{m_t}$ punti distinti.

Si noti infine che:

L'ordine della varietà V_d *coincide con l'indice del sistema continuo di curve spezzate* C^n, *definito da* V_d, *allora e soltanto allora quando la generica delle dette curve* C^n *non ha componenti multiple,* cioè quando tutti i numeri ν_i sono uguali ad uno.

OSSERVAZIONE. — Abbiamo già notato che la varietà V_d appartiene allo spazio S_N (v. nota (11)). Vogliamo ora far vedere che essa è razionale.

Infatti, nella nostra equazione $f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \dots f_t^{\nu_t} = 0$ ordiniamo i fattori $f_i^{\nu_i}$ in modo da scrivere prima quelli del gruppo G_1, poi quelli del gruppo $G_2, \dots,$ ed infine quelli del gruppo G_q.

Dopo ciò la $f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \dots f_t^{\nu_t}$ assume la forma

$$F_1^{\mu_1} F_2^{\mu_2} \dots F_q^{\mu_q} = 0 \tag{12}$$

dove F_j indica il prodotto delle k_j forme f_i del gruppo G_j, e μ_j indica l'esponente ν_i che appartiene alle f_i di G_j.

Fissato j, le curve del tipo $F_j^{\mu_j} = 0$ sono in corrispondenza birazionale con i gruppi (non ordinati) di h_j punti dello spazio lineare i cui punti rappresentano le curve piane di ordine uguale all'intero n che appartiene al gruppo G_j. Esse formano quindi una totalità razionale, e le possiamo rappresentare biunivocamente con i punti di uno spazio lineare S_{M_j}.

Dopo ciò tenendo presente che a due gruppi G distinti corrispondono coppie (n, ν) distinte, si ha che la totalità delle nostre curve (12) è birazionalmente identica al prodotto dei q spazi distinti S_{M_j}, e quindi razionale.

8. — La proprietà dimostrata al n. 7 sull'ordine K della varietà V_d, e cioè che il valore di K è dato dalla (11), si può enunciare anche nel seguente modo. Sia n un intero positivo arbitrario ed $(n_1, \nu_1), (n_2, \nu_2), \dots, (n_t, \nu_t)$ siano t coppie di interi positivi tali che $\sum_{i=1}^{t} n_i \nu_i = n$. Inoltre queste t coppie si possono distribuire in q gruppi $G_1, G_2, \dots, G_q$ in modo che due coppie dello stesso gruppo siano uguali, mentre due coppie di gruppi diversi non siano uguali. Infine sia h_j il numero delle coppie del gruppo $G_j \left(h_j \geq 1, \sum_{j=1}^{q} h_j = t \right)$.

Allora, posto

$$m_i = \frac{1}{2} n_i (n_i + 3) \qquad (i = 1, 2, \dots t)$$

si ha che:

In un generico sistema lineare ∞^r di curve piane di ordine n, di dimensione

$$r = \frac{1}{2} n (n + 3) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{t} n_i (n_i + 3)$$

esistono esattamente

$$K = \frac{1}{h_1! \, h_2! \dots h_q!} \, \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_t)!}{m_1! \, m_2! \dots m_t!} \, \nu_1^{m_1} \nu_2^{m_2} \dots \nu_t^{m_t}$$

curve che sono spezzate in t parti rispettivamente, di ordine $n_1, n_2, \dots n_t$ e di molteplicità $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_t$. Queste K curve sono distinte, e le t componenti di ciascuna di esse, sono tutte irriducibili.

Cioè, nel detto sistema lineare di curve piane di ordine n, esistono esattamente K curve distinte che hanno una equazione del tipo

$$f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \dots f_t^{\nu_t} = 0$$

dove le f_i sono forme di grado n_i.

Naturalmente si ha anche che in un sistema lineare di dimensione $r' > r$, di curve piane di ordine n, esistono $\infty^{r'-r}$ (in generale non più di $\infty^{r'-r}$) curve spezzate nel modo suddetto; mentre in un generico sistema lineare $\infty^{r''}$ con $r'' < r$ di curve piane di ordine n, non esistono curve spezzate nel modo suddetto.

In particolare:

Per $t = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = n - 1 \geq 2$, $\nu_1 = \nu_2 = 1$, si ha $r = n - 1$, $K = \frac{1}{8} n (n + 1) [n + 1) + 2]$ e quindi:

In un generico sistema lineare ∞^{n-1} di curve piane di ordine $n \geq 3$, esistono esattamente

$$K = \frac{1}{8} n (n + 1) [n (n + 1) + 2]$$

curve spezzate. Queste K curve sono distinte e ciascuna di esse è spezzata in una retta e in una curva irriducibile di ordine $n - 1$.

