

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LESKY PETER

**Determinazione degli stati di tensione piana in un cilindro
elastico a sezioni ellittiche**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 6,
n° 3-4 (1952), p. 255-267

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_3-4_255_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

**DETERMINAZIONE DEGLI STATI
DI TENSIONE PIANA IN UN CILINDRO ELASTICO
A SEZIONI ELLITTICHE (*)**

di **LESKY PETER** (Roma)

1. — **A. GHIZZETTI** dimostra nel suo lavoro « Sugli stati di tensione piana in un corpo elastico » ⁽¹⁾ che il problema elastico piano, nel quale le componenti degli sforzi verificano le

$$(1) \quad t_{xz} = t_{yz} = t_{zz} = 0; \quad t_{xx} \ t_{yy} \ t_{xy} \text{ indipendenti da } z$$

è più elementare di quello delle deformazioni piane e dipende soltanto dalla determinazione di una funzione armonica e di tre costanti arbitrarie.

Tenendo conto della (1) le componenti u, v, w dello spostamento sono

$$(2) \quad \begin{aligned} u &= \alpha z^2 - \alpha x^2 + 2 \frac{\beta}{\sigma} x y - \frac{\alpha}{\sigma} y^2 + \\ &+ \frac{1-\sigma}{\sigma} \gamma x + 2 \frac{1+\sigma}{E} \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x y) - \varphi(x y); \\ v &= \beta z^2 - \frac{\beta}{\sigma} x^2 + 2 \frac{\alpha}{\sigma} x y - \beta y^2 + \\ &+ \frac{1-\sigma}{\sigma} \gamma y - 2 \frac{1-\sigma}{E} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x y) + \psi(x y); \\ w &= -2z(\alpha x + \beta y + \gamma) \end{aligned}$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo — Roma.

⁽¹⁾ Annali di Matematica pura e applicata 1949, Vol. I, Serie IV.

e i corrispondenti sforzi sono dati dalle formule:

$$\begin{aligned}
 t_{xx} &= \frac{E}{\sigma} (2\beta y + \gamma) + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{E}{1 + \sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\
 (3) \quad t_{yy} &= \frac{E}{\sigma} (2\alpha x + \gamma) - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{E}{1 + \sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\
 t_{xy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{E}{1 + \sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

Perchè il sistema degli sforzi (3) sia in equilibrio, deve essere, per le componenti delle forze di massa $X(xy)$, $Y(xy)$, $Z(xy)$,

$$X = - \frac{\partial F(xy)}{\partial y}; \quad Y = \frac{\partial F(xy)}{\partial x}; \quad Z = 0.$$

Nelle formule (2) (3) $\alpha \beta \gamma$ sono costanti arbitrarie, $\Phi(xy)$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione

$$\Delta_2 \Phi = F(xy)$$

e $\varphi + i\psi$ è una arbitraria funzione analitica di $x + iy$, σ è il coefficiente di POISSON e E designa il modulo di YOUNG.

Facendo seguito al lavoro di M. G. PLATONE « Sugli stati di tensione piana in un corpo cilindrico elastico » ⁽²⁾ nel quale si trova la soluzione di un problema particolare di tensione piana in un cilindro retto elastico le cui sezioni con i piani $z = \text{cost.}$ ($0 \leq z \leq h$) sono cerchi, mi propongo di risolvere il problema per il caso, ove queste sezioni sono ellissi.

D sia il dominio piano sezione del cilindro coi piani $z = \text{const.}$, FD la sua frontiera, s l'ascissa curvilinea su FD e n la normale interna su FD . Calcoliamo in tutto il cilindro l'espressione degli sforzi sotto l'ipotesi che sia assegnata in ogni punto di FD la componente normale dello sforzo

$$(4) \quad t_{nn} = T_1(s).$$

In virtù della nota formula

$$t_{nn} = t_{xx} \cos^2(nx) + 2 t_{xy} \cos(nx) \cos(ny) + t_{yy} \cos^2(ny)$$

⁽²⁾ Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 1951, Vol. V, Serie III.

ponendo

$$\frac{d}{d\nu} = \frac{\partial}{\partial x} \cos 2(n x) + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sen} 2(n x)$$

$$\frac{d}{d\nu'} = -\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sen} 2(n x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos 2(n x)$$

si ottiene, usando le (3)

$$t_{nn} = \frac{E}{\sigma} [2\alpha x \operatorname{sen}^2(n x) + 2\beta y \cos^2(n x) + \gamma] + \\ + \frac{d}{d\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{d}{d\nu'} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{E}{1+\sigma} \frac{d\varphi}{d\nu}.$$

