

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SANDRO FAEDO

Il calcolo delle variazioni per gli integrali estesi a intervalli infiniti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 7, n° 1-2 (1953), p. 91-132

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_1-2_91_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI PER GLI INTEGRALI ESTESI A INTERVALLI INFINITI

DI SANDRO FAEDO (Pisa)

In questa Memoria riprendo le ricerche esposte in un precedente lavoro⁽¹⁾ al quale rinvio per una più particolareggiata posizione dei problemi; nella introduzione riassumo quei risultati che più interessano per la comprensione della presente Memoria.

INTRODUZIONE

Definizioni.

Consideriamo una funzione

$$f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$$

definita per ogni $x \geq a$ e ogni valore finito di $y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n, \dots, y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$, continua con le sue derivate

$$f_{y_i^{(r)}, y_j^{(s)}} \quad (i, j = 1, \dots, n; r, s = 0, 1, \dots, m).$$

Una curva C appartenente allo spazio a $n + 1$ dimensioni, rappresentata dalle equazioni

$$y_i = y_i(x), \quad x \geq a \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

si dirà una *curva ordinaria per $I_\infty(C)$* se:

le $y_i(x)$ sono assolutamente continue in ogni intervallo $(a, a + X)$, con

⁽¹⁾ S. FAEDO, « *Il calcolo delle Variazioni per gli integrali su intervalli infiniti* » « Rend. di Matematica e delle sue applicazioni », S. V, Vol. 8^o, 1949, pag. 94-125.

$X > 0$, insieme con le loro derivate dei primi $m - 1$ ordini; esiste finito l'integrale, nel senso di LEBESGUE,

$$\int_a^{a+X} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx;$$

esiste finito l'integrale generalizzato

$$I_\infty(C) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx.$$

Con *integrale* $I_\infty(C)$ si indicherà sempre l'integrale

$$I_\infty(C) = \int_a^{+\infty} f[x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x), \dots, y_1^{(m)}(x), \dots, y_n^{(m)}(x)] dx.$$

Si dirà inoltre che la curva C è di *classe* s se sono continue (in ogni intervallo finito) le derivate fino all'ordine s delle ordinate $y_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$).

Si dirà *classe* (K) la totalità delle curve ordinarie per $I_\infty(C)$ che soddisfano per $x = a$ alle condizioni

$$y_i^{(r)}(a) = c_i^{(r)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad r = 0, 1, \dots, m - 1),$$

dove le $c_i^{(r)}$ sono costanti assegnate.

Ogni minimante di $I_\infty(C)$ in (K) che sia di classe m è un'*estremale*, cioè soddisfa per ogni $x \geq a$ al sistema delle equazioni di EULERO.

Data la curva ordinaria per $I_\infty(C)$ $C \equiv (y_1(x), \dots, y_n(x))$, se $C' \equiv (y_1(x) + \delta y_1(x), \dots, y_n(x) + \delta y_n(x))$ è una qualunque altra curva ordinaria, scriviamo $C' \equiv C + \delta C$; la curva $\delta C = (\delta y_1(x), \dots, \delta y_n(x))$ si dice la *variazione prima* della C e qualora esista finita l'espressione

$$\delta I_\infty(C) = \int_a^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^m f_{y_i^{(r)}} \delta y_i^{(r)} \right\} dx,$$

dove le funzioni $f_{y_i^{(r)}}$ sono calcolate sulla C , $\delta I_\infty(C)$ si dice *variazione prima dell'integrale* $I_\infty(C)$ sulla curva C (relativa alla variazione δC data dalla C).

Se è per $x = a$

$$\delta y_i = \delta y_i' = \dots = \delta y_i^{(m-1)} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

la δC si dice *variazione prima smorzata nel primo estremo* e la relativa $\delta I_\infty(C)$ *variazione prima dell'integrale $I_\infty(C)$ smorzata nel primo estremo* e la si indica con $\overline{\delta I_\infty(C)}$.

Se per una curva ordinaria C la $\delta I_\infty(C)$ [o la $\overline{\delta I_\infty(C)}$] è sempre nulla (per ogni δC), si dice che $\delta I_\infty(C)$ [o $\overline{\delta I_\infty(C)}$] è *identicamente nulla* e si scrive $\delta I_\infty(C) \equiv 0$ [o $\overline{\delta I_\infty(C)} \equiv 0$].

Fra i teoremi dimostrati nel lavoro citato in (1) interessano particolarmente i seguenti:

TEOREMA A. (DI UNICITÀ DELLE ESTREMALI).

« Per ogni $x \geq a$ ed ogni valore finito di $y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ la forma quadratica nelle variabili w_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} f_{y_i^{(m)} y_j^{(m)}} w_i w_j$$

sia sempre definita positiva e inoltre la forma quadratica nelle variabili $v_{i,r}$ ($i = 1, 2, \dots, n; r = 0, 1, \dots, m$)

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} v_{i,r} v_{j,s}$$

sia sempre semidefinita positiva. Allora esiste in (K) al più una sola estremale \bar{C} relativa alla f su cui è identicamente nulla la variazione prima di $I_\infty(C)$ smorzata nel primo estremo. La \bar{C} , se esiste, è una minimante di $I_\infty(C)$ nella classe (K) ».

TEOREMA B. (SUL COMPORTAMENTO ASINTOTICO DELLE ESTREMANTE).

« Se la $f(x, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)})$ è un polinomio di secondo grado in $y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$ a coefficienti funzioni continue di x definite per $x \geq a$; se esiste un $k \geq a$ tale che per ogni $x \geq k$ la forma quadratica

(1)
$$\sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} v_{i,r} v_{j,s}$$

sia semidefinita positiva; se non vi è mai un intervallo (x', x'') con $k \leq x' < x''$ in cui la forma quadratica

(2)
$$\sum_{i,j}^{1\dots n} f_{y_i^{(m)} y_j^{(m)}} w_i w_j$$

si annulli identicamente; allora se \bar{C} è un'estremale che rende minimo $I_\infty(C)$ in (K) , su \bar{C} è identicamente $\delta \bar{I}_\infty(\bar{C}) = 0$ ».

Per la dimostrazione del teorema B si è fatto uso del seguente lemma:

LEMMA III. — « Se le funzioni $a_{i,j}^{(r,s)}(x)$ sono continue e per x in (x', x'') la forma quadratica

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} a_{i,j}^{(r,s)}(x) y_i^{(r)} y_j^{(s)}$$

è semidefinita positiva e

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} a_{i,j}^{(m,m)} y_i^{(m)} y_j^{(m)}$$

non è identicamente nulla per ogni x di (x', x'') ; se $\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)$ sono funzioni assolutamente continue in (x', x'') con le loro derivate fino all'ordine $m - 1$ e

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} a_{i,j}^{(m,m)}(x) \gamma_i^{(m)}(x) \gamma_j^{(m)}(x)$$

è integrabile in (x', x'') ; allora fissato ad arbitrio $\delta > 0$ si possono costruire in (x', x'') le funzioni $y_1(x), \dots, y_n(x)$, assolutamente continue con le derivate fino all'ordine $m - 1$, e aventi le proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i^{(r)}(x') = \gamma_i^{(r)}(x'), y_i^{(r)}(x'') = \gamma_i^{(r)}(x''), \quad (i = 1, \dots, n; r = 0, 1, \dots, m - 1) \\ |y_i^{(r)}(x) - \gamma_i^{(r)}(x)| \leq \delta, \quad (x' \leq x \leq x''), \\ \int_{x'}^{x''} \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} a_{i,j}^{(r,s)} y_i^{(r)} y_j^{(s)} \right\} dx = 2 \int_{x'}^{x''} \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} a_{i,j}^{(r,s)} \gamma_i^{(r)} \gamma_j^{(s)} \right\} dx. \end{array} \right.$$

§ 1 - ULTERIORI PROPRIETÀ ASINTOTICHE DELLE ESTREMANTI QUANDO LE EQUAZIONI DI EULERO SONO LINEARI

1. — Teorema di unicità delle estremali.

Se la forma quadratica

$$(2) \quad \sum_{i,j}^{1\dots n} f y_i^{(m)} y_j^{(m)} v_i v_j$$

è definita positiva, è verificata la condizione per essa richiesta dal teorema B. È questo il caso che più interessa per poter applicare il teorema A. Si ottiene così il

TEOREMA (DI UNICITÀ DELLE ESTREMALI):

« Se la $f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)})$ è un polinomio di secondo grado in $y_1, \dots, y_n, \dots, y_n^{(m)}$ a coefficienti funzioni continue di x per $x \geq a$ e se la forma quadratica (2) è, per ogni $x \geq a$, definita positiva e la

$$(1) \quad \sum_{i,j}^{1 \dots n \ 0 \dots m} \sum_{r,s} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} v_{i,r} v_{j,s}$$

è semidefinita positiva, allora esiste al più una sola estremale relativa alla f che renda minimo $I_\infty(C)$ in (K) ».

2. — Applicazione alla dimostrazione dell'unicità delle approssimazioni del metodo variazionale nel caso dell'intervallo infinito di tempo.

Si abbia da integrare un sistema di equazioni lineari a derivate parziali, ad es. del secondo ordine, nelle funzioni incognite $u_h(P, t)$ ($h = 1, 2, \dots, n$) (con P variabile in un campo R e t nell'intervallo $(0, +\infty)$)

$$\sum_{h=1}^n a_{h,k}(P, t) \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} + E_k(u_1, u_2, \dots, u_n) = b_k(P, t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

dove $E_k(u_1, u_2, \dots, u_n)$ è un operatore differenziale al più del primo ordine rispetto a t e al più del secondo rispetto alle variabili locali, lineare e omogeneo nelle u_h e nelle loro derivate, col determinante $|a_{h,k}(P, t)|$ ($h, k = 1, \dots, n$) sempre diverso da zero. Si hanno inoltre, sul contorno Γ di R , le condizioni

$$E_k^{(1)}(u_1, u_2, \dots, u_n) = c_k(P, t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

dove $E_k^{(1)}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ è un operatore lineare e omogeneo nelle u_k e nelle loro derivate prime e le condizioni al tempo iniziale

$$u_h(P, 0) = u_h^{(0)}(P),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} u_h \right]_{t=0} = u_h^{(1)}(P) \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

dove $u_h^{(0)}(P)$ e $u_h^{(1)}(P)$ sono funzioni continue di P con le derivate dei primi due ordini.

