ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIA CINQUINI CIBRARIO
SILVIO CINQUINI

Ancora sopra una forma piú ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 6, nº 3-4 (1952), p. 187-243
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_3-4_187_0>

ANCORA SOPRA UNA FORMA PIÙ AMPIA DEL PROBLEMA DI CAUCHY PER L'EQUAZIONE $p = f(x, y, z, q)$.

di MARIA CINQUINI CIBRARIO e di SILVIO CINQUINI (Pavia).

In una nostra recente Memoria (¹) abbiamo stabilito per l'equazione a derivate parziali

$$\text{(I)} \qquad p = f(x, y, z, q)$$

un teorema di esistenza e due teoremi di unicità, realizzando la prima effettiva estensione della classe delle funzioni, nella quale venivano considerate le soluzioni della (I): anteriormente a noi tale classe era, tradizionalmente, costituita di funzioni $z(x, y)$ continue insieme con le loro derivate parziali z'_x, z'_y (²). Nell'intento di estendere alla (I) l'ordine di idee sviluppato da C. CARATHÉODORY per le equazioni differenziali ordinarie, noi abbiamo supposto che la funzione $f(x, y, z, q)$ sia definita per ogni x dell'intervallo $0 \leq x \leq a_0$ e per ogni terna di numeri reali y, z, q e che sia quasi-continua rispetto a x e continua in (y, z, q), e abbiamo considerato come soluzione della (I) ogni funzione $z(x, y)$ [continua assieme alla propria derivata parziale $z'_y(x, y)$ e tale che, per ogni y fissato, $z(x, y)$ sia assolutamente continua in x], la quale, in corrispondenza a ogni y fissato, soddisfa per quasi tutti gli x all'equazione (I).

Nel presente lavoro, che è diviso in due capitoli, attenendoci ancora ai vari procedimenti sviluppati nella Memoria A. M., riprendiamo il pro-

---

(¹) M. CINQUINI CIBRARIO-S. CINQUINI. *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$. (Annali di Matematica pura e applicata T. XXXII (1951), pp. 121-155). Tale lavoro verrà indicato nel seguito con Memoria A. M.

(²) Non abbiamo avuto modo di prendere visione delle Note di J. SZARSKI pubblicate nei T. XXI e XXII degli Annales de la Societé Polonaise, e dai sunti apparsi nel Zentralblatt für Mathematik e nella Mathematical Reviews non risulta quale classe di funzioni abbia considerato tale autore.

blema di CAUCHY per l'equazione (I) supponendo che la funzione $f(x, y, z, q)$ sia definita nel campo ([3])

$$0 \leq x \leq a, \quad g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x), \quad c_0 \leq z \leq d_0, \quad \gamma_0 \leq q \leq \delta_0,$$

dove $g^{[1]}(x)$, $g^{[2]}(x)$ sono due funzioni continue in $(0, a)$, mentre $c_0, d_0, \gamma_0, \delta_0$ sono quattro costanti.

In tali condizioni diamo nel § 1 un teorema di esistenza della soluzione della (I) che soddisfa alla condizione (di CAUCHY)

$$\text{(II)} \qquad z(0, y) = \varphi(y), \qquad (g^{[1]}(0) \leq y \leq g^{[2]}(0)),$$

ove $\varphi(y)$ è una funzione prefissata: basandoci sulla nostra estensione del metodo delle caratteristiche, perveniamo a costruire la soluzione della (I) in un opportuno campo, il quale è costituito dalle proiezioni sul piano (x, y) di archi delle curve caratteristiche della superficie integrale, uscenti dalla curva

$$\{ x = 0, \quad z = \varphi(y), \qquad (g^{[1]}(0) \leq y \leq g^{[2]}(0));$$

nel n. 2 si mostra come, sotto qualche ulteriore ipotesi [cfr. i capoversi *b*) e *c*)], tale campo esistenziale è costituito da tutti i punti (x, y) per cui è

$$0 \leq x \leq a'', \qquad g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x),$$

ove a'' è un opportuno valore con $0 < a'' \leq a$.

L'unicità della soluzione, di cui abbiamo provata l'esistenza nel § 1, è stabilita, sempre con il metodo delle caratteristiche, nel § 2 mediante considerazioni, le quali mostrano chiaramente che il campo, in cui viene dimostrata l'unicità, dipende per solito, oltrechè dalla funzione $f(x, y, z, q)$, anche dalla $\varphi(y)$.

Soggiungiamo che, dal complesso dei risultati del Cap. I (che è costituito dai §§ 1 e 2) segue che, ogni qual volta è possibile scrivere (sia pur soltanto nella forma integrale, che noi consideriamo) le equazioni delle caratteristiche, l'integrazione di tali equazioni permette sia di costruire la soluzione della (I) soddisfacente alla (II), sia di determinare il campo, in cui essa è definita in modo unico dalla funzione $\varphi(y)$.

([3]) Facciamo presente, anche per il seguito, che tra le notazioni, usate in questa introduzione, nel Cap. I, nel Cap. II, si possono trovare delle varianti dovute a opportunità di redazione.

Al problema dell'unicità (e soltanto ad esso) è dedicato il Cap. II: il teorema del § 3 ha già formato oggetto di una Nota preventiva (4) e la sua dimostrazione, allora omessa per insufficenza di spazio, viene pubblicata nella presente Memoria. Tale teorema di unicità è valido sotto ipotesi più ampie di quelle del § 2 e la sua dimostrazione fa appello a considerazioni di natura completamente diversa da quelle del Cap. I, perchè, raffinando il procedimento approssimativo sviluppato nel n. 7 del § 3 della nostra Memoria A. M., si perviene a una ulteriore estensione di un noto lemma di A. HAAR, la quale forma oggetto del n. 7 del § 3; da questa estensione segue, in poche righe, il teorema di unicità (5).

A conferma di quanto dicevamo verso la fine dell'introduzione alla nostra Nota lincea [cit. in (4)], rileviamo, a titolo di esempio, come il procedimento del § 3, opportunamente adattato, conduce a un altro teorema di unicità che forma oggetto del § 4 e che è valido sotto ipotesi un po' diverse da quelle del § 3. Tale teorema viene stabilito inizialmente (n. 10) nell'ipotesi che il campo D (6) sia un rettangolo a lati paralleli agli assi coordinati, e da questo caso particolare si deduce, con un elementare cambiamento di variabile, il caso generale: ciò permette sia di formulare, nel caso particolare del rettangolo, ipotesi più semplici, sia di lanciare un po' di luce sulle condizioni più complicate che si presentano nel caso generale (7).

---

(4) S. CINQUINI. *Un teorema di unicità (in forma generalizzata) per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$. (Rend. Accademia nazionale dei Lincei, vol. XI (1951), pp. 255-259).

Come è stato fatto presente in (2) di tale Nota lincea, il contenuto del § 3 (e così pure quello del § 4) della presente Memoria è dovuto a S. CINQUINI. Tale dimostrazione viene pubblicata soltanto ora, a qualche mese di distanza dalla Nota preventiva, perchè la redazione del Cap. I, il quale è dovuto precipuamente a M. CINQUINI CIBRARIO, è stata ritardata, oltre il previsto, da ragioni varie.

(5) Come risultava già dall'enunciato dato nella nostra Nota lincea cit. in (4):

a) non c'è ragione di supporre che la funzione $f(x, y, z, q)$ sia, in valore assoluto, minore di una funzione della sola x integrabile (secondo LEBESGUE);

b) nemmeno c'è ragione di considerare soltanto soluzioni $z(x, y)$, la cui derivata parziale $z'_x(x, y)$ sia, in valore assoluto, minore di una funzione $M(x)$ integrabile (secondo LEBESGUE), ove $M(x)$ può anche dipendere da $z(x, y)$;

c) per le funzioni $g^{[1]}(x)$, $g^{[2]}(x)$, che definiscono il campo

$$D: \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x),$$

viene supposta la sola continuità.

Inoltre:

d) si possono eliminare le ipotesi di quasi continuità (rispetto a x) e di continuità (rispetto a (y, z, q)) della funzione $f(x, y, z, q)$, perchè non richieste dalla dimostrazione.

(6) Di cui alla nota (5).

(7) Anche qui non c'è alcuna ragione di fare l'ipotesi *a*) citata in (5), e vale quanto è detto in *d*).