Sulla frontiera FD è data $t_{nn} = T(s)$, ne segue quindi

$$(5) \quad \frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{1+\sigma}{E} \left\{ \frac{E}{\sigma} [2\alpha x \operatorname{sen}^2(n x) + 2\beta y \cos^2(n x) + \gamma] + \right. \\ \left. + \frac{d}{d\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{d}{d\nu'} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - T(s) \right\} \equiv f(s);$$

cioè il problema è ridotto alla costruzione di una funzione armonica φ in D , la cui derivata obliqua su FD secondo la direzione ν è data dalla (5).

2. — Fra le coordinate confocali ellittiche sussistono le relazioni

$$(6) \quad x = \left(\frac{1+q}{2} \varrho + \frac{1-q}{2} \frac{1}{\varrho} \right) \cos \theta \quad \varrho_0 \leq \varrho \leq 1 \\ y = \left(\frac{1+q}{2} \varrho - \frac{1-q}{2} \frac{1}{\varrho} \right) \operatorname{sen} \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Per $\varrho = 1$ si ottiene l'ellisse FD il cui asse maggiore è uno e l'asse minore è q . Il valore

$$\varrho_0 = \sqrt{\frac{1-q}{1+q}}$$

corrisponde all'ellisse degenerato nel segmento focale FF' . Ponendo

$$u = \frac{1+q}{2} \varrho + \frac{1-q}{2} \frac{1}{\varrho}; \quad v = \frac{1+q}{2} \varrho - \frac{1-q}{2} \frac{1}{\varrho},$$

si trova, tenuto conto delle (6)

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{1}{v^2 \cos^2 \theta + u^2 \sin^2 \theta} \left\{ \varrho v \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + u \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\}.$$

Infine si pone

$$(7) \quad F(\theta) = f(\theta) [\varrho^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta]$$

e il problema in coordinate ellittiche confocali si presenta nella forma

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} &= 0 \quad (\text{per } \varrho_0 < \varrho < 1) \\ \varrho \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= F(\theta) \quad (\text{per } \varrho = 1), \end{aligned}$$

ove $F(\theta)$ è una data funzione che supponiamo continua ed a variazione limitata in $(0, 2\pi)$ con l'ulteriore condizione $F(0) = F(2\pi)$.

Le (8) non sono sufficiente per determinare univocamente la soluzione. Come ha indicato A. GHIZZETTI nel lavoro « Sui problemi di DIRICHLET e di NEUMANN per l'ellisse » ⁽³⁾ la φ deve soddisfare alle ulteriori condizioni

$$(9) \quad \begin{aligned} \text{per } \varrho = \varrho_0 \text{ la } \varphi(\varrho, \theta) \text{ deve essere una funzione pari di } \theta \\ \text{per } \varrho = \varrho_0 \text{ la } \frac{\partial \varphi(\varrho, \theta)}{\partial \varrho} \text{ deve essere una funzione dispari di } \theta. \end{aligned}$$

Inoltre la $F(\theta)$ deve soddisfare a delle condizioni di compatibilità, che saranno indicate in seguito, le quali porteranno a fissare i valori di α , β e γ delle formule (5).

3. — Proponiamoci di determinare i coefficienti di FOURIER della $\varphi(\varrho, \theta)$ come funzione di θ . Tali coefficienti di FOURIER sono

$$\begin{aligned} a_k(\varrho) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varrho, \theta) \cos k\theta \, d\theta & k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k(\varrho) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varrho, \theta) \sin k\theta \, d\theta & k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

⁽³⁾ Rendiconti del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, Vol. XX (1951).

e soddisfano alle equazioni differenziali

$$a_k''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} a_k'(\varrho) - \frac{k^2}{\varrho^2} a_k(\varrho) = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k''(\varrho) + \frac{1}{\varrho} b_k'(\varrho) - \frac{k^2}{\varrho^2} b_k(\varrho) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

le cui soluzioni sono

$$a_0(\varrho) = A_0 + B_0 \log \varrho \quad \begin{matrix} a_k(\varrho) = A_k \varrho^k + B_k \varrho^{-k} \\ b_k(\varrho) = C_k \varrho^k + D_k \varrho^{-k} \end{matrix} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Per determinare le costanti arbitrarie A_k , B_k , C_k e D_k osserviamo che le (9) si traducono nelle $a_0'(\varrho_0) = 0$; $b_k(\varrho_0) = 0$; $a_k'(\varrho_0) = 0$, vale a dire nelle

$$(10) \quad B_0 = 0; \quad B_k = A_k \varrho_0^{2k}; \quad D_k = -C_k \varrho_0^{2k}.$$