Si supponga inoltre che le funzioni $a_{h,k}(P, t)$, $b_k(P, t)$ e $c_k(P, t)$ siano continue, insieme alle loro derivate seconde rispetto a t , per P in R e t in ogni intervallo finito $(0, T)$.

Si scelgano $2n$ funzioni peso continue e positive $\theta_k(P, t)$, $\bar{\theta}_k(P, t)$ ed n sistemi di funzioni continue $\{\varphi_{h,r}(P)\}$ ($h = 1, \dots, n$; $r = 1, 2, \dots$) completi in R ; le funzioni di ciascun sistema possono sempre essere supposte linearmente indipendenti in R .

Le approssimazioni $u_{h',r_h}(P, t)$ ($h = 1, 2, \dots, n$) del metodo variazionale si ottengono ponendo

$$u_{h',r_h}(P, t) = u_h^{(0)}(P) + t u_h^{(1)}(P) + \sum_{r=1}^{r_h} \varphi_{h,r}(P) \omega_{h,r}(t) \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

dove le $\omega_{h,1}^{(t)}$, $\omega_{h,2}^{(t)}$, \dots , $\omega_{h,r_h}^{(t)}$ ($h = 1, 2, \dots, n$) si determinano come quelle che rendono minimo

$$I_\infty(C) = \int_0^{+\infty} f[t, \omega_{1,1}, \dots, \omega_{n,r_n}, \omega'_{1,h}, \dots, \omega'_{n,r_n}] dt,$$

con

$$(3) \quad f[t, \omega_{1,1}, \dots, \omega''_{n,r_n}] = \int_R \left\{ \sum_{k=1}^n \theta_k \left(\sum_{h=1}^n a_{h,k} \frac{\partial^2 u_{h,r_h}}{\partial t^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + E_k[u_{1,r_1}, \dots, u_{n,r_n}] - b_k \right)^2 \right\} dP + \int_\Gamma \left\{ \sum_{k=1}^n \bar{\theta}_k [E_k^{(1)}(u_{1,r_1}, \dots, u_{n,r_n}) - c_k]^2 \right\} dP,$$

nella classe (K) delle curve $C \equiv \{\omega_{1,1}(t), \dots, \omega_{1,r_1}(t), \dots, \omega_{n,1}(t), \dots, \omega_{n,r_n}(t)\}$ ordinarie per $I_\infty(C)$ e per cui

$$\omega_{1,1}(0) = \dots = \omega_{1,r_1}(0) = \dots = \omega_{n,1}(0) = \dots = \omega_{n,r_n}(0) = 0,$$

$$\omega'_{1,1}(0) = \dots = \omega'_{1,r_1}(0) = \dots = \omega'_{n,1}(0) = \dots = \omega'_{n,r_n}(0) = 0.$$

È stato dimostrato⁽²⁾ che in (K) $I_\infty(C)$ ammette minimo assoluto e che tale minimo è sempre fornito da estremali.

(2) S. FAEDO, « Contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione », Ann. Sc. Normale Sup. Pisa, S. II, Vol. X (1941), pag. 139-152.

Dimostriamo ora che la minimante è una sola.

Anzitutto dalla (3) segue che la $f[t, \omega_{1,1}, \dots, \omega''_{n,v_n}]$ è un polinomio di secondo grado in $\omega_{1,1}, \dots, \omega_{n,v_n}, \omega'_{1,1}, \dots, \omega'_{n,v_n}, \omega''_{1,1}, \dots, \omega''_{n,v_n}$, con coefficienti funzioni continue di t in ogni intervallo finito.

Posto

$$\bar{u}_{h,v_h}(P, t) = \sum_{r=1}^{v_h} \varphi_{h,r}(P) \omega_{h,r}(t) \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

consideriamo

$$(4) \quad \int_R \left\{ \sum_{k=1}^n \theta_k \left(\sum_{h=1}^n a_{h,k} \frac{\partial^2 \bar{u}_{h,v_h}}{\partial t^2} + E_k[\bar{u}_{1,v_1}, \dots, \bar{u}_{n,v_n}]^2 \right) \right\} dP + \\ + \int_\Gamma \left\{ \sum_{k=1}^n \bar{\theta}_k [E_k^{(1)}(\bar{u}_{1,v_1}, \dots, \bar{u}_{n,v_n})]^2 \right\} dP.$$

Poichè E_k e $E_k^{(1)}$ sono omogenei e lineari in \bar{u}_{h,v_h} e nelle loro derivate

$$\frac{\partial \bar{u}_{h,v_h}}{\partial t} = \sum_{r=1}^{v_h} \varphi_{h,r} \omega'_{h,r}, \quad \frac{\partial \bar{u}_{h,v_h}}{\partial x_i} = \sum_{r=1}^{v_h} \frac{\partial \varphi_{h,r}}{\partial x_i} \omega_{h,r}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}_{h,v_h}}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{r=1}^{v_h} \frac{\partial^2 \varphi_{h,r}}{\partial x_i \partial x_j} \omega_{h,r}$$

(dove x_1, x_2, \dots sono le coordinate di P), la (4) è una forma quadratica in $\omega_{1,1}, \dots, \omega_{n,v_n}, \omega'_{1,1}, \dots, \omega'_{n,v_n}, \omega''_{1,1}, \dots, \omega''_{n,v_n}$ che è certamente semidefinita positiva. La (4) ha precisamente la forma (1) a cui si riduce la $f[t, \omega_{1,1}, \dots, \omega_{n,v_n}, \omega'_{1,1}, \dots, \omega'_{n,v_n}, \omega''_{1,1}, \dots, \omega''_{n,v_n}]$ sopprimendo i termini non di secondo grado in $\omega_{1,1}, \dots, \omega_{n,v_n}, \omega'_{1,1}, \dots, \omega'_{n,v_n}, \omega''_{1,1}, \dots, \omega''_{n,v_n}$.

Consideriamo ora la forma (2) che si ottiene dalla (3) sopprimendo i termini di grado inferiore al secondo in

$$\omega''_{1,1}, \dots, \omega''_{1,v_1}, \omega''_{2,1}, \dots, \omega''_{2,v_2}, \dots, \omega''_{n,1}, \dots, \omega''_{n,v_n}$$

e che è data da

$$(5) \quad \int_R \left\{ \sum_{k=1}^n \theta_k \left(\sum_{h=1}^n a_{h,k} \frac{\partial^2 \bar{u}_{h,v_h}}{\partial t^2} \right)^2 \right\} dP = \int_R \left\{ \sum_{k=1}^n \theta_k \left(\sum_{h=1}^n a_{h,k} \sum_{r=1}^{v_h} \varphi_{h,r} \omega''_{h,r} \right)^2 \right\} dP.$$

Se per un certo \bar{t} esistessero valori non tutti nulli di $\omega''_{h,r}$ per cui la (5) è nulla, essendo $\theta_k > 0$ e la funzione sotto il segno di integrale continua, ne verrebbe

$$\sum_{k=1}^n a_{h,k} \sum_{r=1}^{v_h} \varphi_{h,r} \omega''_{h,r} \equiv 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

identicamente in R e per $t = \bar{t}$; essendo

$$|a_{h,k}| \neq 0$$

si avrebbe così

$$\sum_{r=1}^{n_h} \varphi_{h,r} \omega''_{h,r} \equiv 0 \quad (h = 1, \dots, n)$$

contrariamente all'ipotesi della indipendenza lineare delle funzioni $\varphi_{h,r}$ in R .

Sono quindi soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di unicità del n. 1 ed è così dimostrata l'unicità delle successive approssimazioni che si ottengono applicando il metodo variazionale.

3. — Complemento al teorema B.

Dimostriamo (nel caso che sia $m = 1$) che la tesi del teorema B sussiste anche se non è verificata l'ipotesi relativa alla forma quadratica (2).

Nella dimostrazione data dal teorema B si prova dapprima che la variazione prima $\delta I_\infty(\bar{C})$ di $I_\infty(C)$ passando da \bar{C} a $\bar{C} + \delta \bar{C}$ è nulla oppure uguale a $-\infty$; l'ipotesi relativa alla forma quadratica (2) interviene soltanto per escludere questo secondo caso. Basterà quindi dimostrare che non può essere $\delta I_\infty(C) = -\infty$ quando sussistono tutte le ipotesi del teorema B ad eccezione di quella riguardante la forma quadratica (2).

In tal caso, comunque grande si fissi X , vi sono sempre intervalli (x', x'') con $X \leq x' < x''$, sui quali è identicamente nulla la forma quadratica (2). Se $\bar{C} + \delta \bar{C}$ appartiene alla classe (K) ed è $\delta I_\infty(\bar{C}) = -\infty$ si ottiene, tenuto conto che \bar{C} è un'estremale

$$(6) \quad I_\infty(\bar{C} + \delta \bar{C}) - I_\infty(\bar{C}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \delta \bar{y}_i f'_{y'_i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_a^x \left(\sum_{ij}^{1\dots n} \sum_{rs}^{01} f''_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right) dx \right\} = A \geq 0,$$

dove le $f'_{y'_i}$ sono calcolate sulla \bar{C} ; è inoltre

$$\delta I_\infty(\bar{C}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \delta \bar{y}_i f'_{y'_i} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \left(\sum_{ij}^{1\dots n} \sum_{rs}^{01} f''_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_j^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right) dx = +\infty.$$

Si può perciò determinare X in modo che per ogni $x' > X$ sia

$$(7) \quad \int_a^{x'} \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0,1} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx \geq \frac{8}{3} (A + 2).$$

Se su (x', x'') , con $X \leq x' \leq x''$, è identicamente nulla la forma

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} f_{y_i' y_j'} v_i v_j,$$

in tale intervallo la forma (1) (dovendo essere semidefinita positiva) si riduce a

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} f_{y_i y_j} v_i v_j.$$

Definiamo su $(a, +\infty)$ le funzioni δy_i ponendo

$$\delta y_i(x) = \frac{1}{2} \delta \bar{y}_i(x) \quad \text{per} \quad a \leq x \leq x',$$

$$\delta y_i(x) = \delta \bar{y}_i(x) \quad \text{per} \quad x \geq x''$$

e per $x' \leq x \leq x''$ le funzioni $\delta y_i(x)$ sono assolutamente continue con

$$\delta y_i(x') = \frac{1}{2} \delta \bar{y}_i(x'), \quad \delta y_i(x'') = \delta \bar{y}_i(x'')$$

e inoltre è

$$(8) \quad \int_{x'}^{x''} \left(\sum_{i,j}^{1\dots n} f_{y_i y_j} \delta y_i \delta y_j \right) dx \leq 2.$$

