ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SANDRO FAEDO

Sul problema della diga a gravità di minimo volume

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 7, nº 3-4 (1953), p. 219-275

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_3-4_219_0>

SUL PROBLEMA DELLA DIGA A GRAVITÀ DI MINIMO VOLUME [1]

di SANDRO FAEDO (Pisa)

INTRODUZIONE

Sia α un piano verticale, riferito agli assi cartesiani ortogonali x e y, di cui x disposto in senso orizzontale e y orientato verso l'alto. Sia C una curva regolare, semplice e chiusa del piano α e indichiamo con $D(C)$ il dominio piano e limitato di cui C è completa frontiera; per tutti i punti di $D(C)$ sia $y \geq 0$ e $y = 0$ in un intervallo dell'asse x. Se si imprime al piano α un moto rotatorio attorno ad un suo asse verticale esterno a $D(C)$, oppure un moto traslatorio con direzione ortogonale ad α, il dominio $D(C)$ viene a generare un dominio Δ dello spazio e l'asse x un piano orizzontale S.

Supponiamo data in Δ una distribuzione di materia di peso specifico $p(x, y)$, dipendente cioè solo da x e y, $p(x, y)$ essendo una funzione positiva, assegnata in tutto il semipiano $y \geq 0$.

Si faccia funzionare il solido Δ come una diga a gravità, atta a sopportare la spinta di una massa liquida omogenea, di dato peso specifico, ad un livello massimo assegnato sul piano S.

Il prof. M. PICONE mi ha proposto di studiare il seguente problema:

Determinare, fra tutti i solidi Δ atti a sostenere la detta massa liquida, quello di minimo volume.

Ciò equivale a determinare fra tutte le curve C di α, tali che il corrispondente solido Δ sostenga la massa liquida, quella per cui $D(C)$ ha la minima area.

Il problema ha un evidente interesse dal punto di vista dell'economia delle costruzioni, in quanto — se il profilo di area minima ottenuto soddisfa a opportune condizioni di regolarità — al minimo volume corrisponde non

[1] Lavoro eseguito per l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

solo minimo materiale impiegato nella costruzione della diga, ma anche minimo tempo nella esecuzione dei lavori e, in definitiva, minimo costo complessivo dell'opera.

Il problema è interessante non soltanto dal punto di vista della sua utilità pratica ma anche da quello puramente matematico. Infatti esso porta a un problema di Calcolo delle Variazioni che esce dai tipi finora considerati.

Per tradurre analiticamente il problema occorre prima adottare uno schema matematico della diga a gravità che tenga conto delle forze che sollecitano la diga (peso proprio, pressione idrostatica ed eventuali sottopressioni dovute a infiltrazioni di liquido nel corpo della diga) e della struttura del materiale impiegato. Tale schema dovrebbe soddisfare a due esigenze fra loro contrastanti e cioè essere abbastanza semplice in modo da non precludere la via alla soluzione del problema variazionale e al tempo stesso essere sufficientemente fedele al complesso fenomeno fisico che si studia.

Perciò procederemo per gradi, considerando schemi via via più complessi e più vicini alla realtà fisica; ogni volta che per un dato schema avremo una risposta al problema variazionale posto, questa sarà sempre significativa per le applicazioni pratiche.

Nella parte prima del presente lavoro considereremo lo schema più semplice; supporremo cioè che Δ sia un corpo perfettamente rigido e per il suo equilibrio basterà assicurarsi della stabilità al rovesciamento sotto la spinta del liquido.

La risposta al problema variazionale che così si viene a porre è, a prima vista, inaspettata. Si dimostra infatti che non esiste alcuna diga di minimo volume; la dimostrazione di tale fatto è abbastanza semplice se non sono limitate a priori le dimensioni di Δ e di ciò si dà una chiara inlerpretazione fisica. Se invece Δ non può uscire da una regione limitata, fissata a priori, le cause della mancanza del minimo del problema variazionale sono più riposte. La ragione di ciò sta nel fatto che l'ipotesi che Δ sia un corpo rigido rappresenta troppo grossolanamente il fenomeno e la mancanza della soluzione del problema matematico è la concreta conferma della non aderenza dello schema teorico alla realtà fisica.

Nella seconda parte, abbandonata l'ipotesi della rigidità, se ne fa sul materiale un'altra più aderente alle strutture murarie; si suppone cioè che il materiale sia non resistente a trazione e perciò per l'equilibrio occorre assicurarsi che vi sia ad ogni quota stabilità al rovesciamento.

Ebbene, limitandoci ad una larga classe (K_δ) di profili C che verificano una condizione atta a garantire l'equilibrio a serbatoio vuoto e inoltre ad escludere profili non convenienti dal punto di vista costruttivo, ***si dimostra che in (K_δ) esiste un profilo per cui $D(C)$ ha area minima.***

Il problema variazionale che si pone è del tipo seguente:

« *Ad ogni profilo C viene associata una nuova curva Γ di equazione $x = \gamma(y)$, dove $\gamma(y)$ (che può non essere continua) si esprime mediante una relazione integro-differenziale operante sulla curva C.*

Si deve determinare il minimo di area $D(C)$ *nella classe delle C tali che Γ sia contenuta in $D(C)$* ».

Nel problema così posto la diga di minimo volume è una configurazione di equilibrio limite.

Nel § 3 della parte seconda si precisa la nozione di *grado di sicurezza al rovesciamento* per una diga; considerato, ad ogni quota, il rapporto fra il momento stabilizzante e il momento rovesciante, il minimo r_0 di tale rapporto dà il grado di sicurezza al rovesciamento. Se $r_0 > 1$ si ha equilibrio stabile, se $r_0 < 1$ si ha il rovesciamento; se $r_0 = 1$ equilibrio limite.

Fissato un qualunque numero $r_0 \geq 1$, *si dimostra che nella sottoclasse delle curve C di (K_δ) che hanno grado di sicurezza al rovesciamento $\geq r_0$, ne esiste una per cui $D(C)$ ha la minima area.*

Alla fine del presente lavoro studio il problema della *diga a gravità di minimo peso,* che tratto in modo analogo a quello del minimo volume. Dimostro che nella classe (K_δ) esiste un profilo di peso minimo e così pure nella sottoclasse delle curve di (K_δ) che hanno grado di sicurezza al rovesciamento $\geq r_0 \geq 1$.

Mi propongo di dare successivamente metodi per la determinazione dei profili di area e peso minimi.

Mi è grato infine di ringraziare l'amico prof. L. DONATO, ordinario di Scienza delle Costruzioni nella Università di Pisa, dei suoi preziosi consigli per dare al problema una impostazione analitica che rispondesse alle esigenze della Tecnica.

PARTE PRIMA

MATERIALE PERFETTAMENTE RIGIDO

§ 1. Dighe non appartenenti a una regione limitata.

1. - DEFINIZIONI.

Nel piano verticale α, riferito agli assi cartesiani ortogonali x e y (x orizzontale e y orientato verso l'alto), consideriamo le curve semplici, chiuse e rettificabili C che passano per il punto fisso $H \equiv (0, h)$, con $h > 0$ e che sono completa frontiera di un dominio.

Assunta come parametro la lunghezza dell'arco s a partire dal punto H e nel verso che sarà tra breve precisato, le curve C possono rappresentarsi con le equazioni

$$x = x(s), \qquad y = y(s) \qquad\qquad 0 \leq s \leq l,$$

dove l è la lunghezza di C e $x(s)$ ed $y(s)$ sono funzioni assolutamente continue.

Diremo (K) *la totalità delle curve* C *tali che le funzioni* $x(s)$ *ed* $y(s)$ *soddisfino alle seguenti condizioni:*

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = h, \qquad x(l) = 0, \qquad y(l) = h$$
$$y(s) \geq 0 \qquad \text{per} \qquad 0 \leq s \leq l$$

ed esistono i numeri $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *con*

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \leq l$$

per cui è

$$\begin{aligned} y(s) &\equiv 0 && \textit{per} && \sigma_1 \leq s \leq \sigma_2, \\ y(s) &> 0 && \text{»} && 0 \leq s < \sigma_1, \quad s > \sigma_2, \\ y(s) &< h && \text{»} && \sigma_2 < s < \sigma_3, \\ y(\sigma_3) &= h. \end{aligned}$$

Converremo di assumere come verso positivo su C quello per cui l'arco (σ_1, σ_2) viene percorso nel verso positivo dell'asse x. Si noti che ogni curva C di (K) ha lunghezza finita, ma al variare di C in (K) tale lunghezza non è superiormente limitata. Di una curva C diremo *profilo a valle* l'arco per cui è $0 \leq s \leq \sigma_1$, diremo *profilo a monte* l'arco $\sigma_2 \leq s \leq \sigma_3$.

Indicheremo sempre con $D(C)$ il dominio racchiuso dalla curva C.

È inoltre assegnata sul piano xy la funzione quasi-continua positiva e limitata $p(x, y)$; esistono cioè due numeri π_1 e π_2 per cui è in tutto il piano

$$\pi_1 \leq p(x, y) \leq \pi_2. \tag{1}$$

2. - Posizione del 1° problema variazionale.

Si consideri $D(C)$ come sezione col piano verticale α di una diga a gravità, costituita di materiale di peso specifico $p(x, y)$, che faccia equilibrio a una massa fluida di peso specifico q, con

$$q < \pi_1, \tag{1'}$$

di livello h, situata dalla parte del profilo a monte.

In una prima schematizzazione consideriamo la diga come un corpo rigido appoggiato alla base sul suolo $y = 0$; in tal caso basta per l'equilibrio tener conto della stabilità al rovesciamento, le forze agenti essendo il peso proprio della diga e la pressione idrostatica sul profilo a monte.

Indichiamo con $X(s)$, $Y(s)$ le componenti della pressione del liquido nel punto s dell'arco (σ_2, σ_3); con x_0 e y_0 le coordinate del baricentro di $D(C)$; con Y_0 la componenle sull'asse y della risultante delle forze di gravità applicate nei punti di $D(C)$. Si ha

$$Y_0 = -\iint_{D(C)} p(x, y)\, dx\, dy.$$

L'equazione della retta d'azione r della risultante delle pressioni esercitate sull'arco (σ_2, σ_3) di C e del peso proprio di $D(C)$ è

$$\left(\int_{\sigma_2}^{\sigma_3} Y(s)\, ds + Y_0\right) x - y \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} X(s)\, ds = Y_0 x_0 + \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} [Y(s)\, x(s) - X(s)\, y(s)]\, ds. \tag{2}$$

Si ha

$$Y_0 x_0 = -\iint_{D(C)} x\, p(x, y)\, dx\, dy,$$

$$X(s) = -q[h - y(s)]\, y'(s),$$

$$Y(s) = \quad q(h - y(s)]\, x'(s)$$

e quindi, integrando per parti,

$$\int_{\sigma_2}^{\sigma_3} Y(s)\, d\, s = q \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} [h - y(s)]\, x'(s)\, d\, s = -\, q\, h\, x(\sigma_2) + q \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} x(s)\, y'(s)\, d\, s\,,$$

$$\int_{\sigma_2}^{\sigma_3} [Y(s)\, x(s) - X(s)\, y(s)]\, d\, s = \frac{q}{2} \int_{\sigma_3}^{\sigma_3} [h - y(s)] \frac{d}{d\, s} [x^2(s) + y^2(s)]\, ds =$$

$$= \frac{q}{2} [(h - y(s))\,(x^2(s) + y^2(s))]_{\sigma_2}^{\sigma_3} + \frac{q}{2} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} [x^2(s) + y^2(s)]\, y'(s)\, d\, s =$$

$$= -\frac{q}{2}\, h\, x^2(\sigma_2) + \frac{q}{2} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} x^2(s)\, y'(s)\, d\, s + q\, \frac{h^3}{6}\,.$$

Perciò l'equazione di r diviene

$$\left\{ -\, q\, h\, x(\sigma_2) + q \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} x(s)\, y'(s)\, ds - \iint_{D(C)} p(x\,,y)\, d\, x\, d\, y \right\} x - y \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} X(s)\, d\, s =$$

$$= - \iint_{D(C)} x\, p(x\,,y)\, d\, x\, d\, y - \frac{q}{2}\, h\, x^2(\sigma_2) + \frac{q}{2} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} x^2\, y'(s)\, d\, s + q\, \frac{h^3}{6}\,.$$

La condizione per l'equilibrio è che la retta r incontri il suolo $y = 0$ in un punto della base $(\sigma_1\,, \sigma_2)$ di C; cioè posto

$$x_\tau = x(\sigma_1) + \tau\, [x(\sigma_2) - x(\sigma_1)]$$

il numero x_τ con $0 \leq \tau \leq 1$ deve verificare l'equazione

$$(3) \qquad q \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} \left[x_\tau - \frac{x(s)}{2} \right] x(s)\, y'(s)\, d\, s - q\, h\, x(\sigma_2) \left[x_\tau - \frac{x(\sigma_2)}{2} \right] -$$

$$- \iint_{D(C)} [x_\tau - x]\, p(x\,,y)\, d\, x\, d\, y = \frac{q\, h^3}{6}\,.$$

Diremo *1° problema variazionale quello di trovare le curve C che rendono minimo il funzionale area $D(C)$ nella sottoclasse (K_1) di (K) costituita dalle curve C di (K) che verificano la (3) con un valore di τ compreso fra 0 ed 1.*

Un caso di particolare interesse del 1° problema variazionale è quello di cercare il minimo di area $D(C)$ nella sottoclasse (K_2) di (K_1) per cui il dominio $D(C)$ è normale rispetto all'asse y ed ha per base l'intervallo $(0, h)$ dell'asse y. Il dominio $D(C)$ è limitato dalle curve di equazioni

$$x = x(y) \qquad \text{e} \qquad x = \xi(y).$$

con

$$\xi(h) = 0 \qquad \text{e} \qquad \xi(y) < x(y) \quad \text{per} \quad 0 \leq y < h .$$

Si ha

$$\text{area } D(C) = \int_0^h [x(y) - \xi(y)]\, d y$$

e la (3) diviene

$$q \int_0^h \left[x_\tau - \frac{x(y)}{2}\right] x(y)\, d y - q\, h\, x(0) \left[x_\tau - \frac{x(0)}{2}\right] - \tag{3'}$$

$$- \int_0^h d y \int_{\xi(y)}^{x(y)} [x_\tau - x]\, p(x, y)\, d x = \frac{q\, h^3}{6},$$

essendo

$$x_\tau = \xi(0) + \tau\, [x(0) - \xi(0)], \quad 0 \leq \tau \leq 1 .$$

3. - NON RISOLUBILITÀ DEL 1^0 PROBLEMA VARIAZIONALE NELLE CLASSI (K_1) E (K_2).

Consideriamo l'insieme a due parametri dei domini normali rispetto all'asse y, aventi per base il segmento $(0, h)$ dell'asse y e limitati dalle curve C di equazione

$$x = x(y) = 0 ,$$

$$x = \xi(y) = \begin{cases} -a + y\dfrac{a - \varepsilon}{\varepsilon} & \text{per} \quad 0 \leq y \leq \varepsilon , \\[2ex] \dfrac{\varepsilon}{h - \varepsilon}(y - h) & \text{»} \quad \varepsilon \leq y \leq h, \end{cases}$$

a ed ε essendo parametri con $0 \leq \varepsilon \leq a$.

Dimostriamo che per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo esiste almeno un a per cui il dominio corrispondente verifica la (3') e quindi ha la frontiera che appartiene a (K_2).

Si ha, nel nostro caso,

$$x_\tau = a(\tau - 1)$$

e il primo membro della (3') diviene, essendo $x(y) \equiv 0$,

$$-\int_0^h dy \int_{\xi(y)}^0 [a(\tau - 1) - x]\, p(x, y)\, dx$$

e per $\tau = 0$

$$\int_0^h dy \int_{\xi(y)}^0 (a + x)\, p(x, y)\, dx .$$

Essendo, per $\xi(y) \leq x \leq 0$, $a + x \geq 0$, risulta per il teorema della media

$$\int_0^h dy \int_{\xi(y)}^0 (a + x)\, p(x, y)\, dx = \bar{p}(a, \varepsilon) \int_0^h dy \int_{\xi(y)}^0 (a + x)\, dx ,$$

dove $\bar{p}(a, \varepsilon)$ è un numero che dipende da a ed ε ed è per la (1)

$$\pi_1 \leq \bar{p}(a, \varepsilon) \leq \pi_2 .$$

Si ha

$$\text{area } D(C) = \int_0^h dy \int_{\xi(y)}^0 dx = \frac{a + h}{2} \varepsilon$$

e perciò è

$$\int_0^h dy \int_{\xi(y)}^0 (a + x)\, dx = a \frac{a + h}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \int_0^h \xi^2(y)\, dy =$$

$$= a \frac{a + h}{2} \varepsilon - \frac{\varepsilon}{6} (a^2 + a\varepsilon + \varepsilon h) = \frac{\varepsilon}{6} (2a^2 + 3ah - a\varepsilon - \varepsilon h).$$

Si ottiene così

$$\int_0^h dy \int_{\xi(y)}^0 (a + x)\, p(x y)\, dx = \bar{p}(a, \varepsilon) \frac{\varepsilon}{6} (2a^2 + 3ah - a\varepsilon - \varepsilon h).$$

Poichè è $0 < \varepsilon \leq a$ risulta

$$2\,a^2 + 3\,a\,h - a\,\varepsilon - \varepsilon\,h \geq a^2 + 2\,a\,h > 0\,.$$

Perciò, essendo l'integrale

$$\int_0^h d\,y \int_{\xi(y)}^0 (a + x)\,p\,(x\,,y)\,d\,x$$

una funzione continua di ε ed a, tale è anche il numero $\bar{p}\,(a\,,\varepsilon)$.

