

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ROSSI FRANCESCO-SAVERIO

**Sui coefficienti di Legendre di una funzione limitata,  
compresa fra limiti assegnati**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 6,  
n° 3-4 (1952), p. 317-322*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1952\\_3\\_6\\_3-4\\_317\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_3-4_317_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SUI COEFFICIENTI DI LEGENDRE  
DI UNA FUNZIONE LIMITATA,  
COMPRESA FRA LIMITI ASSEGNATI(\*)**

di ROSSI FRANCESCO-SAVERIO (Lanciano)

1. — In questa Nota sono date le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'assegnata successione di costanti  $a_0, a_1, a_2, \dots$  sia la successione dei coefficienti di Legendre

$$(1) \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

di una funzione quasi continua  $f(x)$  verificante quasi ovunque in  $(-1,1)$  la limitazione

$$(2) \quad |f(x)| \leq 1.$$

Per ricavare le predette condizioni faremo vedere anzitutto che, per ogni  $f(x)$  sommabile in  $(-1,1)$ , è possibile esprimere, per mezzo dei coefficienti  $a_n$  definiti dalla (1), i seguenti coefficienti di Fourier

$$(3) \quad b_k = \int_0^\pi f(\cos t) \sin kt dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

e viceversa.

---

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

A tale scopo osserviamo che la (1) può anche scriversi

$$(4) \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\cos t) P_n(\cos t) \sin t \, dt.$$

Di questa formula possiamo servirci per calcolare i coefficienti di Legendre  $a_{kn}$  della particolare funzione  $f(\cos t) = \frac{\sin kt}{\sin t}$ ; si ottiene in tal modo

$$a_{kn} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \sin kt \cdot P_n(\cos t) \, dt$$

vale a dire, tenendo conto di un risultato noto <sup>(1)</sup>

$$a_{kn} = (2n+1) \frac{(k-n+1)(k-n+3)\dots(k+n-1)}{(k-n)(k-n+2)\dots(k+n)},$$

$$\text{per } n = k-1, k-3, k-5, \dots, \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases} \quad (2);$$

$$a_{kn} = 0, \text{ per tutti gli altri valori di } n.$$

Ne deriva immediatamente che la considerata funzione  $\frac{\sin kt}{\sin t}$  ammette uno sviluppo in serie di funzioni  $P_n(\cos t)$  ridotto a un numero finito di termini e più precisamente che si ha:

$$(5) \quad \frac{\sin kt}{\sin t} = \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} a_{k,k-2r+1} P_{k-2r+1}(\cos t) = \\ = \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (2k-4r+3) \frac{2r(2r+2)\dots(2k-2r)}{(2r-1)(2r+1)\dots(2k-2r+1)} P_{k-2r+1}(\cos t),$$

<sup>(1)</sup> Vedi per es. HOBSON, E. W. *Theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge 1931, p. 45.

<sup>(2)</sup> Se  $k$  è dispari e  $n=0$ , il numeratore di questa frazione perde significato, ma in tal caso si ha semplicemente  $a_{k0} = \frac{1}{k}$ .

ove con  $\left[ \frac{k+1}{2} \right]$  si è indicato il massimo intero contenuto in  $\frac{k+1}{2}$  <sup>(3)</sup>.

Ciò posto, ritornando a considerare una generica funzione  $f(\cos t)$ , dalle (3), (5) segue:

$$b_k = \int_0^\pi f(\cos t) \frac{\operatorname{sen} k t}{\operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t dt =$$

$$= \sum_{r=1}^{\left[ \frac{k+1}{2} \right]} (2k - 4r + 3) \frac{2r(2r+2) \dots (2k-2r)}{(2r-1)(2r+1) \dots (2k-2r+1)} \cdot$$

$$\int_0^\pi f(\cos t) P_{k-2r+1}(\cos t) \operatorname{sen} t dt$$

e quindi per la (4)

$$(6) \quad b_k = 2 \sum_{r=1}^{\left[ \frac{k+1}{2} \right]} \frac{2r(2r+2) \dots (2k-2r)}{(2r-1)(2r+1) \dots (2k-2r+1)} a_{k-2r+1}$$

coll'avvertenza (cfr. nota <sup>(3)</sup>), che se  $K$  è dispari, l'ultimo numeratore vale 1.

Viceversa è facile vedere che dai numeri  $b_1, b_2, b_3, \dots$  resta univocamente determinata la successione  $a_0, a_1, a_2, \dots$ .

Basta ricordare che

$$P_n(\cos t) = (-1)^n \sum_{r=0}^n \binom{-1/2}{r} \binom{-1/2}{n-r} e^{-i(n-2r)t}$$

per ottenere dalle (4)

$$a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{4} \sum_{r=0}^n \binom{-1/2}{r} \binom{-1/2}{n-r} \cdot$$

$$\int_0^\pi f(\cos t) [\operatorname{sen}(n-2r+1)t - \operatorname{sen}(n-2r-1)t] dt$$

---

<sup>(3)</sup> A norma di quanto si è detto nella nota <sup>(2)</sup> se  $k$  è dispari, il numeratore della frazione che compare nell'ultimo membro perde significato per  $r = \frac{k+1}{2}$ ; in tal caso deve essere sostituito col numero 1.

e di conseguenza, per la (3)

$$a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{4} \sum_{r=0}^n \binom{-1/2}{r} \binom{-1/2}{n-r} (b_{n-2r+1} - b_{n-2r-1}),$$

ovvero, con una facile trasformazione, tenendo conto che  $b_{-k} = -b_k$ ,  $b_0 = 0$  :

$$a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{2} \cdot \left\{ \binom{-1/2}{n} b_{n+1} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[ \binom{-1/2}{r} \binom{-1/2}{n-r} - \binom{-1/2}{r-1} \binom{-1/2}{n-r+1} \right] b_{n-2r+1} \right\}.$$