Si ha quindi per $x \geq x''$

$$\begin{aligned} & \int_a^x f(x, \bar{y}_1 + \delta y_1, \dots, \bar{y}_n + \delta y_n, \bar{y}_1' + \delta y_1', \dots, \bar{y}_n' + \delta y_n') dx - \\ & - \int_a^x f(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n') dx = \left[\sum_{i=1}^n \delta \bar{y}_i f_{y_i'} + \frac{1}{2} \int_a^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,0}^{0,1} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3}{8} \int_a^{\alpha'} \left\{ \sum_{ij}^{1\dots n} \sum_{rs}^{01} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\alpha'}^{\alpha''} \left\{ \sum_{ij}^{1\dots n} \sum_{rs}^{01} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} [\delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} - \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)}] \right\} dx ;
\end{aligned}$$

per $x \rightarrow +\infty$ si ottiene per la (6)

$$\begin{aligned}
I_\infty(\bar{C} + \delta \bar{C}) &= I_\infty(\bar{C}) + A - \frac{3}{8} \int_a^{\alpha'} \left\{ \sum_{ij}^{1\dots n} \sum_{rs}^{01} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\alpha'}^{\alpha''} \left\{ \sum_{ij}^{1\dots n} \sum_{rs}^{01} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} [\delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} - \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)}] \right\} dx \leq I_\infty(\bar{C}) - 1
\end{aligned}$$

per le (7) e (8). La disuguaglianza trovata prova che $\bar{C} + \delta \bar{C}$ appartiene a (K) e che \bar{C} non è minimante di $I_\infty(C)$ in (K) , contrariamente alle ipotesi del teorema B.

4. — Condizioni di trasversalità all'infinito.

Conservando le ipotesi e le notazioni del teorema B si ha che sull'estremante \bar{C} è

$$(9) \quad \delta I_\infty(\bar{C}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-2} \delta \bar{y}_i^{(r)} \varphi_{i,r}(x) = 0,$$

essendo

$$\varphi_{i,r}(x) = f_{y_i^{(r+1)}} - \frac{d}{dx} \left[f_{y_i^{(r+2)}} - \dots - \frac{d}{dx} \left(f_{y_i^{(m-1)}} - \frac{d}{dx} f_{y_i^{(m)}} \right) \dots \right],$$

per ogni $\delta \bar{C}$ tale che $\bar{C} + \delta \bar{C}$ appartenga alla classe (K) .

Se si possono trovare delle curve ordinarie $\bar{C} + \delta \bar{C}$ per cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta \bar{y}_i^{(r)} \quad (i = 1, \dots, n; r = 0, 1, \dots, m-1)$$

possa assumere valori ad arbitrio, allora su \bar{C} sono verificate le *condizioni di trasformatività all'infinito*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{i,r}(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, n; r = 0, 1, \dots, m-1)$$

ossia

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ f_{y_i}' - \frac{d}{dx} \left[f_{y_i}'' - \dots - \frac{d}{dx} \left(f_{y_i}^{(m-1)} - \frac{d}{dx} f_{y_i}^{(m)} \right) \dots \right] \right\} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ f_{y_i}'' - \frac{d}{dx} \left[f_{y_i}''' - \dots - \frac{d}{dx} \left(f_{y_i}^{(m-1)} - \frac{d}{dx} f_{y_i}^{(m)} \right) \dots \right] \right\} = 0, \\ \dots \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{y_i}^{(m)} = 0, \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dove le $f_{y^{(r)}}$ sono calcolate sulla \bar{C} .

In particolare sussistono le (10) se $\delta \bar{y}_i$ può coincidere, per x abbastanza grande, con un qualunque polinomio di grado $m - 1$.

È sempre da tener presente che \bar{C} è una curva ordinaria e ciò può di per sé implicare delle condizioni di carattere asintotico per la \bar{C} , che possono essere o no assorbite dalle (9). Ciò verrà chiarito dai seguenti esempi.

Consideriamo dapprima l'integrale

$$I_1(C) = \int_0^{+\infty} e^{-x} y'^2 dx,$$

nella classe (K_1) delle curve $C \equiv y(x)$ ordinarie per $I_1(C)$ e per cui è $y(0) = 0$.

La minimante di $I_1(C)$ in (K_1) è ovviamente l'estremale \bar{C} di equazione $y = 0$. Le estremali relative alla $f = e^{-x} y'^2$ sono date da $y = c_1 + c_2 e^x$, ma fra queste solo la \bar{C} appartiene a (K_1) . Poichè se $\delta \bar{y}$ (per x abbastanza grande) si riduce a una costante $\bar{C} + \delta \bar{C}$ è una curva ordinaria, su \bar{C} sono soddisfatte anche le condizioni di trasversalità all'infinito (10), che si riducono in questo caso a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 e^{-x} y' = 0.$$

Quindi le (10) sono assorbite dalla condizione che la minimante \bar{C} è una curva ordinaria e pertanto deve rendere convergente $I_1(\bar{C})$.

Sia ora

$$I_2(C) = \int_0^{+\infty} e^x y'^2 dx$$

e sia (K_2) la classe delle curve $C \equiv y(x)$ ordinarie per $I_2(C)$ con $y(0) = 0$. Il minimo di $I_2(C)$ in (K_2) è dato ancora da \bar{C} e le estremali, relative alla

$f = e^x y'^2$, che appartengono a (K_2) hanno per equazione

$$y = c(e^{-x} - 1).$$

Come nel caso precedente su \bar{C} sono soddisfatte le condizioni di trasversalità all'infinito (10)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 e^x y' = 0$$

e \bar{C} è l'unica, fra le estremali contenute in (K_2) , a verificare tale condizione.

In questo caso le (10) danno una condizione asintotica indipendente da quella di rendere convergente $I_2(C)$.

§ 2 - CONDIZIONI ASINTOTICHE PER LE CURVE ORDINARIE.

1. — Gli esempi del § 1, n. 4 mostrano che le condizioni asintotiche (9) per le estremanti possono essere o no assorbite da altre condizioni di carattere asintotico derivanti dal fatto che le curve C considerate sono curve ordinarie e quindi debbono rendere convergente l'integrale $I_\infty(C)$.

Tale problema non si presenta per gli integrali su intervalli finiti, nei quali le curve considerate non sono soggette ad alcun vincolo agli estremi dell'intervallo per il solo fatto di dare valore finito all'integrale.

Daremo ora alcuni teoremi che permettono di chiarire la struttura asintotica della classe di curve ordinarie (K) . Ci limiteremo a considerare integrali dipendenti da curve piane e dagli elementi differenziali del primo ordine; l'estensione al caso generale non presenta difficoltà.

2. — **TEOREMA:** « Sia $\varphi(y)$ una funzione quasi continua per $-\infty < y < +\infty$ e tale che l'insieme dei suoi zeri sia non vuoto e di misura nulla; inoltre non siano convergenti gli integrali

$$\int_a^{+\infty} \varphi(y) dy, \quad \int_{-\infty}^a \varphi(y) dy.$$

Allora se $y(x)$ è una funzione assolutamente continua per $x \geq a$ e tale che sia convergente l'integrale

$$I^*[y(x)] = \int_a^{+\infty} \{ \varphi^2[y(x)] + y'^2(x) \} dx,$$

necessariamente esiste finito il $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ e, se la $\varphi(y)$ è continua, tale limite coincide con uno degli zeri di $\varphi(y)$ ».

Essendo finito $I^*[y(x)]$ risulta convergente anche

$$\int_{\alpha}^{+\infty} y'(x) \varphi[y(x)] dx;$$

perciò, posto

$$\psi(y) = \int_{y(\alpha)}^y \varphi(y) dy,$$

si ha

$$(11) \quad \int_{\alpha}^{+\infty} y'(x) \varphi[y(x)] dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi[y(x)] = k.$$

Per l'ipotesi fatta sugli integrali

$$\int_0^{+\infty} \varphi(y) dy \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 \varphi(y) dy$$

non esistono finiti i limiti

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \psi(y) \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \psi(y)$$

- e quindi si può determinare $\varepsilon_1 > 0$ in modo che, per quanto grande si fissi $Y > 0$, vi siano valori di y per cui è

$$|\psi(y) - k| > \varepsilon_1,$$

sia con $y < -Y$ che con $y > Y$.

Ne segue che, fissato ad arbitrio l'intero $n > \frac{1}{\varepsilon_1}$, l'insieme Δ_n dei punti dell'asse y in cui è

$$|\psi(y) - k| \leq \frac{1}{n}$$

è costituito da al più una infinità numerabile di intervalli chiusi e limitati, fra loro distinti, riducendosi eventualmente a punti. Inoltre è $\Delta_n \supset \Delta_{n+1}$ e, per la (11), Δ_n non è vuoto.

Sempre per la (11) si può determinare X_n tale che per $x \geq X_n$ sia

$$| \psi[y(x)] - k | \leq \frac{1}{n}$$

e quindi $y(x) \in \Delta_n$ per $x \geq X_n$.

Inoltre c'è un ben determinato intervallo di Δ_n , che si indicherà con δ_n , tale che $y(x) \in \delta_n$ per ogni $x \geq X_n$. Infatti se vi fossero due valori di $y(x)$, con $x \geq X_n$, appartenenti a due intervalli distinti di Δ_n , vi sarebbero pure per la continuità di $y(x)$, degli $y(x)$ (con $x \geq X_n$) non appartenenti a Δ_n , contrariamente a quanto si è ora provato.

Da $\Delta_n \supset \Delta_{n+1}$ segue $\delta_n \supset \delta_{n+1}$. Dimostriamo che la lunghezza di δ_n è infinitesima per $n \rightarrow \infty$. Detti a_n e b_n gli estremi dell'intervallo δ_n , da $a_n \leq b_n$, $\delta_n \supset \delta_{n+1}$ segue che esistono finiti i limiti

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad , \quad b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

e che è $a \leq b$. Si tratta di provare che è $a = b$. Se fosse $a < b$ per $a \leq y \leq b$ sarebbe

$$| \psi(y) - k | \leq \frac{1}{n}$$

qualunque sia n e quindi $\psi(y) = k$ in tutto l'intervallo (a, b) . Perciò in tutto (a, b) è $\psi'(y) = 0$ e poichè è quasi ovunque in (a, b)

$$\psi'(y) = \varphi(y)$$

sarebbe $\varphi(y) = 0$ in quasi tutto (a, b) , contrariamente all'ipotesi che gli zeri di $\varphi(y)$ costituiscano un insieme di misura nulla.

