

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIANFRANCO CAPRIZ

**Sulla applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace ad
intervallo di integrazione finito ad un problema di elasticità piana**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 7,
n° 1-2 (1953), p. 17-41*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1953_3_7_1-2_17_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA APPLICAZIONE DEL METODO DELLA TRASFORMATTA PARZIALE DI LAPLACE AD INTERVALLO DI INTEGRAZIONE FINITO AD UN PROBLEMA DI ELASTICITÀ PIANA (*)

di GIANFRANCO CAPRIZ (Roma)

INTRODUZIONE

Nella sua nota « Sul metodo della trasformata parziale di LAPLACE ad intervallo di integrazione finito »⁽¹⁾ A. GHIZZETTI, posti i problemi di DIRICHLET, di NEUMANN e quello della piastra incastrata in un dominio normale rispetto all'asse x e cercatane una soluzione formale sull'applicazione della trasformata parziale di LAPLACE, seguendo un'idea di M. PICONE⁽²⁾, giunge a scrivere un sistema di infinite equazioni integrali del tipo di FISCHER-RIESZ nei valori incogniti al contorno della derivata normale della soluzione, nel problema di DIRICHLET, della soluzione stessa nel problema di NEUMANN, delle $\Delta_2 u$, $\frac{d}{dn} \Delta_2 u$ nel problema della piastra incastrata.

Egli inverte poi questo risultato mentre dimostra che, se certe funzioni soddisfano agli ottenuti sistemi di equazioni integrali, esse si possono pensare quali derivate normali sul contorno della soluzione cercata nel primo problema, e analogamente per gli altri. Le soluzioni si ottengono poi a mezzo della classica formula di GREEN.

Per giungere a questo risultato deve prima scrivere le funzioni di GREEN dei problemi indicati posti nella striscia e darne un interessante sviluppo in serie.

In quanto segue il metodo viene applicato al problema dell'elasticità piana (assegnati al contorno gli spostamenti). Il lavoro si divide in tre par-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Un riassunto è stato pubblicato nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. Esso ha costituito l'argomento della mia tesi di perfezionamento presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) In Rend. Mat. e sue applicazioni, Roma, 1947.

(2) M. PICONE, *Nuovi metodi di indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali* (Rend. Sem. Mat. Fisico, Milano 1939).

ti. Nella prima, coll'applicazione della trasformata parziale di LAPLACE ad intervallo di integrazione finito si giunge al sistema di equazioni integrali del tipo di FISCHER-RIESZ, nelle quali compaiono come incognite le componenti degli sforzi al contorno. Queste equazioni si possono interpretare come formule di BETTI applicate agli spostamenti cercati e ad un particolare sistema di spostamenti fittizi. Nella seconda si costruisce la matrice di GREEN del nostro problema posto nella striscia e si dà una formula risolutiva in tale campo.

Infine, nella terza parte, si dimostra, usufruendo di un risultato di G. FICHERA⁽³⁾, l'equivalenza tra il sistema di equazioni del problema elastico piano ed il sistema di equazioni integrali trovato formalmente nella prima parte.

Gli sviluppi, in generale laboriosi, non sono che accennati. Nella seconda parte si riporta solo l'enunciato di alcuni teoremi che sono la diretta generalizzazione di altri dati da A. GHIZZETTI, dato che la loro dimostrazione si può ottenere superando difficoltà di carattere essenzialmente algoritmico. Saranno sovente richiamate le due seguenti note:

(I) « Sul metodo della trasformata parziale di LAPLACE ad intervallo di integrazione finito » Pubblicazioni dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo n. 167,

(II) « Ricerche analitiche sul problema della piastra indefinita a forma di striscia, incastrata su entrambi i lati ». Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni, Fascicolo I, 1947, entrambe di A. Ghizzetti. Ad esse si rimanda anche per la bibliografia essenziale.

I^a PARTE. — *Deduzione del sistema di equazioni integrali di Fischer-Riesz equivalente al posto problema al contorno.*

1. — Consideriamo il problema degli spostamenti piani [di componenti u, v] di un corpo elastico isotropo ed omogeneo tradotto dal noto sistema di equazioni differenziali a derivate parziali

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_2 u + \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{\mu} f(x, y) \\ \Delta_2 v + \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{\mu} g(x, y). \end{cases}$$

⁽³⁾ G. FICHERA, *Sui problemi analitici della elasticità piana*. Rend. Sem. Cagliari (1948).
G. FICHERA, *Sull'equilibrio di un corpo elastico isotropo ed omogeneo*. Rend. Sem. Mat. Padova (1948).

Il problema si intende posto in un dominio T normale rispetto all'asse x , definito dalle

$$0 \leq x \leq 1 \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$$

ove $\alpha(x), \beta(x)$ sono funzioni assegnate in $(0, 1)$ e ivi soddisfacenti alla $\alpha(x) < \beta(x)$, non escludendo che si possano verificare le $\alpha(0) = \beta(0), \alpha(1) = \beta(1)$.

Le $f(x, y), g(x, y)$ rappresentano le componenti secondo gli assi x ed y della forza di massa, e si intendono assegnate in T .

Le condizioni al contorno sono assegnate come segue:

$$(2) \quad u[x, \alpha(x)] = A_1(x) \quad u[x, \beta(x)] = B_1(x)$$

$$v[x, \alpha(x)] = A_2(x) \quad v[x, \beta(x)] = B_2(x)$$

$$(3) \quad u(0, y) = a_1(y) \quad u(1, y) = b_1(y)$$

$$v(0, y) = a_2(y) \quad v(1, y) = b_2(y)$$

Studieremo formalmente il problema, introducendo le trasformate parziali di LAPLACE delle soluzioni $u(x, y), v(x, y)$:

$$(4) \quad u^*(x, q) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} e^{qy} u(x, y) dy, \quad v^*(x, q) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} e^{qy} v(x, y) dy,$$

per le quali le (1), quando si suppongano lecite le operazioni di derivazione e di integrazione per parti necessarie, impongono

$$(5) \quad \begin{cases} (1 + \sigma) \frac{d^2 u^*}{dx^2} + q^2 u^* - \sigma q \frac{d v^*}{dx} = F(x, q) \\ \frac{d^2 v^*}{dx^2} + (1 + \sigma) q^2 v^* - \sigma q \frac{d u^*}{dx} = G(x, q). \end{cases}$$

Si è posto:

$$(6) \quad \begin{aligned} F(x, q) = & \frac{1}{\mu} f^*(x, q) + \frac{\sqrt{1 + \beta'^2}}{\mu} e^{q\beta} \tau_{1,\beta}(x) - \frac{\sqrt{1 + \alpha'^2}}{\mu} e^{q\alpha} \tau_{1,\alpha}(x) + \\ & + (1 + \sigma) \frac{d}{dx} [\beta' e^{q\beta} B_1 - \alpha' e^{q\alpha} A_1] + \\ & - e^{q\beta} (\sigma - 1) \frac{d B_2}{dx} + e^{q\alpha} (\sigma - 1) \frac{d A_2}{dx} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sigma q [\beta' e^{q\beta} B_2 - \alpha' e^{q\alpha} A_2] + \\
 & + q [e^{q\beta} B_1 - e^{q\alpha} A_1]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad G(x, q) &= \frac{1}{\mu} g^*(x, q) + \frac{\sqrt{1 + \beta'^2}}{\mu} e^{q\beta} \tau_{2,\beta}(x) - \frac{\sqrt{1 + \alpha'^2}}{\mu} e^{q\alpha} \tau_{2,\alpha}(x) + \\
 & + \frac{d}{dx} [\beta' e^{q\beta} B_2 - \alpha' e^{q\alpha} A_2] + \\
 & + (1 + \sigma) q [e^{q\beta} B_2 - e^{q\alpha} A_2] + \\
 & - \sigma \frac{d}{dx} [e^{q\beta} B_1 - e^{q\alpha} A_1] + \\
 & + (\sigma - 1) \left[e^{q\beta} \frac{d B_1}{dx} - e^{q\alpha} \frac{d A_1}{dx} \right]
 \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto delle (2), (3); si sono introdotte le f^*, g^* , di significato ovvio, e, al posto delle derivate $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ le seguenti loro combinazioni lineari

$$\begin{aligned}
 \tau_{1,\beta}(x) &= \frac{\mu}{\sqrt{1 + \beta'^2}} \left\{ (1 + \sigma) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{y=\beta} \beta' - \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=\beta} - \sigma \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{y=\beta} + (\sigma - 1) \frac{d B_2}{dx} \right\} \\
 (8) \quad \tau_{1,\alpha}(x) &= \frac{\mu}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \left\{ (1 + \sigma) \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{y=\alpha} \alpha' - \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=\alpha} - \sigma \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{y=\alpha} + (\sigma - 1) \frac{d A_2}{dx} \right\} \\
 \tau_{2,\beta}(x) &= \frac{\mu}{\sqrt{1 + \beta'^2}} \left\{ \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{y=\beta} \beta' - (1 + \sigma) \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{y=\beta} - \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{y=\beta} + \frac{d B_1}{dx} \right\} \\
 \tau_{2,\alpha}(x) &= \frac{\mu}{\sqrt{1 + \alpha'^2}} \left\{ \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{y=\alpha} \alpha' - (1 + \sigma) \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{y=\alpha} - \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{y=\alpha} + \frac{d A_1}{dx} \right\}
 \end{aligned}$$

che rappresentano le componenti degli sforzi superficiali sui due tratti del contorno $y = \alpha(x), y = \beta(x)$.