Rimane la determinazione delle costanti A_k e C_k in base alla condizione per $\varrho = 1$. Posto per $\varrho = 1$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\varrho \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] \frac{\cos k \theta}{\operatorname{sen} k \theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) \frac{\cos k \theta}{\operatorname{sen} k \theta} d\theta = \begin{matrix} g_k & k = 0, 1, 2, \dots \\ h_k & k = 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

si ottiene

$$q [a'_{k+1}(1) + a'_{k-1}(1)] - [(k+1)a_{k+1}(1) - (k-1)a_{k-1}(1)] = 2g_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$q [b'_{k+1}(1) + b'_{k-1}(1)] - [(k+1)b_{k+1}(1) - (k-1)b_{k-1}(1)] = 2h_k \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

e si trova per

$$k = 0: \quad A_1 = -\frac{g_0}{2(1-q)}; \quad k = 1: \quad A_2 = -\frac{g_1}{(1-q)(1+\varrho_0^2)},$$

$$C_2 = -\frac{h_1}{(1-q)(1-\varrho_0^2)};$$

(11)

$$(1+q)(k-1)A_{k-1} - (1-q)(k+1)A_{k+1} = \frac{2g_k}{1+\varrho_0^{2k}},$$

$k \geq 2$:

$$(1+q)(k-1)C_{k-1} - (1-q)(k+1)C_{k+1} = \frac{2h_k}{1-\varrho_0^{2k}}.$$

Si ricava facilmente

$$\begin{aligned}
 A_{2l} &= -\frac{1}{l(1+q)} \sum_{k=1}^l \frac{g_{2k-1}}{\varrho_0^{2l-2k+2} (1 + \varrho_0^{4k-2})}; \\
 A_{2l+1} &= -\frac{1}{(2l+1)(1+q)} \left\{ \frac{g_0}{2 \varrho_0^{2l+2}} + 2 \sum_{k=1}^l \frac{g_{2k}}{\varrho_0^{2l-2k+2} (1 + \varrho_0^{4k})} \right\} \\
 (12) \quad C_{2l} &= -\frac{1}{l(1+q)} \sum_{k=1}^l \frac{h_{2k-1}}{\varrho_0^{2l-2k+2} (1 - \varrho_0^{4k-2})}; \\
 C_{2l+1} &= \frac{C_1}{(2l+1)\varrho_0^{2l}} - \frac{2}{(2l+1)(1+q)} \sum_{k=1}^l \frac{h_{2k}}{\varrho_0^{2l-2k+2} (1 - \varrho_0^{4k})}.
 \end{aligned}$$

Osserviamo ora che per i coefficienti di FOURIER devono valere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\varrho) \rightarrow 0; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(\varrho) \rightarrow 0$$

per ogni ϱ di $(0, 1)$. Siccome si ha $a_k(\varrho) = A_k(\varrho^k + \varrho_0^{2k} \varrho^{-k})$, $b_k(\varrho) = C_k(\varrho^k - \varrho_0^{2k} \varrho^{-k})$ si vede che le predette condizioni sono verificate per $\varrho = 1$ soltanto se $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0$ e questo dà le seguenti quattro condizioni

$$\begin{aligned}
 (13) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{2k-1}}{1 + \varrho_0^{4k-2}} \varrho_0^{2k-2} &= 0; \quad \frac{g_0}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{2k}}{1 + \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k} = 0; \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{2k-1}}{1 - \varrho_0^{4k-2}} \varrho_0^{2k-2} &= 0; \quad C_1 - \frac{2}{1+q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{2k}}{1 - \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k-2} = 0.
 \end{aligned}$$