La funzione

$$\bar{p}\,(a\,,\varepsilon)\,\frac{\varepsilon}{6}\,[2\,a^2 + 3\,a\,h - a\,\varepsilon - \varepsilon\,h] \tag{4}$$

per $a = \varepsilon$ diviene

$$\bar{p}\,(\varepsilon\,,\varepsilon)\,\frac{\varepsilon^2}{6}\,(\varepsilon + 2\,h) \leq \pi_2\,\frac{\varepsilon^2}{6}\,(\varepsilon + 2\,h) < \frac{q\,h^3}{6}$$

purchè ε sia abbastanza piccolo; per $a \to +\infty$, qualunque sia $\varepsilon > 0$, la (4) ha per limite $+\infty$ e perciò esiste per ogni ε abbastanza piccolo almeno una $a \geq \varepsilon$ per cui

$$\bar{p}\,(a\,,\varepsilon)\,\frac{\varepsilon}{6}\,[2\,a^2 + 3\,a\,h - a\,\varepsilon - \varepsilon\,h] = \frac{q\,h^3}{6}\,, \tag{5}$$

che esprime che è verificata la (3') per $\tau = 0$.

Risolvendo la (5) rispetto ad a, tenuto conto che è $a \geq \varepsilon > 0$, si trova

$$a = \frac{\varepsilon - 3\,h}{4} + \frac{\sqrt{9\,h^2\,\varepsilon + 2\,\varepsilon^2\,h + \varepsilon^3 + 8\,q\,h^3/\bar{p}\,(a\,,\varepsilon)}}{\sqrt{\varepsilon}}\,, \tag{6}$$

da cui

$$a \leq \frac{\varepsilon - 3\,h}{4} + \frac{\sqrt{9\,h^2\,\varepsilon + 2\,\varepsilon^2\,h + \varepsilon^3 + 8\,q\,h^3/\pi_1}}{4\,\sqrt{\varepsilon}}\,.$$

È quindi

$$a\,\varepsilon \leq \varepsilon\,\frac{\varepsilon - 3\,h}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon\,[9\,h^2\,\varepsilon + 2\,\varepsilon^2\,h + \varepsilon^3 + 8\,q\,h^3/\pi_1]}$$

e ne segue

$$\lim_{\varepsilon \to +0} a\,\varepsilon = 0\,.$$

Essendo

$$\text{area } D(C) = \frac{a+h}{2}\,\varepsilon\,,$$

risulta

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \text{area } D(C) = 0$$

che prova che l'estremo inferiore di area $D(C)$ in (K_2) [e quindi anche in (K_1)] è lo zero.

Poichè per ogni curva C di (K_1) e (K_2) l'area $D(C)$ è sempre positiva, ciò prova che il 1^0 problema variazionale non ha soluzione.

4. - CONSIDERAZIONI SULLA NON RISOLUBILITÀ DEL 1^0 PROBLEMA VARIAZIONALE.

Dalla (6) segue

$$a \geq \frac{\varepsilon - 3\,h}{4} + \frac{\sqrt{9\,h^2\,\varepsilon + 2\,\varepsilon^2\,h + \varepsilon^3 + 8\,q\,h^3/\pi_2}}{4\,\sqrt{\varepsilon}}\,,$$

e quindi è

$$\lim_{\varepsilon \to +0} a = +\infty\,.$$

I domini $D(C)$ considerati nel n. 3 non sono complessivamente limitati, cioè non si può fissare una regione limitata del piano $x\,y$ entro cui cadano tutti questi domini.

L'ipotesi fondamentale fatta nell'impostare il 1^0 problema variazionale era che il corpo considerato fosse perfettamente rigido. Tale ipotesi non si può quindi accettare per un materiale di dimensioni non limitate; essa sarà eventualmente accettabile solo per una porzione limitata del materiale che si considera, l'estensione di tale porzione essendo tanto maggiore quanto più il materiale è prossimo al caso limite della rigidità.

§ 2. Dighe appartenenti a una regione limitata.

5. - POSIZIONE DEL 2^0 PROBLEMA VARIAZIONALE.

Dalle considerazioni svolte nel n. 4 viene naturale di modificare l'impostazione del problema variazionale nel modo seguente.

Chiamiamo (K_1^L) e (K_2^L) la totalità delle curve di (K_1) e (K_2) che sono tutte contenute in un rettangolo assegnato R definito da

$$R: \qquad a \leq x \leq b\,, \qquad 0 \leq y \leq c\,,$$

$$\text{con} \qquad a < 0 < b\,, \qquad c > h\,.$$

Diremo 2° problema variazionale la ricerca delle curve C che rendono minimo il funzionale area $D(C)$ nella classe (K_1^L); suo caso particolare notevole sarà il considerare tale minimo nella classe (K_2^L).

Infine con (K^L) indicheremo la sottoclasse delle curve di (K) che sono contenute in R.

6. - ALTRA ESPRESSIONE DELLA CONDIZIONE (3).

Sia C una curva di (K) di equazioni $x = x(s)\,, y = y(s)$; con le notazioni del n. 2 per essa la (3) può anche scriversi

$$x_\tau \left\{ \iint\limits_{D(C)} p(x\,,y)\,dx\,dy + q\,h\,x(\sigma_2) - q\int_{\sigma_2}^{\sigma_3} x(s)\,y'(s)\,ds \right\} = \tag{7}$$

$$= \iint\limits_{D(C)} x\,p(x\,,y)\,dx\,dy + \frac{q\,h}{2}\,x^2(\sigma_2) - \frac{q}{2}\int_{\sigma_2}^{\sigma_3} x^2(s)\,y'(s)\,ds - \frac{q\,h^3}{6}\,.$$

Se tale relazione è verificata per $0 \leq \tau \leq 1$ la C oltre che a (K) appartiene alla classe (K_1).

Consideriamo una nuova distribuzione di materia di peso specifico $p^*(x, y)$ così definita:

$p^*(x\,,y) = p(x\,,y)$ fuori della striscia $0 \leq y \leq h$;
nella striscia $0 \leq y \leq h$ è invece

$$p^*(x\,,y) = \begin{cases} p(x\,,y) & \text{nei punti } (x\,,y) \text{ appartenenti a } D(C) \text{ in cui è } x \leq x(\sigma_2) \text{ e nei punti non appartenenti a } D(C) \text{ situati prima del profilo a valle;} \\ p(x\,,y) - q & \text{nei punti } (x\,,y) \text{ appartenenti a } D(C) \text{ e in cui è } x > x(\sigma_2); \\ q & \text{nei punti } (x\,,y) \text{ non appartenenti a } D(C) \text{ e situati dopo il profilo a monte (il verso essendo quello dell'asse } x \text{ e cioè dal profilo a valle a quello a monte).} \end{cases}$$

Indichiamo con $D^*(C)$ il dominio ottenuto aggiungendo a $D(C)$ l'insieme dei punti (x, y) per cui è

$$x(s) < x \leq x(\sigma_2)\,,\ y = y(s)\,,\ \sigma_2 < s \leq \sigma_3\,;$$

tale insieme è vuoto se è sempre $x(s) \geq x(\sigma_2)$ per $\sigma_2 < s \leq \sigma_3$.

Consideriamo in $D^*(C)$ la distribuzione di materia $p^*(x, y)$ e indichiamo con $\xi^*(C)$ l'ascissa del baricentro di $D^*(C)$; indicato con D_1 l'insieme dei punti (x, y) di $D(C)$ in cui è $x \geq x(\sigma_2)$, $0 \leq y \leq h$, si ha

$$\xi^*(C) = \frac{\displaystyle\iint_{D^*(C)} x\, p^*(x, y)\, dx\, dy}{\displaystyle\iint_{D^*(C)} p^*(x, y)\, dx\, dy} =$$

$$= \frac{\displaystyle\iint_{D(C)} x\, p(x, y)\, dx\, dy + q \iint_{D^*(C)-D(C)} x\, dx\, dy - q \iint_{D_1} x\, dx\, dy}{\displaystyle\iint_{D(C)} p(x, y)\, dx\, dy + q \iint_{D^*(C)-D(C)} dx\, dy - q \iint_{D_1} dx\, dy}\,.$$

Per un noto teorema si ha

$$q\left[\iint_{D^*(C)-D(C)} dx\, dy - \iint_{D_1} dx\, dy\right] = q\left[\int_{+F\{D^*(C)-D(C)\}} x(s)\, y'(s)\, ds - \int_{+FD_1} x(s)\, y'(s)\, ds\right] =$$

$$= q \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} [x(\sigma_2) - x(s)]\, y'(s)\, ds = q\, h\, x(\sigma_2) - q \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} x(s)\, y'(s)\, ds\ ;$$

$$q\left[\iint_{D^*(C)-D(C)} x\, dx\, dy - \iint_{D_1} x\, dx\, dy\right] = \frac{q}{2}\left[\int_{+F\{D^*(C)-D(C)\}} x^2(s)\, y'(s)\, ds - \int_{+FD_1} x^2(s)\, y'(s)\, ds\right] =$$

$$= \frac{q}{2} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} [x^2(\sigma_2) - x^2(s)]\, y'(s)\, ds = \frac{q\, h}{2}\, x^2(\sigma_2) - \frac{q}{2} \int_{\sigma_2}^{\sigma_3} x^2(s)\, y'(s)\, ds\,.$$

La (7) può dunque scriversi

$$x_\tau = \xi^*(C) - \frac{q\, h^3}{6\, P^*(C)}\,, \tag{8}$$

dove $P^*(C)$ indica il peso di $D^*(C)$; essa equivale alla (3) se esiste un numero τ con $0 \leq \tau \leq 1$ per cui sia

$$x_\tau = x(\sigma_1) + \tau\,[x(\sigma_2) - x(\sigma_1)]\,. \tag{9}$$

Dalla (8) risulta che il numero x_τ è un *funzionale continuo* di C in (K), tali essendo $\xi^*(C)$ e $P^*(C)$, con $P^*(C) \neq 0$. Ciò significa che se C è una curva di (K) e si fissa un numero $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può in corrispondenza determinare un numero positivo ϱ tale che se C' è una qualunque curva di (K) appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di C [2], risulti

$$|\, x'_\tau - x_\tau \,| < \varepsilon$$

dove x'_τ indica l'x_τ relativo a C'.

Si osservi che, anche se C appartiene a (K_1), x'_τ verifica la (8) con un valore di τ che può non appartenere all'intervallo $(0, 1)$; solo se ciò accade la C' appartiene a (K_1), ossia verifica la (3).

Se C e C' hanno lo stesso profilo a monte ed è $D(C') \supset D(C)$ si ha

$$D(C') - D(C) = D^*(C') - D^*(C)\,.$$

I numeri $\xi^*(C)$ e $P^*(C)$, funzionali dipendenti da C, hanno la seguente proprietà: fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio si può determinare $\delta > 0$ in modo che se

$$\text{area}\,\{ D^*(C') - D^*(C) \} < \delta$$

risulti

$$|\, \xi^*(C) - \xi^*(C') \,| < \varepsilon\,, \quad |\, P^*(C) - P^*(C') \,| < \varepsilon\,.$$

Ne segue, essendo $P^*(C) \neq 0$, che fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio si può determinare $\delta > 0$ in modo che se C e C' hanno lo stesso profilo a monte ed è $D(C') \supset D(C)$ ed area $\{ D(C') - D(C) \} < \delta$ risulti

$$|\, x'_\tau - x_\tau \,| < \varepsilon\,.$$

Esprimeremo tale proprietà dicendo che x_τ è un *funzionale continuo in misura* in ogni insieme di curve di (K) aventi lo stesso profilo a monte.

---

[2] Cfr. L. TONELLI *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, ed. Zanichelli, Vol. I, pag. 72.

7. - UNA CONDIZIONE NECESSARIA PER LE MINIMANTI.

Ricordiamo che le classi $(K^L), (K_1^L), (K_2^L)$ sono costituite dalle curve di $(K), (K_1), (K_2)$ tutte contenute nel rettangolo R fissato

$$a \leq x \leq b, \qquad 0 \leq y \leq c, \qquad [a < 0, \ b > 0, \ c > h].$$

Il seguente teorema dà una condizione necessaria per le minimanti del 2° problema variazionale.

TEOREMA I: « *Se esiste il minimo del funzionale area $D(C)$ nelle classi (K_1^L) e (K_2^L), ogni curva minimante $\overline{C}$ ha per base sull'asse x l'intervallo (a, b) e verifica la* (3) *per $\tau = 0$* ».

Siano $x = \overline{x}(s)$, $y = \overline{y}(s)$ le equazioni della curva $\overline{C}$ di (K_1^L), $[\overline{x}(\overline{\sigma}_1), \overline{x}(\overline{\sigma}_2)]$ il suo intervallo base sull'asse x.

a) *Dimostriamo dapprima che per $\overline{C}$ è necessariamente $\overline{x}(\overline{\sigma}_2) = b$.*

Supponiamo che sia $\overline{x}(\overline{\sigma}_2) < b$.

Passiamo dalla curva $\overline{C}$ a una curva C' di (K^L), avente lo stesso profilo a monte di $\overline{C}$ e lo stesso intervallo base sull'asse x, tale che per i corrispondenti domini $D(\overline{C})$ e $D(C')$ risulti $D(\overline{C}) \supset D(C')$ e che fra le ascisse dei baricentri di $D^*(\overline{C})$ e $D^*(C')$ sussista la disuguaglianza

$$\xi^*(C') > \xi^*(\overline{C}).$$

Dal dominio $D(C')$ se ne può ricavare un altro $D(C'')$ aggiungendo a $D(C')$ una areola λ avente per base sull'asse x il segmento $[\overline{x}(\overline{\sigma}_2), b]$ con area $\lambda <$ area $[D(\overline{C}) - D(C')]$ in modo che C'' appartenga a (K^L).

Detta $\xi^*(C'')$ l'ascissa del baricentro di $D^*(C'')$ risulta

$$b > \xi^*(C'')$$

perchè $D^*(C'')$ è contenuto in R. Perciò è anche

$$b > x''_\tau = \xi^*(C'') - \frac{q\,h^3}{6\,P^*(C'')}$$

dove x''_τ è l' x_τ che corrisponde a C''.

Dimostriamo che è inoltre

$$x''_\tau > \overline{x}(\overline{\sigma}_1).$$

Si ha

$$(10) \qquad \bar{x}_\tau = \xi^* (\bar{C}) - \frac{q\, h^3}{6\, P^* (\bar{C})}$$

e posto

$$(11) \qquad \xi^* (\bar{C}) = \frac{X}{P^* (\bar{C})},$$

$$x''_\tau = \xi^* (C'') - \frac{q\, h^3}{6\, P^* (C'')} =$$

$$(12) \qquad = \frac{X - \iint\limits_{D(\bar{C})-D(C')} x\, p\,(x\,,y)\, d\,x\, d\,y + q \int\limits_0^h d\,y \int\limits_{\bar{x}(\bar{\sigma}_2)}^b x\, d\,x + \iint\limits_\lambda x\,[p\,(x, y) - q]\, dx\, dy - \frac{q\, h^3}{6}}{P^*\,(C'')}\,.$$

Si ha

$$-\iint\limits_{D(\bar{C})-D(C')} x\, p\,(x\,,y)\, d\,x\, d\,y + \iint\limits_\lambda x\,[p\,(x\,,y) - q]\, d\,x\, d\,y = \varepsilon_1\,,$$

dove ε_1 è infinitesimo con *area* $\{D\,(\bar{C}) - D\,(C')\}$; inoltre è

$$P^*\,(C'') = P^*\,(\bar{C}) - \iint\limits_{D(\bar{C})-D(C')} p\,(x\,,y)\, d\,x\, d\,y + q \iint\limits_{0\ \bar{x}(\bar{\sigma}_2)}^{h\ b} d\,x\, d\,y +$$

$$+ \iint\limits_\lambda [p\,(x\,,y) - q]\, d\,x\, d\,y = P^*\,(\bar{C}) + q \iint\limits_{0\ \bar{x}(\bar{\sigma}_2)}^{h\ b} d\,x\, d\,y + \varepsilon_2\,,$$

dove ε_2 è infinitesimo con *area* $\{D\,(\bar{C}) - D\,(C')\}$.

Sostituendo le espressioni trovate nella (12) si ottiene

$$x''_\tau = \frac{X + \frac{q\, h}{2}\,[b^2 - \bar{x}\,(\bar{\sigma}_2)^2] - \frac{q\, h^3}{6} + \varepsilon_1}{P^*\,(\bar{C}) + q\, h\,[b - \bar{x}\,(\bar{\sigma}_2)] + \varepsilon_2}\,.$$

Essendo $\bar{C}$ una curva di (K_1^L) è

$$\bar{x}\,(\bar{\sigma}_1) \leq \bar{x}_\tau \leq \bar{x}\,(\bar{\sigma}_2) < b\,,$$

da cui segue

$$\frac{b + \bar{x}(\bar{\sigma}_2)}{2} > \bar{x}_\tau .$$

Si fissi C' in modo che risulti

$$| \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \bar{x}_\tau | < q\, h\, [b - \bar{x}(\bar{\sigma}_2)] \left[\frac{b + \bar{x}(\bar{\sigma}_2)}{2} - \bar{x}_\tau\right].$$

Ne segue

$$P^*(\bar{C}) \{q\, h\, [b - \bar{x}(\bar{\sigma}_2)] \left[\frac{b + \bar{x}(\bar{\sigma}_2)}{2} - \bar{x}_\tau\right] + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \bar{x}_\tau\} > 0$$

e per le (10) e (11),

$$q\, h\, [b - \bar{x}(\bar{\sigma}_2)] \left[\frac{b + \bar{x}(\bar{\sigma}_2)}{2} P^*(\bar{C}) - X + \frac{q\, h^3}{6}\right] + \varepsilon_1 P^*(\bar{C}) - X \varepsilon_2 + \frac{q\, h^3}{6} \varepsilon_2 > 0$$

ossia

$$P^*(\bar{C}) \left\{ X + \frac{q\, h}{2} [b^2 - \bar{x}(\bar{\sigma}_2)^2] - \frac{q\, h^3}{6} + \varepsilon_1 \right\} >$$

$$> \left[X - \frac{q\, h^3}{6}\right] \{P^*(\bar{C}) + q\, h\, [b - \bar{x}(\bar{\sigma}_2)] + \varepsilon_2\},$$

che esprime che è

$$x''_\tau = \frac{X + \frac{q\, h}{2} [b^2 - \bar{x}(\bar{\sigma}_2)^2] - \frac{q\, h^3}{6} + \varepsilon_1}{P^*(\bar{C}) + q\, h\, [b - \bar{x}(\bar{\sigma}_2)] + \varepsilon_2} > \frac{X - \frac{q\, h^3}{6}}{P^*(\bar{C})} = \bar{x}_\tau,$$

per le (10) e (11).