Esiste quindi uno e uno solo valore \bar{y} di y che appartiene ad ogni δ_n ed è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \bar{y}.$$

Infatti, fissato $\sigma > 0$ ad arbitrio, si determini \bar{n} in modo che $\delta_{\bar{n}}$ appartenga all'intervallo $\bar{y} - \sigma, \bar{y} + \sigma$; per $x > X_{\bar{n}}$ è quindi $y(x) \in \delta_{\bar{n}}$ ossia

$$| y(x) - \bar{y} | < \sigma$$

che prova quanto si era affermato.

Se $\varphi(y)$ è continua è

$$\lim_{y \rightarrow \bar{y}} \varphi(y) = \varphi(\bar{y})$$

e perciò, se fosse $\varphi(\bar{y}) \neq 0$, sarebbe $I^*[y(x)] = +\infty$; ne segue che \bar{y} è uno degli zeri di $\varphi(y)$ e il teorema è dimostrato.

3. — **TEOREMA:** « Sia $\varphi(y)$ una funzione continua, definita per ogni valore di y , tale che l'insieme dei suoi zeri sia di misura nulla; sia inoltre

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(y) = 0$$

e sia convergente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \varphi(y) dy$$

e non convergente

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(y) dy.$$

Allora se è finito l'integrale $I^*[y(x)]$ la $y(x)$, per $x \rightarrow +\infty$, tende a uno zero della funzione $\varphi(y)$ oppure diverge a $+\infty$.

Per ipotesi esiste finito il $\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(y)$ e non esiste il $\lim_{y \rightarrow -\infty} \varphi(y)$.

Se è $\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(y) \neq k$, dove k è definito dalla (11), si può ripetere il ragionamento fatto nel n. 2 e si ottiene ancora che $y(x)$ converge, per $x \rightarrow +\infty$, a un valore finito e che questo è uno zero di $\varphi(y)$.

Se invece è $\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(y) = k$, allora l'insieme Δ_n — per n abbastanza grande — è costituito di un intervallo infinito del tipo $y \geq a_n$ ed eventualmente di altri intervalli chiusi e limitati. Se δ_n è limitato, se ne deduce ancora che $y(x)$ converge ad uno zero (al finito) di $\varphi(y)$. Se invece, per n comunque grande, δ_n coincide sempre con l'intervallo infinito $y \geq a_n$, allora è $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Infatti a_n è il minimo numero per cui

$$|\varphi(y) - k| \leq \frac{1}{n} \quad \text{per ogni } y \geq a_n;$$

si possono trovare valori Y di y , comunque grandi, in cui è $\varphi(Y) \neq k$, perchè altrimenti sarebbe $\varphi'(y) = \varphi(y) = 0$ per ogni y sufficientemente grande; fissato uno di tali Y , se è $n > \frac{1}{|\varphi(Y) - k|}$ risulta $a_n > Y$. Da $a_n \rightarrow +\infty$ segue che in tal caso è $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$, cioè che $y(x)$ diverge a uno zero (all'infinito) di $\varphi(y)$.

4. — In modo analogo si dimostra il

TEOREMA: « Sia $\varphi(y)$ una funzione continua definita per ogni valore di y , tale che l'insieme dei suoi zeri sia di misura nulla e che sia

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \varphi(y) = 0$$

e sia convergente l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy.$$

Allora se l'integrale $I^*[y(x)]$ è convergente, la $y(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ converge a uno zero, al finito o no, della funzione $\varphi(y)$.

5. — *Esempi.*

Segue subito dai precedenti teoremi che se $y(x)$ è assolutamente continua per $x \geq 0$, allora:

a) se converge

$$\int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2) dx$$

è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0;$$

b) se converge

$$\int_0^{+\infty} \{y^2(y+1)^2 + y'^2\} dx$$

è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -1;$$

c) se converge

$$\int_0^{+\infty} (\operatorname{sen}^2 y + y'^2) dx$$

è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = n\pi \quad (n \text{ intero } \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0);$$

d) se converge

$$\int_0^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{1+y^2} \right)^2 + y'^2 \right\} dx$$

è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \pm \infty;$$

ciò accade ad es. per la funzione $y = x^{3/8}$.

§ 3 - ULTERIORI CONSIDERAZIONI SUL COMPORTAMENTO ASINTOTICO DELLE ESTREMANTI

1. — Anche in questo § considereremo integrali dipendenti da curve piane e dagli elementi differenziali primi.

Vedremo più avanti (§ 4, n. 4) che l'integrale

$$I_1(C) = \int_0^{+\infty} f(y, y') dx = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2 + 2y') dx$$

ha minimo nella classe (K_1) delle curve ordinarie per $I_1(C)$, di equazione $y = y(x)$ con $y(0) = c$ e tale minimo è fornito dalla estremale $\bar{y} = c e^{-x}$.

Sulla \bar{y} son verificate le (9) che si riducono a

$$(9') \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta y f_{y'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \delta y (1 - c e^{-x}) = 0.$$

Non è invece verificata la condizione di trasversalità all' ∞ essendo su \bar{y}

$$(10') \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{y'} = 2.$$

La ragione di tale fatto sta in ciò:

La condizione per la $y(x)$ di appartenere alla classe (K_1) porta che è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

Basta dimostrare (§ 2, n. 5, a) che se è convergente l'integrale $I_1(C)$, lo è pure

$$\int_a^{+\infty} (y^2 + y'^2) dx;$$

infatti se fosse

$$\int_a^{+\infty} (y^2 + y'^2) dx = +\infty,$$

essendo

$$I_1(C) = \int_0^{+\infty} (y^2 + y'^2) dx + 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) - 2y(0),$$

risulterebbe $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$. Fissato $M > 0$ si potrebbe determinare $x_0 \geq 0$ tale che per $x \geq x_0$ sia

$$y^2(x) > M + 1;$$

ne seguirebbe

$$I_1(C) \geq \int_0^{x_0} (y^2 + y'^2 + 2y') dx + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x \{(y' + 1)^2 + M\} dx = +\infty,$$

contro l'ipotesi che $I_1(C)$ sia finito.

Mentre a priori il problema considerato poteva pensarsi con punto terminale all' ∞ libero, in realtà la condizione di rendere convergente $I_1(C)$ porta a un problema a punti terminali entrambi fissi e ciò spiega perchè è verificata la (9') e non la (10').

2. — Consideriamo l'integrale

$$I_2(C) = \int_0^{+\infty} f(y, y') dx = \int_0^{+\infty} \{y^2 (y + 1)^2 + y'^2 + 2y'\} dx$$

e dimostriamo che esso ha minimo nella classe (K_2) delle curve ordinarie $C \equiv y(x)$, con $y(0) = -1$, minimo che è fornito dall'estremale \bar{C} di equazione $y = -1$.

L'equazione di EULERO è in questo caso

$$y'' = y(y+1)(2y+1)$$

e quindi la \bar{C} è una estremale che appartiene a (K_2) . Se $C \equiv y(x)$ è una qualunque curva di (K_2) si ha

$$\begin{aligned} I_2(C) &= \int_0^{+\infty} \{y^2(y+1)^2 + y'^2 + 2y'\} dx = \\ (12) \quad &= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2y(x) + \int_0^x \{y^2(y+1)^2 + y'^2\} dx \right]. \end{aligned}$$

Se C è tale che esista finito

$$\int_0^{+\infty} \{y^2(y+1)^2 + y'^2\} dx$$

allora [§ 2, n. 5, b)] è necessariamente o $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ oppure $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -1$.

Perciò in tal caso è

$$I_2(C) = 2\varrho + \int_0^{+\infty} \{y^2(y+1)^2 + y'^2\} dx$$

dove è $\varrho = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, e quindi è sempre $I_2(C) \geq 0$.

Supponiamo ora, se possibile, che C appartenga a (K_2) ma che non esista finito

$$\int_0^{+\infty} \{y^2(y+1)^2 + y'^2\} dx.$$

In tal caso il primo membro della (12) è finito e quindi è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty.$$

Ma allora, fissato $M > 0$, si può determinare x_0 tale che per $x \geq x_0$ sia sempre

$$y^2(x)(y(x) + 1)^2 \geq M + 1.$$

Si avrebbe pertanto

$$I_2(C) \geq \int_0^{x_0} \{y^2(y+1)^2 + y'^2 + 2y'\} dx + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x \{M + (1+y')^2\} dx = +\infty$$

e quindi è $I_2(C) = +\infty$ e la C non può appartenere a (K_2) .

Perciò se C è una qualunque curva di (K_2) è sempre

$$I(C) \geq 0.$$

Poichè per l'estremale \bar{C} si ha $I_2(\bar{C}) = 0$ è così provato che \bar{C} dà ad $I_2(C)$ il valore minimo in (K_2) .

Se $\delta \bar{C}$ è tale che $\bar{C} + \delta \bar{C}$ sia una qualunque curva di (K_2) è

$$(13) \quad \delta I_2(\bar{C}) = \int_0^{+\infty} \{ \delta \bar{y} f_{\bar{y}} + \delta \bar{y}' f_{\bar{y}'} \} dx = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta y(x).$$

Si consideri la variazione $\delta \bar{C} \equiv \delta \bar{y}$ definita da

$$\delta \bar{y} = x \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\delta \bar{y} = 1 \quad \text{»} \quad x \geq 1.$$

La curva $\bar{C} + \delta \bar{C}$ appartiene a (K_2) e la relativa variazione di $I_2(C)$ è data da

$$I_2(\bar{C}) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta \bar{y} = 2.$$

3. — L'esempio del n. 2 mostra che, pur avendo l'integrale $I_2(C)$ minimo in (K_2) , sulla estremale \bar{C} che minimizza $I_2(C)$ in (K_2) non è $\delta I_2(\bar{C}) = 0$ per ogni $\delta \bar{C}$ tale che $\bar{C} + \delta \bar{C}$ appartenga a (K_2) .