Osservazione. — Il ragionamento del n. 7 si estende subito al caso in cui le f ed f_i sono forme in $r + 1$ variabili. Per l'ordine K vale anche in questo caso la (11) purchè si intenda che sia $m_i = \binom{n_i + r}{r} - 1$.

9. — Come abbiamo osservato, la varietà V_d, i cui punti sono le immagini in S_N delle curve piane di ordine n che hanno un'equazione del tipo $f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \ldots f_t^{\nu_t} = 0$ è immersa nell'ipersuperficie V_{N-1} i cui punti sono le immagini delle curve piane di ordine n con un punto doppio (non assegnato). Vogliamo ora calcolare la molteplicità s per la V_{N-1} di un generico punto $\overline{P}$ della V_d. Per fare ciò dovremo considerare una generica retta r uscente da $\overline{P}$ e vedere quante delle intersezioni di r con V_{N-1} coincidono in $\overline{P}$.

Indichiamo con $\overline{C}$ la curva che ha per immagine $\overline{P}$, e con $\overline{f}_1^{\nu_1} \overline{f}_2^{\nu_2} \ldots \overline{f}_t^{\nu_t} = 0$ la sua equazione; la $\overline{C}$ è del tipo

$$\overline{C} = \nu_1 \overline{C}_1 + \nu_2 \overline{C}_2 + \ldots + \nu_t \overline{C}_t$$

dove $\overline{C}_i$ è la curva che ha per equazione $\overline{f}_i = 0$; la $\overline{C}_i$ è di ordine n_i, ed è irriducibile e priva di punti multipli, perchè $\overline{P}$ è generico in V_d. Consideriamo una generica curva C di ordine n e indichiamo con $\overline{C} + \lambda C$ il fascio individuato da $\overline{C}$ e da C, e con r la retta di S_N i cui punti sono le immagini delle curve di questo fascio. Se δ è l'ordine della ipersuperficie V_{N-1}, e δ' il numero dei punti comuni ad r e alla V_{N-1}, fuori di $\overline{P}$, si ha che il numero delle intersezioni di r e V_{N-1} che coincidono in $\overline{P}$ è $\overline{\delta} = \delta - \delta' = s$. Inoltre, detto I l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE del piano, e π il genere di una generica curva del fascio $\overline{C} + \lambda C$, si ha

$$I = \delta - n^2 - 4\pi = \overline{\delta} + \delta' - n^2 - 4\pi \tag{13}$$

E poichè δ' non è altro che il numero delle curve del fascio $\overline{C} + \lambda C$ che hanno un punto doppio e sono distinte da $\overline{C}$, si ha che $\overline{\delta}$ è l'equivalenza (numerativa) di $\overline{C}$ nel δ; cioè $\overline{\delta}$ indica per quante curve con un punto doppio conta la $\overline{C}$ nel calcolo di δ (o di I) quando questo calcolo si fa col fascio $\overline{C} + \lambda C$.

La forma esplicita che dà tale equivalenza $\overline{\delta}$ è nota nel caso di un fascio privo di punti base e giacente sopra una superficie F priva di punti multipli [15]. Ed è noto anche come si procede, in generale, per il calcolo di $\overline{\delta}$, quando il fascio ha punti base e la F è priva di punti multipli; questo procedimento consiste essenzialmente nel far sparire i punti base mediante una successione opportuna di trasformazioni birazionali ciascuna delle

---

[15] L. GODEAUX, *Sur le calcul de l'invariant de Zeuthen-Segre*, Mém. Soc. Sc. Hainaut, 1920, pag. 215.
L. CAMPEDELLI, *Sul computo dell'invariante di Zeuthen-Segre*, Rend. Acc. Lincei, 1934, pag. 739.

quali è una dilatazione di un punto base che non introduce singolarità nella superficie trasformata ([16]).

È questo il procedimento che noi adopereremo per il calcolo di $\overline{\delta}$. Vedremo che essendo i punti base, nel caso nostro, di tipo determinato, esso ci permette di portare in fondo il calcolo e di trovare una espressione molto semplice per il $\overline{\delta}$.

10. — Osserviamo che i punti base del fascio $\overline{C} + \lambda C$ sono tutti punti semplici per la generica curva del fascio (perchè sono semplici per C) e sono:

1) I punti $(C, \overline{C}_i)$ comuni alle curve C e $\overline{C}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$.