È quindi

$$x''_\tau > \bar{x}_\tau \geq \bar{x}(\bar{\sigma}_1) .$$

Avendosi $\bar{x}(\bar{\sigma}_1) < x''_\tau < b$ la curva C'' appartiene a (K_1^L), poichè il suo intervallo base sull'asse x è l'intervallo $[\bar{x}(\bar{\sigma}_1), b]$. Si ha inoltre

$$\text{area } D(C'') = \text{area } D(C') + \text{area } \lambda = \text{area } D(\bar{C}) - \text{area } \{D(\bar{C}) - D(C')\} +$$

$$+ \text{area } \lambda < \text{area } D(\bar{C});$$

perciò $\bar{C}$ non sarebbe una minimante di area $D(C)$ in (K_1^L), contro l'ipotesi.

b) *Dimostriamo che* $\overline{C}$ *verifica la* (3) *per* $\tau = 0$.

Scritta la (3) nella forma (8) per la $\overline{C}$

$$\overline{x}_\tau = \xi^*(\overline{C}) - \frac{q\,h^3}{6\,P^*(\overline{C})},$$

se è $0 < \tau < 1$ per la continuità di x_τ (n. 6) si può passare da $\overline{C}$ a una curva C' di (K_1^L) con area $D(C') <$ area $D(\overline{C})$ e tale che il corrispondente x'_τ differisca di poco quanto si vuole da $\overline{x}_\tau$ e quindi verifichi ancora, come $\overline{x}_\tau$, la (9) con $0 < \tau < 1$.

Non potrebbe quindi $\overline{C}$ essere minimante in (K_1^L) e perciò $\overline{C}$ deve verificare la (3) con $\tau = 0$ oppure $\tau = 1$. Quest'ultimo caso si esclude.

Infatti per *a*) deve essere $\overline{x}(\overline{\sigma}_2) = b$; d'altronde essendo $\overline{C}$ tutta contenuta in R l'ascissa $\xi^*(\overline{C})$ del baricentro di $D^*(\overline{C})$ è $\leq b$ e quindi si ha

$$\overline{x}_\tau = \xi^*(\overline{C}) - \frac{q\,h^3}{6\,P^*(\overline{C})} < b = \overline{x}(\overline{\sigma}_2).$$

Se fosse $\tau = 1$ sarebbe per la definizione di x_τ

$$\overline{x}_\tau = \overline{x}(\overline{\sigma}_2)$$

e quindi è necessariamente $\tau = 0$.

c) *Dimostriamo infine che per* $\overline{C}$ *è necessariamente* $\overline{x}(\overline{\sigma}_1) = a$.

Supponiamo che sia $\overline{x}(\overline{\sigma}_1) > a$. Per quanto si è già dimostrato per $\overline{C}$ deve essere $\overline{x}(\overline{\sigma}_2) = b$ e $x_\tau = \overline{x}(\overline{\sigma}_1)$. Per la continuità di x_τ in (K^L) (n. 6) si può determinare una curva C' di (K^L), appoggiantesi sull'asse x sullo stesso intervallo della $\overline{C}$, con area $D(C') <$ area $D(\overline{C})$ e per cui sia

$$a < x'_\tau < b;$$

questo x'_τ verificherà in generale la (8) con un τ non appartenente all'intervallo $(0, 1)$.

Per la continuità in misura di x_τ nell'insieme di curve di (K^L) aventi lo stesso profilo a monte di C' (n. 6), si può trovare una curva C'' di tale insieme, con area $D(C'') <$ area $D(\overline{C})$ che abbia per base sull'asse x l'intervallo (a, b) e per cui sia $a < x''_\tau < b$, dove x''_τ è relativo alla C''. La C'' verifica quindi la (8) con $0 < \tau < 1$ ed appartiene a (K_1^L), contro l'ipotesi che $\overline{C}$ sia minimante in (K_1^L).

d) Quanto si è detto per la classe (K_1^L) si può ripetere, con ovvie avvertenze, per la classe (K_2^L).

8. - NON RISOLUBILITÀ DEL 2^0 PROBLEMA VARIAZIONALE.

TEOREMA II: « *Il 2° problema variazionale non ha soluzione nè nella classe* (K_1^L) *nè nella* (K_2^L) ».

a) Supponiamo che esista una minimante $\overline{C}$ in (K_1^L); per il teorema I è

$$\overline{x}(\overline{\sigma}_1) = a\,, \quad \overline{x}(\overline{\sigma}_2) = b\,, \quad \overline{x}_\tau = a \ (\text{cioè } \tau = 0)\,.$$

Detto A il punto $(a, 0)$ di $\overline{C}$, indichiamo con C' una curva di (K^L) con le seguenti proprietà: è $D(\overline{C}) \supset D(C')$, l'insieme $D(\overline{C}) - D(C')$ è tutto contenuto nell'intorno circolare di raggio ϱ (che preciseremo) di A e C' ha ancora per base sull'asse x l'intervallo (a, b).

Nell'intorno di raggio ϱ di $H \equiv (0, h)$ consideriamo una areola λ con area $\lambda =$ area $\{D(\overline{C}) - D(C')\}$, non avente punti interni a comune con $D(\overline{C})$ e in modo che $D(C'') = D(C') + \lambda$ abbia per frontiera una curva C'' di (K^L). Ciò è possibile se area $\{D(\overline{C}) - D(C')\}$ è abbastanza piccola; infatti $\overline{C}$ è una curva semplice passante per H e perciò divide l'intorno circolare di centro H e raggio ϱ sufficientemente piccolo in due regioni di area positiva, quella dei punti che appartengono a $D(\overline{C})$ e quella dei punti che non appartengono a $D(\overline{C})$.

Mostriamo che se ϱ è abbastanza piccolo C'' appartiene a (K_1^L). Si ha

$$P^*(\overline{C}'') = P^*(\overline{C}) - \iint\limits_{D(\overline{C})-D(C')} p(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{\lambda} p(x, y)\, dx\, dy - \gamma\, q \text{ area } \lambda\,,$$

dove γ è un numero compreso fra 0 e 1 (è $\gamma = 0$ se λ non è immersa nel liquido, $\gamma = 1$ se è totalmente immersa).

Essendo area $\{D(\overline{C}) - D(C')\} =$ area λ, si ha per il teorema della media

$$\iint\limits_{D(\overline{C})-D(C')} p(x, y)\, dx\, dy = p_1 \text{ area } \lambda\,,$$

$$\iint\limits_{\lambda} p(x, y)\, dx\, dy = p_2 \text{ area } \lambda\,,$$

ed è per la (1)

$$\pi_1 \leq p_1 \leq \pi_2\,, \quad \pi_1 \leq p_2 \leq \pi_2\,.$$

Ne segue

$$P^*(C'') = P^*(\overline{C}) - \text{area } \lambda\, [p_1 - p_2 + \gamma\, q]\,. \tag{13}$$

Analogamente è

$$
(14) \quad \begin{aligned}
\xi^*(C'')\,P^*(C'') = \xi^*(\overline{C})\,P^*(\overline{C}) - \iint\limits_{D(\overline{C})-D(C')} x\,p(x,y)\,dx\,dy\, + \\
+ \iint\limits_{\lambda} x\,p(x,y)\,dx\,dy - \delta\,q \iint\limits_{\lambda} x\,dx\,dy\,,
\end{aligned}
$$

con $0 \leq \delta \leq 1$.

Per il teorema della media è

$$
\iint\limits_{D(\overline{C})-D(C')} x\,p(x,y)\,dx\,dy = x_1\,p_1 \text{ area } \lambda\,,
$$

$$
\iint\limits_{\lambda} x\,p(x,y)\,dx\,dy = x_2\,p_2 \text{ area } \lambda\,,
$$

$$
\iint\limits_{\lambda} x\,dx\,dy = x_3 \text{ area } \lambda\,,
$$

dove i numeri x_1, x_2, x_3 soddisfano alle limitazioni

$$
(15) \qquad a \leq x_1 \leq a + \varrho\,, \quad |x_2| \leq \varrho\,, \quad |x_3| \leq \varrho\,.
$$

Sostituendo queste espressioni nella (14) si ottiene

$$
(14') \qquad \xi^*(C'')\,P^*(C'') = \xi^*(\overline{C})\,P^*(\overline{C}) - \text{area } \lambda\,[x_1\,p_1 - x_2\,p_2 + \delta\,q\,x_3]\,.
$$

Avendosi per la (8)

$$
x''_\tau = \frac{\xi^*(C'')\,P^*(C'') - q\,h^3/6}{P^*(C'')}\,,
$$

segue dalle (13) e (14')

$$
x''_\tau = \frac{\xi^*(\overline{C})\,P^*(\overline{C}) - \text{area } \lambda\,[x_1\,p_1 - x_2\,p_2 + \delta\,q\,x_3] - \dfrac{q\,h^3}{6}}{P^*(\overline{C}) - \text{area } \lambda\,[p_1 - p_2 + \gamma\,q]}\,.
$$

Posto

$$
\frac{\text{area } \lambda\,[p_1 - p_2 + \gamma\,q]}{P^*(\overline{C})} = k\,,
$$

per ϱ abbastanza picccolo è $|k| < 1$ e perciò

$$x_\tau'' = \frac{\xi^*(\overline{C})\,P^*(\overline{C}) - \text{area}\,\lambda\,[x_1 p_1 - x_2 p_2 + \delta q x_3] - \dfrac{q h^3}{6}}{P^*(\overline{C})}(1 + k + k^2 \ldots) =$$

$$= \xi^*(\overline{C}) - \frac{q h^3}{6 P^*(\overline{C})} - \text{area}\,\lambda\,\frac{x_1 p_1 - x_2 p_2 + \delta q x_3}{P^*(\overline{C})} +$$

$$+ \frac{k}{1-k}\,\frac{\xi^*(\overline{C})\,P^*(\overline{C}) - \text{area}\,\lambda\,[x_1 p_1 - x_2 p_2 + \delta q x_3] - \dfrac{q h^3}{6}}{P^*(\overline{C})} =$$

$$= \xi^*(\overline{C}) - \frac{q h^3}{6 P^*(\overline{C})} - \frac{\text{area}\,\lambda}{P^*(\overline{C})}\Bigg[x_1 p_1 - x_2 p_2 + \delta q x_3 -$$

$$-(p_1 - p_2 + \gamma q)(1 + k + k^2 + \ldots)\,\frac{\xi^*(\overline{C})P^*(\overline{C}) - \text{area}\lambda[x_1 p_1 - x_2 p_2 + \delta q x_3] - \dfrac{q h^3}{6}}{P^*(\overline{C})}\Bigg].$$

Essendo

$$a = \overline{x}_\tau = \xi^*(\overline{C}) - \frac{q h^3}{6 P^*(\overline{C})},$$

ne segue

$$(16)\qquad \begin{aligned} x_\tau'' = a - \frac{\text{area}\,\lambda}{P^*(\overline{C})}\Bigg\{ & p_1\left[x_1 - \frac{a}{1-k}\right] - p_2\left[x_2 - \frac{a}{1-k}\right] + \\ & + q\left[\delta x_3 - \frac{\gamma a}{1-k}\right] + \\ & + \frac{\text{area}\,\lambda}{P^*(\overline{C})}(p_1 - p_2 + \gamma q)\,\frac{x_1 p_1 - x_2 p_2 + \delta q x_3}{1-k}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Per $\varrho \to 0$ si ha per le (15) ed essendo $k \to 0$

$$p_1\left[x_1 - \frac{a}{1-k}\right] \to 0,$$

$$\left[x_2 - \frac{a}{1-k}\right] \to -a,$$

$$q\,\delta x_3 \to 0;$$

poichè è inoltre area $\lambda \to 0$ per $\varrho \to 0$, la (16) può scriversi per $\varrho > 0$

$$x''_\tau = a - \frac{\text{area } \lambda}{P^*(\overline{C})} \{a(p_2 - \gamma q) + \varepsilon(\varrho)\},$$

dove $\varepsilon(\varrho) \to 0$ per $\varrho \to 0$ e dove p_2 e γ sono numeri dipendenti dalle costruzioni eseguite e per cui è

$$\pi_1 \leq p_2 \leq \pi_2, \qquad 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Essendo, per (1') $\pi_1 > q$ ed $a < 0$,

$$a(p_2 - \gamma q) < a(\pi_1 - q) < 0,$$

se ϱ è abbastanza piccolo risulta

$$a(\pi_1 - q) + \varepsilon(\varrho) < 0$$

e quindi

$$a(p_2 - \gamma q) + \varepsilon(\varrho) < 0.$$

Ne segue

$$x''_\tau > a.$$

Ciò è assurdo perchè, essendo area $C'' =$ area $\overline{C}$, anche C'' è una minimante in (K_1^L) e, per il Teorema I dovrebbe aversi $x''_\tau = a$.

b) La dimostrazione nel caso della classe (K_2^L) è analoga.

PARTE SECONDA

MATERIALE A STRUTTURA MURARIA

§ 1. La classe delle curve (K_3).

9. - NUOVA IPOTESI SULLA STRUTTURA DEL MATERIALE.

Abbandonata l'ipotesi della rigidità, formuliamo sulla struttura del materiale un'altra ipotesi più aderente al caso pratico più comune delle dighe a gravità in muratura.

Supponiamo che il materiale sia non resistente a trazione.

Sia ancora $D(C)$ la sezione della diga con il piano verticale α e si consideri l'intersezione di $D(C)$ con la retta orizzontale $y = \eta$, con $0 \leq \eta < h$; supponiamo che tale intersezione sia sempre un intervallo I_η e indichiamo con a_η e b_η il primo e secondo estremo del massimo intervallo contenuto in I_η tale che a_η e b_η siano punti di accumulazione di punti interni a $D(C)$ e aventi ordinata $> \eta$. Indichiamo poi con $D_\eta(C)$ il dominio costituito dall'intervallo (a_η, b_η) della retta $y = \eta$ e dai punti di $D(C)$ con ordinata $> \eta$. Consideriamo $D_\eta(C)$ come una diga a sè stante che fa equilibrio alla massa liquida contenuta nella striscia $\eta \leq y \leq h$. Detto $Q(\eta)$ il punto della retta $y = \eta$ per cui passa la retta d'azione r_η della risultante del peso di $D_\eta(C)$ e della pressione idrostatica, perchè la sezione $y = \eta$ non sia soggetta a trazione occorre che $Q(\eta)$ sia contenuto nell'intervallo (a_η, b_η).

Diremo *curva delle pressioni* il luogo descritto da $Q(\eta)$ al variare di η con $0 \leq \eta < h$, luogo che è rappresentabile con un'equazione

$$x = \gamma(y) \qquad (0 \leq y < h).$$

Per l'equilibrio della diga imporremo la condizione che la curva delle pressioni sia contenuta in $D(C)$, intendendo con ciò che sia

$$a_\eta \leq \gamma(\eta) \leq b_\eta \qquad (0 \leq \eta < h). \tag{17}$$

Sia C una curva di (K) e siano σ_η e σ'_η i valori di s per cui si ha

$$x(\sigma_\eta) = b_\eta, \qquad y(\sigma_\eta) = \eta,$$

$$x(\sigma'_\eta) = a_\eta, \qquad y(\sigma'_\eta) = \eta;$$

per $s=\sigma_\eta$ si ha un punto del profilo a monte, per $s=\sigma'_\eta$ un punto del profilo a valle.

Con tali notazioni la (17) diviene

$$x(\sigma'_\eta) \leq \gamma(\eta) \leq \sigma(\eta) . \tag{17'}$$

Ricaviamoci l'espressione di $\gamma(\eta)$.

L'equazione della retta r_η è [cfr. la (2) del n. 2], con le notazioni del n. 2,

$$\left(\int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3} Y(s)\, d s + Y_\eta\right) x - y \int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3} X(s)\, d s = Y_\eta\, x_\eta + \tag{2'}$$

$$+ \int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3} [Y(s)\, x(s) - X(s)\, y(s)]\, d s ,$$

dove è ora

$$Y_\eta = - \iint_{D_\eta(C)} p(x, y)\, d x\, d y ,$$

$$Y_\eta\, x_\eta = - \iint_{D_\eta(C)} x\, p(x, y)\, d x\, d y .$$

Si ha

$$\int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3} X(s)\, d s = - q \int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3} [h - y(s)]\, y'(s)\, d s = - q\, h\, (h - \eta) +$$

$$+ \frac{q}{2} \int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3} \frac{d}{d s}\, y^2(s)\, ds = - \frac{q}{2} (h - \eta)^2.$$

Analogamente agli sviluppi fatti nel n. 2 si ha

$$\int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3} Y(s)\, d s = - q\, (h - \eta)\, x(\sigma_\eta) + q \int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3} x(s)\, y'(s)\, d s ,$$

$$\int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3} [Y(s)\, x(s) - X(s)\, y(s)]\, d s = - \frac{q}{2} (h - \eta)\, x^2(\sigma_\eta) +$$

$$+ \frac{q}{2} \int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3} x^2(s)\, y'(s)\, d s + q\, \frac{h^3 - \eta^3}{6} - \frac{q}{2}\, \eta^2 (h - \eta) .$$

Imponendo che la retta r_η, la cui equazione è la (2′), passi per il punto $[\gamma(\eta), \eta]$ si ottiene, sostituendo nella (2′) le espressioni trovate, la seguente equazione a cui soddisfa $\gamma(\eta)$

$$(3'') \qquad q\int_{\sigma_\eta}^{\sigma_3}\left[\gamma(\eta)-\frac{x(s)}{2}\right]x(s)\,y'(s)\,ds-q(h-\eta)\,x(\sigma_\eta)\left[\gamma(\eta)-\frac{x(\sigma_\eta)}{2}\right]-$$

$$-\iint_{D_\eta(C)}[\gamma(\eta)-x]\,p(x,y)\,dx\,dy=\frac{q}{6}(h-\eta)^3 .$$

La condizione (17) diviene quindi

$$(9') \qquad \gamma(\eta)=x(\sigma'_\eta)+\tau\,[(\sigma_\eta)-x(\sigma'_\eta)] \qquad \text{con} \qquad 0\leq\tau\leq 1 ,$$

dove ora τ può variare con η e $\gamma(\eta)$ è definita dalla (3″).