Il sistema (5) va accompagnato dalle condizioni ai limiti

$$(9) \quad u^*(0, q) = a_1^*(q) = \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} e^{qy} a_1(y) dy$$

$$u^*(1, q) = b_1^*(q) = \int_{\alpha(1)}^{\beta(1)} e^{qy} b_1(y) dy .$$

$$v^*(0, q) = a_2^*(q) = \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} e^{qy} a_2(y) dy$$

$$v^*(1, q) = b_2^*(q) = \int_{\alpha(1)}^{\beta(1)} e^{qy} b_2(y) dy .$$

Tenendo conto di tali condizioni la soluzione del sistema (5) si scrive :

$$\begin{aligned} u^*(x, q) = & \frac{a_1^*(q)}{\Delta(q)} \left[(1-x)q^2 \cos qx - \left(\frac{2+\sigma}{\sigma} \right)^2 \sin q \sin q (1-x) - \frac{2+\sigma}{\sigma} qx \sin q \cos q (1-x) + \right. \\ & \left. + \frac{2+\sigma}{\sigma} q \sin qx \right] + \frac{a_2^*(q)}{\Delta(q)} \left[q^2 (1-x) \sin qx - \frac{2+\sigma}{\sigma} qx \sin q \sin q (1-x) \right] + \\ (10) \quad & + \frac{b_1^*(q)}{\Delta(q)} \left[q^2 x \cos q (1-x) + \frac{2+\sigma}{\sigma} qx \sin q \cos qx - \frac{2+\sigma}{\sigma} \left(\frac{2+\sigma}{\sigma} \sin q + \right. \right. \\ & \left. \left. + q \cos q \right) \sin qx \right] + \frac{b_2^*(q)}{\Delta(q)} \left[\frac{2+\sigma}{\sigma} q (1-x) \sin q \sin qx - xq^2 \sin q (1-x) \right] + \\ & + \int_0^1 H_1(x, \xi, q) F(\xi) d\xi + \int_0^1 K_1(x, \xi, q) G(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^*(x, q) = & \frac{a_1^*(q)}{\Delta(q)} \left[- (1-x) q^2 \sin qx - \frac{2+\sigma}{\sigma} qx \sin q \sin q (1-x) \right] + \\ & + \frac{a_2^*(q)}{\Delta(q)} \left[q^2 (1-x) \cos qx - \left(\frac{2+\sigma}{\sigma} \right)^2 \sin q \sin q (1-x) + \right. \\ & \left. + \frac{2+\sigma}{\sigma} qx \sin q \cos q (1-x) - \frac{2+\sigma}{\sigma} q \sin qx \right] + \frac{b_1^*(q)}{\Delta(q)} \left[\frac{2+\sigma}{\sigma} q (1-x) \sin q \sin qx + \right. \\ & \left. + q^2 x \sin q (1-x) \right] + \frac{b_2^*(q)}{\Delta(q)} \left[q^2 x \cos q (1-x) - \frac{2+\sigma}{\sigma} qx \sin q \cos qx + \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{2+\sigma}{\sigma} \left(\frac{2+\sigma}{\sigma} \sin q - q \cos q \right) \sin qx \Big] +$$

$$+ \int_0^1 H_2(x, \xi, q) F(\xi) d\xi + \int_0^1 K_2(x, \xi, q) G(\xi) d\xi,$$

dove si è posto :

$$\Delta(q) = q^2 - \left(\frac{2+\sigma}{\sigma} \right)^2 \sin^2 q,$$

$$H_1(x, \xi, q) = \frac{1}{q \Delta} \frac{\sigma}{2(1+\sigma)} \{ [\beta(1, q) \alpha(x, q) - \gamma(1, q) \gamma(x, q)] \alpha(1-\xi, q) +$$

$$+ [\alpha(1, q) \gamma(x, q) - \gamma(1, q) \alpha(x, q)] \gamma(1-\xi, q) \} + \frac{\varepsilon \sigma}{2(1+\sigma)q} \alpha(x-\xi, q),$$

$$K_1(x, \xi, q) = \frac{1}{q \Delta} \frac{\sigma}{2(1+\sigma)} \{ [\beta(1, q) \alpha(x, q) - \gamma(1, q) \gamma(x, q)] \gamma(1-\xi, q) +$$

$$+ [\alpha(1, q) \gamma(x, q) - \gamma(1, q) \alpha(x, q)] \beta(1-\xi, q) \} + \frac{\varepsilon \sigma}{2(1+\sigma)q} \gamma(x-\xi, q),$$

(11)

$$H_2(x, \xi, q) = \frac{1}{q \Delta} \frac{\sigma}{2(1+\sigma)} \{ [\beta(1, q) \gamma(x, q) - \gamma(1, q) \beta(x, q)] \alpha(1-\xi, q) +$$

$$+ [\alpha(1, q) \beta(x, q) - \gamma(1, q) \gamma(x, q)] \gamma(1-\xi, q) \} + \frac{\varepsilon \sigma}{2(1+\sigma)q} \gamma(x-\xi, q),$$

$$K_2(x, \xi, q) = \frac{1}{q \Delta} \frac{\sigma}{2(1+\sigma)} \{ [\beta(1, q) \gamma(x, q) - \gamma(1, q) \beta(x, q)] \gamma(1-\xi, q) +$$

$$+ [\alpha(1, q) \beta(x, q) - \gamma(1, q) \gamma(x, q)] \beta(1-\xi, q) \} + \frac{\varepsilon \sigma}{2(1+\sigma)q} \beta(x-\xi, q)$$

con $\varepsilon = 1$ per $\xi \leq x$ e $\varepsilon = 0$ per $\xi > x$,

$$\alpha(x, q) = \frac{2+\sigma}{\sigma} \sin qx - qx \cos qx,$$

$$\beta(x, q) = \frac{2+\sigma}{\sigma} \sin qx + qx \cos qx,$$

$$\gamma(x, q) = qx \sin qx.$$

Le espressioni (10) delle trasformate $u^*(x, q)$, $v^*(x, q)$ contengono le quattro funzioni incognite $\tau_{1,\alpha}$, $\tau_{1,\beta}$, $\tau_{2,\alpha}$, $\tau_{2,\beta}$. Seguendo un'idea di M. PICONI, si cerca di determinarle osservando che, mentre le (4) ci assicurano che le u^* , v^* sono funzioni intere di q , esse ci appaiono dalle (10) come funzioni meromorfe con infiniti poli, che faremo vedere essere del primo ordine, nei punti del piano complesso che sono soluzioni della

$$(12) \quad \Delta(q) = q^2 - \left(\frac{2 + \sigma}{\sigma}\right)^2 \sin^2 q = 0.$$

Imponendo che in tali punti si annullino i residui si ottengono infinite equazioni integrali del tipo di FISCHER-RIESZ nelle funzioni incognite $\tau_{1,\alpha}$, $\tau_{1,\beta}$, $\tau_{2,\alpha}$, $\tau_{2,\beta}$. Si ha così un mezzo per la loro determinazione.