Chiudiamo queste righe introduttive facendo presente che, mentre il complesso delle nostre ricerche, rivolte ad estendere all'equazione (I) l'ordine di idee di C. CARATHÉODORY, utilizza soltanto ben noti concetti della teoria delle funzioni di variabile reale, successivamente alla composizione della nostra Memoria A. M. (8) sono apparse alcune pubblicazioni relative a ricerche di natura più ampia (9). Oltre alla breve interessante osservazione di M. PAGNI, citiamo ancora (10), in modo particolare, a motivo di qualche analogia di ipotesi, le ricerche di M. VOLPATO, soggiungendo che, siccome i procedimenti da noi seguiti sono di natura diversa da quelli a cui si sono attenuti gli autori citati in (9), la presente Memoria offre un proprio interesse anche se, sotto qualche punto di vista, i nostri risultati non raggiungono quella massima generalità che, come abbiamo già fatto presente fin dalla Memoria A. M., non è nei nostri obbiettivi.

CAPITOLO I

§ 1

1. TEOREMA DI ESISTENZA. — *Siano* $g(x)$, $h(x)$ *due funzioni continue nell'intervallo* $(0, a_0)$, $(a_0 > 0)$ *con*

$$g(x) < h(x) \qquad\qquad \textit{per} \quad 0 \leq x < a_0 \text{ (11)},$$

Inoltre, nel caso particolare in cui D è un rettangolo a lati paralleli agli assi coordinati non c'è nemmeno ragione di fare l'ipotesi b).

(8) Essa era già composta ai primissimi di settembre 1951, e ad alcuni autori noi consentimmo di prendere immediata visione del relativo testo.

(9) E. BAIADA. *Teorema d'unicità per un'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine con i dati di Cauchy.* (Rend. Accademia nazionale dei Lincei, vol. XI (1951), pp. 158-164).

G. SCORZA DRAGONI-M. VOLPATO. *Un teorema di unicità per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del primo ordine.* (Rend. Seminario matem. Università di Padova, A. XX (195'), pp. 446-461).

M. PAGNI. *Un'osservazione sull'unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$, (ibidem pp. 470-474).

E. BAIADA. *L'equazione* $p = f(x, y, z, q)$ *e l'unicità.* (Rend. Accademia nazionale dei Lincei, vol. XII (1952), pp. 163-167).

Vedi anche G. SCORZA DRAGONI. *Una applicazione della quasi continuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto a un'altra variabile.* (ibidem pp. 55-61), n. 5.

Alla vigilia della revisione delle bozze di stampa abbiamo preso visione dei seguenti lavori:

M. VOLPATO. *Un criterio di confronto per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del primo ordine.* (Annali dell'Università di Ferrara, I (1952) pp. 127-133).

E. BAIADA. *Considerazioni sull'esistenza della soluzione per un'equazione alle derivate parziali, con i dati iniziali, nel campo reale.* (Annali di matematica pura e applicata T. XXXIV (1953).

(10) Cfr. nota (3) a piè della pag. 256 della nostra Nota lincea cit. in (4).

(11) Vale a dire per $x = a_0$ è $g(a_0) \leq h(a_0)$.

e sia $f(x, y, z, q)$ *una funzione definita per* x *in* $(0, a_0)$ *e per ogni terna* (y, z, q) *del campo*

$$A: \qquad g(x) \leq y \leq h(x), \qquad \alpha_0 \leq z \leq \beta_0, \qquad \gamma_0 \leq q \leq \delta_0,$$

la quale, assieme alle sue derivate parziali f_y, f_z, f_q, *sia quasi-continua rispetto a* x *per ogni terna* (y, z, q) *fissata, mentre, per ogni* x *fissato, sia continua in* (y, z, q), *e si supponga che esistano otto funzioni* $M_i(x)$, $L_i(x)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ *quasi-continue, integrabili* [12] *e non negative in* $(0, a_0)$ *in modo che per quasi tutti gli* x *di* $(0, a_0)$ *sia*

$$(1) \qquad \begin{cases} |f(x, y, z, q)| \leq M_0(x), & |f_y(x, y, z, q)| \leq M_1(x), \\ |f_z(x, y, z, q)| \leq M_2(x), & |f_q(x, y, z, q)| \leq M_3(x), \end{cases}$$

per tutti gli (y, z, q) *di* A, *e*

$$(2) \qquad \begin{cases} |f(x, y_1, z_1, q_1) - f(x, y_2, z_2, q_2)| \leq L_0(x)\{|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + |q_1 - q_2|\} \\ |f_y(x, y_1, z_1, q_1) - f_y(x, y_2, z_2, q_2)| \leq L_1(x)\{\dots\dots\dots\dots\} \\ |f_z(x, y_1, z_1, q_1) - f_z(x, y_2, z_2, q_2)| \leq L_2(x)\{\dots\dots\dots\dots\} \\ |f_q(x, y_1, z_1, q_1) - f_q(x, y_2, z_2, q_2)| \leq L_3(x)\{\dots\dots\dots\dots\} \end{cases}$$

per ogni coppia (y_1, z_1, q_1), (y_2, z_2, q_2) *appartenente a* A. *Posto*

$$g(0) = g_0, \qquad h(0) = h_0,$$

sia $\varphi(y)$ *una funzione continua, assieme alla propria derivata* $\varphi'(y)$, *nell'intervallo* (g_0, h_0), *e si supponga che sia*

$$(3) \qquad \alpha \leq \varphi(y) \leq \beta, \qquad \gamma \leq \varphi'(y) \leq \delta \qquad (\text{per} \quad g_0 \leq y \leq h_0)$$

con $\alpha_0 < \alpha \leq \beta < \beta_0$, $\gamma_0 < \gamma \leq \delta < \delta_0$, *e che esista una costante* $k_2 > 0$ *in modo che per ogni coppia di valori* y_1, y_2 *appartenenti all'intervallo* (g_0, h_0) *sia verificata la disuguaglianza*

$$(4) \qquad |\varphi'(y_1) - \varphi'(y_2)| \leq k_2 |y_1 - y_2|.$$

Sotto queste ipotesi si possono determinare un numero positivo $a''' \leq a_0$ *e due funzioni continue*

$$(5) \qquad y = u_g(x), \qquad y = u_h(x), \qquad (0 \leq x \leq a''')$$

con

$$(6) \qquad g(x) \leq u_g(x) < u_h(x) \leq h(x) \qquad (\text{per} \quad 0 \leq x < a''')$$

---

[12] In tutta la presente Memoria l'integrabilità va intesa nel senso di LEBESGUE.

[quindi non si esclude che possa essere $u_g(a''') = u_h(a''')$*], in modo che nel campo*

$$\Omega: \qquad 0 \leq x \leq a''', \qquad u_g(x) \leq y \leq u_h(x)$$

esista almeno una funzione $z(x, y)$*, la quale:*

1⁰) *in* Ω *è continua assieme alla sua derivata parziale* $z'_y(x, y)$;

2⁰) *su ogni segmento del campo* Ω *parallelo all'asse* x *è assolutamente continua in* x*;*

3⁰) *in quasi tutti i punti di ogni segmento indicato in* 2⁰) *soddisfa l'equazione*

$$p(x, y) = f(x, y, z(x, y), q(x, y)), \tag{7}$$

ove

$$p(x, y) = z'_x(x, y), \qquad q(x, y) = z'_y(x, y);$$

4⁰) *verifica la condizione*

$$z(0, y) = \varphi(y), \qquad\qquad (g_0 \leq y \leq h_0). \tag{8}$$

Inoltre $q(x, y)$ *risulta (assieme a* $z(x, y)$*) in tutto* Ω *lipschitziana rispetto a* y *con costante di* LIPSCHITZ *indipendente da* x*, e assolutamente continua rispetto a* x *su ogni segmento indicato in* 2⁰).

a) Indichiamo con K il maggiore dei numeri $|\gamma_0|$, $|\delta_0|$, rilevando che in virtù della seconda delle (3) risulta in tutto (c, d)

$$|\varphi'(y)| < K. \tag{9}$$

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie (equazioni delle caratteristiche poste sotto forma integrale) [13]

$$\left\{\begin{aligned} Y(x, \eta) &= \eta + \int_0^x F_1(t, Y(t, \eta), Z(t, \eta), Q(t, \eta))\, dt \\ Z(x, \eta) &= \varphi(\eta) + \int_0^x F_2(\ldots)\, dt \\ Q(x, \eta) &= \varphi'(\eta) + \int_0^x F_3(\ldots)\, dt, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

---

(13) Vedi Memoria A. M. n. 2, *a*), formule (14).

dove

$$
(11) \qquad \begin{cases} F_1(x, Y, Z, Q) = -f_q(x, Y, Z, Q) \\ F_2(x, Y, Z, Q) = f(\ldots) - Q f_q(\ldots) \\ F_3(x, Y, Z, Q) = f_y(\ldots) + Q f_z(\ldots), \end{cases}
$$

e quindi le $F_i(x, Y, Z, Q)$ sono definite per x in $(0, a_0)$ e per ogni terna (Y, Z, Q) di A.