Le prime tre sono condizioni di compatibilità del nostro problema; l'ultima assegna il valore della costante C_1 . Tenendo conto delle (13) si ottengono per le altre costanti le espressioni

$$\begin{aligned}
 (14) \quad A_{2l+1} &= \frac{2}{(2l+1)(1+q)} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{g_{2k}}{1 + \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k-2l-2}, \\
 A_{2l} &= \frac{1}{l(1+q)} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{g_{2k-1}}{1 + \varrho_0^{4k-2}} \varrho_0^{2k-2l-2}, \\
 C_{2l+1} &= \frac{2}{(2l+1)(1+q)} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{h_{2k}}{1 - \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k-2l-2}, \\
 C_{2l} &= \frac{1}{l(1+q)} \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{h_{2k-1}}{1 - \varrho_0^{4k-2}} \varrho_0^{2k-2l-2}
 \end{aligned}$$

e la soluzione del problema ha la forma

$$(15) \quad \varphi(\varrho, \theta) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \frac{4 \varrho^l \varrho_0^{2k-2}}{l(1+q)} \left[\frac{g_{l+2k-1} \cos l \theta}{1 + \varrho_0^{2l+4k-2}} + \frac{h_{l+2k-1} \operatorname{sen} l \theta}{1 - \varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \right. \\ \left. + \frac{4 \varrho^{-l} \varrho_0^{2l+2k-2}}{l(1+q)} \left[\frac{g_{l+2k-1} \cos l \theta}{1 + \varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{h_{l+2k-1} \operatorname{sen} l \theta}{1 - \varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \right\}$$

e con una trasformazione formale

$$(16) \quad \varphi(\varrho, \theta) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{2 \varrho^l \varrho_0^{2k-2}}{(1+q) l (1 - \varrho_0^{4l+8k-4})} \left[\cos [(2k-1)\tau + l(\tau - \theta)] - \right. \right. \\ \left. \left. - \varrho_0^{2l+4k-2} \cos [(2k-1)\tau + l(\tau + \theta)] \right] + \frac{2 \varrho^{-l} \varrho_0^{2l+2k-2}}{(1+q) l (1 - \varrho_0^{4l+8k-4})} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\cos [(2k-1)\tau + l(\tau + \theta)] - \varrho_0^{2l+4k-2} \cos [(2k-1)\tau + l(\tau - \theta)] \right] \right\} d\tau$$

ove la serie doppia rappresenta la funzione di GREEN $G(\varrho, \theta, \tau)$ del problema. Scriviamo ancora le condizioni di compatibilità nella forma

$$(17) \quad \int_0^{2\pi} F(\tau) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cos 2k\tau}{1 + \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k} + 1 \right] d\tau = 0 \\ \int_0^{2\pi} F(\tau) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\tau}{1 + \varrho_0^{4k+2}} (1 + \varrho_0^2) \varrho_0^{2k} + \cos \tau \right] d\tau = 0, \\ \int_0^{2\pi} F(\tau) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\tau}{1 - \varrho_0^{4k+2}} (1 - \varrho_0^2) \varrho_0^{2k} + \operatorname{sen} \tau \right] d\tau = 0$$

4. — Perciò se il nostro problema, con le tre condizioni di compatibilità, ammette soluzione, tale soluzione è necessariamente unica e non può che essere data dalla formula (15) o (16). Stabiliamo ora il teorema d'esistenza verificando che effettivamente la (15) o (16) soddisfano a tutte le

condizioni del problema, nell'ipotesi che valgano le (17). A tale scopo dobbiamo dapprima dimostrare che la serie che rappresenta $\varphi(\varrho\theta)$ converge uniformemente in D e su FD e che le sue derivate parziali del primo e del secondo ordine convergono uniformemente in ogni insieme chiuso intorno a D .

Consideriamo l'espressione (15). Facendo l'ipotesi che $F(\theta)$ sia a variazione limitata, per i suoi coefficienti di FOURIER si hanno le maggiorazioni

$$|g_l| < \frac{C}{l}; \quad |h_l| < \frac{C}{l},$$

ove C è una costante positiva. Ne segue

$$(18) \quad \left| \frac{4 \varrho_0^{2k-2}}{1+q} \left\{ \frac{\varrho^l}{l} \left[\frac{g_{l+2k-1} \cos l\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} + \frac{h_{l+2k-1} \sin l\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} \right] + \left(\frac{\varrho_0}{l} \right)^l \frac{\varrho_0^l}{l} \left[\frac{g_{l+2k-1} \cos l\theta}{1+\varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{h_{l+2k-1} \sin l\theta}{1-\varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \right\} \right| < D \left[\frac{\varrho^l}{l(l+2k-1)} + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^l \frac{\varrho_0^l}{l(l+2k-1)} \right]$$

ove D è una costante positiva opportuna. Si vede immediatamente che la serie (18) converge per $\varrho_0 \leq \varrho \leq 1$. Ma questo significa, che la serie (15) converge assolutamente e quindi anche uniformemente in D e su FD .