2. — Ricerchiamo le soluzioni dell'equazione trascendente (12). Pensiamo $\frac{2 + \sigma}{\sigma} = 3 - 4x$ variabile tra 1 e 3, cioè valori di x compresi tra 0 ed $\frac{1}{2}$. Di conseguenza ci sono due sole soluzioni reali semplici di valore opposto $\pm m$ dell'equazione

$$(13) \quad q = \frac{2 + \sigma}{\sigma} \sin q$$

mentre non ci sono radici reali della

$$(14) \quad q = -\frac{2 + \sigma}{\sigma} \sin q.$$

Oltre alle due radici reali, le (13), (14) hanno un'infinità numerabile di radici complesse semplici la cui parte reale k_1 ed il cui coefficiente dell'immaginario k_2 si ricavano dalle equazioni

$$(15) \quad \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{2 + \sigma} \frac{k_2}{\operatorname{sh} k_2}\right)^2} = \frac{\sigma}{2 + \sigma} \arccos \left(\frac{\sigma}{2 + \sigma} \frac{k_2}{\operatorname{sh} k_2}\right) + n \frac{\sigma}{2 + \sigma} \pi$$

$$k_1 = \pm \left[\arccos \left(\frac{\sigma}{2 + \sigma} \frac{k_2}{\operatorname{sh} k_2}\right) + n \pi \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Delle (15), quelle in cui n è pari danno le soluzioni della (13); quelle in cui n è dispari danno le soluzioni della (14). In corrispondenza ad un valore assegnato di n , si hanno 4 radici: q_n , $-q_n$, \bar{q}_n , $-\bar{q}_n$ dove si indica con \bar{q} il complesso coniugato di q .

Gli indicati valori di q , soluzioni della (12), sono gli autovalori del sistema :

$$\begin{cases} (1 + \sigma) U'' + q^2 U - \sigma q V' = 0 \\ -\sigma q U' + V'' + (1 + \sigma) q^2 V = 0 \end{cases}$$

colle condizioni ai limiti $U(0, q) = U(1, q) = V(0, q) = V(1, q) = 0$.

Le autosoluzioni relative agli autovalori reali sono :

$$\begin{aligned} U(x, \pm m) &= (1 - x) \sin(\pm m x) - x \sin[\pm m(1 - x)] \\ (16) \quad V(x, \pm m) &= x \cos m(1 - x) + (1 - x) \cos m x + \\ &\quad - \frac{1}{\sin m} [\sin m x + \sin m(1 - x)] \end{aligned}$$

quelle relative agli autovalori complessi

$$\begin{aligned} U(x, q_n) &= (-1)^n (1 - x) \sin q_n x - x \sin q_n(1 - x) \\ (17) \quad V(x, q_n) &= x \cos q_n(1 - x) + (-1)^n (1 - x) \cos q_n x + \\ &\quad - \frac{1}{\sin q_n} [\sin q_n x + (-1)^n \sin q_n(1 - x)] \end{aligned}$$

ed analoghe sostituendo a q_n rispettivamente $-q_n, \bar{q}_n, -\bar{q}_n$.

Per assicurarci che le (10) siano funzioni intere di q , dovremo ora imporre che si annullino i residui nei poli $\pm m$ e $\pm q_n, \pm \bar{q}_n$ con $n = 1, 2, 3, \dots$.

Incominciamo da questi ultimi. Tenendo conto delle (17) ed osservando che si ha

$$U(1 - x, \pm q_n) = (-1)^{n+1} U(x, \pm q_n) \quad \text{e} \quad V(1 - x, \pm q_n) = (-1)^{n+1} V(x, \pm q_n)$$

assieme ad analoghe per $\pm \bar{q}_n$, le condizioni da imporre si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} &\int_0^1 U(\xi, \pm q_n) F(\xi, \pm q_n) d\xi + \int_0^1 V(\xi, \pm q_n) G(\xi, \pm q_n) d\xi = \\ (18 a) \quad &= 4(1 - \kappa) \{ [a_1^*(\pm q_n) - (-1)^n b_1^*(\pm q_n)] \sin(\pm q_n) + \\ &\quad + [b_2^*(\pm q_n) + (-1)^n a_2^*(\pm q_n)] (1 - (-1)^n \cos q_n) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 U(\xi, \pm \bar{q}_n) F(\xi, \pm \bar{q}_n) d\xi + \int_0^1 V(\xi, \pm \bar{q}_n) G(\xi, \pm \bar{q}_n) d\xi = \\
 (18\ b) \quad & = 4(1 - \varkappa) \{ [a_1^*(\pm \bar{q}_n) - (-1)^n b_1^*(\pm \bar{q}_n)] \sin(\pm \bar{q}_n) \} + \\
 & + [b_2^*(\pm \bar{q}_n) + (-1)^n a_2^*(\pm \bar{q}_n)] [1 - (-1)^n \cos \bar{q}_n]. \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Del tutto simili le condizioni nei poli $\pm m$.

Le funzioni incognite (8) compaiono nelle (18) a mezzo delle $F(\xi, q)$, $G(\xi, q)$. Sostituendo a $F(\xi, q)$, $G(\xi, q)$ le loro espressioni (6) ed a a_1^* , a_2^* , b_1^* , b_2^* le espressioni (9) ed eseguendo delle integrazioni per parti, dalle (18) si ricavano le:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\mu} \int_T e^{qn\eta} U(\xi, q_n) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{\mu} \int_0^1 e^{qn\beta(\xi)} U(\xi, q_n) \tau_{1,\beta}(\xi) \sqrt{1 + \beta'^2} d\xi + \\
 & - \frac{1}{\mu} \int_0^1 e^{qn\alpha(\xi)} U(\xi, q_n) \tau_{1,\alpha}(\xi) \sqrt{1 + \alpha'^2} d\xi + \frac{1}{\mu} \int_T e^{qn\eta} V(\xi, q_n) g(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\
 & + \frac{1}{\mu} \int_0^1 e^{qn\beta(\xi)} V(\xi, q_n) \tau_{2,\beta}(\xi) \sqrt{1 + \beta'^2} d\xi - \frac{1}{\mu} \int_0^1 e^{qn\alpha(\xi)} V(\xi, q_n) \tau_{2,\alpha}(\xi) \sqrt{1 + \alpha'^2} d\xi + \\
 (19) \quad & + \int_0^1 B_2(\xi) \left\{ \sigma e^{qn\beta} \frac{dU(\xi, q_n)}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} [U(\xi, q_n) e^{qn\beta}] - \beta' e^{qn\beta} \frac{dV(\xi, q_n)}{d\xi} + \right. \\
 & \left. + (1 + \sigma) q_n e^{qn\beta} V(\xi, q_n) \right\} d\xi - \int_0^1 A_2(\xi) \left\{ \sigma e^{qn\alpha} \frac{dU(\xi, q_n)}{d\xi} - \right. \\
 & \left. - \frac{d}{d\xi} [U(\xi, q_n) e^{qn\alpha}] - \alpha' e^{qn\alpha} \frac{dV(\xi, q_n)}{d\xi} + (1 + \sigma) q_n e^{qn\alpha} V(\xi, q_n) \right\} d\xi + \\
 & + \int_0^1 B_1(\xi) \left\{ q_n e^{qn\beta} U(\xi, q_n) - (1 + \sigma) \beta' e^{qn\beta} \frac{dU(\xi, q_n)}{d\xi} + \sigma e^{qn\beta} \frac{dV(\xi, q_n)}{d\xi} - \right. \\
 & \left. - (\sigma - 1) \frac{d}{d\xi} [e^{qn\beta} V(\xi, q_n)] \right\} d\xi - \int_0^1 A_1(\xi) \left\{ q_n e^{qn\alpha} U(\xi, q_n) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (1 + \sigma) \alpha' e^{q_n \alpha} \frac{d U(\xi, q_n)}{d \xi} + \sigma e^{q_n \alpha} \frac{d V(\xi, q_n)}{d \xi} - (\sigma - 1) \frac{d}{d \xi} [e^{q_n \alpha} V(\xi, q_n)] \Big\} d \xi = \\
 & = 4 (1 - \alpha) \left\{ \left[\int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} e^{q_n \eta} a_1(\eta) d \eta - (-1)^n \int_{\alpha(1)}^{\beta(1)} e^{q_n \eta} b_1(\eta) d \eta \right] \sin q_n + \right. \\
 & \left. + \left[\int_{\alpha(1)}^{\beta(1)} e^{q_n \eta} b_2(\eta) d \eta + (-1)^n \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} e^{q_n \eta} a_2(\eta) d \eta \right] [1 - (-1)^n \cos q_n] \right\}
 \end{aligned}$$

ed analoghe per $-q_n, \pm \bar{q}_n, \pm m$. Si noti però che le (18 a), (18 b) non sono indipendenti: anzi le seconde sono conseguenza delle prime. Basterà dunque imporre le condizioni (19) e quelle che da loro si ottengono cambiando segno ai q_n [Cfr. Nota I, pag. 21].

Di queste formule si può dare una interpretazione espressiva osservando che esse trascrivono il teorema di reciprocità di BETTI, applicato ai seguenti due sistemi di forze e di spostamenti:

I) Spostamento di componenti $u(x, y), v(x, y)$; forza di massa di componenti $f(x, y), g(x, y)$; sforzo superficiale di componenti τ_1, τ_2 .