Nel campo

$$
0 \leq x \leq a_0, \quad -\infty < Y < +\infty, \quad -\infty < Z < +\infty, \quad -\infty < Q < +\infty
$$

definiamo le funzioni $\overline{F}_i(x, Y, Z, Q)$, $(i = 1, 2, 3)$ ponendo per ogni x di $(0, a_0)$

$$
(12) \begin{cases} \overline{F}_i(x, Y, Z, Q) = F_i(x, Y, Z, Q), & \text{per ogni terna } (Y, Z, Q) \text{ di } A, \\ \overline{F}_i(x, Y, Z, Q) = F_i(x, h(x), Z, Q), & \text{per } \quad Y > h(x), \alpha_0 \leq Z \leq \beta_0, \gamma_0 \leq Q \leq \delta_0, \\ \overline{F}_i(x, Y, Z, Q) = F_i(x, g(x), Z, Q), & \text{per } \quad Y < g(x), \alpha_0 \leq Z \leq \beta_0, \gamma_0 \leq Q \leq \delta_0, \\ \overline{F}_i(x, Y, Z, Q) = \overline{F}_i(x, Y, \beta_0, Q), & \text{per } \quad |Y| < +\infty, Z > \beta_0, \gamma_0 \leq Q \leq \delta_0, \\ \overline{F}_i(x, Y, Z, Q) = \overline{F}_i(x, Y, \alpha_0, Q), & \text{per } \quad |Y| < +\infty, Z < \alpha_0, \gamma_0 \leq Q \leq \delta_0, \\ \overline{F}_i(x, Y, Z, Q) = \overline{F}_i(x, Y, Z, \delta_0), & \text{per } \quad |Y| < +\infty, |Z| < +\infty, Q > \delta_0, \\ \overline{F}_i(x, Y, Z, Q) = \overline{F}_i(x, Y, Z, \gamma_0), & \text{per } \quad |Y| < +\infty, |Z| < +\infty, Q < \gamma_0. \end{cases}
$$

Le funzioni $\overline{F}_i(x, Y, Z, Q)$, $(i = 1, 2, 3)$ risultano, per ogni x fissato di $(0, a_0)$, continue in (Y, Z, Q) e, per ogni terna (Y, Z, Q) fissata, quasi-continue rispetto a x in $(0, a_0)$. Inoltre, tenuto conto delle (12) e (11), in virtù delle (1) e (2) valgono, per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$, le disuguaglianze

$$
(13) \qquad \begin{cases} |\overline{F}_1(x, Y, Z, Q)| \leq M_3(x) \\ |\overline{F}_2(x, Y, Z, Q)| \leq M_0(x) + K M_3(x) \\ |\overline{F}_3(x, Y, Z, Q)| \leq M_1(x) + K M_2(x) \end{cases}
$$

per ogni terna Y, Z, Q, e le

$$
(14) \begin{cases} |\overline{F}_1(x, Y_1, Z_1, Q_1) - \overline{F}_1(x, Y_2, Z_2, Q_2)| \leq L_3(x) \{|Y_1 - Y_2| + |Z_1 - Z_2| + |Q_1 - Q_2|\} \\ |\overline{F}_2(x, Y_1, Z_1, Q_1) - \overline{F}_2(x, Y_2, Z_2, Q_2)| \leq [L_0(x) + M_3(x) + K L_3(x)] \{\ldots\ldots\ldots\ldots\} \\ |\overline{F}_3(x, Y_1, Z_1, Q_1) - \overline{F}_3(x, Y_2, Z_2, Q_2)| \leq [L_1(x) + M_2(x) + K L_2(x)] \{\ldots\ldots\ldots\ldots\} \end{cases}
$$

per ogni coppia (Y_1, Z_1, Q_1), (Y_2, Z_2, Q_2).

Completiamo la definizione della funzione $\varphi(y)$ in tutto $(-\infty, +\infty)$ ponendo

$$\varphi(y) = \varphi(h_0) + \varphi'(h_0)(y - h_0), \qquad \text{per} \quad y > h_0,$$

$$\varphi(y) = \varphi(g_0) + \varphi'(g_0)(y - g_0), \qquad \text{per} \quad y < g_0;$$

pertanto in tutto $(-\infty, +\infty)$ risultano verificate la seconda delle (3) e la (4).

Allora al sistema di equazioni differenziali (ordinarie)

$$\text{(15)} \qquad \begin{cases} Y(x, \eta) = \eta + \displaystyle\int_0^x \overline{F}_1(t, Y(t, \eta), Z(t, \eta), Q(t, \eta))\, dt \\ Z(x, \eta) = \varphi(\eta) + \displaystyle\int_0^x \overline{F}_2(\ldots)\, dt \\ Q(x, \eta) = \varphi'(\eta) + \displaystyle\int_0^x \overline{F}_3(\ldots)\, dt \end{cases}$$

possiamo applicare il teorema di esistenza di C. CARATHÉODORY (14) che assicura, per ogni η fissato, l'esistenza di almeno una terna di funzioni $Y(x, \eta)$, $Z(x, \eta)$, $Q(x, \eta)$ continue nel campo $0 \leq x \leq a_0$, $-\infty < \eta < +\infty$; tali funzioni, per ogni η fissato, sono in $(0, a_0)$ assolutamente continue rispetto a x, e inoltre in virtù di un nostro lemma (15), per ogni x fissato, risultano, come funzioni della sola η, a rapporto incrementale limitato con costante di LIPSCHITZ indipendente da x.

b) In virtù delle considerazioni del § 1, n. 2 *c*), *d*) della nostra Memoria A. M. si può determinare un numero a' (con $0 < a' \leq a_0$) in modo che, per ogni x fissato di $(0, a')$, la funzione

$$\text{(16)} \qquad y = Y(x, \eta)$$

sia funzione crescente di η in $(-\infty, +\infty)$. Allora, in corrispondenza a ogni x di $(0, a')$, esiste in $-\infty < y < +\infty$ la funzione inversa

$$\text{(17)} \qquad \eta = \eta(x, y),$$

---

(14) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen* (Teubner, Leipzig, 1918), Cap. XI, n. 582, pag. 672.

(15) Vedi Memoria A. M. § 1, n. 1, pp. 123-124.

la quale, come funzione della sola y, è in $(-\infty, +\infty)$ a rapporto incrementale limitato con costante di LIPSCHITZ indipendente da x, mentre, per ogni y fissato, risulta nell'intervallo $(0 \leq x \leq a')$ funzione assolutamente continua.

Per ogni x di $(0, a')$ e per ogni valore reale di y si definiscono (come nella nostra Memoria A. M. [16]) le funzioni

$$z(x, y) = Z(x, \eta(x, y)), \qquad q(x, y) = Q(x, \eta(x, y)), \tag{18}$$

e si prova che esse, per ogni x fissato di $(0, a')$, risultano in $(-\infty, +\infty)$ funzioni di y a rapporto incrementale limitato con costante di LIPSCHITZ indipendente da x, mentre, per ogni y fissato, sono funzioni di x assolutamente continue in $(0, a')$ [17].

c) Indicata con σ_1 la più piccola delle differenze $\beta_0 - \beta$, $\alpha - \alpha_0$, e con σ_2 la più piccola delle differenze $\delta_0 - \delta$, $\gamma - \gamma_0$, sia a'' il massimo valore positivo con $a'' \leq a'$, per il quale risulta

$$\int_0^{a''} [M_0(x) + K M_3(x)]\, d\,x \leq \sigma_1, \qquad \int_0^{a''} [M_1(x) + K M_2(x)]\, d\,x \leq \sigma_2. \tag{19}$$

Allora in virtù delle ultime due delle (13), dalle ultime due delle (15) segue che, per ogni x di $(0, a'')$ e per ogni η di (g_0, h_0), le funzioni $Z(x, \eta)$, $Q(x, \eta)$ soddisfano alle disuguaglianze

$$\alpha_0 \leq Z(x, \eta) \leq \beta_0, \qquad \gamma_0 \leq Q(x, \eta) \leq \delta_0. \tag{20}$$

Ciò premesso, per ogni η di (g_0, h_0), consideriamo di ogni curva $y = Y(x, \eta)$ quei punti (x_η, y_η) con $0 < x_\eta \leq a''$ tali che sia

$$g(x) < Y(x, \eta) < h(x), \qquad \text{per} \quad 0 < x \leq x_\eta,$$

e chiamiamo Ω l'insieme chiuso costituito dai punti (x_η, y_η) e dai loro punti di accumulazione [18]. Sia a''' la massima ascissa dei punti di Ω e in corri-

---

[16] Vedi Memoria A. M. § 1, n. 2 e), pag. 130.

[17] Vedi Memoria A. M. § 1, n. 2 f), pag. 131.