La ragione di tale fatto è la seguente:

La classe (K_2) è divisa in due sottoclassi (K_2') e (K_2'') [§ 2, n. 5, b)]; per le curve $C \equiv y(x)$ di (K_2') è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$$

e per quelle di (K_2'')

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -1.$$

La \bar{C} appartiene a (K_2'') e la (13) mostra che è $\delta I_2(\bar{C}) = 0$ per ogni $\delta \bar{C}$ tale che $\bar{C} + \delta \bar{C}$ appartenga a (K_2'') .

Definiamo come distanza fra due elementi $y_1(x)$ e $y_2(x)$ di (K_2) lo

$$\text{estr. sup.}_{x \geq 0} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

Ogni elemento di (K_2') dista almeno di 1 da ogni elemento di (K_2'') .

La classe (K_2) è quindi non connessa e non si può approssimare quanto si vuole \bar{C} con elementi di (K_2') .

Ciò spiega perchè non è $\delta I_2(\bar{C}) = 0$ se $\bar{C} + \delta \bar{C}$ appartiene a (K_2') ; infatti $\bar{C} + \delta \bar{C}$ non può appartenere a un fascio lineare $\bar{C} + \lambda \delta \bar{C}$ (cfr. § 3) tutto costituito di curve ordinarie almeno in un intorno di $\lambda = 0$; nel fascio $\bar{C} + \lambda \delta \bar{C}$ si hanno solo due curve di (K_2) , la \bar{C} per $\lambda = 0$ e la $\bar{C} + \delta \bar{C}$ per $\lambda = 1$, essendo $-\lambda$ limite della sua ordinata per $x \rightarrow +\infty$.

4. — Se la funzione integranda è un polinomio di secondo grado in y e y' , allora per il teorema B su una estremale \bar{C} che minimizza l'integrale $I_\infty(C)$ in (K) è $\delta I_\infty(\bar{C}) = 0$ per ogni $\delta \bar{C}$ tale che $\bar{C} + \delta \bar{C}$ appartenga a (K) ; non si presenta in tal caso il fatto segnalato nei nn. 2 e 3 per l'integrale $I_2(C)$.

Ciò è d'accordo col teorema del § 2 n. 2, dovendo ora la funzione $\varphi(y)$ essere di primo grado e quindi dotata di un solo zero. Perciò, qualora il rendere convergente $I_\infty(C)$ porti a condizioni asintotiche per le curve C , queste saranno obbligate ad avere uno stesso limite per $x \rightarrow +\infty$ e non si spezza la connessione della classe (K) .

5. — Le considerazioni dei nn. precedenti portano alla seguente conclusione:

· Dovendo cercare il minimo di $I_\infty(C)$ nella classe (K) occorre dapprima studiare le condizioni asintotiche derivanti alle C dal fatto di rendere convergente $I_\infty(C)$.

Ciò si fa ricorrendo a teoremi del tipo di quelli del § 2.

Si otterrà in generale che (K) si spezza in più sottoclassi ciascuna delle quali è connessa (ad es. per l'integrale del § 2, n. 5, c) si ottiene una infinità numerabile di sottoclassi connesse); si dovrà poi cercare il minimo di $I_\infty(C)$ in ciascuna di queste sottoclassi, confrontando poi fra loro i risultati per decidere quali diano il minimo assoluto nella classe (K) .

Ad es. nel caso dell'integrale $I_2(C)$ la classe (K_2) si spezza nelle sotto-classi (K_1') e (K_2'') .

Se C è un elemento di (K_2'') si ha per la (12)

$$I_2(C) = \int_0^{+\infty} \{y^2(y+1)^2 + y'^2\} dx;$$

da ciò segue immediatamente che $\bar{C} \equiv (y = -1)$ è la minimante assoluta in (K_2'') ; essa è inoltre la minimante assoluta in (K_2) essendo, se C è un elemento di (K_2') ,

$$I_2(C) = 2 + \int_0^{+\infty} \{y^2(y+1)^2 + y'^2\} dx \geq 2 > I_2(\bar{C}) = 0.$$

§ 4. - ESISTENZA DELL'ESTREMO ASSOLUTO.

1. — I° tipo di teoremi dell'esistenza dell'estremo assoluto.

Si ottiene un primo tipo di teoremi di esistenza⁽³⁾ del minimo assoluto di $I_\infty(C)$ in (K) supponendo che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

α) *Esiste una funzione $\psi(x)$, definita e continua per $x \geq a$, tale che sia convergente l'integrale*

$$\int_a^{+\infty} \psi(x) dx,$$

ed è per $x \geq a$ ad ogni valore di $y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$

$$f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) \geq \psi(x);$$

β) *Qualunque sia $X > 0$ l'integrale*

$$\int_a^{+X} f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx$$

⁽³⁾ Cfr. S. CINQUINI, « Una nuova estensione dei moderni metodi del calcolo delle Variazioni », Ann. Sc. Normale Sup. di Pisa, S. II, Vol. IX (1940) pagg. 253-261.

S. FAEDO, loc. cit. in ⁽⁴⁾ di questo lavoro.

possiede minimo nella classe (K_X) che si ottiene dalla (K) considerando solo di ogni curva C l'arco definito da $a \leq x \leq a + X$.

La dimostrazione di tali teoremi si ottiene estendendo il procedimento di L. TONELLI per gli integrali su intervalli finiti.

Come esempio citiamo i due seguenti:

« Se l'integrale $I_\infty(C)$ è quasi regolare positivo ⁽⁴⁾ ed è soddisfatta la condizione α ; se in corrispondenza ad ogni numero $X > 0$ esiste una funzione $\Phi_X(z)$ definita in $(0, +\infty)$, inferiormente limitata tale che

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\Phi_X(z)}{z} = +\infty$$

e per la quale sia per $a \leq x \leq a + X$ e per ogni valore di $y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$

$$f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) \geq \Phi_X \left[\sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^{(m)^2}} \right];$$

allora esiste il minimo assoluto di $I_\infty(C)$ in (K) ».

In questo teorema la condizione β) è quella del teorema di esistenza dell'estremo assoluto di M. NAGUMO ⁽⁵⁾.

« Se è soddisfatta la condizione α), se la $f(x, y_1, y_n^{(m)})$ soddisfa alle condizioni:

A) f è un polinomio di secondo grado in $y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}$, a coefficienti funzioni continue di x per $x \geq a$;

B) La forma quadratica

$$\sum_{i,j}^{1 \dots n} \sum_{r,s}^{0 \dots m} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} v_{i,r} v_{j,s}$$

è semidefinita positiva;

(4) Cioè è semidefinita positiva la forma quadratica

$$\sum_{i,j}^{1 \dots n} f_{y_i^{(m)} y_j^{(m)}} v_i v_j.$$

(5) M. NAGUMO, « Über die gleichmassige Summierbarkeit und ihre Anwendung auf ein Variationsproblem », Japanese Journal of Mathematics », Vol. VI, 1929, pag. 173-182.

Tale teorema è stato esteso ai problemi di ordine n da S. CINQUINI, « Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n », Ann. Sc. Normale Sup. di Pisa, S. II, Vol. V, 1936, pag. 169-190.

« Nnovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n », Ann. Sc. Normale Sup. di Pisa. S. II, Vol. VI, 1937, pag. 191-209.

C) *L'integrale $I_\infty(C)$ è regolare positivo, cioè è definita positiva la forma quadratica*

$$\sum_{i,j}^{1..n} f_{y_i^{(m)} y_j^{(m)}} v_i v_j;$$

allora esiste il minimo assoluto di $I_\infty(C)$ in (K) ».

In questo teorema la condizione β) espressa dalle A), B), C) è quella di un teorema di esistenza dell'estremo assoluto di B. MANIÀ⁽⁶⁾.

2. — Un esempio notevole.

a) Mostriamo ora un esempio di un integrale che possiede minimo pur non essendo verificate le condizioni α) e β) del n. 1; più precisamente $I_\infty(C)$ ha minimo in (K) mentre

$$\int_a^{a+X} f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx$$

non ha mai minimo in (K_X) , qualunque sia il numero (finito) $X > 0$; inoltre la f non soddisfa alla α).

Consideriamo l'integrale

$$I^*(C) = \int_0^{+\infty} f(y, y') dx$$

con

$$f(y, y') = y' + y^2$$

e la classe (K^*) delle curve $C \equiv y(x)$ ordinarie per $I^*(C)$ per cui è $y(0) = 0$.

b) *Dimostriamo che $I^*(C)$ ha minimo assoluto in (K^*) fornito dalla estrema \bar{C} di equazione $y = 0$.*

Sia $C \equiv y(x)$ una curva di (K^*) e supponiamo che converga l'integrale

$$\int_0^{+\infty} y^2(x) dx.$$

⁽⁶⁾ B. MANIÀ, « *Sopra una questione di compatibilità nel metodo variazionale* », Ann. Sc. Normale Sup. di Pisa, S. II, Vol. IX, 1940, pag. 79-95.

Essendo

$$I^*(C) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) + \int_0^{+\infty} y^2(x) dx,$$

esiste finito il $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ ed è $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$, altrimenti non convergerebbe

$$\int_0^{+\infty} y^2(x) dx;$$

è quindi

$$(14) \quad I^*(C) = \int_0^{+\infty} y^2(x) dx \geq I^*(\bar{C}) = 0.$$

Supponiamo che esista una curva C di (K^*) con

$$(15) \quad I^*(C) < 0.$$

Per quanto si è ora dimostrato deve essere

$$\int_0^{+\infty} y^2(x) dx = +\infty$$

ed essendo

$$I^*(C) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ y(x) + \int_0^x y^2(x) dx \right\} = A < 0$$

risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty.$$

Fissato un numero $\varepsilon < 1$ e inoltre soddisfacente alla limitazione

$$0 < \varepsilon < -A,$$

si può determinare X tale che per $x \geq X$ sia

$$y(x) \leq -1, \quad y(x) + \int_0^x y^2(x) dx \leq -\varepsilon$$

e quindi

$$(16) \quad y(x) \leq - \int_X^x y^2(x) dx - \varepsilon.$$

Consideriamo per $X \leq x < X + \frac{1}{\varepsilon}$ la funzione

$$\varphi(x) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon(x - X) - 1};$$

si ha

$$\varphi(X) = -\varepsilon > -1 \geq y(X)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow X + \frac{1}{\varepsilon} - 0} \varphi(x) = -\infty;$$

quindi vi è un primo punto x' , con $X < x' < X + \frac{1}{\varepsilon}$, in cui è

$$\varphi(x') = y(x').$$

Internamente all'intervallo (X, x') è $|\varphi(x)| < |y(x)|$ ed essendo

$$\varphi(x) = - \int_X^x \varphi^2(x) dx - \varepsilon$$

risulta

$$y(x') = \varphi(x') = - \int_X^{x'} \varphi^2(x) dx - \varepsilon > - \int_X^{x'} y^2(x) dx - \varepsilon$$

che contraddice la (16).