II) Spostamenti di componenti $e^{\pm q_n y} U(x, \pm q_n), e^{\pm q_n y} V(x, \pm q_n)$; forze di massa nulle; sforzi superficiali di componenti σ_1, σ_2 che ora specificheremo.

Le $u(x, y), v(x, y)$ al contorno del dominio T ci sono date dalle (2), (3); gli sforzi superficiali σ_1, σ_2 relativi al sistema II si ottengono dagli spostamenti $e^{\pm q_n y} U, e^{\pm q_n y} V$ a mezzo delle relazioni note dalla teoria della elasticità. Con tali avvertenze si verifica facilmente quanto asserito sulle (19).

IIª PARTE. — Risoluzione del problema nella striscia.

1. — In questa seconda parte ci proponiamo di risolvere il problema dell'elasticità piana posto nella striscia $S(0 \leq x \leq 1, -\infty < y < +\infty)$ supposti nulli gli spostamenti al contorno.

Tale problema si riduce analiticamente in quello di determinare in S una coppia di funzioni $u(x, y), v(x, y)$ soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$$(1) \quad \begin{cases} A_2 u + \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{\mu} f(x, y) \\ A_2 v + \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{\mu} g(x, y) \end{cases}$$

$$(2) \quad u(0, y) = u(1, y) = v(0, y) = v(1, y) = 0$$

con $f(x, y)$ e $g(x, y)$ funzioni assegnate.

Per prima cosa ci proponiamo di stabilire, sotto ipotesi restrittive, un teorema di unicità, ricavando anche una probabile formula risolutiva del problema.

Supponiamo che la $f(x, y)$ e la $g(x, y)$ come funzioni di y ammettano per ogni x compreso tra zero e 1 la trasformata di FOURIER:

$$(3) \quad f^*(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} f(x, y) dy; \quad g^*(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} g(x, y) dy$$

con λ parametro reale. Supponiamo inoltre che del nostro problema esista una soluzione $u(x, y), v(x, y), u$ e v verificando le seguenti ipotesi:

a) per ogni x di $(0, 1)$ esse e le loro derivate parziali prime e seconde, sono, come funzioni di y , dotate di trasformate di FOURIER, espresse da un integrale del tipo (3) uniformemente convergente in $(0, 1)$.

b) per ogni $0 \leq x \leq 1$ si ha

$$u(x, y) \rightarrow 0, v(x, y) \rightarrow 0, \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0, \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow 0 \quad \text{per } |y| \rightarrow \infty.$$

Posto allora:

$$(4) \quad u^*(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} u(x, y) dy, \quad v^*(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} v(x, y) dy$$

dalle (1), per le ipotesi a) e b), seguono le

$$(5) \quad \begin{cases} (1 + \sigma) \frac{d^2 u^*}{dx^2} - i \lambda \sigma \frac{d v^*}{dx} - \lambda^2 u^* = \frac{1}{\mu} f^*(x, \lambda) \\ \frac{d^2 v^*}{dx^2} - i \lambda \sigma \frac{d u^*}{dx} - \lambda^2 (1 + \sigma) v^* = \frac{1}{\mu} g^*(x, \lambda), \end{cases}$$

mentre dalle (2) si ottengono le

$$(6) \quad u^*(0, \lambda) = u^*(1, \lambda) = v^*(0, \lambda) = v^*(1, \lambda) = 0.$$

Le (5) (6) determinano univocamente la trasformata (4), perchè il problema omogeneo associato:

$$(7) \quad \begin{cases} (1 + \sigma) U'' - i \lambda \sigma V' - \lambda^2 U = 0 \\ V'' - i \lambda \sigma U' - \lambda^2 (1 + \sigma) V = 0 \\ U(0) = U(1) = V(0) = V(1) = 0 \end{cases}$$

ha come autovalori le radici non nulle dell'equazione trascendente

$$(8) \quad \left(\frac{2 + \sigma}{\sigma}\right)^2 sh^2 \lambda - \lambda^2 = 0$$

e queste sono o immaginarie pure o complesse.

Eseguiti i calcoli si trovano le

$$(9) \quad \begin{aligned} u^*(x, \lambda) &= \int_0^1 H_1(x, \xi, \lambda) f^*(\xi, \lambda) d\xi + i \int_0^1 K_1(x, \xi, \lambda) g^*(\xi, \lambda) d\xi, \\ v^*(x, \lambda) &= i \int_0^1 H_2(x, \xi, \lambda) f^*(\xi, \lambda) d\xi + \int_0^1 K_2(x, \xi, \lambda) g^*(\xi, \lambda) d\xi, \end{aligned}$$

avendo indicato con H_1, K_1, H_2, K_2 delle espressioni del tutto analoghe alle (I, 11) colla sostituzione di $i\lambda$ a q . In particolare si avrà

$$\Delta = \lambda^2 - \left(\frac{2 + \sigma}{\sigma}\right)^2 sh^2 \lambda.$$

Si può verificare che $H_1(x, \xi, \lambda) = H_1(\xi, x, \lambda)$ ed analogamente $K_2(x, \xi, \lambda) = K_2(\xi, x, \lambda)$ mentre per H_2 e K_1 valgono le $H_2(x, \xi, \lambda) = -K_1(\xi, x, \lambda)$; inoltre è facile controllare che H_1 e K_2 sono funzioni pari, H_2 e K_1 funzioni dispari di λ .

Le (9) hanno senso anche per $\lambda = 0$. Si osservi che risulta:

$$H_2(x, \xi, 0) = K_1(x, \xi, 0) = 0.$$

Si noti che la matrice $\begin{vmatrix} H_1 & i K_1 \\ i H_2 & K_2 \end{vmatrix}$ è la matrice di GREEN del problema (5), (6) perciò $H_1, H_2, K_1, K_2, \frac{\partial H_2}{\partial x}, \frac{\partial K_1}{\partial x}$ sono funzioni continue di x , mentre $\frac{\partial H_1}{\partial x}, \frac{\partial K_2}{\partial x}$ hanno per $x = \xi$ un salto rispettivamente uguale a $\frac{1}{(1 + \sigma)\mu}$ e $\frac{1}{\mu}$. Inoltre H_1, H_2, K_1, K_2 si annullano per $x = 0$ e $x = 1$.

Le coppie $H_1, i H_2$ e $i K_1, K_2$ sono soluzioni del sistema (7).

Facciamo ora l'ulteriore ipotesi che la coppia di funzioni $u(x, y), v(x, y)$ soluzioni del problema (1), (2) possa dedursi dalla coppia delle trasformate

di FOURIER (4), mediante la formula di inversione

$$(10) \quad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda y} u^*(x, \lambda) d\lambda; \quad v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda y} v^*(x, \lambda) d\lambda \quad (4).$$

Allora possiamo concludere che, se il nostro problema ammette una soluzione soddisfacente alle ipotesi dette, essa è necessariamente unica e data dalle (10) ove si pensino le u^* , v^* sostituite colle espressioni (9).

2. — Ci si può ora chiedere se le (10) effettivamente forniscono una soluzione del problema. La risposta è affermativa; noi faremo la verifica, non direttamente sulle (10) ma sulle espressioni che da esse si ottengono, ammettendo lecita una inversione dell'ordine delle integrazioni.

Tali espressioni sono:

$$(11) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{8\pi} \iint_S G_{11}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{8\pi} \iint_S G_{12}(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{1}{8\pi} \iint_S G_{21}(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{8\pi} \iint_S G_{22}(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

ove S si intende rappresenti la striscia, e le G_{ik} sono date dalla:

$$(12) \quad G_{11}(x, y; \xi, \eta) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda(y-\eta)} H_1(x, \xi, \lambda) d\lambda$$

e analoghe; oppure, poichè H_1 e K_2 sono funzioni pari di λ , H_2 e K_1 funzioni dispari di λ

$$(13) \quad \begin{aligned} G_{11}(x, y; \xi, \eta) &= 8 \int_0^{\infty} H_1(x, \xi, \lambda) \cos \lambda(y - \eta) d\lambda \\ G_{12}(x, y; \xi, \eta) &= 8 \int_0^{\infty} K_1(x, \xi, \lambda) \sin \lambda(y - \eta) d\lambda \end{aligned}$$

(4) L'asterisco accanto al simbolo di integrale sta ad indicare che si tratta di un integrale principale di CAUCHY.

$$G_{21}(x, y; \xi, \eta) = 8 \int_0^{\infty} H_2(x, \xi, \lambda) \sin \lambda (y - \eta) d\lambda$$

$$G_{22}(x, y; \xi, \eta) = 8 \int_0^{\infty} K_2(x, \xi, \lambda) \cos \lambda (y - \eta) d\lambda.$$

Amnesso che le (13) abbiano senso, la matrice

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}$$

è la matrice di GREEN del problema (1) (2), e per i suoi elementi valgono le relazioni di simmetria evidenti

$$G_{11}(x, y; \xi, \eta) = G_{11}(\xi, \eta; x, y), \quad G_{22}(x, y; \xi, \eta) = G_{22}(\xi, \eta; x, y),$$

$$G_{12}(x, y; \xi, \eta) = G_{21}(\xi, \eta; x, y).$$

Per giungere alla dimostrazione di quanto asserito sulle (11), premettiamo un esame delle proprietà delle funzioni (13).