Indichiamo con (K_3) la totalità delle curve C di (K) per cui la $\gamma(\eta)$ definita dalla (3″) verifica la (9′).

10. - ALTRA ESPRESSIONE DELLA CONDIZIONE (3″).

Fissata una curva C di (K_3) consideriamo una nuova distribuzione di materia $p(x,y;\eta)$ definita da
$p(x,y;\eta)=p(x\,y)$ fuori della striscia $\eta\leq y\leq h$
e nella striscia $\eta\leq y\leq h$ definita da

$$p(x,y;\eta)=\begin{cases} p(x,y) & \text{nei punti } (x,y) \text{ di } D_\eta(C) \text{ con } x\leq x(\sigma_\eta) \text{ e nei punti non di } D_\eta(C) \text{ situati prima del profilo a valle;}\\ p(x,y)-q & \text{nei punti } (x,y) \text{ di } D_\eta(C) \text{ con } x> x(\sigma_\eta);\\ q & \text{nei punti non di } D_\eta(C) \text{ e situati dopo il profilo a monte,}\end{cases}$$

intendendo di assumere come verso quello positivo dell'asse x.

Indichiamo con $D^*_\eta(C)$ il dominio ottenuto aggiungendo a $D_\eta(C)$ l'insieme dei punti (x,y) per cui è

$$x(s)<x<x(\sigma_\eta), \qquad y=y(s) \qquad \sigma_\eta<s\leq\sigma_3 .$$

Consideriamo di avere fatta in $D^*_\eta(C)$ la distribuzione di materia $p(x,y;\eta)$ e indichiamo con $\xi^*_\eta(C)$ e $P^*_\eta(C)$ l'ascissa del baricentro e il peso di $D^*_\eta(C)$.

In modo analogo a come nel n. 6 si è dedotta la (8) dalla (3) si ottiene che la (3″) può porsi nella forma

$$\gamma(\eta) = \xi_\eta^*(C) - \frac{q(h-\eta)^3}{6\, P_\eta^*(C)} \, . \tag{8′}$$

§ 2. La classe di curve (K_δ)

11. - DEFINIZIONE DELLA CLASSE $(K\delta)$.

Esporremo ora alcune considerazioni che portano a definire una sottoclasse di curve di (K_3) che contiene i profili C di effettivo interesse.

Se h è il livello d'invaso del serbatoio, livello che è un dato ben preciso, essendo quello degli sfioratori di sicurezza, ben poco interesse hanno i profili che lo superano di molto. Perciò, fissato un numero non negativo δ, ci limiteremo alla sottoclasse di (K_3) i cui elementi sono tutti contenuti nella striscia $0 \leq y \leq h + \delta$.

Altri fattori contribuiscono a fare delle ulteriori scelte fra gli elementi di (K_3).

Anzitutto nel definire gli elementi di (K_3) non si è tenuto conto che si deve avere l'equilibrio qualunque sia il livello $\eta \leq h$ raggiunto dal liquido; in particolare dovrà aversi l'equilibrio anche per $\eta = 0$, cioè a serbatoio vuoto.

Inoltre vi è un'altra considerazione di carattere generale che viene ancora a limitare la classe (K_3). Il problema da noi studiato ha per scopo di indicare ai tecnici la diga di minimo volume sempre atta a mantenere l'equilibrio; al tecnico interessa invece di avere la diga più economica e non è detto che al minimo volume corrisponda il minimo costo. Basta ad esempio pensare che se per la costruzione di un dato profilo occorressero forti opere di centinatura, queste potrebbero incidere in modo rilevante sul costo dell'intera opera.

Occorre perciò fare delle ipotesi qualitative sui profili da prendere in esame, in modo da avere profili di carattere regolare dal punto di vista costruttivo.

A tali requisiti soddisfano le curve della seguente sottoclasse (K_δ) di (K_3).

Le curve di (K_δ) sono quelle curve C di (K_3) che soddisfano alle seguenti condizioni:

a) $D(C)$ è tutto contenuto nella striscia $0 \leq y \leq h + \delta$, dove δ è un numero non negativo fissato;

b) C può dividersi in tre archi e cioè: un intervallo della retta $y = 0$ e altri due archi, uno contenente il profilo a valle, l'altro il profilo a monte di C; nell'arco contenente il profilo a valle l'ascissa x dei suoi punti non decresce al crescere della quota y; nell'arco cotenente il profilo a monte la x non cresce al crescere della y.

In forma più precisa, se

$$x = x(s), \quad y = y(s) \qquad (0 \leq s \leq l)$$

sono le equazioni della curva C di (K_δ), deve aversi:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h,$$
$$0 \leq y(s) \leq h + \delta, \quad \text{per} \quad 0 \leq s \leq l$$

ed esistono i numeri $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ con

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \leq \sigma_4 \leq l$$

per cui è

$$\begin{array}{lll} y(s) \equiv 0 & \text{per} & \sigma_1 \leq s \leq \sigma_2, \\ 0 \lessdot y(s) < h & \text{per} & 0 < s < \sigma_1, \quad \sigma_2 < s < \sigma_3, \\ y(\sigma_3) = h, & & \\ h \leq y(s) \leq h + \delta & \text{per} & \sigma_3 < s < l. \end{array}$$

Inoltre le funzioni assolutamente continue $x(s)$ e $y(s)$ sono:

funzioni non crescenti di s per $0 \leq s \leq \sigma_1$ e per $\sigma_4 \leq s \leq l$; $x(s)$ non crescente, $y(s)$ non decrescente per $\sigma_2 \leq s \leq \sigma_4$; la curva C è chiusa, cioè è $x(l) = 0$, $y(l) = h$ e inoltre appartiene alla classe (K_3), cioè la curva delle pressioni è contenuta in $D(C)$.

Gli archi $0 \leq s \leq \sigma_1$, $\sigma_2 \leq s \leq \sigma_3$ saranno ancora detti rispettivamente profilo a valle e profilo a monte.

OSSERVAZIONE I: Si noti che la lunghezza l della curva C è variabile con C e che *l'insieme delle lunghezze delle curve di (K_δ) non è superiormente limitato.*

Mostriamo ciò con un esempio. Consideriamo il dominio, normale rispetto all'asse y, $D(C_\lambda)$, con base l'intervallo $(0, h)$ delimitato dalle curve di equazione

$$\begin{cases} x = \xi(y) = \dfrac{y - h}{\lambda}, \\ x = x(y) = 0 \end{cases} \qquad (0 \leq y \leq h).$$

Se λ è positivo e abbastanza piccolo allora C_λ appartiene a (K_δ); basta dimostrare che C_λ appartiene a (K_3) in quanto C_λ soddisfa a tutte le altre ipotesi per l'appartenenza a (K_δ). Fissato η con $0 \leq \eta < h$ e supposto $p(x, y) = p =$ costante si ha

$$\xi_\eta^*(C_\lambda) = \xi(\eta) + \frac{2}{3}[x(\eta) - \xi(\eta)] = \frac{\eta - h}{3\lambda};$$

è inoltre

$$P_\eta^*(C_\lambda) = \frac{p(h-\eta)^2}{2\lambda}.$$

È sempre $\gamma(y) \geq x(y)$; perchè C_λ appartenga a (K_3) deve essere inoltre $\xi(y) \leq \gamma(y)$. Se è

$$0 < \lambda \leq \sqrt{\frac{2p}{q}}$$

risulta

$$\lambda^2 \leq \frac{2p}{q},$$

da cui

$$\frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{3\lambda} + \frac{q\lambda}{3p};$$

ne segue

$$x(\eta) = \frac{\eta - h}{\lambda} \leq \frac{\eta - h}{3\lambda} - \frac{q}{6}(h-\eta)^3 \frac{2\lambda}{p(h-\eta)^2} = \gamma(\eta).$$

La lunghezza di C_λ è $\geq x(0) - \xi(0) = \frac{h}{\lambda}$ ed è grande quanto si vuole, purchè λ sia abbastanza piccolo.

OSSERVAZIONE II: Se, nella parte prima, invece delle classi (K_1) e (K_2) si fossero considerate le loro sottoclassi (K_1') e (K_2') costituite dalle curve aventi le proprietà di monotonia che ora si richiedono per quelle di (K_δ), anche in (K_1') e (K_2') il problema variazionale non avrebbe avuto soluzione.

Infatti le curve considerate nel n. 3 appartengono a (K_1') e a (K_2').

12. - APPARTENENZA DELLA CURVA DELLE PRESSIONI AL DOMINIO $D(C)$ PER LE CURVE C DI (K_δ).

Sia C una curva di (K_δ). In questo caso l'intervallo $[x(\sigma_\eta'), x(\sigma_\eta)]$ base di $D_\eta(C)$ [(v. n. 9)] può essere definito nel modo seguente:

σ'_η è il minimo valore di s per cui $y(s) = \eta$; il punto $[x(\sigma'_\eta), \eta]$ appartiene al profilo a valle;

σ_η è il massimo valore di s per cui è $y(s) = \eta$; il punto $[x(\sigma_\eta), \eta]$ appartiene al profilo a monte.

L'equivalenza delle due definizioni è immediata conseguenza del fatto che la funzione $x(s)$ è non crescente sugli archi $(0, \sigma_1)$ e (σ_2, σ_3). Da ciò segue pure che la condizione (17) e la la sua equivalente (9') si riducono a

$$x(s) \leq \gamma[y(s)] \quad \text{per} \quad 0 < s \leq \sigma_1 \quad \text{e} \quad y(s) < h,$$

$$x(s) \geq \gamma[y(s)] \quad \text{per} \quad \sigma_2 \leq s < \sigma_3 .$$

Poichè ogni punto di $D^*_\eta(C)$ ha ascissa $\leq x(\sigma_\eta)$ è sempre

$$\xi^*_\eta(C) \leq x(\sigma_\eta)$$

e perciò dalla (8') segue che sull'arco del profilo a monte è sempre

$$x(s) \geq \gamma[y(s)] .$$

Le condizioni (17) o (9'), che esprimono che la curva delle pressioni appartiene a $D(C)$, si riducono quindi alla

$$x(s) \leq \gamma[y(s)] \quad \text{per} \quad 0 < s \leq \sigma_1 \quad \text{e} \quad y(s) < h . \tag{18}$$

13. - STUDIO DELLA CURVA DELLE PRESSIONI PER UNA DATA C DI (K_δ).

Dimostriamo il seguente teorema relativo alla curva delle pressioni di ogni elemento C di (K_δ).

TEOREMA III: « *Per ogni curva C di (K_δ) la corrispondente curva delle pressioni ha una equazione $x = \gamma(y)$, dove $\gamma(y)$ è una funzione continua a destra e semicontinua inferiormente sull'intervallo $0 \leq y < h$* ».

Intersechiamo $D(C)$ con la retta $y = \eta$ $(0 \leq \eta < h)$ e distinguiamo i quattro casi seguenti:

1°) Il profilo a monte e quello a valle sono incontrati ciascuno in un sol punto;

2°) Il profilo a valle ha a comune con la retta $y = \eta$ un intervallo e quello a monte un solo punto;

3°) Il profilo a valle ha a comune con $y = \eta$ un solo punto e quello a monte un intervallo.

4^0) Entrambi i profili hanno a comune con la retta $y = \eta$ un intervallo.

Nel 1^0) caso i punti $[x(\sigma_\eta), \eta]$ e $[x(\sigma'_\eta), \eta]$ sono i punti di incontro della retta $y = \eta$ con i due profili di C e $\gamma(y)$ è una *funzione continua* per $y = \eta$. Infatti $\gamma(\eta)$ è espressa dalla (8') e le funzioni di y $\xi^*_y(C)$, $P^*_y(C)$ sono entrambe continue per $y = \eta$, con $P^*_\eta(C) \neq 0$.

Nel secondo caso il punto $[x(\sigma'_\eta), \eta]$ è quello di massima ascissa dell'intervallo comune a $y = \eta$ e al profilo a valle. Anche in questo caso $\gamma(y)$ è *continua* per $y = \eta$, essendolo ancora $\xi^*_y(C)$ e $P^*_y(C)$.

Nel 3^0) caso il punto $[x(\sigma_\eta), \eta]$ è il punto di minima ascissa dell'intervallo comune a $y = \eta$ ed al profilo a monte. La $x = \gamma(y)$ presenta una discontinuità di prima specie per $y = \eta$.

Infatti per $y \to \eta + 0$ si ha

$$\xi^*_y(C) \to \xi^*_\eta(C), \qquad P^*_y(C) \to P^*_\eta(C);$$

per $y \to \eta - 0$

$$P^*_y(C) \to P^*_\eta(C) + \lambda\, q\,(h - \eta),$$

dove λ è la lunghezza dell'intervallo comune al profilo a monte e a $y = \eta$; analogamente, per $y \to \eta - 0$, $\xi^*_y(C)$ ha per limite l'ascissa del baricentro della figura ottenuta aggiungendo a $D^*_\eta(C)$ il rettangolo avente per base il segmento $[x(\sigma_\eta), x(\sigma_\eta) + \lambda]$ della retta $y = \eta$ e altezza $(h - \eta)$ considerato riempito di liquido di densità q.

Nel 4^0) caso si ha ancora una discontinuità di prima specie per la funzione $\gamma(y)$.

Nel 3^0) e 4^0) caso si ha

$$\lim_{y \to \eta + 0} \xi^*_y(C) < \lim_{y \to \eta - 0} \xi^*_y(C),$$

$$\lim_{y \to \eta + 0} P^*_y(C) < \lim_{y \to \eta - 0} P^*_y(C),$$

perciò per la (8') è

$$\lim_{y \to \eta + 0} \gamma(y) = \gamma(\eta) \leq \lim_{y \to \eta - 0} \gamma(y) \tag{19}$$

che esprime che $\gamma(y)$ è continua a destra e semicontinua inferiormente.

Osservazione: Il teorema III, e in particolare la (19), continua a sussistere anche per le curve C che hanno le proprietà di monotonia delle curve di (K_δ) e che non verificano su tutto il profilo a valle la condizione espressa dalla (18) del n. 12.

14. - STUDIO DELLA CURVA DELLE PRESSIONI AL VARIARE DELLA CURVA C DI (K_δ).

Indichiamo con $x = \gamma(y)$ e $x = \overline{\gamma}(y)$ le equazioni delle curve delle pressioni relative agli elementi C e $\overline{C}$ di (K_δ). Dimostriamo il

TEOREMA IV: « *Data una curva C di (K_δ) e fissato $\lambda > 0$ ad arbitrio, si può determinare un numero $\mu > 0$ in modo che se $\overline{C}$ è una qualunque curva di (K_δ) differente da C al più lungo il profilo a valle e tale che l'intervallo intersezione di una qualsiasi retta $y = \eta < h$ col profilo a valle di $\overline{C}$ abbia estremi distanti meno di μ dagli estremi corrispondenti dell'intervallo interse zione di $y = \eta$ col profilo a valle di C, risulti*

$$|\gamma(y) - \overline{\gamma}(y)| < \lambda \qquad (0 \leq y < h) \text{ ».} \tag{20}$$

a) Supponiamo dapprima che C possieda un arco contenuto nella striscia $h < y \leq h + \delta$, arco che è comune anche alla $\overline{C}$; si ha perciò per ogni η, con $0 \leq \eta < h$,

$$P_\eta^*(C) > P_h(C) > 0,$$

$$P_\eta^*(\overline{C}) > P_h(\overline{C}) = P_h(C) > 0.$$

Si ha

$$\text{area } D_\eta^*(C) - \mu(h - \eta) \leq \text{area } D_\eta^*(\overline{C}) \leq \text{area } D_\eta^*(C) + \mu(h - \eta)$$

e quindi

$$\text{area } D_\eta^*(\overline{C}) = \text{area } D_\eta^*(C) + k\,\mu(h - \eta),$$

dove è $|k| \leq 1$; così pure è

$$P_\eta^*(\overline{C}) = P_\eta^*(C) + k\,\mu\,p\,(h - \eta), \tag{21}$$

con $\pi_1 \leq p \leq \pi_2$.

Ne segue

$$\frac{q(h-\eta)^3}{6}\left|\frac{1}{P_\eta^*(C)} - \frac{1}{P_\eta^*(\overline{C})}\right| = \frac{q(h-\eta)^3}{6}\,\frac{|k|\,\mu\,p\,(h-\eta)}{P_\eta^*(C)\,P_\eta^*(\overline{C})} \leq \tag{22}$$

$$\leq \frac{q\,h^4\,\pi_2}{6\,P_h(C)^2}\,\mu < \frac{\lambda}{2},$$

purchè sia

$$\mu < \frac{3\, P_h(C)^2}{q\, h^4\, \pi_2}\, \lambda .$$

Analogamente si prova che, se μ è abbastanza piccolo, è

$$|\, \xi^*_\eta(C) - \xi^*_\eta(\overline{C})\, | < \frac{\lambda}{2} \tag{23}$$

e quindi è provata la (20).

b) Supponiamo che C (e quindi $\overline{C}$) non possieda un arco nella striscia $h < y \leq h + \delta$.

Procuriamoci un'altra limitazione inferiore per $P^*_\eta(C)$.

Indichiamo con $L(\eta)$ la lunghezza della base di $D^*_\eta(C)$; $L(\eta)$ è funzione non crescente di η.