2) I $\nu_i - 1$ punti successivi ad ogni punto comune a C e $\overline{C}_i$, sulla C (sempre per $i = 1, 2, \ldots, t)$.

Ciò perchè le curve del fascio $\overline{C} + \lambda C$ passano tutte per i punti $(C, \overline{C}_i)$ ed hanno in ciascuno di questi punti un contatto $(\nu_i - 1)$-uplo con la curva C, come si verifica subito assumendo uno dei detti punti $(C, \overline{C}_i)$ come origine di un sistema di coordinate non omogenee.

Trasformiamo ora il nostro piano mediante il sistema lineare di tutte le coniche passanti per uno dei punti $(C, \overline{C}_i)$. Otterremo così una superficie F', birazionalmente identica al piano e priva di punti multipli (precisamente una rigata cubica di S_4). Al punto base del nostro sistema lineare di coniche corrisponde una curva razionale C'_{11} (retta eccezionale di 1ª specie) la quale incontra in un sol punto la trasformata birazionale $\overline{C}'_1$ di $\overline{C}_1$ (perchè il detto punto base è semplice per $\overline{C}_1$), non incontra in alcun punto le trasformate $\overline{C}'_2, \overline{C}'_3 \ldots \overline{C}'_t$ di $\overline{C}_2, \overline{C}_3, \ldots \overline{C}_t$ e infine incontra in un sol punto la curva C' trasformata birazionale di C.

Al fascio $\overline{C} + \lambda C$ corrisponde in F' un fascio $\overline{C}' + \lambda C'$ privo di parte fissa; di curve di ordine $2n - 1$, che sono tutte birazionalmente identiche alle corrispondenti curve del fascio $\overline{C} + \lambda C$, esclusa (per $\nu_1 > 1$) la curva $\overline{C}'$ corrispondente di $\overline{C}$, la quale è composta con le $\overline{C}_i$ (trasformate birazionali delle $\overline{C}_i$) contate ν_i volte e con la C'_{11} contata $\nu_1 - 1$ volte:

$$\overline{C}' = (\nu_1 - 1)\, C'_{11} + \nu_1 \overline{C}'_1 + \nu_2 \overline{C}'_2 + \ldots + \nu_t \overline{C}'_t$$

I punti base del fascio $\overline{C}' + \lambda C'$ sono in numero di $n^2 - 1$ e sono distribuiti in modo analogo ai punti base del fascio $\overline{C} + \lambda C$, con la sola differenza che insieme al punto base (C'_{11}, C') si hanno $\nu_1 - 2$ punti base successivi ad esso su C', e che sulla $\overline{C}'_1$ di punti base *distinti* se ne hanno $n n_1 - 1$ invece di $n n_1$.

([16]) L. CAMPEDELLI, *Loc. cit.* in ([15]). A. ANDREOTTI, *Questioni di equivalenza ecc.*, Rend. Acc. Lincei, 1948, pag. 551.

Infine a curve del fascio $\overline{C} + \lambda C$, distinte da $\overline{C}$ e dotate di un punto doppio, corrispondono curve del fascio $\overline{C'} + \lambda C'$ che sono distinte da $\overline{C'}$ ed hanno un punto doppio; e viceversa.

Trasformiamo ora la superficie F' mediante il sistema lineare di tutte le quadriche del suo spazio di appartenenza che passano per il punto (C'_{11}, C'). Otterremo una superficie F'' birazionalmente identica alla F' e priva di punti multipli. Al punto (C'_{11}, C') corrisponde in F'' una curva razionale C''_{12} (retta eccezionale di 1ª specie) la quale incontra in un sol punto la trasformata birazionale C''_{11} di C'_{11}, non incontra in alcun punto le trasformate $\overline{C}''_1, \overline{C}''_2 \ldots \overline{C}''_t$ di $\overline{C}'_1, \overline{C}'_2 \ldots \overline{C}'_t$ e incontra in un sol punto la trasformata C'' di C'. Al fascio $\overline{C'} + \lambda C'$ corrisponde in F'' un fascio $\overline{C''} + \lambda C''$ privo di parte fissa, di curve che sono birazionalmente identiche alle corrispondenti curve del fascio $\overline{C'} + \lambda C'$, esclusa (per $\nu_1 > 2$) la curva $\overline{C''}$ corrispondente di $\overline{C'}$, la quale è così composta:

$$\overline{C''} = (\nu_1 - 2)\, C''_{12} + (\nu_1 - 1)\, C''_{11} + \nu_1 \overline{C}''_1 + \nu_2 \overline{C}''_2 + \ldots + \nu_t \overline{C}''_t$$