Allo scopo si seguono dei criteri del tutto analoghi a quelli indicati nella nota II e si ottengono i seguenti teoremi:

TEOREMA I. — Le funzioni $G_{hk}(x, y; \xi, \eta)$ sono continue in S escluso il punto Q ($x = \xi, y = \eta$), si annullano per $x = 0, x = 1$.

Inoltre le derivate del I e del II ordine sono continue nell'interno di S escluso Q . Tali derivate si possono ottenere eseguendo le derivazioni sotto segno di integrale nelle (17), purchè sia $x \neq \xi$.

I termini singolari nel punto $x = \xi, y = \eta$ sono i seguenti:

per G_{11}

$$2 \frac{2 + \sigma}{(1 + \sigma) \mu} \lg \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \frac{2 \sigma}{(1 + \sigma) \mu} \frac{(x - \xi)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

per G_{21} e G_{12}

$$(14) \quad - \frac{2 \sigma}{(1 + \sigma) \mu} \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

per G_{22}

$$2 \frac{2 + \sigma}{(1 + \sigma) \mu} \lg \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} + \frac{2 \sigma}{(1 + \sigma) \mu} \frac{(y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

TEOREMA II. — Le funzioni G_{hk} soddisfano come funzioni di x, y , nei punti interni a S diversi dal punto ξ, η , al sistema :

$$(15) \quad \begin{cases} (1 + \sigma) \frac{\partial^2 G_{1,k}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_{1,k}}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 G_{2,k}}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 G_{2,k}}{\partial x^2} + (1 + \sigma) \frac{\partial^2 G_{2,k}}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 G_{1,k}}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \quad k = 1, 2.$$

Quest'ultima affermazione segue per $x \neq \xi$, dalla possibilità di derivare sotto segno d'integrale, per il teorema precedente, e dal fatto che le coppie $H_1, i H_2$ e $i K_1, K_2$ soddisfano al sistema (7). Per continuità essa vale anche se $x = \xi$, purchè sia $y \neq \eta$.

TEOREMA III. — La matrice $\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}$ gode di tutte le proprietà caratteristiche della matrice di GREEN del problema (1), (2).

3. — Vogliamo ora studiare il comportamento all'infinito delle G_{hk} . Allo scopo si procede come nella nota II.

$H_1(x, \xi, \lambda)$ [e così K_1, H_2, K_2] si può pensare come funzione meromorfa della variabile complessa $\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2$ con infiniti poli del 1° ordine nei punti che rappresentano gli autovalori del problema ai limiti (7), ossia le radici dell'equazione trascendente

$$(8) \quad \lambda^2 - \left(\frac{2 + \sigma}{\sigma} \right)^2 s h^2 \lambda = 0$$

diverse da 0.

Quanto alle radici di tale equazione si può ripetere quanto si è detto nella prima parte per le radici dell'equazione (I, 12). Le soluzioni della (8) si ottengono da quelle della (I, 12) col semplice scambio della parte reale col coefficiente dell'immaginario.

Ci sono due radici immaginarie pure della (8) (le indicheremo con $\pm i m$) ed infinite soluzioni complesse; se λ è una di esse, lo sono anche $-\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$.

Limitiamoci a considerare quelle a parte reale e coefficiente dell'immaginario positivi, le indicheremo con

$$\lambda_n = \lambda_{1,n} + i \lambda_{2,n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

in modo che sia

$$0 < \lambda_{1,1} < \lambda_{1,2} < \dots; \quad 0 < \lambda_{2,1} < \lambda_{2,2} < \dots$$

Si riconosce che $\lambda_1, \lambda_3, \dots$ verificano la $-\lambda = \frac{2 + \sigma}{\sigma} \operatorname{sh} \lambda$, mentre $\lambda_2, \lambda_4, \dots$ verificano la $\lambda = \frac{2 + \sigma}{\sigma} \operatorname{sh} \lambda$.

Vale inoltre la limitazione $n\pi < \lambda_{2,n} < \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ e le formule asintotiche

$$\lambda_{1,n} \sim \operatorname{sett} \operatorname{ch} \frac{\sigma}{2 + \sigma} \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \lambda_{2,n} \sim \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Convorrà anche di rilevare che l'autosoluzione del problema (7), relativa all'autovalore λ_n è data dalla coppia di funzioni

$$U(x, \lambda_n) = (-1)^n (1-x) \operatorname{sh} \lambda_n x - x \operatorname{sh} \lambda_n (1-x),$$

$$V(x, \lambda_n) = i \left\{ \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh} \lambda_n} [\operatorname{ch} \lambda_n - (-1)^n] \operatorname{sh} \lambda_n x - (-1)^n x \operatorname{ch} \lambda_n + x \operatorname{ch} \lambda_n (1-x) \right\}.$$

Ciò premesso, come a pag. 15 della nota II più volte citata, si osserva che si può scrivere

$$(13') \quad G_{1,1}(x, y; \xi, \eta) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, \xi, \lambda) e^{i\lambda|y-\eta|} d\lambda$$

Consideriamo ora nel piano della variabile complessa $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ il rettangolo R_k così definito:

$$-k \leq \lambda' \leq k, \quad 0 \leq \lambda'' \leq 2\pi \quad \text{con} \quad k > \lambda_{1,1}.$$

Esso contiene i poli $\lambda_1 = \lambda_{1,1} + i\lambda_{2,1}$, $-\bar{\lambda}_1 = -\lambda_{1,1} + i\lambda_{2,1}$, $i m$ e perciò indicando con $\pi(x, \xi)$, $\varrho_n(x, \xi)$ i residui nei poli $i m$, e λ_n e con $\mathcal{F} R_k$ la frontiera del rettangolo R_k , si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F} R_k} H_1(x, \xi, \lambda) e^{i\lambda|y-\eta|} d\lambda = e^{-m|y-\eta|} \Pi(x, \xi) + e^{i\lambda_1|y-\eta|} \varrho_1(x, \xi) +$$

$$- e^{-i\bar{\lambda}_1|y-\eta|} \overline{\varrho_1(x, \xi)}$$

ossia

$$\begin{aligned}
 & 4 \int_{-k}^k H_1(x, \xi, \lambda') e^{i\lambda'|y-\eta|} d\lambda' + 4 \int_0^{2\pi} H_1(x, \xi, k + i\lambda'') e^{i(k+i\lambda'')|y-\eta|} i d\lambda'' + \\
 (16) \quad & - 4 \int_{-k}^k H_1(x, \xi, \lambda' + 2\pi i) e^{i(\lambda'+2\pi i)|y-\eta|} d\lambda' - 4 \int_0^{2\pi} H_1(x, \xi, -k + i\lambda'') e^{i(-k+i\lambda'')|y-\eta|} i d\lambda'' = \\
 & = 8\pi i e^{-m|y-\eta|} II(x, \xi) - 16\pi e^{-\lambda_{2,1}|y-\eta|} I[e^{i\lambda_{1,1}|y-\eta|} \rho_1(x, \xi)]^{(5)}.
 \end{aligned}$$

Vogliamo ora vedere che per $k \rightarrow \infty$ il secondo e il quarto integrale tendono a zero uniformemente. Basterà far vedere che

$$(17) \quad \int_0^{2\pi} H_1(x, \xi, k + i\lambda'') e^{i(k+i\lambda'')|y-\eta|} i d\lambda'' \rightarrow 0.$$

(Nota II, pag. 17). Tutti i termini di H_1 si possono maggiorare in valore assoluto con funzioni ad integrale infinitesimo per $k \rightarrow \infty$, seguendo le indicazioni della nota II, esclusi i seguenti (a meno di un comune fattore costante):

$$|x - \xi| e^{-(k+i\lambda'')|x-\xi|} - (x + \xi) e^{-(k+i\lambda'')(x+\xi)} - 2(k + i\lambda'') x \xi e^{-(k+i\lambda'')(x+\xi)}$$

Basta però osservare che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$|x - \xi| e^{-k|x-\xi|} \leq \frac{1}{e^k}; \quad (x + \xi) e^{-k(x+\xi)} \leq \frac{1}{e^k}; \quad |k + i\lambda''| x \xi e^{-k(x+\xi)} \leq \frac{1}{e^2 k} + \frac{|\lambda''|}{e^2 k^2}$$

perchè rimanga dimostrato quanto asserito dalla (17).