Essendo, come si è già notato nel n. 12, $\xi^*_\eta(C) \leq x(\sigma_\eta)$, si ha

$$L(\eta) = x(\sigma_\eta) - x(\sigma'_\eta) \geq \xi^*_\eta(C) - x(\sigma'_\eta)$$

e per la (17′) e (8′)

$$L(\eta) \geq \xi^*_\eta(C) - \gamma(\eta) = \frac{q\,(h-\eta)^3}{6\, P^*_\eta(C)} .$$

Essendo $D^*_\eta(C)$ contenuto nel rettangolo che ha per base quella di $D^*_\eta(C)$ e altezza $(h - \eta)$, risulta

$$P^*_\eta(C) \leq \pi_2\, L(\eta)\,(h-\eta)$$

e quindi

$$L(\eta) \geq \frac{q\,(h-\eta)^2}{6\,\pi_2\, L(\eta)} ,$$

da cui

$$L(\eta) \geq (h-\eta) \sqrt{\frac{q}{6\,\pi_2}} .$$

Perciò è

$$\text{area}\, D_\eta(C) \geq \int_\eta^h L(y)\, d\,y \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{6\,\pi_2}}\,(h-\eta)^2,$$

e quindi

$$P^*_\eta(C) \geq \frac{q}{2} \sqrt{\frac{q}{6\,\pi_2}}\,(h-\eta)^2. \tag{24}$$

Si osservi che il secondo membro di questa disuguaglianza non dipende da C e quindi vale per ogni curva, come la $\overline{C}$, che sta tutta nella striscia $0 \leq y \leq h$.

Sussiste ancora la (21) e perciò per la (24) si ha

$$\frac{q(h-\eta)^3}{6}\left|\frac{1}{P_\eta^*(C)}-\frac{1}{P_\eta^*(\overline{C})}\right|=\frac{q(h-\eta)^3}{6}\,\frac{|\,k\,|\,(h-\eta)\,p}{P_\eta^*(C)\,P_\eta^*\,(\overline{C})}\,\mu\leq\frac{4\,p\,\pi_2}{q^2}\,\mu<\frac{\lambda}{2}$$

purchè sia

$$\mu<\frac{q^2}{8\,\pi_2^2}\,\lambda\,.$$

Anche in questo caso vale quindi la (22) e analogamente la (23), da cui segue la (20).

TEOREMA V: « *Data una curva C di (K_δ), fissato $\lambda>0$ ad arbitrio, si può determinare un numero $\mu>0$ in modo che se $\overline{C}$ è una qualunque curva di (K_δ) con le seguenti proprietà:*

$D(\overline{C})\subset D(C)$;

C e $\overline{C}$ hanno lo stesso profilo a valle;

l'intervallo intersezione di una qualsiasi retta $y=\eta<h$ col profilo a monte di $\overline{C}$ ha estremi distanti meno di μ dagli estremi corrispondenti dell'intervallo intersezione di $y=\eta$ col profilo a monte di C;

l'arco di $\overline{C}$ contenuto nella striscia $h<y\leq h+\delta$ appartiene ordinatamente all'intorno (μ) del corrispondente arco di C; allora è

$$|\,\gamma(y)-\overline{\gamma}(y)\,|<\lambda \qquad (0\leq y<h)\,».$$

Indichiamo con $P_\eta(C)$ e $P_\eta(\overline{C})$ i pesi di $D_\eta(C)$ e $D_\eta(\overline{C})$ e con E la parte di $D(C)-D(\overline{C})$ che sta nella striscia $h<y\leq h+\delta$. Si ha

$$P_\eta^*(\overline{C})=P_\eta(\overline{C})+q\,\text{area}\,\{D_\eta^*(\overline{C})-D_\eta(\overline{C})\},$$

$$P_\eta^*(C)=P_\eta(C)+q\,\text{area}\,\{D_\eta^*(C)-D_\eta(C)\},$$

da cui

$$P_\eta^*(C)=P_\eta^*(\overline{C})+[P_\eta(C)-P_\eta(\overline{C})]+$$

$$+\,q\,[\text{area}\,\{D_\eta^*(C)-D_\eta(C)\}-\text{area}\,\{D_\eta^*(\overline{C})-D_\eta(\overline{C})\}]\,.$$

Si ha

$$\text{area}\,\{D_\eta^*(C)-D_\eta(C)\}-\text{area}\,\{D_\eta^*(\overline{C})-D_\eta(\overline{C})\}=$$

$$=\text{area}\,\{D_\eta^*(C)-D_\eta^*(\overline{C})-E\}-\text{area}\,\{D_\eta(C)-D_\eta(\overline{C})-E\}$$

ed è

$$\text{area}\,\{D_\eta^*(C)-D_\eta^*(\overline{C})-E\}\leq\mu\,(h-\eta),$$

$$\text{area}\,\{D_\eta(C)-D_\eta(\overline{C})-E\}\leq\mu\,(h-\eta).$$

Inoltre è

$$\text{area}\,\{D_\eta(C) - D_\eta(\overline{C})\} \leq \mu(h-\eta) + \text{area}\,E \leq \mu(h-\eta) + 2\,L\,\mu\,,$$

dove L è la lunghezza dell'arco di C compreso nella striscia $h \leq \mu \leq h + \delta$. Perciò è

$$P_\eta^*(C) = P_\eta^*(\overline{C}) + k\,p_1\,\mu(h-\eta) + \varepsilon\,p_2\,L\,\mu \tag{25}$$

con $|\,k\,| \leq 3$, $|\,\varepsilon\,| \leq 2$ e p_1, p_2 sono numeri compresi tra q e π_2.

Si può ora ripetere il ragionamento fatto nel Teorema IV sostituendo alla (21) la (25). Si osservi che se la C fosse tutta contenuta nella striscia $0 \leq y \leq h$, lo stesso accade per $\overline{C}$ essendo $D(\overline{C}) \subset D(C)$. In tal caso nella (25) è $\varepsilon = 0$ e si può seguire il procedimento del Teorema IV, caso *b*).

15. - LIMITAZIONE INFERIORE PER L'ASCISSA DEL BARICENTRO.

Sia C una qualunque curva di (K_δ) ed $\overline{y}$ un valore di y con $0 \leq \overline{y} < h$; consideriamo il dominio $D_{\overline{y}}^*(C)$ [v. n. 10] con la distribuzione di materia $p(x, y; \overline{y})$, e sia $\xi_{\overline{y}}^*(C)$ l'ascissa del suo baricentro; indichiamo con $x = a$ e $x = b$ le ascisse minima e massima della base di $D_{\overline{y}}^*(C)$ sulla retta $y = \overline{y}$.

TEOREMA VI: « *Si può fissare un numero* ϱ, *con* $0 < \varrho < 1$, *per cui è*

$$\xi_{\overline{y}}^*(C) \geq a + \varrho(b - a), \tag{26}$$

qualunque siano la curva C *di* (K_δ) *e* $\overline{y}$, *con* $0 \leq \overline{y} < h$ ».

a) Se C possiede punti nella striscia $h < y \leq h + \delta$ consideriamo l'arco $\sigma_3 \leq s \leq \sigma_4$ di C, nel quale $x(s)$ non è crescente e $y(s)$ non decrescente. Sia R il rettangolo che ha per base il segmento $[h, y(\sigma_4)]$ della retta $x = x(\sigma_4)$, situato nel semipiano $x > x(\sigma_4)$ e tale che la sua area sia la stessa del sottoinsieme Δ dei punti di $D(C)$ per cui è $x \geq x(\sigma_4)$, $y \geq h$; il lato di R opposto alla detta base sta sulla retta $x = \overline{x}$, con $\overline{x} \leq x(\sigma_3)$.

Indichiamo con Δ_1 la parte di Δ che non sta in R e con Δ_2 quella di R che non sta in Δ; è area $\Delta_1 =$ area Δ_2.

Posto

$$p_1 = \frac{1}{\text{area}\,\Delta_1}\iint\limits_{\Delta_1} p(x, y)\,d\,x\,d\,y\,,$$

se poniamo in R

$$p_1(x, y) = \begin{cases} p_1 & \text{in } \Delta_2, \\ p(x, y) & \text{in } R - \Delta_2, \end{cases}$$

R ha lo stesso peso di Δ e inoltre l'ascissa del suo baricentro è minore o uguale dell'ascissa del baricentro di Δ. Perciò se in $D^*_{\bar{y}}(C)$ sostituiamo R, con la distribuzione $p_1(x, y)$, a Δ otteniamo un nuovo dominio, che diremo D_1, il cui baricentro ha un'ascissa $\xi_1 \leq \xi^*_{\bar{y}}(C)$.

Indicheremo con $p_1(x, y)$ la funzione coincidente con $p_1(x, y)$ in R e con $p(x, y)$ fuori di R.

In D_1 si ha la distribuzione di materia $p_1(x, y; \bar{y})$ che coincide con $p_1(x, y)$ per $y > h$ e $x \leq \bar{x}$, mentre per $\bar{y} \leq y \leq h$ è

$$p_1(x, y; \bar{y}) = \begin{cases} p_1(x, y) & \text{in } D_{\bar{y}}(C), \\ q & \text{in } D^*_{\bar{y}}(C) - D_{\bar{y}}(C). \end{cases}$$

Per $y > h$ e $x > \bar{x}$ poniamo $p_1(x, y; \bar{y}) = q$.

b) Consideriamo ora il dominio D_2 ottenuto da D_1 aggiungendogli il rettangolo che ha per base il segmento $(\bar{x}, b)$ della retta $y = h$, altezza $y(\sigma_4) - h$ e situato nel semipiano $y > h$.

Eseguiamo in D_2 la nuova distribuzione di materia.

$$p_2(x, y) = \begin{cases} p_1(x, y; \bar{y}) & \text{per} \quad x \leq \bar{x}, \\ p_1(x, y; \bar{y}) - q \dfrac{y(\sigma_4) - h}{y(\sigma_4)} & \text{per} \quad x > \bar{x}. \end{cases}$$

Si ha

$$\text{peso } D_2 = \text{peso } D_1 - q \frac{y(\sigma_4) - h}{y(\sigma_4)} \int_0^h dy \int_{\bar{x}}^b dx + q \frac{h}{y(\sigma_4)} \int_h^{y(\sigma_4)} dy \int_{\bar{x}}^b dx = \text{peso } D_1 .$$

L'ascissa ξ_2 del baricentro di D_2 è

$$\xi_2 = \xi_1 + \frac{1}{\text{peso } D_1} \left\{ - q \frac{y(\sigma_4) - h}{y(\sigma_4)} \int_0^h dy \int_{\bar{x}}^b x\, dx + q \frac{h}{y(\sigma_4)} \int_h^{y(\sigma_4)} dy \int_{\bar{x}}^b x\, dx \right\} = \xi_1 .$$

Perciò se ξ_2 è l'ascissa del baricentro di D_2, con la distribuzione $p_2(x, y)$, è $\xi_2 \leq \xi^*_{\bar{y}}(C)$. Inoltre D_2 per $x > \bar{x}$ coincide col rettangolo di base $(\bar{x}, b)$ sulla retta $y = \bar{y}$ e altezza $y(\sigma_4) - \bar{y}$; perciò, dette $X(\eta)$ e $\bar{X}(\eta)$ le ascisse minima e massima dell'intersezione di D_2 con la retta $y = \eta$, $X(\eta)$ è funzione non decrescente di η per $\bar{y} \leq \eta \leq y(\sigma_4)$, $\bar{X}(\eta)$ è costante.

c) La distribuzione $p_2(x, y)$ soddisfa alla limitazione

$$q \frac{h}{h+\delta} \leq q \frac{h}{y(\sigma_4)} \leq p_2(x, y) \leq \pi_2;$$

perciò se ξ_3 è l'ascissa del baricentro di D_2 con la distribuzione $p_3(x, y)$

$$p_3(x, y) = \begin{cases} \pi_2 & \text{se} \quad x \leq \xi_3, \\ q \dfrac{h}{h+\delta} & \text{se} \quad x > \xi_3, \end{cases}$$

è certamente $\xi_3 \leq \xi_2 \leq \xi^*_{\bar{y}}(C)$.

d) Nel rettangolo D_3 avente per base il segmento (a, b) della retta $y = \bar{y}$, altezza $y(\sigma_4) - \bar{y}$ e contenente D_2 diamo la distribuzione $p_3(x, y)$; per l'ascissa ξ_4 del baricentro di D_3 è $\xi_4 \leq \xi_3$. Infatti, essendo ξ_3 ascissa del baricentro di D_2, ed $X(\eta)$ funzione non decrescente di η, la base di D_2, formata dal segmento (a, b) della retta $y = \bar{y}$, ha per baricentro il punto $x = \xi_4$ ed è $\xi_4 \leq \xi_3 \leq \xi^*_{\bar{y}}(C)$.

e) Se in D_3 si dà la nuova distribuzione

$$p_4(x, y) = \begin{cases} \pi_2 & \text{se} \quad x \leq \xi, \\ q \dfrac{h}{h+\delta} & \text{se} \quad x < \xi, \end{cases}$$

dove ξ è l'ascissa del baricentro di D_3 è $\xi \leq \xi_4 \leq \xi^*_{\bar{y}}(C)$.

Calcoliamo ξ; si ha

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\pi_2(\xi^2 - a^2) + q \dfrac{h}{h+\delta}(b^2 - \xi^2)}{\pi_2(\xi - a) + q \dfrac{h}{h+\delta}(b - \xi)}$$

e sviluppando si ottiene l'equazione a cui soddisfa ξ

$$\left(\pi_2 - \frac{q\,h}{h+\delta}\right)\xi^2 - 2\left(\pi_2\, a - \frac{q\,h\,b}{h+\delta}\right)\xi + a^2\pi_2 - \frac{q\,h}{h+\delta}\,b^2 = 0\,.$$

Dovendo essere $\xi > a$ si ricava

$$\xi = \frac{\pi_2 a - \frac{q h}{h+\delta} b + (b-a)\sqrt{\pi_2 q \frac{h}{h+\delta}}}{\pi_2 - \frac{q h}{h+\delta}},$$

da cui

$$\xi - a = (b-a)\frac{\sqrt{\frac{q}{\pi_2}\frac{h}{h+\delta}} - \frac{q}{\pi_2}\frac{h}{h+\delta}}{1 - \frac{q}{\pi_2}\frac{h}{h+\delta}}.$$

Essendo per la (1')

$$\frac{q}{\pi_2} < 1, \quad \frac{h}{h+\delta} \leq 1,$$

posto

$$\varrho = \frac{\sqrt{\frac{q}{\pi_2}\frac{h}{h+\delta}} - \frac{q}{\pi_2}\frac{h}{h+\delta}}{1 - \frac{q}{\pi_2}\frac{h}{h+\delta}},$$

risulta

$$0 < \varrho < 1$$

ed è

$$\xi = a + \varrho(b-a) \leq \xi_{\bar{y}}^{*}(C),$$

che prova la (30), qualunque siano la C di (K_δ) ed $\bar{y}$.

16. - PROPRIETÀ DELLE CURVE DELLA CLASSE (K_δ).

TEOREMA VII: « *Se C' è una qualunque curva di (K_δ) si può costruire una curva C di (K_δ) con $D(C) \subset D(C')$ e quindi*

$$\text{area } D(C) \leq \text{area } D(C')$$

e avente una delle seguenti proprietà:

α) il profilo a valle di C sta tutto sulla retta $x = 0$,

oppure

β) il profilo a valle di C incontra la retta $x = x(\sigma_1)$ in un intervallo — riducentesi eventualmente al solo punto $[x(\sigma_1), 0]$ — e tale intervallo contiene almeno un punto della curva delle pressioni ».

Per comodità di notazione la C' sarà indicata nella dimostrazione con C e la C dell'enunciato sarà la curva C_{ε_0} che si verrà a costruire.

a) Sia C una curva di (K_δ) e indichiamo con C_ε la frontiera del dominio ottenuto togliendo da $D(C)$ tutti i punti (x, y) con $x < x(\sigma_1) + \varepsilon$, per $\varepsilon \geq 0$; con $x = \gamma_\varepsilon(y)$ indichiamo la curva delle pressioni di C_ε e con I l'insieme degli ε per cui C_ε appartiene a (K_δ). I contiene $\varepsilon = 0$ ed è superiormente limitato; infatti se C_ε appartiene a (K_δ) deve passare per il punto H e perciò è $\varepsilon \leq -x(\sigma_1)$.

Detto ε_0 l'estremo superiore di I, *dimostriamo che* C_{ε_0} *appartiene a* (K_δ).

Ammettiamo che ε_0 non appartenga ad I e sia quindi un elemento di accumulazione di I. C_{ε_0} differisce da C solo per un arco del profilo a valle e tale arco di C_{ε_0} sta sulla retta $x = x(\sigma_1) + \varepsilon_0$; lungo l'arco *chiuso* A comune ai profili a valle di C_{ε_0} e C è $\gamma_{\varepsilon_0}(y) = \gamma(y)$. Perciò se C_{ε_0} non appartiene a (K_δ) esiste un punto $y = \eta$ della curva delle pressioni $x = \gamma_{\varepsilon_0}(y)$ che non appartiene a $D(C_{\varepsilon_0})$, η essendo inferiore alla minima ordinata dei punti di A; ne segue che $y = \eta$ incontra il profilo a valle di C_{ε_0} nel solo punto $x = x(\sigma_1) + \varepsilon_0$ ed è

$$x(\sigma_1) + \varepsilon_0 - \gamma_{\varepsilon_0}(\eta) = 2\lambda > 0. \tag{27}$$

Per il Teorema IV (n. 14) si può determinare μ, con $0 < \mu < \lambda$, in modo che sia

$$|\gamma_{\varepsilon_0}(y) - \bar{\gamma}(y)| < \lambda$$

per ogni $\bar{C}$ distinta da C_{ε_0} al più lungo il profilo a valle, i profili a valle di $\bar{C}$ e C_{ε_0} essendo incontrati dalle parallele all'asse x in intervalli aventi estremi corrispondenti distanti meno di μ e dove $x = \bar{\gamma}(y)$ è la curva delle pressioni di $\bar{C}$. Se ε è un elemento di I con $\varepsilon_0 - \mu < \varepsilon < \varepsilon_0$, risulta quindi

$$|\gamma_{\varepsilon_0}(\eta) - \gamma_\varepsilon(\eta)| < \lambda,$$

da cui

$$\gamma_\varepsilon(\eta) < \gamma_{\varepsilon_0}(\eta) + \lambda. \tag{28}$$

L'estremo inferiore dell'intervallo in cui $y = \eta$ incontra il profilo a valle di C_ε ha un'ascissa $\nu \geq x(\sigma_1) + \varepsilon$ e quindi per le (27) e (28) si ha

$$\gamma_\varepsilon(\eta) < x(\sigma_1) + \varepsilon_0 - \lambda < x(\sigma_1) + \varepsilon_0 - \mu < x(\sigma_1) + \varepsilon \leq \nu$$

che esprime che il punto $[\gamma_\varepsilon(\eta), \eta]$ non appartiene a $D(C_\varepsilon)$ ossia che C_ε non appartiene a (K_δ), contro l'ipotesi che ε appartenga ad I. È così dimostrato che C_{ε_0} appartiene a (K_δ).