I punti base del fascio $\overline{C''} + \lambda C''$ sono in numero di $n^2 - 2$ e sono distribuiti in modo analogo ai punti base del fascio $\overline{C'} + \lambda C'$, con la differenza che insieme al punto base (C''_{12}, C'') si hanno $\nu_1 - 3$ punti base successivi ad esso su C'', e che sulla C''_{11} non ci sono punti base. Inoltre a curve del fascio $\overline{C'} + \lambda C$ che sono distinte da $\overline{C'}$ e hanno un punto doppio, corrispondono curve del fascio $\overline{C''} + \lambda C''$ che sono distinte da $\overline{C''}$ e hanno un punto doppio; e viceversa.

Dopo ciò, operiamo sulla F'' come abbiamo operato sulla F' dilatando il punto base (C''_{12}, C''), e così continuando fino a fare scomparire completamente il punto base proveniente dal punto $(\overline{C}_1, C)$ che abbiamo considerato in principio; poi ripetiamo il procedimento per ciascuno dei rimanenti punti base fino ad eliminarli tutti.

Con n^2 di queste dilatazioni otterremo una superficie F birazionalmente identica al piano, priva di punti multipli, e sulla quale il fascio φ corrispondente a $\overline{C} + \lambda C$ è del tutto privo di punti base. Inoltre la curva $\overline{C}$ di $\overline{C} + \lambda C$ ha per corrispondente nel fascio φ una curva del tipo:

$$\begin{aligned}
\Gamma = {} & \nu_1 C_1 + \nu_2 C_2 + \ldots + \nu_t C_t + \\
& + C^{(1)}_{1\nu_1-1} + 2\, C^{(1)}_{1\nu_1-2} + \ldots + (\nu_1 - 1)\, C^{(1)}_{11} + \\
& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& + C^{(nn_1)}_{1\nu_1-1} + 2\, C^{(nn_1)}_{1\nu_1-2} + \ldots + (\nu_1 - 1)\, C^{(nn_1)}_{11} + \\
& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& + C^{(1)}_{t\nu_t-1} + 2\, C^{(1)}_{t\nu_t-1} + \ldots + (\nu_t - 1)\, C^{(1)}_{t1} + \\
& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& + C^{(nn_t)}_{t\nu_t-1} + 2\, C^{(nn_t)}_{t\nu_t-1} + \ldots + (\nu_t - 1)\, C^{(nn_t)}_{t1}
\end{aligned}$$

dove le C_i sono birazionalmente identiche alle $\overline{C}_i$, le $C_{rs}^{(u)}$ sono tutte razionali, e due componenti *distinte* di Γ non hanno punti a comune tranne nei seguenti casi [17]

$$[C_i\,, C_j] = [\overline{C}_i\,, \overline{C}_j] = n_i\, n_j$$

$$[C_i\,, C_{i1}^{(u)}] = 1$$

$$[C_{ir}^{(u)}\,, C_{ir-1}^{(u)}] = 1$$

Naturalmente a curve distinte del fascio $\overline{C} + \lambda\, C$, distinte da $\overline{C}$ e dotate di un punto doppio, corrispondono curve del fascio φ che sono distinte da Γ ed hanno un punto doppio; e viceversa.

11. — Calcolando l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE I_1 della superficie F, mediante il fascio φ (che è privo di punti base) si ha

$$I_1 = \overline{\delta}_1 + \delta_1' - 4\,\pi$$

dove δ_1' è il numero delle curve di φ che sono distinte da Γ ed hanno un punto doppio, e $\overline{\delta}_1$ è l'equivalenza (numerica) di Γ nel gruppo delle curve di φ che hanno un punto multiplo.

Inoltre è

$$I_1 = I + n^2$$

perchè, come è ben noto [18], l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE aumenta di una unità per ognuna delle n^2 dilatazioni. Da queste ultime due relazioni e dalla (13) tenendo presente che è $\delta_1' = \delta'$, segue

$$\overline{\delta}_1 = \overline{\delta}$$

Cioè l'equivalenza $\overline{\delta}$ di $\overline{C}$ nel fascio $\overline{C} + \lambda\, C$ è uguale all'equivalenza $\overline{\delta}_1$ di Γ nel fascio φ.