Non può pertanto sussistere la (15) ed è così dimostrato che \bar{U} dà il minimo assoluto a $I^*(C)$ in (K^*) .

OSSERVAZIONE. — Il ragionamento fatto prova pure che non esistono $y(x)$ assolutamente continue per $x \geq 0$ e per cui è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (y^2(x) + y'(x)) dx = -\infty.$$

c) Fissato ad arbitrio $X > 0$, *V* integrale

$$I_X(y) = \int_0^X (y^2 + y') dx$$

non ha minimo nella classe (K_X) delle funzioni $y(x)$ assolutamente continue in $(0, X)$ con $y(0) = 0$.

Infatti l'insieme dei valori di $I_X(y)$, al variare di $y(x)$ in (K_X) , non è limitato inferiormente.

d) La funzione

$$y' + y^2$$

non soddisfa ovviamente alla condizione α) del n. 1.

3. — La condizione γ).

a) Sia $I_\infty(C)$ un'integrale soddisfacente alle ipotesi del teorema B o a quelle più attenuate del § 1, n. 3; se \bar{C} è un'estremale che rende minimo $I_\infty(C)$ in (K) si ha per ogni $\bar{C} + \delta \bar{C}$ di (K)

$$(17) \quad I_\infty(\bar{C} + \delta \bar{C}) = I_\infty(\bar{C}) + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \left\{ \sum_{ij}^{1\dots n} \sum_{rs}^{0\dots m} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx,$$

essendo, per il teorema B, $\delta I_\infty(\bar{C}) \equiv 0$.

Per ogni $\bar{C} + \delta \bar{C}$ di (K) è quindi convergente l'integrale

$$(18) \quad \mathcal{J}(\delta \bar{C}) = \int_a^{+\infty} \left\{ \sum_{ij}^{1\dots n} \sum_{rs}^{0\dots m} f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx$$

e sussiste la (17).

Si pone a questo punto il problema se viceversa ogni $\delta \bar{C}$, per cui sia

$$\delta \bar{y}_i^{(r)}(a) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; r = 0, 1, \dots, m - 1)$$

e per cui converga l'integrale (18) sia tale che $\bar{C} + \delta \bar{C}$ appartenga a (K) . Se ciò accade diremo che $I_\infty(C)$ soddisfa alla condizione γ).

b) Se l'integrale $I_\infty(C)$ soddisfa alla condizione α) esso soddisfa pure alla γ). Infatti se è convergente $\mathcal{J}(\delta \bar{C})$ risulta

$$I_\infty(\bar{C} + \lambda \delta \bar{C}) = I_\infty(\bar{C}) + \lambda \delta I_\infty(\bar{C}) + \frac{\lambda^2}{2} \mathcal{J}(\delta \bar{C});$$

per la α), qualunque sia λ , $I_\infty(\bar{C} + \lambda \delta \bar{C})$ o è convergente oppure diverge a $+\infty$; quest'ultimo caso non può presentarsi perchè altrimenti vi sarebbero

anche valori di λ per cui $I_\infty(\bar{U} + \lambda \delta \bar{C}) = -\infty$; è quindi soddisfatta la condizione γ).

c) *Può accadere che $I_\infty(C)$ abbia minimo in (K) , fornito da una estrema, e non soddisfi alla condizione γ .*

Consideriamo ancora l'integrale $I^*(C)$ del n. 2, che soddisfa alle ipotesi del § 1, n. 3. Conservando le notazioni del n. 2 ri ha per ogni C di (K^*) [cfr. (14)]

$$I^*(C) = I^*(\bar{C}) + \int_0^{+\infty} y^2 dx.$$

Se $C \equiv y(x)$ è assolutamente continua con $y(0) = 0$ e tale da rendere convergente

$$\int_0^{+\infty} y^2(x) dx$$

e se non esiste il $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$, allora C non appartiene a (K^*) , risultando non convergente $I^*(C)$; non è quindi soddisfatta la condizione γ .

4. — Teorema di confronto.

Le considerazioni che seguono sono volte ad ottenere dei teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per integrali che non soddisfano alla condizione α del n. 1.

a) Premettiamo un lemma che estende il lemma III riportato nell'Introduzione.

LEMMA: « Se sono soddisfatte le ipotesi del Lemma III fissati ad arbitrio i numeri $\delta > 0$ e $\varrho \geq 0$ si possono costruire in (x', x'') le funzioni $y_1(x), \dots, y_n(x)$, assolutamente continue con le derivate fino all'ordine $m - 1$ e aventi le proprietà:

$$y_i^{(r)}(x') = \gamma_i^{(r)}(x'), y_i^{(r)}(x'') = \gamma_i^{(r)}(x'') \quad (i = 1, \dots, n; r = 0, \dots, m - 1)$$

$$| y_i^{(r)}(x) - \gamma_i^{(r)}(x) | \leq \delta \quad (x' \leq x \leq x'')$$

$$\int_{x'}^{x''} \left\{ \sum_{i,j}^{1 \dots n} \sum_{r,s}^{0 \dots m} a_{ij}^{(r,s)} y_i^{(r)} y_j^{(s)} \right\} dx = \varrho + \int_{x'}^{x''} \left\{ \sum_{i,j}^{1 \dots n} \sum_{r,s}^{0 \dots m} a_{ij}^{(r,s)} \gamma_i^{(r)} \gamma_j^{(s)} \right\} dx \gg.$$

La dimostrazione è la stessa del Lemma III; basta sostituire $\varrho + 1$ al secondo membro della (22), pag. 117, lav. cit. in (1); da questo lemma si riottiene il Lemma III ponendo

$$\varrho = \int_{x'}^{x''} \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} a_{ij}^{(r,s)} \gamma_i^{(r)} \gamma_j^{(s)} \right\} dx.$$

b) Indichiamo con (K) la classe delle curve ordinarie per $I_\infty(C)$ definita nell'introduzione e con (K') la classe delle curve ordinarie per $I'_\infty(C)$, soddisfacenti alle stesse condizioni per $x = a$.

TEOREMA DI CONFRONTO :

« Se l'integrale

$$I'_\infty(C) = \int_a^{+\infty} F(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx$$

ammette in (K') minimo fornito da un'estremale \bar{C} e soddisfa alla condizione γ (n. 3), se le funzioni

$$F(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) \quad \text{e} \quad f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) - F(x, y_1, \dots, y_n^{(m)})$$

soddisfano alle condizioni A), B), C) (n. 1) ed è per $x \geq a$ ed ogni valore di $y_1, \dots, y_n, \dots, y_n^{(m)}$

$$(19) \quad f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) \geq F(x, y_1, \dots, y_n^{(m)});$$

allora l'integrale

$$I_\infty(C) = \int_a^{+\infty} f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx$$

ha minimo nella classe (K) ».

c) Dimostriamo dapprima che è $(K) \subset (K')$.

Se C è una curva di (K) , essendo

$$(20) \quad \int_a^\infty F(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx = \int_a^\infty f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) dx - \int_a^\infty \{f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) - F(x, y_1, \dots, y_n^{(m)})\} dx,$$

ne segue per la (19) che o C appartiene a (K') oppure che è $I'_\infty(C) = -\infty$. Basterà dimostrare che quest'ultimo caso non può presentarsi, cioè che non può essere su C

$$(21) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \{f(x, y_1, \dots, y_n^{(m)}) - F(x, y_1, \dots, y_n^{(m)})\} dx = +\infty.$$

Posto $C \equiv \bar{C} + \delta \bar{C}$ e supposto che sussista la (21) si ottiene, analogamente a quanto è esposto nel lavoro cit. in (1) pag. 123, formula (28),

$$(22) \quad \int_a^x F(x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}) dx = \int_a^x F(x, \bar{y}, \dots, \bar{y}_n^{(m)}) dx + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} \delta \bar{y}_i^{(r)} \Phi_{i,r}(x) + \frac{1}{2} \int_a^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx$$

dove è

$$\bar{C} \equiv (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n), \delta \bar{C} \equiv (\delta \bar{y}_1, \delta \bar{y}_2, \dots, \delta \bar{y}_n)$$

e

$$\Phi_{i,r}(x) = F_{y_i^{(r+1)}} - \frac{d}{dx} \left[F_{y_i^{(r+2)}} - \dots - \frac{d}{dx} \left(F_{y_i^{(m-1)}} - \frac{d}{dx} F_{y_i^{(m)}} \right) \dots \right]$$

con le $F_{y_i^{(r)}}$ calcolate su \bar{C} .

Dalla (22) segue per la (20)

$$(23) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} \delta \bar{y}_i^{(r)} \Phi_{i,r}(x) = \int_a^x \{f[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}] - F(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)})\} dx - \\ - \int_a^x \{f(x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}) - F(x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)})\} dx - \\ - \frac{1}{2} \int_a^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx.$$

Fissato un numero non negativo $h > I_\infty(\bar{C} + \delta \bar{C}) - I'_\infty(\bar{C})$, si determini il primo valore $x_0 \geq a$ di x per cui

$$(24) \int_a^{x_0} \{f[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}] - F[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}]\} dx = h$$

e ciò è possibile per la (21); sia poi $x_p > x_{p-1}$ il primo valore di x per cui è

$$(25) \int_{x_{p-1}}^{x_p} \{f[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}] I - F[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}]\} dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx = \frac{1}{p} \quad (p = 1, 2, \dots);$$

poichè le funzioni integrande del primo membro sono non negative, per la (21) e la divergenza della serie armonica e poichè il primo membro della (21) è finito per x finito⁽⁷⁾, la successione $\{x_p\}$ esiste ed è $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = +\infty$.

Sia δ_p un numero positivo con

$$(26) \quad \delta_p \leq \frac{1}{p \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} |\Phi_{i,r}(x)|}, \quad x_{p-1} \leq x \leq x_p,$$

ciò è possibile essendo le $\Phi_{i,r}(x)$ continue in (x_{p-1}, x_p) ; se il denominatore del secondo membro della (26) fosse identicamente nullo in (x_{p-1}, x_p) si può assumere per δ_p un qualunque numero positivo.