In base alle precedenti considerazioni la (13') diventa

$$\begin{aligned}
 G_{11}(x, y; \xi, \eta) = & 4 \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, \xi, \lambda' + 2\pi i) e^{i(\lambda'+2\pi i)|y-\eta|} d\lambda' + \\
 (18) \quad & + 8\pi i e^{-m|y-\eta|} II(x, \xi) - 16\pi e^{-\lambda_{2,1}|y-\eta|} I[e^{i\lambda_{1,1}|y-\eta|} \rho_1(x, \xi)]
 \end{aligned}$$

(5) I sta ad indicare il coefficiente dell'immaginario, R la parte reale del numero che segue.

dalla quale

$$\begin{aligned} & e^{m|y-\eta|} G_{11}(x, y; \xi, \eta) - 8\pi i \Pi(x, \xi) + \\ & + 16\pi e^{(m-\lambda_{2,1})|y-\eta|} I[e^{i\lambda_{1,1}|y-\eta|} \varrho_1(x, \xi)] = \\ & = 4 e^{-(2\pi-m)|y-\eta|} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, \xi, \lambda' + 2\pi i) e^{i\lambda'|y-\eta|} d\lambda'. \end{aligned}$$

Si può ora osservare che l'integrale a secondo membro si mantiene limitato nel dominio $S_\varepsilon \left[0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1, -\infty < y < +\infty, -\infty < \eta < +\infty, (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \geq \varepsilon \right]$.

Precisamente, con mezzi simili a quelli indicati nella nota II^a a pag. 19, si ottiene la maggiorazione, con costanti indipendenti da x, ξ , di tutti i termini derivanti dall'integrazione della $H_1 e^{i\lambda'|y-\eta|}$ all'infuori dei seguenti:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda' + 2\pi i} \left\{ \left(\frac{2 + \sigma}{\sigma} \right)^3 + \left(\frac{2 + \sigma}{\sigma} \right)^2 (\lambda' + 2\pi i)(x + \xi) + \right. \\ & \left. + 2 \frac{2 + \sigma}{\sigma} (\lambda' + 2\pi i)^2 x \xi \right\} e^{-(\lambda' + 2\pi i)(x + \xi) + i\lambda'|y-\eta|} \end{aligned}$$

e degli analoghi ove si ponga $1 - x, 1 - \xi$ al posto di x, ξ ; gli integrali relativi perdono senso per $x = \xi = 0$ (rispettivamente per $x = \xi = 1$). Però il loro valore quando x, ξ non siano contemporaneamente nulli (o contemporaneamente uguali ad 1) si può ancora maggiorare con costanti indipendenti da x, ξ . Quando in più si osservi che $m < 2\pi, m < \lambda_{2,1}$ si può in definitiva affermare che la funzione

$$e^{m|y-\eta|} G_{11}(x, y; \xi, \eta) - 8\pi i \Pi_1(x, \xi)$$

è continua in S_ε , è infinitesima per $|y - \eta| \rightarrow \infty$ in modo uniforme rispetto ad x , perciò è limitata in S_ε e tale sarà pure la funzione

$$e^{m|y-\eta|} G_{11}(x, y; \xi, \eta).$$

In modo analogo si può ragionare per le derivate prime e seconde; poichè è sufficiente limitarsi alla considerazione dei punti interni al dominio S_ε si può allo scopo seguire quanto indicato nella nota II a pag. 20 per ottenere il seguente:

TEOREMA IV. — Dato un $\varepsilon > 0$ e minore di $\frac{1}{2}$, la funzione

$$e^{m|y-\eta|} G_{11}(x, y; \xi, \eta) \left[e^{m|y-\eta|} \frac{\partial^{h+k} G_{11}}{\partial x^h \partial y^k}, h+k=1, 2 \right]$$

si mantiene limitata nel dominio S_ε [rispettivamente nell'interno di S_ε].

È chiaro che con ragionamenti analoghi si può giungere anche al

TEOREMA V. — Le proprietà, espresse dal Teorema IV per la funzione G_{11} e le sue derivate, valgono anche per le funzioni G_{12} , G_{21} e G_{22} (e le loro derivate). Anzi ci si può addirittura assicurare della limitatezza di G_{12} , G_{21} in tutto S .

4. — Anche nel nostro caso si può infine dare uno sviluppo delle funzioni costituenti la matrice di GREEN in serie delle autosoluzioni $U(x, \lambda_n)$, $V(x, \lambda_n)$. Riferiamoci al solito alla G_{11} .

Consideriamo ora al posto del rettangolo R_k , quello più generale — $k \leq \lambda_1 \leq k$, $0 \leq \lambda_2 \leq N\pi$ (N intero positivo maggiore di 1, $k > \lambda_{1,n}$), che contiene nel suo interno i $2N+1$ poli $i m, \lambda_1, -\bar{\lambda}_1, \lambda_2, -\bar{\lambda}_2, \dots$ della funzione H_1 ; con lo stesso procedimento prima esposto si giunge alla formula:

$$(16) \quad \begin{aligned} G_{11}(x, y; \xi, \eta) &= 8\pi i e^{-m|y-\eta|} \Pi(x, \xi) + \\ &- 16\pi \sum_{n=1}^N e^{-\lambda_{2,n}|y-\eta|} I[e^{i\lambda_{1,n}|y-\eta|} \varrho_n(x, \xi)] + \\ &+ 4 e^{-N\pi|y-\eta|} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, \xi, \lambda' + iN\pi) e^{i\lambda'|y-\eta|} d\lambda', \end{aligned}$$

e quando si tenga conto che il residuo $\varrho_n(x, \xi)$ si può porre nella forma

$$\varrho_n(x, \xi) = \frac{(2+\sigma)^2}{4(1+\sigma)\mu\sigma} \frac{1}{\lambda_n} \frac{ch\lambda_n + (-1)^n}{\frac{2+\sigma}{\sigma} ch\lambda_n - (-1)^n} U(x, \lambda_n) U(\xi, \lambda_n) \quad (6)$$

(6) Analogamente si ottengono le formule

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) K_1(x, \xi, \lambda) = - \frac{(2+\sigma)^2}{4(1+\sigma)\mu\sigma} \frac{i}{\lambda_n} \frac{ch\lambda_n + (-1)^n}{\frac{2+\sigma}{\sigma} ch\lambda_n - (-1)^n} U(x, \lambda_n) V(\xi, \lambda_n)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) H_2(x, \xi, \lambda) = - \frac{(2+\sigma)^2}{4(1+\sigma)\mu\sigma} \frac{i}{\lambda_n} \frac{ch\lambda_n + (-1)^n}{\frac{2+\sigma}{\sigma} ch\lambda_n - (-1)^n} V(x, \lambda_n) U(\xi, \lambda_n)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) K_2(x, \xi, \lambda) = \frac{(2+\sigma)^2}{4(1+\sigma)\mu\sigma} \frac{1}{\lambda_n} \frac{ch\lambda_n + (-1)^n}{\frac{2+\sigma}{\sigma} ch\lambda_n - (-1)^n} V(x, \lambda_n) V(\xi, \lambda_n).$$

[Si noti che è $U(x, \lambda_n) = (-1)^{n+1} U(1-x, \lambda_n)$] si può mostrare che dalla (19) segue lo sviluppo in serie :

$$(21) \quad G_{11}(x, y; \xi, \eta) = 8 \pi i e^{-m|y-\eta|} H(x, \xi) + \\ - 16 \pi \sum_{n=1}^{\infty} I \left[\frac{(2+\sigma)^2}{4(1+\sigma)\mu\sigma} \frac{1}{\lambda_n} \frac{ch \lambda_n + (-1)^n}{\frac{2+\sigma}{\sigma} ch \lambda_n - (-1)^n} e^{i\lambda_n|y-\eta|} U(x, \lambda_n) U(\xi, \lambda_n) \right]$$

precisamente facendo vedere che si ha uniformemente in x, y, ξ, η

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-N\pi|y-\eta|} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, \xi, \lambda' + iN\pi) e^{i\lambda'|y-\eta|} d\lambda' = 0.$$

Non siamo riusciti ad ottenere ciò in tutto S , ma solo nella striscia privata dei punti $|y-\eta| \geq \varepsilon$ (ε positivo). In questo caso le maggiorazioni necessarie si semplificano notevolmente. Basta infatti dimostrare che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, \xi, \lambda' + iN\pi) e^{i\lambda'|y-\eta|} d\lambda'$$

o anche

$$\int_0^{\infty} H_1(x, \xi, \lambda' + iN\pi) e^{i\lambda'|y-\eta|} d\lambda'$$

è in modulo minore di un polinomio in $N\pi$.