[18] In altri termini possiamo dire che il campo Ω è costituito dai punti $(\bar{x}_\eta, \bar{y}_\eta)$ appartenenti alle curve

$$y = Y(x, \eta), \qquad (0 \leq x \leq a''),$$

con $g_0 \leq \eta \leq h_0$, tali che sia

$$g(x) \leq Y(x, \eta) \leq h(x), \qquad \text{per} \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_\eta,$$

spondenza a ogni x di $(0, a''')$ siano $u_g(x)$ e $u_h(x)$ la minima e la massima ascissa dei punti di Ω; il campo Ω è dunque costituito dai punti (x, y) soddisfacenti alle disuguaglianze

$$\Omega: \qquad 0 \leq x \leq a''', \qquad u_g(x) \leq y \leq u_h(x),$$

ove la curva $y = u_g(x)$ è composta di archi, ognuno dei quali, se non appartiene alla curva $y = g(x)$, appartiene a una delle curve caratteristiche $y = Y(x, \eta)$, (ove $g_0 \leq \eta \leq h_0$), e analogamente per la curva $y = u_h(x)$. Si ha inoltre

$$u_g(x) < u_h(x), \qquad (0 \leq x < a''')$$

con

$$u_g(a''') \leq u_h(a'''), \tag{20'}$$

intendendosi che, se è $a''' < a''$, nella (20') deve valere l'uguaglianza.

Per ogni η di (g_0, h_0) chiamiamo $x(\eta)$ la massima ascissa dei punti della curva $y = Y(x, \eta)$ che appartengono al campo Ω. A questo campo la (17) fa corrispondere, biunivocamente, nel piano (x, η) il campo

$$\Delta: \qquad 0 \leq x \leq x(\eta), \qquad g_0 \leq \eta \leq h_0;$$

facciamo presente che in Δ è verificata la doppia disugualianza

$$u_g(x) \leq Y(x, \eta) \leq u_h(x),$$

e quindi, a maggior ragione, la

$$g(x) \leq Y(x, \eta) \leq h(x). \tag{21}$$

Siccome nel campo Δ valgono le (20) e (21) è

$$\overline{F}_i(x, Y, Z, Q) = F_i(x, Y, Z, Q), \qquad (i = 1, 2, 3);$$

e pertanto le funzioni $Y(x,\eta)$, $Z(x,\eta)$, $Q(x,\eta)$ soddisfano anche al sistema (10).

---

con le seguenti eccezioni: se, per fissare le idee, è

$$g(x) \leq Y(x, \eta) < h(x), \qquad \text{per} \quad 0 \leq x < x';$$
$$g(x') = Y(x, \eta');$$
$$g(x) < Y(x, \eta) < h(x), \qquad \text{per} \quad x' < x < x'';$$
$$Y(x'', \eta) = h(x'');$$
$$g(x) \leq Y(x, \eta) \leq h(x), \qquad \text{per} \quad x'' < x \leq a'',$$

i punti della curva $y = Y(x, \eta)$ con $x > x''$ non appartengono a Ω.

Vale la stessa eccezione scambiando tra loro le funzioni $g(x)$ e $h(x)$.

d) Nel campo Δ si possono rifare i calcoli sviluppati nella nostra Memoria *A. M.* [§ 1, n. 2 *g*), *h*)], dai qnali segue che, per le funzioni $z(x, y)$, $q(x, y)$ definite dalle (18), risulta

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = q(x, y), \tag{22}$$

e che inoltre in quasi tutti i punti del campo Ω è

$$p(x, y) = f(x, y, z(x, y), q(x, y)) \qquad \left(\text{con } p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right). \tag{23}$$

Sia

$$x' \leq x \leq x'', \qquad y = \bar{y}$$

un segmento tutto costituito di punti di Ω; allora esiste un intervallo (y_0, y_1) di ampiezza positiva, con $y_0 \leq \bar{y} \leq y_1$ [19], in modo che tutto il rettangolo $x' \leq x \leq x''$, $y_0 \leq y \leq y_1$ appartenga al campo Ω. Dalle (23) in virtù della prima delle (1) segue per quasi tutti gli y di (y_0, y_1) e per ogni x di (x', x'')

$$z(x, y) = z(x', y) + \int_{x'}^{x} f(t, y, z(t, y), q(t, y))\, dt, \tag{24}$$

e siccome entrambi i membri della (24) sono funzioni continue di y in (y_0, y_1); la (24) stessa risulta verificata per ogni y di (y_0, y_1) e per ogni x di (x', x''). Di conseguenza la (23) è soddisfatta in quasi tutti i punti di ogni segmento appartenente al campo Ω e parallelo all'asse x.

Inoltre, in virtù della seconda delle (10), la funzione $z(x, y)$ definita dalla prima delle (18) soddisfa alla (8), e quindi il teorema enunciato è completamente dimostrato.

2. Un complemento al teorema del n. 1. Esempio. — *a*) *Supponiamo che per ciascun valore* η *dell'intervallo* $g_0 \leq \eta \leq h_0$, *la funzione* $Y(x, \eta)$, $(0 \leq x \leq a'')$ *definita dalla* (16) *presenti uno dei seguenti casi* [20]:

---

(19) Pertanto non si esclude che possa essere $\bar{y} = y_0$, oppure $\bar{y} = y_1$. Fa eccezione il caso in cui è $u_g(a''') = u_h(a''')$ e inoltre $x'' = a'''$, $\bar{y} = u_g(a''') = u_h(a''')$. In questo caso, considerata una successione di numeri x''_j, $(j = 1, 2, \ldots)$ interni a (x', x''), crescenti e tali che sia $\lim_{j \to +\infty} x''_j = x''$, in base al ragionamento che facciamo nel testo si prova che, per $y = \bar{y}$, la (24) è verificata per ogni x di (x', x''_j), e quindi essa risulta verificata anche per ogni x di (x', x''), perchè entrambi i membri della (24) sono funzioni continue di x.

(20) È evidente che i casi (*ii*) e (*iii*) si escludono a vicenda; infatti se è verificata la (27), la (28) potrebbe aver luogo soltanto per $x = a''$.

(*i*) *per* $0 \leq x < a''$ *è*

$$g(x) < Y(x, \eta) < h(x); \tag{25}$$

(*ii*) *se* x_1, *con* $0 \leq x_1 < a''$, *è il minimo valore di* x, *per il quale è*

$$Y(x_1, \eta) = h(x_1) \tag{26}$$

risulta

$$Y(x, \eta) \geq h(x), \qquad per \quad x_1 \leq x \leq a''; \tag{27}$$

(*iii*) *se* x_2, *con* $0 \leq x_2 < a''$, *è il minimo valore di* x *per il quale è*

$$Y(x_2, \eta) = g(x_2) \tag{28}$$

risulta

$$Y(x, \eta) \leq g(x), \qquad \text{per} \quad x_2 \leq x \leq a''. \tag{29}$$

Allora il campo Ω, *in cui esiste almeno una soluzione dell'equazione* (7) *soddisfacente alla condizione* (8), *è costituito dai punti* (x, y), *per i quali è*

$$0 \leq x \leq a'', \qquad g(x) \leq y \leq h(x), \tag{30}$$

ove a'' *è il numero indicato all'inizio del n.* 1, *c*).

Infatti per $\eta = h_0$ e per $\eta = g_0$, in virtù delle (27) e (29), abbiamo rispettivamente

$$Y(x, h_0) \geq h(x), \qquad Y(x, g_0) \leq g(x), \qquad (0 \leq x \leq a'').$$

Pertanto, se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto qualunque interno al campo definito dalle (30), in virtù delle considerazioni fatte al n. 1, *b*), per il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ passa una e una sola curva

$$y = Y(x, \eta), \tag{31}$$

per la quale è necessariamente $g_0 < \eta < h_0$; e inoltre, sempre in virtù delle (27) e (29), tutti i punti della curva (31) con $0 < x < \bar{x}$ sono interni al campo (30): vale a dire tutti i punti soddisfacenti alle (30) appartengono al campo Ω, come volevamo dimostrare.

b) *Le ipotesi fatte all'inizio del capoverso a*) *sono sicuramente verificate, se esiste un numero* $\sigma > 0$ *in modo che, per ogni coppia* x', x'' *con* $0 \leq x' < x'' < a''$, *sono soddisfatte le seguenti disuguaglianze:*

$$h(x'') - h(x') + \int_{x'}^{x''} f_q(x, y, z, q)\, dx \leq 0, \tag{32}$$

per ogni terna (y, z, q) *del campo* A *con* $h(x) - \sigma < y \leq h(x)$;

$$g(x'') - g(x') + \int_{x'}^{x''} f_q(x, y, z, q)\, dx \geq 0, \tag{33}$$

per ogni terna (y, z, q) *del campo* A *con* $g(x) \leq y < g(x) + \sigma$.