Definiamo la curva $\delta C \equiv (\delta y_1(x), \dots, \delta y_n(x))$ su $(a, +\infty)$ ponendo

$$\delta y_i(x) = \delta \bar{y}_i(x) \quad \text{per} \quad a \leq x \leq x_0;$$

(7) Se $f(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$ è sommabile su (a, x) lo è pure $F(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$; infatti la parte di F che è lineare nelle $y_i^{(m)}(x)$ ($i = 1, \dots, n$) è sommabile per l'assoluta continuità delle $y_i^{(m-1)}(x)$ e la parte quadratica nelle $y_i^{(m)}(x)$ è non negativa per la condizione C) e l'integrale di essa esteso ad (a, x) è finito per la (19).

per $x_{p-1} \leq x \leq x_p$ ($p = 1, 2, \dots$) la $\delta y_i(x)$ è la funzione costruita nel lemma quando in esso si faccia

$$\gamma_i(x) = \delta \bar{y}_i(x), x_{p-1} = x', x_p = x'', \delta = \delta_p, a_{i,j}^{(r,s)} = F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}}$$

$$\varrho = \varrho_p = 2 \int_{x_{p-1}}^{x_p} \{f[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}] - F[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}]\} dx;$$

per la (19) è $\varrho_p \geq 0$.

Le funzioni $\delta y_i(x)$ sono assolutamente continue con le loro derivate fino all'ordine $m-1$, con

$$\delta y_i^{(r)}(a) = 0 \quad (i = 1, \dots, n; r = 0, 1, \dots, m-1)$$

e nell'intervallo (x_{p-1}, x_p) risulta

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\delta y_i^{(r)}(x) - \delta \bar{y}_i^{(r)}(x)| \leq \delta_p \quad (i = 1, \dots, n; r = 0, \dots, m-1) \\ \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx = \varrho_p + \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx. \end{array} \right.$$

Come per la (22) si ha

$$(28) \quad \begin{aligned} \int_a^x F[x, \bar{y}_1 + \delta y_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta y_n^{(m)}] dx &= \int_a^x F[x, \bar{y}, \dots, \bar{y}_n^{(m)}] dx + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} \delta y_i^{(r)} \Phi_{i,r}(x) + \frac{1}{2} \int_a^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx = \\ &= \int_a^x F(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)}) dx + \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} [\delta y_i^{(r)} - \delta \bar{y}_i^{(r)}] \Phi_{i,r}(x) + \\ &+ \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^{m-1} \delta \bar{y}_i^{(r)} \Phi_{i,r}(x) + \frac{1}{2} \int_a^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx. \end{aligned}$$

Se è $x_{p-1} \leq x \leq x_p$ per la (26) e la prima delle (27) risulta

$$(29) \quad \left| \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} [\delta y_i^{(r)} - \delta \bar{y}_i^{(r)}] \Phi_{i,r}(x) \right| \leq \delta_p \sum_{r=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} |\Phi_{i,r}(x)| \leq \frac{1}{p}.$$

Si ha per le (23) e (25) e la definizione delle $\delta y_i(x)$ su (a, x_0) se $x > x_0$

$$(30) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} \delta \bar{y}_i^{(r)} \Phi_{i,r}(x) + \frac{1}{2} \int_a^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx =$$

$$= \int_a^x \{f[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}] - F(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)})\} dx - h -$$

$$- \int_{x_0}^x \{f[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n + \delta \bar{y}_n^{(m)}] - F[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}]\} dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx;$$

per la seconda delle (27), ricordando il significato di ϱ_p e la definizione di $\delta y_i(x)$ su (x_{p-1}, x_p) è per $x_{p-1} \leq x \leq x_p$

$$(31) \quad - \int_{x_0}^x \{f[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n + \delta \bar{y}_n] - F[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}]\} dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx =$$

$$= - \int_{x_{p-1}}^x \{f[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}] - F[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}]\} dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{x_{p-1}}^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx + \frac{1}{2} \int_{x_{p-1}}^x \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx;$$

poichè la F soddisfa alla condizione B) e per le (19) e (25) si ha

$$0 \leq \int_{x_{p-1}}^x \{f[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}] - F[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}]\} dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{x_{p-1}}^x \left\{ \sum_{i,j}^{1..n} \sum_{r,s}^{0..m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx \leq \frac{1}{p}$$

e per la seconda delle (27)

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_{x_{p-1}}^x \left\{ \sum_{i,j}^{1..n} \sum_{r,s}^{0..m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx \leq \frac{1}{2} \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left\{ \sum_{i,j}^{1..n} \sum_{r,s}^{0..m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx = \\ = \frac{1}{2} \varrho_p + \frac{1}{2} \int_{x_{p-1}}^{x_p} \left\{ \sum_{i,j}^{1..n} \sum_{r,s}^{0..m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} \right\} dx = \frac{1}{p}$$

per la (25) e la definizione di ϱ_p .

Per le disuguaglianze ora ottenute e per la (31) il primo membro della (30) ha limite per $x \rightarrow +\infty$ ed è

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} \delta \bar{y}_i^{(r)} \Phi_{i,r}(x) + \frac{1}{2} \int_a^x \left\{ \sum_{i,j}^{1..n} \sum_{r,s}^{0..m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} \right\} dx \right] = \\ = I_\infty(\bar{U} + \delta \bar{C}) - I'_\infty(\bar{C}) - h;$$

ne segue, tenuto conto anche della (29), che nella (28) il primo membro converge per $x \rightarrow +\infty$ [e quindi la curva $\bar{C} + \delta C$ appartiene a (K')] ed è, passando il limite nei due membri della (28)

$$I'_\infty(\bar{C} + \delta C) = I_\infty(\bar{U} + \delta \bar{C}) - h < I'_\infty(\bar{C}),$$

per la definizione di h . Ma ciò contraddice l'ipotesi che \bar{C} dia il minimo a $I'_\infty(C)$ in (K') . Non può quindi sussistere la (21) ed è dimostrato che è $(K) \subset (K')$.

d) *Dimostriamo ora il teorema di confronto enunciato in b).*

Se $\bar{C} + \delta \bar{C}$ è una qualunque curva di (K) essa appartiene anche a (K') ed è per la (17) applicata all'integrale $I'_\infty(C)$

$$I_\infty(\bar{C} + \delta \bar{C}) = I'_\infty(\bar{C}) + \int_a^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta \bar{y}_i^{(r)} \delta \bar{y}_j^{(s)} + \right. \\ (32)$$

$$\left. + f[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}] - F[x, \bar{y}_1 + \delta \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta \bar{y}_n^{(m)}] \right\} dx.$$

Per le ipotesi fatte la funzione sotto l'ultimo segno di integrale soddisfa alle condizioni A), B), C) del n. 1 ed è inoltre non negativa. Perciò, per il secondo teorema di esistenza riportato nel n. 1, l'integrale

$$I_\infty^*(\delta C) = \int_a^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{a,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{(r)} \delta y_j^{(s)} + \right.$$

$$\left. + f[x, \bar{y}_1 + \delta y_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta y_n^{(m)}] - F[x, \bar{y}_1 + \delta y_1, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta y_n^{(m)}] \right\} dx$$

ha minimo assoluto nella classe delle curve δC ordinarie per $I_\infty^*(\delta C)$ e per cui è

$$\delta y_i^{(r)}(a) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; r = 0, 1, \dots, m-1).$$

Se δC^* è una minimante di $I_\infty^*(\delta C)$ in tale classe di curve, allora convergono

$$\int_a^{+\infty} \left\{ \sum_{i,j}^{1\dots n} \sum_{r,s}^{0\dots m} F_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} \delta y_i^{*(r)} \delta y_j^{*(s)} \right\} ds$$

e

$$\int_a^{+\infty} \left\{ f[x, \bar{y}_1 + \delta y_1^*, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta y_n^{*(m)}] - \right. \\ \left. - F(x, \bar{y}_1 + \delta y_1^*, \dots, \bar{y}_n^{(m)} + \delta y_n^{*(m)}) \right\} dx;$$

perciò, per la condizione $\gamma)$, $\bar{C} + \delta C^*$ appartiene a (K') e quindi a (K) essendo convergente l'ultimo integrale scritto. Dalla (32) segue allora che $\bar{C} + \delta C^*$ è una minimante di $I_\infty(C)$ in (K) e il teorema di confronto è dimostrato.

5. — II° tipo di teoremi di esistenza dell'estremo.

Per evitare inutili complicazioni di calcolo considereremo integrali $I_\infty(C)$ dipendenti da una sola $y(x)$ e del primo ordine; l'estensione al caso generale è puramente formale. I teoremi che ora daremo non soddisfano alla condizione α) (n. 1).

a) **TEOREMA**: « Sia $a(x)$ una funzione continua per ogni $x > a$ e tale che esista un λ in modo che $\alpha(x) - \lambda$ sia di quadrato integrabile in $(a, +\infty)$; allora l'integrale

$$I_\infty(C) = \int_a^{+\infty} \{y'^2 + y^2 + 2\alpha(x)y'\} dx$$

ha minimo nella classe (K) ».

Si ha

$$y^2 + y'^2 + 2\alpha y' = y^2 + (y' + \alpha - \lambda)^2 - (\alpha - \lambda)^2 + 2\lambda y'$$

e quindi, se per le $C = y(x)$ di (K) è $y(a) = c$, risulta

$$(33) \quad \begin{aligned} I_\infty(C) &= 2\lambda \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) - 2\lambda c + \\ &+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \{y^2 + (y' + \alpha - \lambda)^2 - (\alpha - \lambda)^2\} dx. \end{aligned}$$

Se C appartiene a (K) e converge

$$I'(C) = \int_a^{+\infty} \{y^2 + (y' + \alpha - \lambda)^2 - (\alpha - \lambda)^2\} dx,$$

allora esiste finito il $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$, e questo è necessariamente nullo altrimenti non convergerebbe $I'(C)$.