Per la costruzione fatta è $D(C_{\varepsilon_0}) \subset D(C)$ e quindi area $D(C_{\varepsilon_0}) \leq$ area (DC).

b) Se è $x(\sigma_1)+\varepsilon_0=0$, la curva C_{ε_0} ha la proprietà α) e il teorema è dimostrato.

c) Sia $x(\sigma_1)+\varepsilon_0<0$ e proviamo che la C_{ε_0} ha la proprietà β), espressa nell'enunciato del teorema.

Siano $x=x_\varepsilon(s)$, $y=y_\varepsilon(s)$ le equazioni della C_ε. Se C_{ε_0} non ha la proprietà β), sia $\sigma^0\leq s\leq\sigma_1^0$ l'arco Γ di C_{ε_0} in cui il profilo a valle di C_{ε_0} appartiene alla retta $x=x(\sigma_1)+\varepsilon_0$. Poichè per $s=0$ C_{ε_0} passa per H è $\sigma^0>0$. Si può determinare σ^* con $0<\sigma^*<\sigma^0$ in modo che per $\sigma^*\leq s<\sigma^0$ la differenza $\gamma_{\varepsilon_0}[y_{\varepsilon_0}(s)]-x_{\varepsilon_0}(s)$ risulti sempre positiva.

Tale differenza è sempre non negativa perchè C_{ε_0} appartiene a (K_δ) [V. la (18) del n. 12]; se, comunque sia σ^* prossimo a σ^0 vi fossero valori di s con $\sigma^*\leq s<\sigma^0$ per cui tale differenza è nulla si avrebbe per la (19)

$$\lim_{s\to\sigma^0-0}\{\gamma_{\varepsilon_0}[y_{\varepsilon_0}(s)]-x_{\varepsilon_0}(s)\}=\lim_{y\to y(\sigma^0)+0}\gamma_{\varepsilon_0}[y]-x_{\varepsilon_0}(\sigma^0)=\gamma\,[y_{\varepsilon_0}(\sigma^0)]-x_{\varepsilon_0}(\sigma^0)=0$$

e sull'estremo $s=\sigma^0$ di Γ si avrebbe un punto della curva delle pressioni, mentre si è supposto che non sussista la β).

Fissato uno di questi σ^*, con $0<\sigma^*<\sigma^0$, la funzione

$$\gamma_{\varepsilon_0}[y_{\varepsilon_0}(s)]-x_{\varepsilon_0}(s)$$

è una funzione semicontinua inferiormente su $(\sigma^*.\sigma_1^0)$ [Teorema III] ed ha un minimo $2\lambda>0$, non sussistendo la β).

Per la definizione di Γ è inoltre $x_{\varepsilon_0}(\sigma^*)-x_{\varepsilon_0}(\sigma^0)>0$.

Fissato così λ, si determini il numero $\mu<\lambda$ in base al Teorema IV, ove si ponga $C=C_{\varepsilon_0}$. Sia ε un numero con

$$\varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_0+\mu\,,\quad \varepsilon<\varepsilon_0+x_{\varepsilon_0}(\sigma^*)-x_{\varepsilon_0}(\sigma^0)\,;$$

la curva C_ε è una delle C del Teorema IV ed è

$$\gamma_\varepsilon(\eta)>\gamma_{\varepsilon_0}(\eta)-\lambda\,,\qquad\qquad \text{per}\quad 0\leq\eta<h\,.$$

Indichiamo con $\bar{s}$ il massimo valore di s per cui (su C_{ε_0}) è $x_{\varepsilon_0}(\bar{s})=x(\sigma_1)+\varepsilon$; essendo

$$x(\sigma_1)+\varepsilon=x_{\varepsilon_0}(\sigma^0)+\varepsilon-\varepsilon_0<x_{\varepsilon_0}(\sigma^*)\,,$$

risulta $\bar{s}<\sigma^*$.

Per $\eta\geq y_{\varepsilon_0}(\bar{s})$, C_ε coincide con C_{ε_0} e così pure coincidono gli archi delle rispettive curve delle pressioni per $h<\eta\leq y_{\varepsilon_0}(\bar{s})$.

Per $\eta < y_{\varepsilon_0}(\overline{s})$, se è $y_{\varepsilon_0}(s_\eta) = \eta$ è anche $s_\eta > \overline{s}$ e quindi s_η appartiene all'intervallo (σ^*, σ_1^0) in cui è

$$\gamma_{\varepsilon_0}(\eta) - x_{\varepsilon_0}(s_\eta) \geq 2\lambda .$$

Ne segue, indicato con s'_η il primo valore di s (su C_ε) per cui $y_\varepsilon(s'_\eta) = \eta$,

$$\gamma_\varepsilon(\eta) > \gamma_{\varepsilon_0}(\eta) - \lambda > x_{\varepsilon_0}(s_\eta) + \lambda > x_\varepsilon(s'_\eta) - \mu + \lambda > x_\varepsilon(s'_\eta) .$$

Quindi è

$$\gamma_\varepsilon[y_\varepsilon(s)] \geq x_\varepsilon(s)$$

per ogni s con $0 \leq y_\varepsilon(s) < h$ e ciò prova che C_ε appartiene a (K_δ), contro l'ipotesi che ε_0 sia l'estremo superiore dell'insieme I. Perciò C_{ε_0} deve avere la proprietà β) e il Teorema VII è così dimostrato.

TEOREMA VIII: « *Se C' è una qualunque curva di (K_δ) si può costruire una curva C di (K_δ) con $D(C) \subset D(C')$ e quindi*

$$\text{area } D(C) \leq \text{area } D(C')$$

tale che la curva delle pressioni ha a comune col profilo a valle un punto $[x(\overline{\sigma}), y(\overline{\sigma})]$, in cui essa è continua; la retta $y = y(\overline{\sigma})$ incontra il profilo a monte nel solo punto $x = x(\sigma_2)$ e la parte di $D(C)$ che sta nella striscia $0 \leq y \leq y(\overline{\sigma})$ è il rettangolo che ha per base sull'asse x l'intervallo $x(\overline{\sigma}) = x(\sigma_1) \leq x \leq x(\sigma_2)$ e altezza $y(\overline{\sigma})$ ».

Per il Teorema VII possiamo passare dalla curva C' di (K_δ) a una curva C, con area $D(C) \leq$ area $D(C')$, avente le proprietà α) o β).

a) Supponiamo che C abbia la proprietà β) del Teorema VII.

C è una curva di (K_δ) tale che il profilo a valle contiene un arco (σ_1^*, σ_1) — eventualmente riducentesi a un solo punto — che giace sulla retta $x = x(\sigma_1)$ e che contiene almeno un punto della curva delle pressioni; sia $\overline{y}$ la minima ordinata di tali punti.

Indichiamo con C_ε la frontiera del dominio ottenuto togliendo da $D(C)$ tutti i punti con $x > x(\sigma_2) - \varepsilon$, con $\varepsilon \geq 0$.

Analogamente a come si è fatto nella dimostrazione del Teorema VII [*a*)], usufruendo del Teorema V invece che del Teorema IV, si dimostra che se ε_0 è l'estremo superiore degli ε per cui C_ε appartiene a (K_δ), la curva C_{ε_0} appartiene a (K_δ).

La retta $x = x(\sigma_2) - \varepsilon_0$ contiene un arco (eventualmente riducentesi a un punto) del profilo a monte di C_{ε_0} e sia Y la massima ordinata dei punti di tale arco. Dimostriamo che sull'arco del profilo a valle di C_{ε_0} che sta sulla retta $x = x(\sigma_1)$ esiste un punto della curva delle presssioni di ordinata $y \leq Y$.

Sull'arco di C_{ε_0} che sta sulla retta $x = x(\sigma_1)$ esistono certamente punti della curva delle pressioni di ordinata $\leq \bar{y}$, in quanto la C_{ε_0} coincide, nella striscia $\bar{y} \leq y \leq h + \delta$ con la C; infatti se ciò non fosse sarebbe

$$\xi^*_{\bar{y}}(C_{\varepsilon_0}) < \xi^*_{\bar{y}}(C),$$

$$P^*_{\bar{y}}(C_{\varepsilon_0}) < P^*_{\bar{y}}(C)$$

e quindi per la (8) si avrebbe $\gamma_{\varepsilon_0}(\bar{y}) < \gamma(\bar{y})$, da cui, per la definizione di $\bar{y}$, si dedurrebbe che C_{ε_0} non appartiene a (K_δ).

Se non ci fossero sull'arco $x = x(\sigma_1)$ di C_{ε_0} punti della curva delle pressioni con ordinata $\leq Y$, si potrebbe determinare Y' con $Y < Y' < \bar{y}$ tale che in tutto il segmento $(0, Y')$ della retta $x = x(\sigma_1)$ non esistano punti della curva delle pressioni.

Ripetendo un ragionamento già fatto nella dimostrazione del Teorema VII [c)] se ne deduce che esistono $\varepsilon > \varepsilon_0$ per cui C_ε appartiene ancora alla classe (K_δ), contro l'ipotesi che ε_0 sia l'estremo superiore degli ε per cui C_ε sta in (K_δ).

È così dimostrato che sull'arco $x = x(\sigma_1)$ di C_ε esiste un punto $[x(\sigma_1), y_1]$ della curva delle pressioni con ordinata $y_1 \leq Y$; con y_1 indichiamo la minima ordinata di tali punti.

Se è $y_1 = Y$ la retta $y = y_1$ non può avere a comune col profilo a monte di C_{ε_0} un intervallo; infatti in tal caso sarebbe per la (19) del n. 13

$$\lim_{y \to y_1 - 0} \gamma_{\varepsilon_0}(y) > \gamma_{\varepsilon_0}(y_1) = x(\sigma_1)$$

e $x(\sigma_1) - \gamma_{\varepsilon_0}(y)$ avrebbe un estremo inferiore positivo nell'intervallo $0 \leq y < y_1$. Perciò con un ragionamento già fatto nella dimostrazione del Teorema VII [c)], ne seguirebbe che esisterebbero degli $\varepsilon > \varepsilon_0$ per cui C_ε appartiene a (K_δ).

Quindi la retta $y = y_1$ incontra il profilo a monte in un sol punto e perciò la funzione $\gamma_{\varepsilon_0}(y)$ è continua per $y = y_1$.

Se si pone $C = C_{\varepsilon_0}$ il Teorema VIII è in questo caso dimostrato.

b) Se la curva C del Teorema VII ha la proprietà α) la dimostrazione si conduce in modo analogo.

Il seguente Teorema chiarisce la struttura della classe (K_δ).

TEOREMA IX: « *Ad ogni numero N sufficientemente grande si può far corrispondere un rettangolo R del piano xy con la proprietà che se C' è una* *qualunque curva di* (K_δ) *con area* $D(C') \leq N$, *si può costruire una* C *di* (K_δ) *con area* $D(C) \leq$ *area* $D(C')$ *che è tutta contenuta in* R *e che ha le proprietà espresse per la curva* C *nel Teorema VIII».*

Fissato il numero N in modo che esistano curve di (K_δ) racchiudenti un'area $\leq N$, sia C' una di tali curve.

Sia C la curva che corrisponde a C' per il Teorema VIII; basterà definire R, dipendente solo da N e non da C', e dimostrare che C appartiene ad R.

Distinguiamo due casi:

1^0 *caso*: Sia $y(\bar{\sigma}) \geq \frac{h}{2}$.

In tal caso è

$$\text{area}\, D(C) \geq [x(\sigma_2) - x(\sigma_1)]\frac{h}{2},$$

contenendo $D(C)$ il rettangolo di altezza $\frac{h}{2}$ e base $[x(\sigma_1), x(\sigma_2)]$ sull'asse x.

Essendo

$$\text{area}\, D(C) \leq N,$$

risulta

$$x(\sigma_2) - x(\sigma_1) \leq \frac{2N}{h}$$

ed essendo $x(\sigma_1) \leq 0$, $x(\sigma_2) \geq 0$,

$$x(\sigma_1) \geq -\frac{2N}{h}, \quad x(\sigma_2) \leq \frac{2N}{h}.$$

Se per R si assume il rettangolo R_1 del piano xy avente per base sull'asse x l'intervallo

$$\left(-\frac{2N}{h}, \frac{2N}{h}\right)$$

e altezza $h + \delta$, la curva C è contenuta in R_1.

2^0 *caso*: Sia $y(\bar{\sigma}) < \frac{h}{2}$.

Consideriamo la parte di $D(C)$ per cui è $y \geq y(\bar{\sigma})$ che si appoggia alla retta $y = y(\bar{\sigma})$ sull'intervallo $x(\sigma_1) \leq x \leq x(\sigma_2)$.

Per il Teorema VI (n. 15) detta $\xi^*_{y(\bar{\sigma})}(C)$ l'ascissa del baricentro $D^*_{y(\bar{\sigma})}(C)$ si ha

$$\xi^*_{y(\bar{\sigma})}(C) \geq x(\sigma_1) + \varrho\,[x(\sigma_2) - x(\sigma_1)],$$

dove ϱ è un numero fissato, con $0 < \varrho < 1$. Poichè il rettangolo che ha per base l'intervallo $[0, x(\sigma_2)]$ della retta $y = y(\bar{\sigma})$ e altezza $h - y(\bar{\sigma})$, situato nel semipiano $y > y(\bar{\sigma})$, è contenuto in $D^*_{y(\bar{\sigma})}$, risulta

$$P^*_{y(\bar{\sigma})}(C) > q\, x(\sigma_2)\, [h - y(\bar{\sigma})]$$

e quindi è

$$\frac{q\,[h - y(\bar{\sigma})]^3}{6\, P^*_{y(\bar{\sigma})}(C)} < \frac{h^2}{6\, x(\sigma_2)} .$$

Se fosse

$$x(\sigma_2) > h \sqrt{\frac{1}{6\,\varrho}}$$

ne seguirebbe

$$\varrho\, x(\sigma_2) > \frac{h^2}{6\, x(\sigma_2)}$$

e quindi, avendosi $x(\sigma_1) \leq 0$, risulterebbe

$$\xi^*_{y(\bar{\sigma})}(C) - x(\sigma_1) \geq \varrho\,[x(\sigma_2) - x(\sigma_1)] \geq \varrho\, x(\sigma_2) > \frac{q\,[h - y(\bar{\sigma})]^3}{6\, P^*_{y(\bar{\sigma})}(C)} .$$

Essendo per la (8′)

$$\xi^*_{y(\bar{\sigma})}(C) - \frac{q\,(h - y(\bar{\sigma})]^3}{6\, P^*_{y(\bar{\sigma})}(C)} = \gamma\,[y(\bar{\sigma})] ,$$

ne segue

$$\gamma(y(\bar{\sigma})) > x(\sigma_1) = x(\bar{\sigma}),$$

che contraddice l'ipotesi che la curva delle pressioni passi per il punto $x = x(\bar{\sigma})$, $y = y(\bar{\sigma})$.

Deve quindi essere

$$x(\sigma_2) \leq h \sqrt{\frac{1}{6\,\varrho}}$$

Procuriamoci un'altra limitazione inferiore per $P^*_{y(\bar{\sigma})}(C)$.

Se è $\eta < h$ si indichi con $L(\eta)$ la lunghezza dell'intervallo base di $D_\eta(C)$ sulla retta $y = \eta$; poichè C appartiene a (K_δ) deve essere [V. Teorema IV, *b*)]

$$L(\eta) \geq \frac{q\,(h - \eta)^3}{6\, P^*_\eta(C)} \geq \frac{q\,(h - \eta)^3}{6\,\pi_2\, L(\eta)\,[h + \delta - \eta)} ,$$

da cui

$$L(\eta) \geq \sqrt{\frac{q\,(h-\eta)^3}{6\,\pi_2\,(h+\delta-\eta)}}\,. \tag{29}$$

Perciò è

$$\text{area } D_{\bar{y}\,(\sigma)}\,(C) > \int_{y\,(\bar{\sigma})}^{h} \sqrt{\frac{q\,(h-\eta)^3}{6\,\pi_2\,(h+\delta-\eta)}}\,d\,\eta > \int_{\frac{h}{2}}^{h} \sqrt{\frac{q\,(h-\eta)^3}{6\,\pi_2\,(h+\delta-\eta)}}\,d\eta = k > 0.$$

Nè segue che è

$$P^*_{y\,(\bar{\sigma})}\,(C) > k\,\pi_1\,.$$

Supponiamo che sia

$$|\,x\,(\sigma_1)\,| = -\,x\,(\sigma_1) > \frac{q\,h^3}{6\,k\,\pi_1\,\varrho}\,.$$

Essendo

$$\frac{q\,h^3}{6\,k\,\pi_1\,\varrho} > \frac{q\,[h - y\,(\bar{\sigma})]^3}{6\,\varrho\,P^*_{y\,(\bar{\sigma})}\,(C)}\,,$$

risulta

$$-\,x\,(\sigma_1)\,\varrho > \frac{q\,[h - y\,(\bar{\sigma})]^3}{6\,P^*_{y\,(\bar{\sigma})}\,(C)}\,;$$

essendo per il Teorema VI

$$\xi^*_{y\,(\bar{\sigma})}\,(C) - x\,(\sigma_1) > \varrho\,[x\,(\sigma_2) - x\,(\sigma_1)] > -\,\varrho\,x\,(\sigma_1)\,,$$

ne segue

$$\xi^*_{y\,(\bar{\sigma})}\,(C) - x\,(\sigma_1) > \frac{q\,[h - y\,(\bar{\sigma})]^3}{6\,P^*_{y\,(\bar{\sigma})}\,(C)}\,,$$

ossia ancora

$$\gamma\,(y\,(\bar{\sigma})) > x\,(\sigma_1) = x\,(\bar{\sigma})$$

e la curva delle pressioni non passerebbe per il punto $[x\,(\bar{\sigma})\,,\,y\,(\bar{\sigma})]$.