Infatti, considerata la funzione $Y(x, \eta)$, ove $g_0 \leq \eta \leq h_0$, se non vale la (25), supponiamo che x_1 sia il minimo valore di x per il quale ha luogo la (26); allora chiamato x_1' (con $x_1 \leq x_1' \leq a''$) il massimo valore di x tale che la disuguaglianza (27) sia verificata in tutto (x_1, x_1'), se non è $x_1' = a''$ (nel qual caso il nostro asserto è già provato), si ha necessariamente

$$Y(x_1', \eta) = h(x_1'). \tag{34}$$

In tal caso per la continuità delle funzioni $h(x)$, $Y(x, \eta)$ possiamo trovare un valore x_1'' con $x_1' < x_1'' \leq a''$, in modo che sia

$$Y(x_1'', \eta) < h(x_1'') \tag{35}$$

e tale inoltre che in tutto (x_1', x_1'') sia verificata la disuguaglianza

$$h(x) - \sigma < Y(x, \eta). \tag{36}$$

Allora, siccome dalla prima delle (15) si trae

$$Y(x_1'', \eta) - Y(x_1', \eta) = \int_{x_1'}^{x_1''} \overline{F}_1(x, Y(x, \eta), Z(x, \eta), Q(x, \eta))\, dx,$$

per le (34) e (35) ne segue,

$$h(x_1'') - h(x_1') > \int_{x_1'}^{x_1''} \overline{F}_1(x, Y(x, \eta), Z(x, \eta), Q(x, \eta))\, dx;$$

ma questa disuguaglianza, in virtù della (36) e del modo in cui è stata definita $\overline{F}_1$, è in contrasto con la (32).

La (27) è così stabilita, e in modo analogo si prova che, se ha luogo la (28), dalla (33) segue la (29).

c) *Supponiamo,* nel presente capoverso, *che la derivata parziale* $f_q(x, y, z, q)$ *sia continua nel complesso delle variabili* (x, y, z, q), *quando* x *appartiene all'intervallo* $(0, a'')$ *e* (y, z, q) *al campo* A, *e che per ogni* x *di* $(0, a'')$ *esistano finite le derivate* $g'(x), h'(x)$. *Sotto queste condizioni, le ipotesi fatte all'inizio del capoverso* a) *sono sicuramente verificate, se, per tutti gli* x *di* $(0, a'')$ *e per ogni coppia* z, q *con* $\alpha_0 \leq z \leq \beta_0$, $\gamma_0 \leq q \leq \delta_0$, *sono verificate le disugualianze*

$$h'(x) + f_q(x, h(x), z, q) < 0, \tag{37}$$

$$g'(x) + f_q(x, g(x), z, q) > 0. \tag{38}$$

Infatti, se per la funzione $Y(x, \eta)$, (ove $g_0 \leq \eta \leq h_0$) non vale la (25), supponiamo che sia x_1 il minimo valore di x per il quale ha luogo la (26); allora, per il modo in cui è stata definita la funzione $\overline{F}_1$, dalla prima delle (15) in virtù della (37) segue $\left[\frac{\partial Y(x, \eta)}{\partial x}\right]_{x = x_1} > h'(x_1)$; pertanto, tenuto ancora presente che per $x = x_1$ vale la (26), per ogni $x > x_1$ e sufficientemente prossimo a x_1 è

$$Y(x, \eta) > h(x).$$

Affermiamo che questa ultima disuguaglianza è verificata in tutto l'intervallo $x_1 < x \leq a''$. Infatti, in caso contrario, sia $\overline{x}_1$ il minimo valore di x con $x_1 < \overline{x}_1$, per il quale è $Y(\overline{x}_1, \eta) = h(\overline{x}_1)$; allora dovrebbe essere $\left[\frac{\partial Y(x, \eta)}{\partial x}\right]_{x = \overline{x}_1} \leq h'(\overline{x}_1)$ e ciò, per il modo in cui è stata definita la funzione F_1, è in contrasto con la (37).

La (27) è così provata e in modo analogo si verifica che, se ha luogo la (28), dalla (38) segue la (29).

d) ESEMPIO. Sia

$$g(x) = -1 + \sqrt{x}, \qquad h(x) = 1 + \sqrt{x}, \qquad (0 \leq x \leq 1),$$

e nel campo

$$0 \leq x \leq 1, \qquad -1 + \sqrt{x} \leq y \leq 1 + \sqrt{x}, \qquad -\frac{5}{2} \leq q \leq \frac{5}{2} \tag{39}$$

si consideri la funzione

$$f(x, y, z, q) = -\frac{y}{4\sqrt{x}}(3q + \operatorname{sen} q \cos q),$$

intendendosi che sia

$$f(0, y, z, q) = 0.$$

Inoltre sia

$$\varphi(y) = y\,, \qquad (-1 \leq y \leq 1).$$

Tenuto conto che nel campo, in cui è definita la funzione f, è sempre $|\,y\,| \leq 2$, si verifica immediatamente che sono soddisfatte le (1) e (2) per

$$M_0(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}\,, \quad M_1(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}\,, \quad M_2(x) = 0\,, \quad M_3(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}\,;$$

$$L_0(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}\,, \quad L_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,, \quad L_2(x) = 0\,, \quad L_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Tenuto conto delle (14), la funzione $G(w)$, che figura all'inizio di pag. 129 della nostra Memoria A. M. è nel presente caso [21] $G(w) = \frac{17}{2}\frac{1}{\sqrt{w}}$, quindi

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\tau}}\, e^{\int_0^\tau \frac{17}{2\sqrt{w}} dw}\, d\tau = \frac{2}{17}\,[e^{17\sqrt{x}} - 1]\,.$$

Sempre procedendo come nella nostra Memoria A. M. [n. 2 c), pag. 129] tenuto presente che, essendo $\varphi'(y) = 1$, è $k_1 = 1$, $k_2 = 0$), determiniamo a' con $0 < a' \leq 1$, in modo che sia

$$1 - 2\,\frac{2}{17}\,[e^{17\sqrt{a'}} - 1] > 0,$$

vale a dire

$$\sqrt{a'} < \frac{1}{17}\lg\frac{21}{4}\,.$$

Inoltre, siccome la prima delle (19) del n. 1 è automaticamente soddisfatta, dobbiamo determinare a'', con $0 < a'' \leq a'$, in modo che sia

$$\int_0^{a''} \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx \leq \frac{3}{2}\,,$$

cioè $\sqrt{a''} \leq \frac{3}{8}$.

---

(21) Si tenga presente che in virtù della terza delle (39), basta prendere per $\Omega(a_0)$ il numero $\frac{5}{2}$.

Quindi, essendo evidentemente $\frac{1}{17} \lg \frac{21}{4} < \frac{3}{8}$, fissiamo per a'' un numero positivo tale che

$$\sqrt{a''} < \frac{1}{17} \lg \frac{21}{4},$$

ed affermiamo che nel campo

$$(40) \qquad 0 \leq x \leq a'', \qquad -1 + \sqrt{x} \leq y \leq 1 + \sqrt{x}$$

esiste almeno un integrale dell'equazione

$$(41) \qquad p = -\frac{y}{4\sqrt{x}} (3\,q + \operatorname{sen} q \cos q),$$

soddisfacente alla condizione

$$(42) \qquad z(0, y) = y, \qquad (-1 \leq y \leq 1).$$

Infatti, essendo

$$f_q(x, y, z, q) = -\frac{y}{2\sqrt{x}} (\cos^2 q + 1),$$

risulta $f_q > 0$ per $y < 0$, e quindi preso $\sigma = 1 - \sqrt{a''}$ è evidentemente soddisfatta la (33).

D'altra parte essendo $h(x) > 1$, per ogni $0 < x \leq a''$ è verificata la (37). Inoltre, siccome dalla (10) si trae

$$Y(0, 1) = 1, \qquad Q(0, 1) = 1,$$

il prodotto

$$(43) \qquad Y(x, 1)\,[\cos^2 Q(x, 1) + 1]$$

è maggiore di 1 per $x = 0$, e quindi per la continuità delle funzioni $Y(x, 1)$, $Q(x, 1)$ esiste un intervallo $(0, x_0)$ in cui il prodotto (43) è sempre maggiore di 1; onde dalla prima delle (10) segue per $0 < x \leq x_0$

$$Y(x, 1) = 1 + \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}} Y(t, 1)\,[\cos^2 Q(t, 1) + 1]\, dt > 1 + \sqrt{x} = h(x).$$

Affermiamo che la disuguaglianza $Y(x, 1) > h(x)$ è soddisfatta in tutto l'intervallo $0 < x \leq a''$; infatti, in caso contrario, ragionando come alla fine del capoverso *c*) si arriverebbe a un assurdo.