In base ai risultati ottenuti possiamo dunque enunciare :

I. *Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una data successione di numeri  $a_0, a_1, a_2, \dots$  sia quella dei coefficienti di Legendre di una funzione  $f(x)$  verificante la (2), coincidono con quelle esprimenti che la successione  $b_1, b_2, b_3, \dots$  dedotta da  $a_0, a_1, a_2, \dots$  mediante le formole (6), sia quella dei coefficienti di Fourier, secondo la (3), di una funzione  $f(\cos t)$  verificante la stessa limitazione (2).*

2. — In base al teorema I possiamo pervenire alle condizioni richieste, tenendo conto di un risultato ottenuto da A. GHIZZETTI<sup>(4)</sup> circa le condizioni necessarie e sufficienti perchè una data successione di numeri (reali o complessi)  $c_0, c_1, c_2, \dots$  sia quella dei coefficienti di Fourier

$$(7) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{ikt} dt$$

di una  $\varphi(t)$  verificante la limitazione

$$(8) \quad 0 \leq \varphi(t) \leq 1.$$

---

(<sup>4</sup>) Vedi A. GHIZZETTI, *Sui coefficienti di Fourier di una funzione limitata, compresa fra limiti assegnati*, Annali della Scuola Normale di Pisa, s. III, vol. IV, 1950, p. 131-156.

Se, riprendendo in considerazione la  $f(\cos t)$  del n. 1, poniamo

$$\varphi(t) \begin{cases} = \frac{1}{2} [1 + f(\cos t)] & \text{in } (0, \pi), \\ = \frac{1}{2} [1 - f(\cos t)] & \text{in } (-\pi, 0), \end{cases}$$

questa  $\varphi(t)$  verifica la (8) e per essa la (7) fornisce, ricordando la (3):

$$(9) \quad c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_k = \frac{i}{2\pi} b_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Dalle (9) e dalle condizioni date dal GHIZZETTI si deduce allora facilmente quanto segue:

II. *Condizioni necessarie e sufficienti affinché una data successione di numeri  $b_1, b_2, b_3, \dots$  sia quella dei coefficienti di Fourier (3) di una funzione  $f(\cos t)$  verificante la (2) è che, dedotti da  $b_1, b_2, b_3, \dots$  i numeri  $s_0, s_1, s_2, \dots$  definiti dalle formole:*

$$(10) \quad s_0 = 2, \quad e^{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} s_k z^k$$

e costruiti i determinanti (simmetrici) <sup>(5)</sup>

$$(11) \quad D_k = \begin{vmatrix} 2 & s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ s_1 & 2 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & s_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & 2 \end{vmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

si verifichi uno dei seguenti casi:

(A)  $D_k > 0$  per  $k < n - 1$ ,  $D_k = 0$  per  $k \geq n$  (per un certo intero  $n \geq 1$ )

(B)  $D_k > 0$  per  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Nel caso (A) la  $f(\cos t)$  assume soltanto i valori  $-1, +1$  alternativamente in intervalli contigui, perfettamente determinati, costituenti una sud-

<sup>(5)</sup> Si noti che  $D_k$  dipende solo da  $b_1, b_2, \dots, b_k$  vale a dire da  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ .

divisione di  $(0, \pi)$ <sup>(6)</sup> (diremo brevemente che  $f(x)$  è una funzione costante a  $n$  tratti coi valori  $1, -1$ ).

3. — Dai precedenti teoremi I e II deduciamo infine:

III. *Condizioni necessarie e sufficienti affinché una data successione di numeri  $a_0, a_1, a_2, \dots$  sia quella dei coefficienti di Legendre di una funzione  $f(x)$  verificante quasi ovunque in  $(-1, +1)$  la limitazione  $|f(x)| \leq 1$  è che, dedotte da tale successione successivamente le seguenti*

1)  $b_1, b_2, b_3, \dots$  con  $b_k = 2 \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \frac{2r(2r+2)\dots(2k-2r)}{(2r-1)(2r+1)\dots(2k-2r+1)} a_{k-2r+1}$  ;

2)  $s_1, s_2, s_3, \dots$  per mezzo della funzione generatrice

$$e^{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} s_k z^k ;$$

3)  $D_1, D_2, D_3, \dots$  con  $D_k = \begin{vmatrix} 2 & s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ s_1 & 2 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & s_{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & 2 \end{vmatrix}$  ;

si verifichi uno di questi due casi:

A) esiste un intero  $n \geq 1$  per cui risulta

$$D_k > 0 \text{ per } k < n - 1, D_k = 0 \text{ per } k \geq n .$$

B) tutti i numeri  $D_1, D_2, D_3, \dots$  sono positivi.

Nel caso A) la  $f(x)$  è una funzione costante a  $n$  tratti coi valori  $1, -1$  perfettamente individuata dai suoi primi  $n$  coefficienti di Legendre.

<sup>(6)</sup> Determinati dal fatto che la  $f$  deve avere come primi  $n$  coefficienti di Legendre i numeri  $a_0, a_1, a_3, \dots, a_{n-1}$  (con  $a_{n-1}$  ricavato in funzione di  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$  dalla  $D_n = 0$ ). Occorre anche tener conto di  $a_{n-1}$  perchè si vede facilmente che  $D_n = 0$  definisce due valori per  $a_{n-1}$ .