Per le derivate parziali rispetto ϱ si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{4 \varrho_0^{2k-2}}{1+q} \{ \dots \} < E \left[\frac{\varrho^{l-1}}{l+2k-1} + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^{l+1} \frac{\varrho_0^{l-1}}{l+2k-1} \right];$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \frac{4 \varrho_0^{2k-2}}{1+q} \{ \dots \} < F \left[\varrho^{l-2} + \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^{l+2} \varrho_0^{l-2} \right]$$

ove E e F sono costanti positive. Analoghe formule si trovano per le derivate rispetto a θ . Per $\varrho_0 \leq \varrho \leq \varrho^* < 1$ sono convergenti anche queste maggioranti. Su FD invece ($\varrho=1$) la maggiorante per le prime derivate non è convergente.

Per verificare le condizioni sul contorno esistono due possibilità. Si suppone $F(\theta)$ derivabile per $0 \leq \theta \leq 2\pi$, allora per i coefficienti di FOURIER valgono le maggiorazioni

$$|G_l| < \frac{C}{l^2}; \quad |H_l| < \frac{C}{l^2}$$

che assicurano ovviamente la convergenza uniforme delle serie che rappresentano le derivate prime anche sul contorno.

Ma si può fare a meno di questa ipotesi aggiuntiva, ragionando come segue.

Ponendo

$$u(\varrho, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau) \frac{d}{d\nu} G(\varrho, \theta, \tau) d\tau$$

si deve mostrare che vale la

$$(19) \quad \lim_{P \rightarrow Q} u(P) = F(Q)$$

ove P indica un punto qualsiasi di D e Q un punto qualsiasi su FD . La derivata della funzione di GREEN rispetto a ν in D è

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\nu} = & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \varrho^{l+1} \varrho_0^{2k-2} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau \cos(l+1)\theta}{1 + \varrho_0^{2l+4k-2}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \cos(l+1)\theta}{1 - \varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \right. \\ & - \varrho^{1-l} \varrho_0^{2l+4k-2} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau \cos(l-1)\theta}{1 + \varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \text{sen}(l-1)\theta}{1 - \varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \\ & - \varrho^{l-1} \varrho_0^{2k} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau \cos(l-1)\theta}{1 + \varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \text{sen}(l-1)\theta}{1 - \varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \\ & \left. + \varrho^{-l-1} \varrho_0^{2l+2k} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau \cos(l+1)\theta}{1 + \varrho_0^{2l+4k-2}} - \frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \text{sen}(l+1)\theta}{1 - \varrho_0^{2l+4k-2}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Introducendo le condizioni di compatibilità (17) si trova

$$\begin{aligned} u(\varrho, \theta) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varrho^k \left[\frac{\cos k\tau \cos k\theta}{1 + \varrho_0^{2k}} + \frac{\text{sen} k\tau \text{sen} k\theta}{1 - \varrho_0^{2k}} \right] \right. \\ & \left. + \varrho^{-k} \varrho_0^{2k} \left[\frac{\cos k\tau \cos k\theta}{1 + \varrho_0^{2k}} - \frac{\text{sen} k\tau \text{sen} k\theta}{1 - \varrho_0^{2k}} \right] \right\} d\tau, \end{aligned}$$

ma questa formula dà la soluzione del problema di DIRICHLET nel caso dell'ellisse, ove sono dati i valori della funzione $F(\theta)$ sulla frontiera FD (4). Questo significa che la condizione (19) è ovunque soddisfatta.

5. — Individuata in D la funzione armonica $\varphi(\varrho\theta)$ a meno di una costante additiva procediamo al calcolo delle tre costanti $\alpha\beta\gamma$. Consideriamo il caso di forze di massa nulle. Si può porre (vedi 1).

$$F(xy) = 0; \quad \Phi(xy) = 0,$$

in tale ipotesi per (5) si ha

$$F(\theta) = \frac{1 + \sigma}{\sigma} \{ \text{sen } 2\theta (\beta q^3 \cos \theta + \alpha \text{sen } \theta) + \gamma (q^2 \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) \} \\ - \frac{1 + \sigma}{E} T(\theta) (q^2 \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta).$$