$I'(C)$ non può essere indeterminato; se poi fosse $I'(C) = +\infty$ si avrebbe per la (33) $\lim_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = +\infty$; perciò si potrebbe determinare x_0 tale che per $x \geq x_0$ sia

$$y^2(x) \geq 2(2 + \lambda^2).$$

Poichè $(\alpha - \lambda)^2$ è integrabile su $(a, +\infty)$, l'insieme E dei punti x in cui è $|\alpha - \lambda| \geq 1$ ha misura finita. Fuori di E si ha $|\alpha| \leq 1 + |\lambda|$ e quindi $\alpha^2 \leq 2(1 + \lambda^2)$; perciò fuori di E e per $x \geq x_0$ risulterebbe

$$y^2 + y'^2 + 2\alpha y' \geq 2(2 + \lambda^2) + y'^2 + 2\alpha y' \geq 2 + (y' + \alpha)^2$$

ed $I_\infty(C)$ non sarebbe finito. Segue dalla (33) per ogni C di (K)

$$(34) \quad I_\infty(C) = -2\lambda c + I'(C).$$

Viceversa se $C \equiv y(x)$ è tale che converga $I'(C)$, allora convergono

$$\int_a^{+\infty} y^2 dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} y'^2 dx,$$

essendo sommabile su $(\alpha, +\infty)$ $(y' + \alpha - \lambda)^2$ e $y'^2 \leq 2[(y' + \alpha - \lambda)^2 + (\alpha - \lambda^2)]$; perciò è $\lim y(x) = 0$ e C appartiene a (K) e sussiste la (34).

Per il secondo teorema di esistenza riportato nel n. 1 l'integrale $I'(C)$ ha minimo in (K) e quindi ha minimo $I_\infty(C)$ e il teorema è dimostrato.

OSSERVAZIONE I. La minimante $C \equiv \bar{y}(x)$ di $I_\infty(C)$ soddisfa alla equazione (8)

$$k + \int_a^x y dx = y' + \alpha \quad (k \text{ costante})$$

e quindi all'equazione di EULERO

$$(35) \quad y - \frac{d}{dx}(y' + \alpha) = 0.$$

La \bar{C} è dunque una estremale (\bar{y}' è continua) ed è

$$\begin{aligned} \bar{C} \equiv \bar{y}(x) &= \frac{e^\alpha}{2} \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx - \frac{e^{-x}}{2} \int_a^x (\alpha - \lambda) e^x dx + \\ &+ e^{\alpha-x} \left[c - \frac{e^\alpha}{2} \int_a^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx \right]. \end{aligned}$$

(8) S. FAEDO, loc. cit. in (2).

Si controlla subito che la $\bar{y}(x)$ scritta soddisfa all'equazione (35); per dimostrare che è la minimante cercata basta provare che è $\delta I_\infty(\bar{C}) = 0$ per ogni $\delta \bar{C}$ tale che $\bar{C} + \delta \bar{C}$ appartenga a (K) , per i teoremi A e B. È

$$\delta I_\infty(\bar{C}) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta \bar{y} (\bar{y}' + \alpha)$$

e si è visto in *a*) che per ogni C di (K) è $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ e quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta \bar{y} = 0$.

Si ha

$$\begin{aligned} \bar{y}' + \alpha &= \frac{e^x}{2} \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx + \\ &+ \frac{e^{-x}}{2} \int_a^x (\alpha - \lambda) e^x dx - e^{a-x} \left[e - \int_a^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} \alpha dx \right] + \lambda. \end{aligned}$$

Le funzioni

$$e^x \int_x^{+\infty} (\alpha - \lambda) e^{-x} dx, \quad e^{-x} \int_a^x (\alpha - \lambda) e^x dx$$

sono di quadrato integrabile su $(a, +\infty)$ ⁽⁹⁾ con le loro derivate prime; ne segue [§ 2, n. 5, *a*)] che è

$$(36) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\bar{y}' + \alpha) = \lambda$$

e quindi $\delta I_\infty(\bar{C}) = 0$.

OSSERVAZIONE II. *L'integrale $I_\infty(C)$ considerato soddisfa alla condizione γ .*

Si ha per ogni $\bar{C} + \delta \bar{C}$ con $\delta \bar{y}(a) = 0$

$$(37) \quad I_\infty(\bar{C} + \delta \bar{C}) = I_\infty(\bar{C}) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \delta \bar{y} (\bar{y}' + \alpha) + \int_a^x (\delta \bar{y}^2 + \delta \bar{y}'^2) dx \right];$$

⁽⁹⁾ M. PICONE, « Nota aggiunta al lavoro di S. Faedo », Ann. Sc. Normale Sup. di Pisa, S. II, Vol. X, 1941, pag. 155.

se converge

$$\int_a^{+\infty} (\delta \bar{y}^2 + \delta \bar{y}'^2) dx$$

è $\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta \bar{y} = 0$ e per le (36) e (37) $I_\infty(\bar{C} + \delta \bar{C})$ è finito ed è

$$I_\infty(\bar{C} + \delta \bar{C}) = I_\infty(\bar{C}) + \int_a^{+\infty} (\delta \bar{y}^2 + \delta \bar{y}'^2) dx$$

che prova che è soddisfatta la condizione γ).

OSSERVAZIONE III. Se nel teorema dato la $\alpha(x)$ non è tale che esista un λ per cui converga

$$\int_a^{+\infty} (\alpha(x) - \lambda)^2 dx$$

può accadere che l'integrale $I_\infty(C)$ non possieda minimo. Ciò accade ad esempio per l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \{ y^2 + y'^2 + 2 e^x y' \} dx$$

il cui valore sulla funzione

$$y = -x e^{-(1+\sigma)x}$$

tende a $-\infty$ per $\sigma \rightarrow +0$.

Se invece si fa $\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ si vede facilmente che l'estremante

$$\bar{y}(x), \quad [\lambda = 0, a > 0]$$

non possiede sommabili nè $\bar{y}^2(x)$ nè $\bar{y}'^2(x)$.

b) Un teorema analogo a quello dato in a) non sussiste per il funzionale

$$I'_\infty(C) = \int_a^{+\infty} \{ y'^2 + y^2 + 2 \beta(x) y \} dx;$$

infatti il valore dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} (y'^2 + y^2 + 2y) dx$$

calcolato per $y = -e^{-\sigma x}$, tende a $-\infty$ per $\sigma \rightarrow +0$.

Per l'integrale $I'_\infty(C)$ si ha invece il

TEOREMA: « Se la funzione $\beta(x)$ è continua di quadrato integrabile su $(a, +\infty)$, l'integrale $I'_\infty(C)$ ha minimo nella classe (K') delle curve ordinarie $C \equiv y(x)$ per $I'_\infty(C)$ con $y(a) = c''$.

Ciò segue dal secondo teorema d'esistenza riportato nel n. 1 essendo

$$y'^2 + y^2 + 2\beta(x)y \geq -\beta^2(x).$$

Si ha inoltre il

TEOREMA: « Se le funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sono continue per $x \geq a$ e sono integrabili su $(a, +\infty)$ $[\alpha(x) - \lambda]^2$ e $\beta^2(x)$, con λ costante, allora l'integrale

$$I_\infty(C) = \int_a^{+\infty} (y'^2 + y^2 + 2\alpha y' + 2\beta y) dx$$

ha minimo in (K) ».

Infatti è

$$\begin{aligned} y'^2 + y^2 + 2\alpha y' + 2\beta y &= \frac{1}{2}(y'^2 + y^2) + 2\alpha y' + \frac{1}{2}y'^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(y + 2\beta)^2 - 2\beta^2 \geq \frac{1}{2}[y'^2 + y^2] + 2\alpha y' - 2\beta^2; \end{aligned}$$

per il teorema dimostrato in a) l'integrale

$$I'_\infty(C) = \int_a^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2}(y'^2 + y^2) + 2\alpha y' - 2\beta^2 \right\} dx$$

ha in (K) una minimante che è una estremale e soddisfa alla condizione y ; dal teorema di confronto segue subito la proposizione cercata.

OSSERVAZIONE. Anche l'integrale $I_\infty(C)$ ora considerato soddisfa alla condizione γ); ciò si dimostra in modo del tutto analogo a come si è fatto nella Osservazione II di a).

c) TEOREMA : « Esista un $\varepsilon > 0$ per cui si abbia per $x \geq a$

$$a(x) \geq \varepsilon, \quad b(x) \geq \varepsilon, \quad c^2(x) \leq (a(x) - \varepsilon) \cdot (b(x) - \varepsilon)$$

e siano integrabili su $(a, +\infty)$ le funzioni continue $(e(x) - \lambda)^2$ e $d^2(x)$, dove λ è una costante. Allora l'integrale

$$I_\infty(C) = \int_a^{+\infty} \{a(x)y^2 + b(x)y'^2 + 2c(x)yy' + 2d(x)y + e(x)y'\} dx$$

ha minimo nella classe (K) ».

Infatti è

$$[a(x) - \varepsilon]y^2 + [b(x) - \varepsilon]y'^2 + 2c(x)yy' \geq 0$$

e quindi

$$a(x)y^2 + b(x)y'^2 + 2c(x)yy' \geq \varepsilon(y^2 + y'^2),$$

$$ay^2 + by'^2 + 2cyy' + 2dy + 2ey' \geq \varepsilon \left[y^2 + y'^2 + 2\frac{d}{\varepsilon}y + 2\frac{e}{\varepsilon}y' \right].$$

Poichè per quanto si è visto in b)

$$\int_a^{+\infty} \left\{ y^2 + y'^2 + 2\frac{d}{\varepsilon}y + 2\frac{e}{\varepsilon}y' \right\} dx$$

ammette minimo fornito da una estremale ed è soddisfatta la condizione γ), si può applicare il teorema di confronto, dal quale segue immediatamente la proposizione enunciata.

OSSERVAZIONE. Il secondo teorema d'esistenza riportato nel n. 1 esige per l'esistenza del minimo che sia

$$(38) \quad a(x) \geq 0, \quad b(x) > 0.$$

Il teorema ora dimostrato impone la condizione più restrittiva che sia

$$(39') \quad a(x) \geq \varepsilon > 0, \quad b(x) \geq \varepsilon > 0.$$

Mostriamo che in quest'ultimo teorema non si possono mettere le condizioni (38) al posto delle (39').

Sia infatti $a(x) \geq 0$, $b(x) > 0$ e $x^2 a(x)$ e $b(x)$ siano sommabili in $(0, +\infty)$.

L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \{ a(x) y^2 + b(x) y'^2 + 2 y' \} dx$$

soddisfa alle (38) ma non alla (39); esso non ammette però minimo perchè la funzione

$$y = -x \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq k$$

$$y = -k \quad \text{per} \quad x \geq k$$

gli dà un valore che tende a $-\infty$ per $k \rightarrow +\infty$.