Pertanto, in base a quanto abbiamo visto nei precedenti capoversi del presente n.°, è così provato che in tutto il campo (40) esiste almeno un integrale della (41) soddisfacente alla condizione (42).

3. Osservazioni. *a*) Se è $u_g(a''') = u_h(a''')$ non è possibile prolungare per $x > a'''$ l'integrale $z = z(x, y)$ dell'equazione (7) [soddisfacente alla condizione (8)] che abbiamo costruito nel n. 1. Invece se è

$$u_g(a''') < u_h(a'''),$$

e inoltre

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0 < z(a''', y) < \beta_0 \\ \gamma_0 < q(a''', y) < \delta_0 \end{array}\right\} \quad \text{per } u_g(a''') \leq y \leq u_h(a'''),$$

ripetendo le considerazioni del n. 1 a partire dal segmento

$$x = a''', \qquad u_g(a''') \leq y \leq u_h(a'''),$$

possiamo prolungare, per $x > a'''$, l'integrale delle (7) costruito al n. 1.

Si può presentare il caso che tale procedimento si possa ripetere più volte. In tal modo si può giungere, al massimo, a definire una soluzione della (7), che soddisfa alla condizione iniziale (8), in tutti quei punti del campo

$$0 \leq x \leq a_0, \qquad g(x) \leq y \leq h(x),$$

che appartengono a una qualunque delle curve

$$y = Y(x, \eta), \qquad (0 \leq x \leq a_0)$$

con $g_0 \leq \eta \leq h_0$, ove $Y(x, \eta)$ soddisfa alla prima delle (15); però non è detto che tutti questi punti appartengano effettivamente al campo in cui è possibile costruire tale soluzione.

b) Supponiamo, nel presente capoverso, che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza del § 1, n. 2 della nostra Memoria A. M. e siano date nell' intervallo $-\infty < y < +\infty$ due funzioni $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ soddisfacenti alle stesse ipotesi fatte, nel luogo citato, per la funzione $\varphi(y)$. Inoltre siano g_0, h_0, con $g_0 < h_0$, due numeri reali tali che sia

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(y), \qquad \text{per } g_0 \leq y \leq h_0. \tag{44}$$

In virtù del teorema citato esistono nel campo

$$D_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad -\infty < y < +\infty$$

due integrali $z_i(x, y)$, $(i = 1, 2)$ dell'equazione [13] ([22]) soddisfacenti rispettivamente alla condizione iniziale

$$z_i(0, y) = \varphi_i(y), \qquad (-\infty < y < +\infty).$$

Siccome per il teorema di unicità di C. CARATHÉODORY ([23]), il sistema [14] ammette, in virtù della (44), per ogni η di (g_0, h_0) la stessa (unica) soluzione, possiamo affermare che è

$$z_1(x, y) = z_2(x, y)$$

in tutto il campo

$$(45) \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad Y(x, g_0) \leq y \leq Y(x, h_0),$$

costituito da quella parte di D_∞ che è ricoperta dalle proiezioni sul piano (x, y) delle curve caratteristiche uscenti ~~da~~ quell'arco

$$\{ x = 0, \qquad z = \varphi_i(x), \qquad (g_0 \leq y \leq h_0),$$

che, in virtù della (44), è comune alle due curve iniziali.

Mentre facciamo presente che questo risultato è indipendente dal teorema di unicità che forma oggetto del successivo § 2, soggiungiamo che esso si traduce nella seguente osservazione: sempre nella ipotesi che siano soddisfatte tutte le altre condizioni del teorema del § 1, n. 2 della nostra Memoria A. M., se la funzione $\varphi(y)$ è definita soltanto nell'intervallo (g_0, h_0), comunque essa venga definita per tutti gli altri valori reali di y (in modo che, bene inteso, siano soddisfatte le [11] e [12]) si perviene a una soluzione $z(x, y)$ della [13], la quale nel campo (45) risulta indipendente dal modo in cui $\varphi(y)$ è stata definita per gli y che non appartengono a (g_0, h_0).

c) Siano soddisfatte tutte le altre ipotesi del teorema del § 1, n. 2 della nostra Memoria A. M., ma supponiamo che le disuguaglianze [9] e [10] siano soddisfatte nella seguente forma: in corrispondenza a ogni sestupla di numeri reali τ_j', τ_j'', $(j = 1, 2, 3)$ con $\tau_j' < \tau_j''$ esistono otto funzioni $M_i(x)$, $L_i(x)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$ quasi continue, integrabili e non negative in $(0, a_0)$ in modo che le [9] e [10] abbiano luogo per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$ e, rispettivamente per tutte le terne (y, z, q); (y_1, z_1, q_1), (y_2, z_2, q_2) appartenenti al campo

$$\tau_1' \leq y \leq \tau_1'', \qquad \tau_2' \leq z \leq \tau_2'', \qquad \tau_3' \leq q \leq \tau_3''.$$

([22]) In tutto il presente n.^{0} i numeri delle formule relative alla Memoria A. M. vengono indicati con parentesi quadra.

([23]) Vedi C. CARATHÉODORY opera cit. in ([14]) n. 583, pag. 674.

Allora, fissato comunque un intervallo $g_0 \leq y \leq h_0$, in virtù del teorema del n. 1 della presente Memoria, esiste un integrale $z(x, y)$ della (7) soddisfacente alla (8) e definito nel campo

$$0 \leq x \leq a^{\mathrm{IV}}, \qquad Y(x, g_0) \leq y \leq Y(x, h_0),$$

ove naturalmente il numero a^{IV} dipende dall'intervallo (g_0, h_0) che è stato scelto.

Inoltre, per quanto abbiamo rilevato in b), è evidente che, se si prendono due intervalli (g_0, h_0), (g_0^*, h_0^*) aventi una parte in comune, gli integrali della (7) $z(x, y)$, $z^*(x, y)$, che soddisfano alla (8) nei rispettivi intervalli, coincidono nella parte comune dei loro campi di esistenza.

§ 2.

4. Teorema di unicità. *Supponiamo che siano verificate tutte le ipotesi del teorema di esistenza del § 1, n. 1, e consideriamo la classe C delle funzioni $\zeta(x, y)$ definite nel campo*

$$D: \qquad 0 \leq x \leq a_0, \qquad g(x) \leq y \leq h(x),$$

e soddisfacenti alle seguenti condizioni:

1⁰) *$\zeta(x, y)$ è continua in D assieme alla propria derivata parziale rispetto a y, e per ogni (x, y) di D è*

$$\alpha_0 \leq \zeta(x, y) \leq \beta_0, \qquad \gamma_0 \leq \frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial y} \leq \delta_0;$$

2⁰) *su ogni segmento di D parallelo all'asse x $\zeta(x, y)$ e $\dfrac{\partial \zeta(x, y)}{\partial y}$, considerate come funzioni della sola x, sono assolutamente continue, mentre su ogni segmento $g(x) \leq y \leq h(x)$ sono, rispetto a y, a rapporto incrementale limitato con costante di Lipschitz indipendente da x.*

Allora se $z(x, y)$ è una funzione della classe C, che, in quasi tutti i punti di ogni segmento di D parallelo all'asse x, soddisfa all'equazione (7) *e che inoltre verifica la condizione iniziale* (8), *esiste un campo Ω_0* [24] *che è*

---

[24] Il campo Ω_0 verrà definito durante la dimostrazione; vedi capoverso c).

costituito di punti di D, appartenenti alle curve $u = u(x, \eta)$ *soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria*

$$(46) \qquad u(x, \eta) = \eta - \int_0^x f_q\,[t\,; u(t, \eta)\,,\ z(t, u(t, \eta))\,,\ q(t, u(t, \eta))]\,d\,t\,,$$

ove η *varia nell'intervallo* $(g_0\,, h_0)$*, in modo che per ogni funzione* $z^*(x, y)$ *della classe C, che in quasi tutti i punti di ogni segmento di D parallelo all'asse x, soddisfa alla* (7) *e che verifica la condizione iniziale* (8)*, risulta in tutto* Ω_0

$$(47) \qquad z(x, y) = z^*(x, y)\,.$$

a) Infatti tenuto presente che [n. 1 *a*)] è stato indicato con K il maggiore dei numeri $|\gamma_0|$, $|\delta_0|$ e chiamata T la costante di LIPSCHITZ relativa alla derivata parziale (rispetto a y) $q(x, y)$ della soluzione $z(x, y)$, per ogni coppia di punti (x, y'), (x, y'') appartenenti a D sono verificate le disuguaglianze

$$(48) \qquad \left|\frac{z(x, y'') - z(x, y')}{y'' - y'}\right| \leq K\,, \qquad \left|\frac{q(x, y'') - q(x, y')}{y'' - y'}\right| \leq T.$$