Applicando le tre condizioni della compatibilità si ottiene

$$\alpha = \frac{\sigma(1 + 3q^2)}{2q^2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T(\tau)}{E} (q^2 \cos^2 \tau + \text{sen}^2 \tau) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\tau}{1 + \varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k}(1 + \varrho_0^2) + \cos \tau \right] d\tau$$

$$\beta = \frac{\sigma(3 + q^2)}{2q^2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T(\tau)}{E} (q^2 \cos^2 \tau + \text{sen}^2 \tau) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2k+1)\tau}{1 - \varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k}(1 - \varrho_0^2) + \text{sen } \tau \right] d\tau$$

$$\gamma = \frac{\sigma(1 + q^2)}{4q^2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{T(\tau)}{E} (q^2 \cos^2 \tau + \text{sen}^2 \tau) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cos 2k\tau}{1 + \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k} + 1 \right] d\tau$$

e la $\varphi(\varrho\theta)$ diventa

$$\varphi(\varrho\theta) = A_0 + \frac{1 + \sigma}{E\pi} \int_0^{2\pi} T(\tau) (q^2 \cos^2 \tau + \text{sen}^2 \tau) \cdot \\ \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(2k+1)\tau}{1 + \varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k}(1 + \varrho_0^2) + \cos \tau \right] \frac{\cos 2\theta}{8q^2} [\varrho^2(1 + q^2) + \varrho^{-2}(1 - q^2)] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\text{sen}(2k+1)\tau}{1 - \varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k}(1 - \varrho_0^2) + \text{sen } \tau \right] \frac{\text{sen } 2\theta}{8q} [\varrho^2(1 + q^2) - \varrho^{-2}(1 - q^2)] \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4 \cos 2k\tau}{1 + \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k} + 1 \right] \frac{(1 - q^2) \cos \theta}{8q^2} [\varrho(1 + q) + \varrho^{-1}(1 - q)] - G(\varrho\theta) \right\} d\tau.$$

(4) M. PICONE « *Analisi superiore* » pag. 361 e. s. or nota (3).

Dalle espressioni delle

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{1+q}{2}e\right)^2 + \left(\frac{1-q}{2e}\right)^2 - \frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} .$$

$$\cdot \left\{ e^{l+1} e_0^{2k-2} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau \cos(l-1)\theta}{1+e_0^{2l+4k-2}} + \frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \text{sen}(l-1)\theta}{1-e_0^{2l+4k-2}} \right] \right.$$

$$- e^{-l+1} e_0^{2l+2k-2} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau \cos(l+1)\theta}{1+e_0^{2l+4k-2}} - \frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \text{sen}(l+1)\theta}{1-e_0^{2l+4k-2}} \right]$$

$$- e^{l-1} e_0^{2k} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau \cos(l+1)\theta}{1+e_0^{2l+4k-2}} + \frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \text{sen}(l+1)\theta}{1-e_0^{2l+4k-2}} \right]$$

$$\left. + e^{-l-1} e_0^{2l+2k} \left[\frac{\cos(2k-1+l)\tau \cos(l-1)\theta}{1+e_0^{2l+4k-2}} - \frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \text{sen}(l-1)\theta}{1-e_0^{2l+4k-2}} \right] \right\};$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{1+q}{2}e\right)^2 + \left(\frac{1-q}{2e}\right)^2 - \frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} .$$

$$\cdot \left\{ e^{l+1} e_0^{2k-2} \left[\frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \cos(l-1)\theta}{1-e_0^{2l+4k-2}} - \frac{\cos(2k-1+l)\tau \text{sen}(l-1)\theta}{1+e_0^{2l+4k-2}} \right] \right.$$

$$- e^{-l+1} e_0^{2l+2k-1} \left[\frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \cos(l+1)\theta}{1-e_0^{2l+4k-2}} + \frac{\cos(2k-1+l)\tau \text{sen}(l+1)\theta}{1+e_0^{2l+4k-2}} \right]$$

$$- e^{l-1} e_0^{2k} \left[\frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \cos(l+1)\theta}{1-e_0^{2l+4k-2}} - \frac{\cos(2k-1+l)\tau \text{sen}(l+1)\theta}{1+e_0^{2l+4k-2}} \right]$$