Non insistiamo su queste maggiorazioni, del resto non eccessivamente delicate; vogliamo a conclusione solo osservare che lo sviluppo (21) usufruendo delle autofunzioni $U(x, q_n), V(x, q_n)$ e dei relativi autovalori q_n di cui alla I parte (quando si ricordi che $q_n = i\lambda_n$), si può anche mettere nella forma :

$$(22) \quad G_{11}(x, y; \xi, \eta) = \frac{(2+\sigma)^2}{(1+\sigma)\mu\sigma} 4\pi \left\{ - \frac{e^{-m|y-\eta|}}{2m} \frac{\cos m + 1}{\frac{2+\sigma}{\sigma} \cos m - 1} U(x, m) U(\xi, m) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} R \left[\frac{e^{-q_n|y-\eta|}}{q_n} \frac{\cos q_n + (-1)^n}{\frac{2+\sigma}{\sigma} \cos q_n - (-1)^n} U(x, q_n) U(\xi, q_n) \right] \right\}.$$

Simili calcoli ed analoghe proprietà si possono ricavare per le altre G_{nk} . Ad esempio

$$G_{12}(x, y; \xi, \eta) = \frac{(2 + \sigma)^2}{(1 + \sigma)\mu\sigma} 4\pi \left\{ -\frac{e^{-m|y-\eta|}}{2m} \frac{\cos m + 1}{\frac{2 + \sigma}{\sigma} \cos m - 1} U(x, m) V(\xi, m) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} R \left[\frac{e^{-q_n|y-\eta|}}{q_n} \frac{\cos q_n + (-1)^n}{\frac{2 + \sigma}{\sigma} \cos q_n - (-1)^n} U(x, q_n) V(\xi, q_n) \right] \right\}.$$

G_{22}, G_{21} si ottengono poi dalle precedenti espressioni di G_{11}, G_{12} collo scambio della funzione $U(x, q_n)$ colla $V(x, q_n)$.

5. — Possiamo infine dare un teorema di esistenza per il problema (1), (2), sotto opportune ipotesi per le funzioni $f(x, y), g(x, y)$. Le ipotesi che si fanno su f e g sono le seguenti:

le funzioni f e g siano funzioni continue in S , che verifichino ad una condizione di Hölder; nel senso che, per ciascuna di esse si debbono trovare tre numeri positivi c, L, α tali che per ogni coppia di punti P, Q di S per cui $P\bar{Q} < c$ sia

$$|f(P) - f(Q)| < L\overline{P\bar{Q}}^\alpha,$$

le funzioni $e^{-m|y|}f(x, y), e^{-m|y|}$ siano sommabili in S .

Si dimostra allora che le funzioni u, v date dalle (11) sono continue in S , si annullano sui lati di S , ammettono le derivate parziali prime e seconde richieste e soddisfano al sistema (1).

Le prime affermazioni seguono da un ragionamento simile a quello in nota II pag. 22. L'ultima si può provare come segue.

Indichiamo con $\bar{G}_{11}, \bar{G}_{12}, \bar{G}_{21}, \bar{G}_{22}$ quello che divengono le G_{ik} quando si sottraggono i termini singolari (14). Si verifica facilmente che le $G_{i1} - \bar{G}_{i,1}, G_{i2} - \bar{G}_{i,2}$ ($i = 1, 2$) soddisfano [per $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \neq 0$] al sistema (15). La stessa proprietà hanno quindi le $\bar{G}_{i1}, \bar{G}_{i,2}$. Le espressioni

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u} \\ \bar{v} \end{array} \right\} = \iint_S \bar{G}_{i1} f d\xi d\eta + \iint_S \bar{G}_{i2} g d\xi d\eta \quad i = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$$

si possono derivare due volte sotto il segno di integrale. Ne segue

$$\Delta \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = 0$$

$$\Delta \bar{v} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = 0.$$

È noto poi che le $u - \bar{u}$, $v - \bar{v}$ rappresentano una soluzione particolare del sistema (1) [vedi ad es. Fichera — Sui problemi analitici dell'elasticità piana, ... Teor. XIII⁰] nell'ipotesi enunciate dell'hölderianità delle f, g . È vero che nel teorema citato è inteso che il dominio D sia limitato, ma tale difficoltà si può agevolmente superare con ragionamenti analoghi a quelli della nota II pag. 23.

Rimane così acquisito il teorema di esistenza che era lo scopo di questa Parte II^a. A complemento facciamo osservare che nella linea delle dimostrazioni in nota II, pag. 24-25 si può anche provare che

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) e^{-my} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} v(x, y) e^{-my} = 0.$$

III^a PARTE. — *Dimostrazione dell'equivalenza tra il problema (1), (2), (3) della prima parte ed il sistema di infinite equazioni integrali (19, I).*

Concludiamo in quest'ultima parte il nostro lavoro dimostrando la equivalenza del problema [(1), (2), (3), I Parte] con quello della risoluzione del sistema di equazioni integrali (19, I).

Per assicurare la necessità delle (19, I) abbiamo seguito ancora i procedimenti della nota I^a, mentre per la sufficienza ci riferiamo ad un risultato di G. FICHERA (7).

Precisiamo anzitutto la ipotesi sul dominio T [$0 \leq x \leq 1$, $\alpha(x) < y < \beta(x)$] considerato nella I^a parte e sulle funzioni $f(x, y)$, $g(x, y)$. Supporremo le $\alpha(x)$, $\beta(x)$ continue nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ (con $\alpha(x) < \beta(x)$ per $0 < x < 1$), ivi dotate di derivate prime e seconde continue, fatta eccezione per un numero finito di punti in cui tali derivate possono presentare discontinuità di prima specie o punti di infinito; ammetteremo però che $\alpha'(x)$, $\beta'(x)$ riescano sommabili in $(0, 1)$ ed inoltre che le $f(x, y)$, $g(x, y)$ siano hölderiane in T .

(7) Vedi le note citate sotto (3) nell'Introduzione.

Passiamo a precisare la classe γ delle funzioni $u(x, y)$ $v(x, y)$ nella quale vogliamo cercare la soluzione del problema dell'elasticità piana tradotto dalle equazioni [(1), (2), (3); I]. Tali funzioni dovranno godere delle seguenti proprietà:

a) Sono continue in $T - FT$ con le loro derivate del primo e del secondo ordine, e risultano verificate le [(1), I];

b) al tendere del punto P , interno a T , ad un punto fissato Q della frontiera FT nel tratto $y = \alpha(x)$ o $y = \beta(x)$, lungo la normale n a FT uscente dal punto, si ha per quasi tutte le posizioni di Q :

$$(1) \quad \begin{aligned} \lim_{P \rightarrow Q} u(P) &= A_1(x) & \text{su} & \quad y = \alpha(x) \\ \lim_{P \rightarrow Q} u(P) &= B_1(x) & \text{su} & \quad y = \beta(x) \\ \lim_{P \rightarrow Q} v(P) &= A_2(x) & \text{su} & \quad y = \alpha(x) \\ \lim_{P \rightarrow Q} v(P) &= B_2(x) & \text{su} & \quad y = \beta(x), \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} & \lim_{P \rightarrow Q} \mu \left[(1 + \sigma) \frac{\partial u(P)}{\partial x} + (\sigma - 1) \frac{\partial v(P)}{\partial y} \right] \cos \widehat{nx} + \\ & + \mu \left(\frac{\partial u(P)}{\partial y} + \frac{\partial v(P)}{\partial x} \right) \cos \widehat{ny} = \begin{cases} \tau_{1,\beta}(x) & \text{su } y = \beta(x) \\ \tau_{1,\alpha}(x) & \text{su } y = \alpha(x) \end{cases} \\ & \lim_{P \rightarrow Q} \mu \left(\frac{\partial u(P)}{\partial y} + \frac{\partial v(P)}{\partial x} \right) \cos \widehat{nx} + \mu \left[(\sigma - 1) \frac{\partial u(P)}{\partial x} + \right. \\ & \left. + (\sigma + 1) \frac{\partial v(P)}{\partial y} \right] \cos \widehat{ny} = \begin{cases} \tau_{2,\beta}(x) & \text{su } y = \beta(x) \\ \tau_{2,\alpha}(x) & \text{su } y = \alpha(x), \end{cases} \end{aligned}$$