Sia $m \leq x \leq n$ un segmento della retta $y = \bar{y}$ tutto costituito di punti di D [25]; come nel § 1, n. 1 *d*) possiamo determinare un intervallo $(y_1\,, y_2)$ in modo che tutto il rettangolo

$$\varrho: \qquad m \leq x \leq n\,, \qquad y_1 \leq y \leq y_2$$

appartenga a *D*. Allora in ogni punto di ϱ è

$$(49) \qquad z(x, y) = z(m, y) + \int_m^x f(t, y, z(t, y), q(t, y))\,d\,t\,,$$

---

[25] Se è $g(a_0) = h(a_0)$, per il momento si esclude che possa essere

$$n = a_0\,, \qquad \bar{y} = g(a_0) = h(a_0).$$

e quindi, ragionando come nella nostra Memoria A. M. [§ 2, n⁰. 5 *b*)], si ottiene per quasi tutti gli y di (y_1, y_2)

$$(50) \qquad q(x, y) = q(m, y) + \int_m^x \{ f_y(\ldots) + f_z(\ldots)\, q(t, y) + f_q(\ldots)\, q_y(t, y) \}\, dt;$$

pertanto, se x', x'' sono due valori qualunque di (m, n), in virtù delle (1) e (48) ne segue per quasi tutti gli y di (y_1, y_2)

$$(51) \qquad | q(x'', y) - q(x', y) | \leq \int_{x'}^{x''} \{ M_1(t) + K M_2(t) + T M_3(t) \}\, dt.$$

Ma, siccome $q(x, y)$ è funzione continua di y e il secondo membro non dipende da y, questa ultima disuguaglianza è valida per ogni coppia (x', y), (x'', y), purchè il segmento avente questi punti come estremi sia tutto costituito di punti di D (26).

b) Definiamo le funzioni $z(x, y)$, $q(x, y)$ in tutto il campo

$$D_\infty: \qquad 0 \leq x \leq a_0, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

ponendo per $y < g(x)$

$$(52) \qquad \begin{cases} z(x, y) = z(x, g(x)) + [y - g(x)]\, q(x, g(x)) \\ q(x, y) = q(x, g(x)) \end{cases}$$

e per $y > h(x)$

$$(53) \qquad \begin{cases} z(x, y) = z(x, h(x)) + [y - h(x)]\, q(x, h(x)) \\ q(x, y) = q(x, h(x)). \end{cases}$$

Posto

$$F_1(x, y, z, q) = -f_q(x, y, z, q),$$

---

(26) Anche qui si tenga presente l'eccezione fatta in (25).

definiamo, come nel § 1, n. 1 *a*), la funzione $\overline{F}_1(x, y, z, q)$ per $0 \leq x \leq a_0$ e per ogni terna di numeri reali (y, z, q) e consideriamo l'equazione differenziale ordinaria

$$(54) \qquad u(x, \eta) = \eta + \int_0^x \overline{F}_1[t, u(t, \eta), z(t, u(t, \eta)), q(t, u(t, \eta))]\, dt,$$

ove $u(x, \eta)$ è la funzione incognita e η è un qualunque numero reale.

Tenuto conto della prima delle (13), della prima delle (14) e delle (48) (le quali risultano verificate in tutto il campo D_∞) in virtù di noti teoremi di CARATHÉODORY(27) la (54) ammette [per ogni η fissato, con $-\infty < \eta < +\infty$] una e una sola soluzione

$$(55) \qquad y = u(x, \eta), \qquad (0 \leq x \leq a_0),$$

la quale è assolutamente continua rispetto a x in $(0, a_0)$. Inoltre, siccome, in virtù del teorema di unicità ora citato, $u(x, \eta)$ risulta funzione crescente di η, l'equazione (55), per ogni x fissato di $(0, a_0)$, definisce η come funzione inversa di y

$$(56) \qquad \eta = U(x, y), \qquad (-\infty < y < +\infty).$$

Infine, tenuto presente che, in virtù della prima delle (14) e delle (48), per ogni x di $(0, a_0)$ e per ogni coppia di numeri reali u_1, u_2, è

$$(57) \qquad |\overline{F}_1(x, u_1, z(x, u_1), q(x, u_1)) - \overline{F}_1(x, u_2, z(x, u_2), q(x, u_2))| \leq$$
$$\leq (1 + K + T)\, L_3(x)\, |u_1 - u_2|,$$

si prova facilmente che, per ogni x di $(0, a_0)$ e per ogni coppia di numeri reali η_1, η_2, valgono le disuguaglianze (28)

$$(58) \qquad e^{-I} \leq \frac{u(x, \eta_1) - u(x, \eta_2)}{\eta_1 - \eta_2} \leq e^{I},$$

(27) Vedi C. CARATHÉODORY, opera cit. in (14) n. 582 pag. 672 e n. 583 pag. 675.

(28) Infatti dalla (54) abbiamo in modo evidente

$$u(x, \eta_1) - u(x, \eta_2) = \eta_1 - \eta_2 + \int_0^x \{\overline{F}_1[t, u(t, \eta_1), \ldots] - \overline{F}_1[t, u(t, \eta_2), \ldots]\}\, dt,$$

ove si è posto

$$I = (1 + K + T) \int_0^{a_0} L_3(x)\, d\, x .$$

Vale a dire la funzione $u(x, \eta)$ è, rispetto a η, a rapporto incrementale limitato con costante di LIPSCHITZ indipendente da x, e inoltre della stessa proprietà gode, rispetto a y, la funzione $U(x, y)$.

Facciamo ancora presente [cfr. Memoria A. M. n. 2, *d*)] che, per ogni y fissato, $U(x, y)$ risulta assolutamente continua rispetto a x in $(0, a_0)$.

c) In corrispondenza a ciascun η di (g_0, h_0) consideriamo della curva (55) quei punti (x_η, y_η) tali che, per $0 < x \leq x_\eta$, sia

$$g(x) < u(x, \eta) < h(x),$$

e chiamiamo Ω_0 l'insieme chiuso costituito da tutti i punti (x_η, y_η) e dai loro punti di accumulazione: è questo il campo di cui si parla nell'enunciato e nel quale dimostriamo l'unicità della soluzione (29).

Se a'_0, (con $a'_0 \leq a_0$) è la massima ascissa dei punti di Ω_0, questo campo è costituito dai punti (x, y) soddisfacenti alle disuguaglianze

$$\Omega_0: \qquad 0 \leq x \leq a'_0, \qquad u_g^{[0]}(x) \leq y \leq u_h^{[0]}(x),$$

---

e quindi, posto $v(x) = \dfrac{u(x, \eta_1) - u(x, \eta_2)}{\eta_1 - \eta_2}$, segue per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$

$$v'(x) = \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \{ \overline{F}_1[x, u(x, \eta_1), \ldots] - \overline{F}_1[x, u(x, \eta_2), \ldots] \},$$

ed anche usufruendo della (57) e tenendo presente che è $v(x) > 0$

$$| v'(x) | \leq (1 + K + T)\, L_3(x)\, v(x).$$

Pertanto in modo ovvio si ottiene, sempre per quasi tutti gli x di $(0, a_0)$,

$$-(1 + K + T)\, L_3(x) \leq \frac{v'(x)}{v(x)} \leq (1 + K + T)\, L_3(x),$$

e quindi, siccome $v(0) = 1$, integrando e passando dai logaritmi ai numeri, la (58) risulta provata per tutti gli x di $(0, a_0)$.

(29) La definizione di Ω_0 è analoga a quella dell'insieme Ω del n. 1 *c*); vedi anche nota (18).

ove la curva $y = u_g^{[0]}(x)$ è costituita di archi ognuno dei quali, se non appartiene alla curva $y = g(x)$, appartiene a una delle curve caratteristiche $y = u(x, \eta)$, (ove $g_0 \leq \eta \leq h_0$), e la curva $y = u_h^{[0]}(x)$ gode di un'analoga proprietà. Si ha inoltre

$$u_g^{[0]}(x) < u_h^{[0]}(x), \qquad (0 \leq x < a_0')$$

e anche

$$u_g^{[0]}(a_0') \leq u_h^{[0]}(a_0'), \tag{59}$$

intendendo che, se è $a_0' < a_0$, nella (59) deve valere l'uguaglianza.

d) Per ogni η di (g_0, h_0) indichiamo con $x(\eta)$ la massima ascissa dei punti della curva $y = u(x, \eta)$ che appartengono a Ω_0 [30], e osserviamo che nell'intervallo $0 \leq x \leq x(\eta)$ la funzione $u(x, \eta)$ è soluzione anche dell'equazione (46).