$$\left. + e^{-l-1} e_0^{2l+2k} \left[\frac{\text{sen}(2k-1+l)\tau \cos(l-1)\theta}{1-e_0^{2l+4k-2}} + \frac{\cos(2k-1+l)\tau \text{sen}(l-1)\theta}{1+e_0^{2l+4k-2}} \right] \right\}$$

si ottengono le espressioni degli sforzi:

$$t_{xx} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T(\tau) (q^2 \cos^2 \tau + \text{sen}^2 \tau).$$

$$\left\{ \frac{[e^3(1+q)^3 + e^{-3}(1-e)^3] \cos \theta - (1-q^2)[e(1+q) + e^{-1}(1-q)] \cos 3\theta}{8q^2 \left[\left(\frac{1+q}{2}e\right)^2 + \left(\frac{1-q}{2e}\right)^2 - \frac{1}{2}(1-q^2)\cos 2\theta \right]} \right\}.$$

$$\cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\tau}{1 + \varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k} (1 + \varrho_0^2) + \cos \tau \right] +$$

$$+ \frac{3[\varrho^3(1+q)^3 - \varrho^{-3}(1-q)^3] \operatorname{sen} \theta - 3(1-q^2)[\varrho(1+q) - \varrho^{-1}(1-q)] \operatorname{sen} 3\theta}{8q^3 [\dots]}$$

$$\cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\tau}{1 - \varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k} (1 - \varrho_0^2) + \operatorname{sen} \tau \right] +$$

$$+ \frac{1}{2q^2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cos 2k\tau}{1 + \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k} + 1 \right] + \frac{\partial G}{\partial x} \Big\} d\tau,$$

$$t_{yy} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T(\tau) (q^2 \cos^2 \tau + \operatorname{sen}^2 \tau).$$

$$\cdot \left\{ \frac{3[\varrho^3(1+q)^3 + \varrho^{-3}(1-q)^3] \cos \theta - 3(1-q^2)[\varrho(1+q) + \varrho^{-1}(1-q)] \cos 3\theta}{8 \left[\left(\frac{1+q}{2} \varrho \right)^2 + \left(\frac{1-q}{2} \varrho \right)^2 - \frac{1}{2} (1-q^2) \cos 2\theta \right]} \right.$$

$$\cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\tau}{1 + \varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k} (1 + \varrho_0^2) + \cos \tau \right] +$$

$$+ \frac{[\varrho^3(1+q)^3 + \varrho^{-3}(1-q)^3] \operatorname{sen} \theta - (1-q^2)[\varrho(1+q) - \varrho^{-1}(1-q)] \operatorname{sen} 3\theta}{8q [\dots]}$$

$$\cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)\tau}{1 - \varrho_0^{4k+2}} \varrho_0^{2k} (1 - \varrho_0^2) + \operatorname{sen} \tau \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cos 2k\tau}{1 + \varrho_0^{4k}} \varrho_0^{2k} + 1 \right] - \frac{\partial G}{\partial x} \Big\} d\tau,$$

$$t_{xy} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T(\tau) (q^2 \cos^2 \tau + \operatorname{sen}^2 \tau).$$

$$\cdot \left\{ \frac{[\varrho(1+q) - \varrho^{-1}(1-q)](1-q^2) \operatorname{sen} 3\theta - [\varrho^3(1+q)^3 - \varrho^{-3}(1-q)^3] \operatorname{sen} \theta}{8q^2 \left[\left(\frac{1+q}{2} \varrho \right)^2 + \left(\frac{1-q}{2} \varrho \right)^2 - \frac{1}{2} (1-q^2) \cos 2\theta \right]} \right.$$

$$\cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos (2 k+1) \tau}{1+\varrho_0^{4 k+2}} \varrho_0^{2 k}\left(1+\varrho_0^2\right)+\cos \tau \right] +$$

$$+ \frac{[\varrho(1+q)+\varrho^{-1}(1-q)](1-q^2) \cos 3 \theta - [\varrho^3(1+q)^3+\varrho^{-3}(1-q)^3] \cos \theta}{8 q[\dots]} .$$

$$\cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2 k+1) \tau}{1-\varrho_0^{4 k+2}} \varrho_0^{2 k}\left(1-\varrho_0^2\right)+\operatorname{sen} \tau \right] + \frac{\partial G}{\partial y} \Bigg\} d \tau .$$

È immediato constatare, che per $q=1$, $\varrho_0=0$ tutte le formule precedenti si riducono a quelle date da M. G. PLATONE nel caso del cilindro a sezioni circolari (vedi op. cit. in (2)).