Deve perciò essere

$$x\,(\sigma_1) > -\,\frac{q\,h^3}{6\,k\,\pi_1\,\varrho}\,.$$

Si può quindi assumere come rettangolo R il rettangolo R_2 che ha per base sull'asse x l'intervallo

$$-\,\frac{q\,h^3}{6\,k\,\pi_1\,\varrho} \leq x \leq h\,\sqrt{\frac{1}{6\,\varrho}}$$

e l'altezza $h+\delta$, situato nel semipiano $y > 0$.

Detto R un rettangolo che contenga R_1 ed R_2 è così dimostrato che R, indipendente da C, contiene C.

17. - ESISTENZA DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA VARIAZIONALE NELLA CLASSE (K_δ).

TEOREMA X: «*Il funzionale area $D(C)$ ha minimo nella classe (K_δ)*».

a) Detto i l'estremo inferiore di area $D(C)$ in (K_δ) sia $\{C'_n\}$ una successione di curve di (K_δ) per cui si abbia

$$\text{area}\, D(C'_n) < i + \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Fissato $N = i + 1$, determiniamo il rettangolo R del Teorema IX del n. 16 e, posto $C' \equiv C'_n$, sia C_n la curva rappresentata in tale Teorema con C. È ancora

$$\text{area}\, D(C_n) < i + \frac{1}{n} \tag{30}$$

e C_n appartiene ad R.

Siano $x = x_n(s)$ $y = y_n(s)$ le equazioni di C_n e $\sigma_{1,n}$, $\sigma_{2,n}$, $\sigma_{3,n}$, $\sigma_{4,n}$, l_n i valori di s che limitano gli archi di C_n ove le $x_n(s)$ e $y_n(s)$ hanno le proprietà indicate nel n. 11; se $x = \gamma_n(y)$ è l'equazione della curva delle pressioni esiste un valore $\overline{\sigma}_n$ di s $(0 \leq \overline{\sigma}_n \leq \sigma_{1,n})$ tale che la curva delle pressioni passa per il punto $[x_n(\overline{\sigma}_n), , y_n(\overline{\sigma}_n)]$, con $x_n(\overline{\sigma}_n) = x_n(\sigma_{1,n})$; la parte di $D(C_n)$ che sta nella striscia $0 \leq y \leq y_n(\overline{\sigma}_n)$ è un rettangolo e la retta $y = y(\overline{\sigma}_n)$ incontra il profilo a monte di C_n in un solo punto di ascissa $x_n(\sigma_{2,n})$.

Ogni curva C di (K_δ) contenuta in R ha lunghezza non superiore al perimetro di R. Perciò le C_n hanno lunghezza complessivamente limitata e per un noto teorema di HILBERT ([3]) la successione $\{C_n\}$ possiede almeno una curva di accumulazione, che indicheremo con C_0, di equazioni $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$ $0 \leq s \leq l_0$, con $x_0(s)$ e $y_0(s)$ assolutamente continue; inoltre C_0, come le C_n, è una curva chiusa.

Poichè area $D(C)$ è un funzionale continuo di C segue dalla (30) che è

$$\text{area}\, D(C_0) = i.$$

([3]) Cfr. ad es. L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Bologna, Ed. Zanichelli, Vol. I, pag. 87; per la definizione di curva d'accumulazione, v. pag. 73.

Per dimostrare che C_0 dà il minimo a $D(C)$ in (K'_δ) basta quindi provare che C_0 appartiene a (K_δ).

b) Poichè ogni C_n passa per $H \equiv (0, h)$, anche C_0 passa per H.

Indicata con $L_n(\eta)$ la lunghezza dell'intervallo di base di $D_\eta(C_n)[0 \leq \eta \leq h]$, si ha, analogamente alla (29).

$$L_n(\eta) \geq \sqrt{\frac{q\,(h-\eta)^3}{6\,\pi_2\,(h+\delta-\eta)}}, \tag{31}$$

da cui segue

$$L_n(0) \geq h\sqrt{\frac{q}{6\,\pi_2}\,\frac{h}{h+\delta}} \tag{32}$$

e

$$\text{area}\; D\,(C_n) > \int_0^h \sqrt{\frac{q\,(h-\eta)^3}{6\,\pi_2\,(h+\delta-\eta)}}\,d\,\eta\,. \tag{33}$$

Ogni C_n passa per il punto $(0, 0)$ e incontra l'asse x in un intervallo di lunghezza $L_n(0)$; per la (32) C_0 possiede in comune con l'asse x un intervallo contenente il punto $(0, 0)$.

Diciamo $\sigma_{1,0}$ il primo valore di s per cui $y_0(s) = 0$. In $(0, \sigma_{1,0})$ le funzioni $x_0(s)$ e $y_0(s)$ sono non crescenti; tale proprietà è immediata conseguenza del fatto che $x_n(s)$ e $y_n(s)$ sono non crescenti nell'intervallo $(0, \sigma_{1,n})$.

Sia $\sigma_{2,0} > \sigma_{1,0}$ il massimo valore di s per cui è $y(s) \equiv 0$ e $\sigma_{3,0}$ il primo valore di $s > \sigma_{2,0}$ per cui è $y_0(s) = h$.

Sull'arco $\sigma_{2,0} \leq s \leq \sigma_{30}$ le funzioni $x_0(s)$ e $y_0(s)$ sono rispettivamente non crescente e non decrescente.

Se nell'arco $(\sigma_{3,0}, l_0)$ esistono due diversi valori di s, ad es. s_1 e s_2 per cui è

$$x_0(s_1) = x_0(s_2)\,, \qquad y_0(s_1) = y_0(s_2),$$

l'arco $s_1 \leq s \leq s_2$ di C_0 è costituito di un intervallo della retta $x = x_0(s_1)$ percorso prima nel senso delle y crescenti e poi in quello delle y decrescenti; sopprimiamo da C_0 ogni tale eventuale arco, chiamando ancora C_0 la curva che ne risulta. Se l'arco $(\sigma_{3,0}, l_0)$ di C_0 non giace sulla retta $y = h$, sia $\sigma_{4,0}$ il primo valore di s per cui $y_0(s)$ assume il suo valore massimo che è $\leq h + \delta$; in $(\sigma_{3,0}, \sigma_{4,0})$ $x_0(s)$ e $y_0(s)$ sono funzioni rispettivamente non crescente e non decrescente e in $(\sigma_{4,0}, l_0)$ entrambi non crescenti.

c) *Dimostriamo che* C_0 *è frontiera di un dominio.*

La retta $x = \eta$ per $0 < \eta < y_0(\sigma_{4,0})$ incontra $D(C_0)$ in un intervallo di lunghezza $L(\eta)$ positiva; ciò segue subito dalla (31) per $0 < \eta < h$ e per

$h \leq \eta < y_0(\sigma_{4,0})$ dalle considerazioni svolte in *b*) sull'arco $(\sigma_{3,0}, l_0)$ di C_0; inoltre $L(\eta)$ è funzione non crescente di η.

Per dimostrare che C_0 racchiude un dominio resta da provare che C_0 ha a comune coll'asse x un intervallo i cui punti sono tutti d'accumulazione di punti interni a C_0, ossia che al variare di s da $\sigma_{1,0}$ a $\sigma_{2,0}$ è

$$x_0(\sigma_{1,0}) \leq x_0(s) \leq x_0(\sigma_{2,0}).$$

Diciamo rispettivamente α e β il minimo e il massimo di $x_0(s)$ in $(\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0})$.

d) *Dimostrazione che è* $\beta = x_0(\sigma_{2,0})$.

Supponiamo che sia $\beta > x_0(\sigma_{2,0})$; dalle proprietà di monotonia dei profili a monte delle C_n segue che, al variare di s in un intervallo contenuto in $(\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0})$ e avente per secondo estremo $\sigma_{2,0}$, il punto che gli corrisponde su C_0 descrive prima l'intervallo $[x_0(\sigma_{1,0}), \beta]$ dell'asse x nel verso positivo e poi l'intervallo $[x_0(\sigma_{2,0}), \beta]$ nel verso negativo.

Analogamente alla (33) se è $\eta \leq \frac{h}{2}$ si ha

$$\text{area } D_\eta(C_n) > \int_{\frac{h}{2}}^{h} \sqrt{\frac{q(h-y)^3}{6\pi_2(h+\delta-y)}}\, dy,$$

$$\text{area } D_\eta(C_0) > \int_{\frac{h}{2}}^{h} \sqrt{\frac{q(h-y)^3}{6\pi_2'(h+\delta-y)}}\, dy;$$

ne segue che si può determinare un numero $Q > 0$ tale che se $\eta \leq \frac{h}{2}$ risulta

$$P_\eta^*(C_n) > Q, \qquad P_\eta^*(C_0) > Q. \tag{34}$$

Dimostriamo che si possono determinare i numeri ϱ_1 *e* ϱ_2 *con* $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < h$, *in modo che se* C_n *appartiene ordinatamente all'intorno* (ϱ_1) di C_0, *si abbia*

$$\gamma_n[y_n(\bar{\sigma}_n)] > \gamma_n(\varrho_2), \tag{35}$$

dove $\bar{\sigma}_n$ *è il valore di* s *per cui la curva delle pressioni di* C_n *passa per un punto del profilo a valle di ascissa* $x_n(\sigma_{1,n})$.

Fissiamo ϱ_0 con $0 < \varrho_0 \leq \frac{h}{2}$ abbastanza piccolo in modo che sia

$$(36) \qquad \frac{q^2 h^3 (h - \varrho_0) [\beta - x_0 (\sigma_{2,0}) - 2\varrho_0]}{6\, \pi_2^2 \,(\text{area } R)^2} - \frac{q\,(3\,h^2 + 3\varrho_0 h + \varrho_0^2)\,\varrho_0}{6\,Q} > 0\,;$$

ne segue che è

$$(36') \qquad \varrho_0 < \frac{\beta - x_0 (\sigma_{2,0})}{2}\,.$$

La curva C_n, appartenga ordinatamente all'intorno (ϱ) di C_0 con $0 < \varrho < \varrho_0$.

Si ha $x_n(\sigma_{2,n}) > \beta - \varrho_0$. Infatti nell'intorno (ϱ) del punto $(\beta, 0)$ di C_0 cade almeno un punto di C_n la cui ascissa è quindi $\geq \beta - \varrho > \beta - \varrho_0$; poichè $x_n(\sigma_{2,n})$ è la massima ascissa dei punti di C_n, ne segue $x_n(\sigma_{2,n}) > \beta - \varrho_0$.

Si ha inoltre $y_n(\overline{\sigma}_n) < \varrho_0$. Infatti, se fosse $y_n(\overline{\sigma}_n) \geq \varrho_0$, l'arco di C_n che sta sulla retta $x = x_n(\sigma_{2,n})$ avrebbe una lunghezza $> \varrho$, perchè tale arco è incontrato dalla retta $y = y_n(\overline{\sigma}_n)$; per la (36′) ed avendosi $x_n(\sigma_{2,n}) > \beta - \varrho_0$ il punto di massima ordinata di tale arco disterebbe più di ϱ da ogni punto di C_0, contro l'ipotesi che C_n appartenga ordinatamente all'intorno (ϱ) di C_0.

Posto, per semplicità di scrittura, $y_n(\overline{\sigma}_n) = \overline{y}_n$, consideriamo i domini $D^*_{\overline{y}_n}(C_n)$ e $D^*_{\varrho_0}(C_n)$; essendo $\overline{y}_n < \varrho_0$ è $D^*_{\overline{y}_n}(C_n) \supset D^*_{\varrho_0}(C_n)$.

La retta $y = \varrho_0$ incontra il profilo a monte di C_0 in punti di ascissa $\leq x_0(\sigma_{2,0})$; perciò, se ϱ è abbastanza piccolo, la C_n è incontrata dalla retta $y = \varrho_0$ in punti di ascissa $\leq x_0(\sigma_{2,0}) + \varrho_0$. Sappiamo invece che la retta $y = \overline{y}_n$ incontra il profilo a monte di C_0 nel solo punto $x = x_n(\sigma_{2,n}) > \beta - \varrho_0$.

Da ciò segue che è

$$P^*_{\overline{y}_n}(C_n) - P^*_{\varrho_0}(C_n) > q\,(h - \varrho_0)\,[x_n(\sigma_{2,n}) - x_0(\sigma_{2,0}) - \varrho_0] >$$
$$> q\,(h - \varrho_0)\,[\beta - x_0(\sigma_{2,0}) - 2\,\varrho_0]\,.$$

Perciò si ha, tenuto conto della (34) e che è $\overline{y}_n < \varrho_0$,

$$(37) \qquad \frac{q}{6}\,\frac{(h - \varrho_0)^3}{P^*_{\varrho_0}(C_n)} - \frac{q}{6}\,\frac{(h - \overline{y}_n)^3}{P^*_{\overline{y}_n}(C_n)} = \frac{q}{6}\,\frac{h^3\,[P^*_{\overline{y}_n}(C_n) - P^*_{\varrho_0}(C_n)]}{P^*_{\varrho_0}(C_n)\,P^*_{\overline{y}_n}(C_n)} +$$
$$+ \frac{q}{6}\,\frac{3\,\varrho_0^2\,h - 3\,\varrho_0\,h^2 - \varrho_0^3}{P^*_{\overline{y}_n}(C_n)} + \frac{q}{6}\,\frac{3\,h^2\,y_0 - 3\,h\,\overline{y}_n^2 + \overline{y}_n^2}{P^*_{\overline{y}_n}(C_n)} >$$
$$> \frac{q^2 h^3 (h - \varrho_0)\,[\beta - x_0(\sigma_{2,0}) - 2\varrho_0]}{6\,\pi_2^2\,[\text{area } R]^2} - \frac{q\,(3\,h^2 + 3\,h\,\varrho_0 + \varrho_0^2)\,\varrho_0}{6\,Q} > 0$$

per la (36).

La (37) sussiste per ogni ϱ_0 soddisfacente alla (36) $\left(\text{con } 0 < \varrho_0 \leq \frac{h}{2}\right)$ e C_n appartenente ordinatamente a un intorno (ϱ) di C_0 con $\varrho < \varrho_0$ e sufficientemente piccolo.

In modo analogo si può dimostrare che si può fissare $\mu > 0$ in modo che per $\bar{\varrho} \leq \mu$ sia

$$\xi^*_{y_n}(C_n) - \xi^*_{\bar{\varrho}}(C_n) > 0 ,$$

per ogni C_n che appartiene ordinatamente a un intorno (ϱ) di C_0, con $\varrho < \bar{\varrho}$ e sufficientemente piccolo.

Detto ϱ_2 il più piccolo fra μ e ϱ_0 per la (8″) è così dimostrata la (35).

La curva C_n appartenga ordinatamente all'intorno (ϱ_1) di C_0.

Detta $\bar{x}_n$ l'ascissa di un punto in cui $y = \varrho_2$ incontra il profilo a valle di C_n si ha $\bar{x}_n \leq \gamma_n(\varrho_2)$; essendo $\bar{x}_n(\sigma_{1,n}) = \gamma_n[y_n(\bar{\sigma}_n)]$, segue dalla (35)

$$x_n(\sigma_{1,n}) > \bar{x}_n ,$$

che contraddice il fatto che su $(0, \sigma_{1,n})$ la funzione $x_n(s)$ è non crescente. Deve quindi essere $\beta = x_0(\sigma_{2,0})$.

e) *Dimostrazione che è* $\alpha = x_0(\sigma_{1,0})$.

Supponiamo che sia $\alpha < x_0(\sigma_{1,0})$; al variare di s in $[\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}]$, il punto corrispondente su C_0 si muove percorrendo prima l'intervallo $[\alpha, x_0(\sigma_{1,0})]$ dell'asse x nel verso negativo e poi l'intervallo $[\alpha, x_0(\sigma_{2,0})]$ nel verso positivo.

Dimostriamo che, fissato $\varepsilon > 0$, *si può determinare un numero* $\varrho > 0$ *tale che per ogni* C_n *che appartiene ordinatamente all'intorno* (ϱ) *di* C_0 *è*

$$| \gamma_n(y_1) - \gamma_n(y_2) | < \varepsilon , \tag{38}$$

dove y_1 *e* y_2 *sono due qualunque valori di* y *con*

$$0 \leq y_1 \leq \varrho , \quad 0 \leq y_2 \leq \varrho .$$

Indichiamo con $\omega(\varrho)$ l'oscillazione della funzione $x_0(s)$ nell'intervallo $(\sigma_{2,0}, \sigma_2')$, dove σ_2' è il massimo valore di $s > \sigma_{2,0}$ per cui è $y_0(s) = \varrho$; poichè per $s > \sigma_{2,0}$ è sempre $y_0(s) > 0$, per $\varrho \to 0$ $s_2' \to \sigma_{2,0}$ e quindi $\omega(\varrho) \to 0$.

Fissato $\mu > 0$ ad arbitrio, si determini $\varrho_1 > 0$ in modo che sia

$$L\pi_2\varrho_1 + [\omega(\varrho_1) + 2\varrho_1]\, q\,(h + \delta) < \mu ,$$

dove L è la lunghezza del lato di R che sta sull'asse x.

La retta $y = \varrho_1$ incontra il profilo a monte di C_0 in un intervallo i cui punti hanno una minima ascissa X_1; si può determinare ϱ_2, con $0 < \varrho_2 \leq \varrho_1$, in modo che se C_n appartiene ordinatamente all'intorno (ϱ_2) di C_0 la retta $y = \varrho_1$ incontri il profilo a monte di C_n in punti tutti di ascissa $\geq X_1 - \varrho_1$.