Per calcolare $\overline{\delta}_i$ ricordiamo [19] che, se sopra una superficie priva di punti multipli si ha un fascio lineare ψ privo di punti base, e se in questo fascio

---

[17] Col simbolo $[C_i\,, C_j]$ e analoghi, indichiamo, come d'uso, il numero dei punti comuni alle curve $C_i\,, C_j$. Consideriamo soltanto intersezioni di curve distinte, perchè, per il seguito, non interessa il grado (effettivo o virtuale) delle componenti di Γ.

[18] F. SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza ecc.*, I, ed. Cremonese, Roma, 1942, pag. 240.

[19] Loc. cit. in (15).

ψ c'è una curva A spezzata in parti $A_1, A_2, \ldots, A_m$, di molteplicità μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_m$

$$A = \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \ldots + \mu_m A_m$$

con le A_i irriducibili, e prive di punti multipli e di genere p_r, allora la curva A conta

$$\sum_{r=1}^{m} (\mu_r - 1)(2 p_r - 2) + \sum \eta_{rs} (\mu_r + \mu_s - 1) \tag{14}$$

unità nel gruppo delle curve con punto doppio del fascio ψ. In questa espressione è $\eta_{rs} = [A_r, A_s]$ e la seconda sommatoria si intende estesa alle $\binom{m}{2}$ combinazioni dei numeri $1, 2, \ldots, m$, due a due.

Non ci resta ora che da calcolare l'espressione (14) per la nostra curva Γ. Tenendo presente che le componenti C_i hanno il genere $\frac{1}{2}(n_i - 1)(n_i - 2)$, mentre le rimanenti componenti sono tutte razionali, e inoltre che è $\sum_{i=1}^{t} n_i \nu_i = n$ e le componenti di Γ si intersecano come si è detto alla fine del n. 10, si ha

$$\bar{\delta}_1 = \sum_{i=1}^{t} n_i (n_i + 2n - 3)(\nu_i - 1) + \sum n_i n_j (\nu_i + \nu_j - 1) =$$

$$= (2n - 3)\left(n - \sum_{i=1}^{t} n_i\right) + n \sum_{i-1}^{t} n_i - \sum_{i=1}^{t} n_i^2 - \sum n_i n_j$$

da cui aggiungendo e togliendo $\left(\sum_{i=1}^{t} n_i\right)^2$ e semplificando, si ha infine

$$\bar{\delta}_1 = \left(2n + \sum_{i=1}^{t} n_i - 3\right)\left(n - \sum_{i=1}^{t} n_i\right) + \sum n_i n_j$$

dove l'ultima sommatoria si intende estesa alle $\binom{t}{2}$ combinazioni dei numeri $1, 2, \ldots, t$, due a due.

Da quanto sopra segue che:

La varietà V_d, i cui punti sono le immagini in S_N delle curve piane di ordine n e di tipo

$$f_1^{\nu_1} f_2^{\nu_2} \ldots f_t^{\nu_t} = 0$$

(dove si intendono assegnati i gradi n_i delle f_i e le corrispondenti molteplicità ν_i), ha molteplicità

$$s = \left(2\,n + \sum_{i=1}^{t} n_i - 3\right)\left(n - \sum_{i=1}^{t} n_i\right) + \Sigma\, n_i\, n_j$$

per l'ipersuperficie V_{N-1} i cui punti rappresentano in S_N le curve piane di ordine n con un punto doppio non assegnato.

12. — Si noti che la molteplicità s della V_d dipende dagli interi n ed n_i ma non dipende dai ν_i.

Così per esempio, la varietà V_7 delle quintiche piane spezzate in una retta tripla e una conica semplice e la varietà V_7' delle quintiche piane spezzate in una retta semplice e una conica doppia, hanno entrambe molteplicità $s = 22$ per l'ipersuperficie V_{19}^{48} delle quintiche piane con un punto doppio non assegnato.

Infine si osservi che:

a) Per $t = 1$ ed $n_1 = 1$, si ha $s = 2\,(n - 1)^2$, e quindi, ricordando che l'ordine di V_{N-1} è $\delta = 3\,(n - 1)^2$ si ha che:

Se in un fascio di curve piane di ordine n c'è una retta n-upla, allora in esso ci sono, in generale, esattamente altre $(n - 1)^2$ curve (distinte) con un punto multiplo (che è un punto doppio nodale).

b) Per $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_t = 1$, cioè per $n = \sum_{i=1}^{t} n_i$, si ha $s = \Sigma\, n_i\, n^j$ che è il numero dei punti doppi della nostra curva.

Pisa, 5 marzo 1954.