(n normale al contorno orientata verso l'esterno) le funzioni

$$\tau_{1,\beta} \sqrt{1 + \beta'^2}, \quad \tau_{1,\alpha} \sqrt{1 + \alpha'^2}, \quad \tau_{2,\beta} \sqrt{1 + \beta'^2}, \quad \tau_{2,\alpha} \sqrt{1 + \alpha'^2}$$

risultando sommabili in $(0, 1)$.

c) Al tendere di P (interno a T) ad un fissato Q del tratto $x = 0$ o $x = 1$ di FT lungo la retta $y = \text{cost}$ uscente da Q , si ha per quasi tutte le posizioni di Q :

$$(3) \quad \begin{aligned} \lim_{P \rightarrow Q} u(P) &= a_1(y), & \lim_{P \rightarrow Q} v(P) &= a_2(y) & \text{su } & x = 0 \\ \lim_{P \rightarrow Q} u(P) &= b_1(y), & \lim_{P \rightarrow Q} v(P) &= b_2(y) & \text{su } & x = 1 \end{aligned}$$

d) con le funzioni definite in a), b), valgono le due formule di SOMIGLIANA:

$$\begin{aligned}
& \iint_T [G_{11}f + G_{21}g] dx dy + \\
& + \int_0^1 \{G_{11}[x, \beta(x); \xi, \eta] \tau_{1,\beta} \sqrt{1 + \beta'^2} + G_{21}[x, \beta(x); \xi, \eta] \tau_{2,\beta} \sqrt{1 + \beta'^2}\} dx + \\
& - \int_0^1 \{G_{11}[x, \alpha(x); \xi, \eta] \tau_{1,\alpha} \sqrt{1 + \alpha'^2} + G_{21}[x, \alpha(x); \xi, \eta] \tau_{2,\alpha} \sqrt{1 + \alpha'^2}\} dx + \\
(4) \quad & - \int_0^1 \mu B_1 \left\{ (1+\sigma) \left[\frac{\partial G_{11}}{\partial x} \right]_{y=\beta} \beta' - \left[\frac{\partial G_{11}}{\partial y} \right]_{y=\beta} - \sigma \left[\frac{\partial G_{21}}{\partial x} \right]_{y=\beta} + (\sigma-1) \left(\left[\frac{\partial G_{21}}{\partial x} \right]_{y=\beta} + \left[\frac{\partial G_{21}}{\partial y} \right]_{y=\beta} \beta' \right) \right\} dx + \\
& - \int_0^1 \mu B_2 \left\{ \left[\frac{\partial G_{21}}{\partial x} \right]_{y=\beta} \beta' - (1+\sigma) \left[\frac{\partial G_{21}}{\partial y} \right]_{y=\beta} - \sigma \left[\frac{\partial G_{11}}{\partial x} \right]_{y=\beta} + \left(\left[\frac{\partial G_{11}}{\partial x} \right]_{y=\beta} + \left[\frac{\partial G_{11}}{\partial y} \right]_{y=\beta} \beta' \right) \right\} dx + \\
& + \int_0^1 \mu A_1 \left\{ (1+\sigma) \left[\frac{\partial G_{11}}{\partial x} \right]_{y=\alpha} \alpha' - \left[\frac{\partial G_{11}}{\partial y} \right]_{y=\alpha} - \sigma \left[\frac{\partial G_{21}}{\partial x} \right]_{y=\alpha} + (\sigma-1) \left(\left[\frac{\partial G_{21}}{\partial x} \right]_{y=\alpha} + \left[\frac{\partial G_{21}}{\partial y} \right]_{y=\alpha} \alpha' \right) \right\} dx + \\
& + \int_0^1 \mu A_2 \left\{ \left[\frac{\partial G_{21}}{\partial x} \right]_{y=\alpha} \alpha' - (1+\sigma) \left[\frac{\partial G_{21}}{\partial y} \right]_{y=\alpha} - \sigma \left[\frac{\partial G_{11}}{\partial x} \right]_{y=\alpha} + \left(\left[\frac{\partial G_{11}}{\partial x} \right]_{y=\alpha} + \left[\frac{\partial G_{11}}{\partial y} \right]_{y=\alpha} \alpha' \right) \right\} dx + \\
& - \mu \int_{\alpha(1)}^{\beta(1)} \left\{ b_1 \left[\frac{\partial G_{11}}{\partial x} \right]_{x=1} (1+\sigma) + b_2 \left[\frac{\partial G_{21}}{\partial x} \right]_{x=1} \right\} dy - \mu \int_{\alpha(0)}^{\beta(0)} \left\{ a_1 \left[\frac{\partial G_{11}}{\partial x} \right]_{x=0} (1+\sigma) + a_2 \left[\frac{\partial G_{21}}{\partial x} \right]_{x=0} \right\} dy = \\
& = \begin{cases} 0 & \text{se } P \equiv (\xi, \eta) \text{ è esterno a } T \text{ e interno ad } S \\ -8\pi u(\xi, \eta) & \text{se } P \text{ è interno a } T \end{cases}
\end{aligned}$$

[ove G_{11} e G_{21} sono gli elementi della prima colonna della matrice di GREEN della striscia S , definite dalle (II,28)] e le altre due che si ottengono dalle precedenti sostituendo a G_{11} , G_{21} , $u(\xi, \eta)$ rispettivamente G_{12} , G_{22} , $v(\xi, \eta)$.

Si noti che l'aver fatto intervenire le funzioni di GREEN della striscia S anzichè le soluzioni fondamentali del sistema (I,1) nelle formule prece-

denti permette di evitare che in esse si presentino le componenti degli sforzi sui due tratti di contorno $x=0$, $x=1$.

Si può allora dimostrare il seguente

TEOREMA I. — Se il problema [(1), (2), (3), I^0] ammette una soluzione $u(x, y)$, $v(x, y)$ nella classe γ ; allora le corrispondenti funzioni $\tau_{1,\alpha}$, $\tau_{2,\alpha}$, $\tau_{1,\beta}$, $\tau_{2,\beta}$ definite dalle (2) verificano le infinite equazioni integrali (I^0 , 26).

Per le u, v valgono la prima delle (4) e l'analoga ottenuta collo scambio di G_{11} , G_{21} con G_{12} , G_{22} . Sostituiamo indifferentemente nell'una o nell'altra a G_{11} , G_{21} (o a G_{21} , G_{22} rispettivamente) gli sviluppi in serie (II^0 , 28). Supponiamo $\eta \geq M + \sigma$ con σ positivo e M massimo di $y = \beta(x)$ in $(0, 1)$ ed integriamo termine a termine. Si ottiene una serie, che, come in nota 1^a, pag. 60 si dimostra essere uniformemente convergente; essa non può aver somma nulla se i suoi termini non son nulli⁽⁸⁾. Ma tali termini, a prescindere da fattori non nulli, sono proprio le espressioni a primo membro delle (I^0 , 26).

Supponendo invece $\eta \leq m - \sigma$ con m minimo di $\alpha(x)$ in $(0, 1)$ e ripetendo gli sviluppi indicati si ottengono le (I^0 , 26) scritte per gli autovalori $-q_n$.

Per arrivare alla dimostrazione della sufficienza del sistema (I, 19) è necessario premettere il seguente teorema, analogo ad uno di G. FICHERA [vedi Teor. XIII^o della prima nota citata nell'Introduzione].

TEOREMA II. — Se per certe funzioni $\tau_{1,\alpha}$, $\tau_{1,\beta}$, $\tau_{2,\alpha}$, $\tau_{2,\beta}$ soddisfacenti alle condizioni di sommabilità di cui in 6), sussiste la prima delle (4), [e l'analoga non trascritta] per ogni punto P esterno a T ma interno ad S , allora la coppia di funzioni definita dalla seconda delle (4) appartiene alla classe γ .

Facendo a ritroso i passaggi della dimostrazione del Teor. I si dimostra infine il

TEOREMA III. — Per ogni quaterna di funzioni $\tau_{1,\alpha}$, $\tau_{1,\beta}$, $\tau_{2,\alpha}$, $\tau_{2,\beta}$ che siano soluzioni del sistema (I, 19) e tali da rendere sommabili le $\tau_{1,\alpha} \sqrt{1 + \alpha'^2}$, $\tau_{2,\alpha} \sqrt{1 + \alpha'^2}$, $\tau_{1,\beta} \sqrt{1 + \beta'^2}$, $\tau_{2,\beta} \sqrt{1 + \beta'^2}$ esiste una ed una sola coppia di funzioni u, v soluzioni del problema (1, 1, 2, 3) nella classe γ , per la quale sono verificate le (4₁). Tali funzioni sono espresse dalle (4₂).

(8) Questa affermazione è fondata sulla constatazione del diverso ordine di grandezza (per $y \rightarrow \infty$) dei vari termini (vedi nota I, pag. 62).