Poichè il punto $[x_n(\sigma_{2,n}), 0)]$ di C_n appartiene all'intorno (ϱ_2) di almeno un punto di C_0 si ha, essendo per *d*) $x_0(\sigma_{2,0})$ la massima ascissa dei punti di C_0,

$$x_n(\sigma_{2,n}) < x_0(\sigma_{2,0}) + \varrho_1 .$$

Detto X_2 il punto di minima ascissa in cui la retta $y = \varrho_1$ incontra il profilo a monte di C_n si ha

$$x_n(\sigma_{2,n}) - X_2 \leq x_0(\sigma_{2,0}) - X_1 + 2\varrho_1 = \omega(\varrho_1) + 2\varrho_1 .$$

Perciò se è $0 \leq y_1 \leq \varrho_2$, $0 \leq y_2 \leq \varrho_2$ si ha

$$| P^*_{y_1}(C_n) - P^*_{y_2}(C_n) | \leq P^*(C_n) - P^*_{\varrho_1}(C_n) \leq$$
$$\leq L\pi_2\varrho_1 + [\omega(\varrho_1) + 2\varrho_1]\, q(h+\delta) < \mu .$$

Da questa disuguaglianza e per la (34) segue, in modo analogo a come si è provata la (37), che si può determinare $\varrho_3 > 0$ in modo che se C_n appartiene ordinatamente all'intorno (ϱ_3) di C_0 risulti

$$\frac{q}{6}\left| \frac{(h-y_1)^3}{P^*_{y_1}(C_n)} - \frac{(h-y_2)^3}{P^*_{y_2}(C_n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

per $0 \leq y_1 \leq \varrho_3$, $0 \leq y_2 \leq \varrho_3$.

In modo analogo si può determinare (ϱ_4) in modo che sia per ogni C_n appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ_4) di C_0

$$| \xi^*_{y_1}(C_n) - \xi^*_{y_2}(C_n) | < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

per $0 \leq y_1 \leq \varrho_4$, $0 \leq y_2 \leq \varrho_4$. Detto ϱ il minore fra ϱ_3 e ϱ_4 per la (8″) è dimostrata la (38).

Fissato $\varepsilon = \dfrac{x_0(\sigma_{1,0}) - \alpha}{3}$, si determini $\varrho < \varepsilon$ in modo che sussista la (38) per ogni C_n appartenente ordinatamente all'intorno (ϱ) di C_0. Per tali C_n è, per un ragionamento già fatto più volte,

$$x_n(\sigma_{1,n}) \leq \alpha + \varrho .$$

La retta $y = \varrho$ incontra il profilo a valle di C_0 in punti di ascissa $\geq x_0(\rho_{1,0})$; perciò se C_n appartiene ordinatamente ad un intorno (ϱ') di C_0 con $\varrho' < \varrho$ e sufficientemente piccolo la retta $y = \varrho$ incontra il profilo a valle di C_n in punti di ascissa $X_n \geq x_0(\sigma_{1,0}) - \varrho$; inoltre è $X_n \leq \gamma_n(\varrho)$.

Sappiamo che esiste un valore $\overline{\sigma}_n$ di s per cui è

$$\gamma_n[y_n(\overline{\sigma}_n)] = x_n(\sigma_{1,n}).$$

Con un breve ragionamento, già fatto in d), si prova che l'arco di C_n che sta sulla retta $x = x_n(\sigma_{1,n})$ ha lunghezza $< \varrho$ e quindi è $y_n(\sigma_n) < \varrho$.

Ne segue

$$\gamma_n(\varrho) - \gamma_n[y_n(\overline{\sigma}_n)] \geq X_n - x_n(\sigma_{1,n}) \geq x_0(\sigma_{1,0}) - \alpha - 2\varrho = 3\varepsilon - 2\varrho > \varepsilon,$$

che contraddice la (38). È quindi $\alpha = x_0(\varrho_{1,0})$.

f) *Per provare che* C_0 *appartiene a* (K_δ) *resta da dimostrare* (per la 18) del n. 12) *che è*

$$x_0(s) \leq \gamma_0[y_0(s)], \tag{39}$$

per gli s *di* $(0, \sigma_{1,0})$ *per cui* $y_0(s) < h$.

Per ottenere ciò *dimostriamo prima che, fissati* η, *con* $0 \leq \eta < h$ *ed* $\varepsilon > 0$ *ad arbitrio, si può determinare il numero positivo* ϱ *in modo che se* C_n *appartiene ordinatamente all'intorno* (ϱ) *di* (C_0) *è*

$$|\gamma_n(\eta) - \gamma_0(\eta)| < \varepsilon. \tag{40}$$

Infatti se ϱ è abbastanza piccolo $P^*_\eta(C_n)$ differisce di poco quanto si vuole da $P^*_\eta(C_0)$ e su ciò non influisce l'eventuale soppressione dell'arco di C_0 situato nel semipiano $y > h$ e coincidente con un intervallo di una retta parallela all'asse y percorso nei due sensi; lo stesso vale per $\xi^*_\eta(C_n)$ e $\xi^*_\eta(C_0)$.

Per la (31) tanto area $D^*_\eta(C_n)$ che area $D^*_\eta(C_0)$ sono maggiori di

$$\int_\eta^h \sqrt{\frac{(h-y)^3}{6\pi_2(h+\delta-y)}}\, dy.$$

Ne segue che si può determinare un uumero positivo Q_η e per ϱ abbastanza piccolo è

$$P^*_\eta(C_n) > Q_\eta, \; P^*_\eta(C_0) > Q_\eta$$

e da ciò si deduce la (40).

Supponiamo che esista un valore $\bar{s}$ dell'intervallo $(0, \sigma_1)$, con $y_0(\bar{s}) < h$, in cui sia

$$x_0(\bar{s}) > \gamma_0[y_0(\bar{s})] . \tag{41}$$

Se $y = y_0(\bar{s})$ incontra il profilo a valle di C_0 in un intervallo, la (41) è verificata certamente se $x_0(\bar{s})$ è la massima ascissa dei punti di tale intervallo. Per la osservazione fatta alla fine del n. 13 si ha

$$\lim_{s \to \bar{s}-0} x_0(s) = x_0(\bar{s}),$$

$$\lim_{s \to \bar{s}-0} \gamma_0[y_0(s)] = \lim_{y \to y_0(\bar{s})+0} \gamma_0(y) = \gamma_0[y_0(\bar{s})];$$

ne segue che la (41) è verificata in tutto un intorno $s' < s \leq \bar{s}$. In tale intorno non può essere $y_0'(s)$ quasi ovunque nulla, altrimenti $x_0(\bar{s})$ non sarebbe la massima ascissa dell'intervallo comune a $y = y_0(\bar{s})$ col profilo a valle di C_0; perciò esistono valori di s, che indicheremo ancora con $\bar{s}$, per cui vale la (41) e la retta $y = y_0(\bar{s})$ incontra il profilo a valle di C_0 in un solo punto.

Fissato ε, con $0 < \varepsilon < \dfrac{x_0(\bar{s}) - \gamma_0[y_0(\bar{s})]}{2}$, si determini ϱ, con $0 < \varrho < \varepsilon$, in modo che se C_n appartiene ordinatamente all'intorno (ϱ) di C_0 valga la (40) con $\eta = y_0(\bar{s})$.

Detta X_n la massima ascissa dell'intersezione di $y = y_0(\bar{s})$ col profilo a valle di C_n, se C_n appartiene ordinatamente ad un intorno (ϱ') di C_0 con $\varrho' < \varrho$ e sufficientemente piccolo è

$$X_n > x_0(\bar{s}) - \varrho .$$

Ne segue per la (40)

$$X_n > x_0(\bar{s}) - \varrho > \gamma_0[y_0(\bar{s})] + 2\varepsilon - \varrho > \gamma_0[y_0(\bar{s})] + \varepsilon > \gamma_n[y_0(\bar{s})] .$$

La C_n non verifica quindi per $s = \bar{s}$ la condizione

$$x_n(\bar{s}) \leq \gamma_n[y_n(\bar{s})]$$

e non può appartenere a (K_δ); ciò è assurdo e quindi non vale la (41).

Perciò sussiste la (39) e C_0 appartiene a (K_δ). Così il Teorema X è completamente dimostrato.

§ 3. Sicurezza al rovesciamento.

18. GRADO DI SICUREZZA AL ROVESCIAMENTO.

Il dominio $D_\eta(C)$ è soggetto a una forza F_y che agisce verticalmente verso il basso, costituita dal suo peso e dalla componente verticale della pressione idrostatica agente su $D_\eta(C)$.

Diciamo *momento stabilizzante alla quota* η il momento $M_s(\eta)$ di F_y rispetto al punto $[x(\sigma'_\eta), \eta]$ di minima ascissa della base di $D_\eta(C)$. Con facili calcoli si ha, con le notazioni del n. 9,

$$M_s(\eta) = x(\sigma'_\eta)\left[\int_{\sigma_\eta}^{\sigma_8} Y(s)\, d\, s + Y_\eta\right] - x_\eta\, Y_\eta - \int_{\sigma_\eta}^{\sigma_2} Y(s)\, x(s)\, d\, s\,.$$

Il dominio $D_\eta(C)$ è soggetto pure ad una forza F_x agente nella direzione dell'asse x (e in verso opposto), costituita dalla componente orizzontale della pressione idrostatica.

Diciamo *momento rovesciante alla quota* η il momento $M_r(\eta)$ di F_x rispetto a $[x(\sigma'_\eta), \eta]$.

Si ha

$$M_r(\eta) = \int_{\sigma_\eta}^{\sigma_8} X(s)\, y(s)\, d\, s - \eta \int_{\sigma_\eta}^{\sigma_8} X(s)\, d\, s\,.$$

Diciamo *grado di sicurezza al rovesciamento alla quota* η e lo indicheremo con $r(\eta)$, il rapporto

$$r(\eta) = \frac{M_s(\eta)}{M_r(\eta)}\,.$$

Posto

$$\xi^*_\eta(C) = \frac{X_{\eta'}(C)}{P^*_\eta(C)},$$

si ha, per quasto già visto nei nn. 9 e 10,

$$M_s(\eta) = X_\eta - x(\sigma'_\eta)\, P^\eta_*(C)\,,$$

$$M\ \ (\eta) = \frac{q}{6}(h-\eta)^3$$

e quindi è

$$r(\eta) = \frac{X_\eta - x(\sigma'_\eta) P^*_\eta(C)}{\frac{q}{6}(h-\eta)^3}.$$

Dalla (8″) risulta che è

$$x(\sigma'_\eta) < \gamma(\eta) \qquad \text{per} \qquad r(\eta) > 1,$$

$$x(\sigma'_\eta) = \gamma(\eta) \qquad \text{per} \qquad r(\eta) = 1,$$

$$x(\sigma'_\eta) > \gamma(\eta) \qquad \text{per} \qquad r(\eta) < 1.$$

Fissato un numero $r_0 \geq 1$ diciamo che $D(C)$ *ha un grado di sicurezza al rovesciamento* $\geq r_0$ *se è sempre*

$$r(\eta) \geq r_0 \qquad (0 \leq \eta < h).$$

19. - ESISTENZA DELLA DIGA DI MINIMO VOLUME CON GRADO DI SICUREZZA AL ROVESCIAMENTO MAGGIORE O UGUALE A UN VALORE ASSEGNATO.

Se $D(C)$ ha un grado di sicurezza al rovesciamento $\geq r_0 \geq 1$ si ha per $0 \leq \eta < h$

$$\frac{M_s(\eta)}{M_r(\eta)} = \frac{X_\eta - x(\sigma'_\eta) P^*_\eta(C)}{\frac{q}{6}(h-\eta)^3} \geq r_0.$$

Ne segue che è

$$x(\sigma'_\eta) \leq \xi^*_\eta(C) - r_0 \frac{q(h-\eta)^3}{P^*_\eta(C)}. \tag{42}$$

Diciamo *curva delle pressioni con grado di sicurezza* r_0 la curva di equazione

$$x = \gamma_{r_0}(y) = \xi^*_y(C) - r_0 \frac{q(h-y)^3}{6 P^*_y(C)}.$$

Se C è una curva di (K_δ) per cui $D(C)$ ha grado di sicurezza al rovesciamento $\geq r_0 \geq 1$ per essa sussiste la (42) e questa — con considerazioni analoghe a quelle svolte nel n. 12 — equivale a

$$x(s) \leq \gamma_{r_0}[y(s)] \qquad \text{per} \qquad 0 < s \leq \sigma_1 \quad \text{e} \quad y(s) < h. \tag{18'}$$

Diciamo *classe* $(K_\delta^{(r_0)})$ *la sottoclasse delle curve di* (K_δ) *che verificano la condizione* (18').

La classe $(K_\delta^{(r_0)})$ è costituita da tutte le curve C di (K_δ) per cui $D(C)$ ha grado di sicurezza al rovesciamento $\geq r_0$.

La curva delle pressioni con grado di sicurezza r_0 ha le stesse proprietà qualitative dimostrate nei nn. 13 e 14 per la curva delle pressioni $x = \gamma(y)$ delle curve di (K_δ).

Per la classe $(K_\delta^{(r_0)})$ sussistono i teoremi del n. 16 nei cui enunciati basta sostituire alla (K_δ) la $(K_\delta^{(r_0)})$ e alla $x = \gamma(y)$ la curva delle pressioni con grado di sicurezza r_0.

Lo stesso vale per il Teorema X, cioè si ha il

TEOREMA XI: « *Il funzionale area* $D(C)$ *ha minimo nella classe* $(K_\delta^{(r_0)})$ ».

È così dimostrato che esiste la diga di minimo volume fra tutte quelle con profili C regolari in modo da appartenere a (K_δ) e per cui $D(C)$ ha grado di sicurezza al rovesciamento $\geq r_0 \geq 1$, dove r_0 è un numero assegnato.

§ 4. Diga a gravità di minimo peso.

20. - POSIZIONE DEL PROBLEMA DELLA DIGA A GRAVITÀ DI MINIMO PESO.

Accanto al problema fino ad ora studiato della diga a gravità di minimo volume presenta interesse lo studio della diga a gravità di minimo peso. Si tratta ora di rendere minimo, in una opportuna classe di profili, non il funzionale *area* $D(C)$ bensì

$$\text{peso } D(C) = P(C) = \iint_{D(C)} p(x, y)\, dx\, dy,$$

la funzione $p(x, y)$ essendo assegnata in tutto il piano $x\,y$, quasi continua positiva e soddisfacente alla condizione

$$(1) \qquad \pi_1 \leq p(x, y) \leq \pi_2 .$$

Se la funzione $p(x\,y)$ si riduce a una costante, il profilo di minimo peso esiste e coincide con quello di minimo volume.

Nel caso generale di distribuzione di materia in modo discontinuo il profilo di minimo peso sarà diverso da quello di minimo volume; l'esistenza di tale profilo segue facilmente dai risultati del § 2, come ora dimostreremo.

21. - ESISTENZA DEL PROFILO DI MINIMO PESO NELLA CLASSE (K_δ).

Per ogni curva C di (K_δ) il dominio $D(C)$ è un insieme limitato e misurabile e quindi esiste ed è finito l'integrale

$$P(C) = \iint_{D(C)} p(x, y)\, d\, x\, d\, y.$$

Nei teoremi VII e VIII [n. 16] si assegna una curva C' di (K_δ) e si costruisce una curva C di (K_δ) con $D(C) \subset D(C')$ e avente opportune proprietà; da $D(C) \subset D(C')$ segue che è

$$P(C) \leq P(C').$$

Se C' è una qualunque curva di (K_δ) con $P(C') \leq N'$, si ha per la (1),

$$\pi_1 \text{ area } D(C') \leq P(C') \leq N'$$

da cui

$$\text{area } D(C') \leq \frac{N'}{\pi_1} = N.$$

Perciò dal Teorema IX [n. 16] si deduce immediatamente il

TEOREMA XII: « *Ad ogni numero N' sufficientemente grande si può far corrispondere un rettangolo R' nel piano $x\,y$ con la proprietà che se $\overline{C}'$ è una qualunque curva di (K_δ) con $P(\overline{C}') \leq N'$, si può costruire una $\overline{C}$ di (K_δ) con $P(\overline{C}) \leq P(\overline{C}')$, che è tutta contenuta in R' e che ha le proprietà espresse per la curva C nel teorema VIII* ».

Dimostriamo ora il teorema di esistenza e cioè il

TEOREMA XIII: « *Il funzionale $P(C)$ ha minimo nella classe (K_δ)* ».

Sia i l'estremo inferiore di $P(C)$ in (K_δ) e sia $\{\overline{C}'_n\}$ una successione di curve di (K_δ) per cui si abbia

$$P(\overline{C}'_n) < i + \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Fissato $N'_n = i + 1$ determiniamo il rettangolo R' e posto $\overline{C}' \equiv \overline{C}'_n$ sia $\overline{C}_n$ la curva di (K_δ) rappresentata con $\overline{C}$ nel Teorema XII. È ancora

$$P(\overline{C}) < i + \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

e $\overline{C}_n$ appartiene ad R'.

Come nella parte *a*) della dimostrazione del Teorema X si prova che la successione $\{\overline{C}_n\}$ possiede una curva $\overline{C}_0$ di accumulazione; poichè $P(C)$ è un funzionale continuo di C, risulta

$$P(\overline{C}_0) = i.$$

Per dimostrare che $\overline{C}_0$ appartiene a (K_δ) basta fare lo stesso ragionamento con cui nel Teorema X si è provato che C_0 appartiene a (K_δ); tale ragionamento è fondato sulle proprietà delle curve C_n [di cui gode la curva C del Teorema VIII] e che sono pure comuni alle curve $\overline{C}_n$.

Anche per il problema della diga a gravità di minimo peso si possono ripetere le considerazioni svolte nel § 3 a proposito della sicurezza al rovesciamento. Si ottiene così il

TEOREMA XIV: «*Il funzionale* $P(C)$ *ha minimo nella classe* $(K_\delta^{(r_0)})$».

INDICE