Al campo Ω_0 la (56) fa corrispondere nel piano (x, η) il campo

$$\Delta_0: \qquad 0 \leq x \leq x(\eta) \qquad g_0 \leq \eta \leq h_0,$$

nel quale consideriamo le funzioni

$$z(x, u(x, \eta)), \qquad q(x, u(x, \eta)). \tag{60}$$

Vogliamo dimostrare che, per ogni η fissato di (g_0, h_0), esse risultano assolutamente continue rispetto a x in tutto $(0, x(\eta))$.

A tal uopo per un qualunque η_0 con $g_0 < \eta_0 < h_0$ cominciamo a provare l'assoluta continuità, rispetto a x, di tali funzioni in ogni intervallo $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ nel quale sia

$$g(x) < u(x, \eta_0) < h(x). \tag{61}$$

Infatti se $\bar{x}$ è un valore qualsiasi di (ξ_1, ξ_2) possiamo determinare un rettangolo tutto costituito di punti di D

$$x' \leq x \leq x'', \qquad y' \leq y \leq y''$$

con $x' \leq \bar{x} \leq x''$, $y' \leq u(\bar{x}, \eta_0) \leq y''$, in modo che l'arco di curva $y = u(x, \eta)$,

---

[30] Può essere $x(\eta) = 0$, soltanto per $\eta = g_0$ o per $\eta = h_0$.

($x' \leq x \leq x''$) sia tutto contenuto in tale rettangolo; allora essendo

$$z(x, y) = z(x', y) + \int_{x'}^{x} f(t, y, z(t, y), q(t, y))\, dt,$$

ne segue per $y = u(x, \eta_0)$, ($x' \leq x \leq x''$)

$$z(x, u(x, \eta_0)) = z(x', u(x, \eta_0)) + \int_{x'}^{x} f[t, u(x, \eta_0), z(t, u(x, \eta_0)), q(t, u(x, \eta_0))]\, dt.$$

Pertanto, ragionando come nella nostra Memoria A. M. n. 5 *d*) per quanto riguarda la funzione $z(x, u(x, \eta_0))$ e come nel n. 5 *e*) per quanto riguarda $q(x, u(x, \eta_0))$ [ove si tenga presente la (51)], si prova che esse sono funzioni di x assolutamente continue in (x', x''), e quindi, in virtù del lemma di PINCHERLE-BOREL, anche in tutto (ξ_1, ξ_2).

Supponiamo ora che ξ sia un numero positivo tale che la (61) abbia luogo per $0 \leq x \leq \xi$; allora si può determinare un intervallo (η_1, η_2) con $\eta_1 \leq \eta_0 \leq \eta_2$ in modo che per tutti gli η di (η_1, η_2) sia

$$g(x) < u(x, \eta) < h(x) \tag{62}$$

per $0 \leq x \leq \xi$. Siccome nel campo

$$0 \leq x \leq \xi, \qquad \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$$

si possono ripetere le considerazioni fatte nella nostra Memoria A. M. n. 5 *d*), *e*), *f*), possiamo senz'altro affermare che per ogni η di (η_1, η_2) le funzioni $u(x, \eta)$, $z(x, u(x, \eta))$, $q(x, u(x, \eta))$ soddisfano in tutto l'intervallo $(0, \xi)$ al sistema

$$\begin{cases} u(x, \eta) = \eta - \displaystyle\int_0^x f_q[t, u(t, \eta), z(t, u(t, \eta)), q(t, u(t, \eta))]\, dt \\[2ex] z(x, u(x, \eta)) = \varphi(\eta) + \displaystyle\int_0^x \{ f[\ldots] - q(t, u(t, \eta)) f_q[\ldots] \}\, dt \\[2ex] q(x, u(x, \eta)) = \varphi'(\eta) + \displaystyle\int_0^x \{ f_y[\ldots] + q(t, u(t, \eta)) f_z[\ldots] \}\, dt \end{cases} \tag{63}$$

Sia η_0' un valore di η con $g_0 \leq \eta_0' \leq h_0$ tale che la curva

$$(64) \qquad y = u(x, \eta_0'), \qquad (0 \leq x \leq x(\eta_0'))$$

abbia punti a comune o con una o con entrambe le curve

$$(65) \qquad y = g(x), \quad y = h(x), \qquad (0 \leq x \leq a_0).$$

Dapprima supponiamo che la curva (64) abbia punti a comune con una sola delle curve (65); per esempio, per fissare le idee, con la $y = h(x)$. In tal caso si può determinare un $\delta > 0$ in modo che per ogni η con $\eta_0' - \delta \leq \eta < \eta_0'$ sia verificata la (62) per $0 \leq x \leq x(\eta_0')$; evidentemente per tali valori di η valgono le (63) nell'intervallo $(0, x(\eta_0'))$ e quindi facendo tendere η a η_0', in virtù delle (1), (2), (48), e (58) possiamo concludere che le (63) sono verificate anche per $\eta = \eta_0'$ in tutto $(0, x(\eta_0'))$.

Se poi la curva (64) ha punti a comune con entrambe le curve (65) (ove, bene inteso, con una di tali curve può averne a comune soltanto uno) si può ripetere il ragionamento ora sviluppato in ogni intervallo $(0, x_0')$ con $x_0' < x(\eta_0')$ e prossimo quanto si vuole a esso e con un immediato passaggio al limite si conclude che le (63) sono verificate in tutto $(0, x(\eta_0'))$.

Abbiamo così provato, per ogni η con $g_0 \leq \eta \leq h_0$, l'assoluta continuità rispetto a x delle funzioni (60) in tutto $(0, x(\eta))$ e al tempo stesso abbiamo stabilito che in questo intervallo sono soddisfatte le (63) [31].

e) Procedendo come nei precedenti capoversi anche per la soluzione $z^*(x, y)$ della (7) soddisfacente alla (8), si perviene ad analoghi risultati, determinando, assieme al campo Ω_0^* del piano (x, y), tre funzioni $u^*(x, \eta)$, $z^*(x, u^*(x, \eta))$, $q^*(x, u^*(x, \eta))$ che soddisfano alle (63) in un campo

$$\Delta_0^*: \qquad 0 \leq x \leq x^*(\eta), \qquad g_0 \leq \eta \leq h_0.$$

Tenuto presente quanto abbiamo rilevato in [30], per il teorema di CARATHÉODORY più volte citato, possiamo affermare che, per ogni η di (g_0, h_0) e per x variabile nel più piccolo dei due intervalli $(0, x(\eta))$, $(0, x^*(\eta))$ è

$$(66) \qquad \begin{cases} u(x, \eta) = u^*(x, \eta), \quad z(x, u(x, \eta)) = z^*(x, u^*(x, \eta)), \\ q(x, \eta) = q^*(x, u^*(x, \eta)). \end{cases}$$

---

[31] È evidente che, ponendo $z(x, u(x, \eta)) = z_0(x, \eta)$, $q(x, u(x, \eta)) = q_0(x, \eta)$, le (63) costituiscono un sistema di equazioni differenziali ordinarie (posto sotto forma integrale) nelle funzioni incognite $u(x, \eta)$, $z_0(x, \eta)$, $q_0(x, \eta)$.

Vogliamo provare che per ogni η di (g_0, h_0) è

(67) $$x(\eta) = x^*(\eta).$$

A tal uopo osserviamo che:

(I) per un dato η o è $x(\eta) = a_0$, oppure il punto $(x(\eta), u(x(\eta), \eta))$ appartiene a una delle due curve (65), e analogamente per $x^*(\eta)$ e per il punto $(x^*(\eta), u^*(x^*(\eta), \eta))$;

(II) sia $g_0 < \eta < h_0$, e sia $\bar{x}$ un valore con $0 < \bar{x} \leq x(\eta)$ tale che per $0 \leq x \leq \bar{x}$ abbia luogo la (62). Allora è necessariamente $\bar{x} \leq x^*(\eta)$, perchè se fosse $x^*(\eta) < \bar{x}$ per la prima delle (66) sarebbe $u(x, \eta) = u^*(x, \eta)$ per $0 \leq x \leq x^*(\eta)$, e quindi il punto $(x^*(\eta), u^*(x^*(\eta), \eta))$ apparterrebbe a una delle curve (65) contrariamente alla (62).

Ciò premesso, passiamo a stabilire la (67). Infatti se per un valore η_1 di (g_0, h_0) fosse, per fissare le idee,

(68) $$x^*(\eta_1) < x(\eta_1),$$

essendo $x(\eta_1) \leq a_0$, risulterebbe $x^*(\eta_1) < a_0$. Quindi per quanto abbiamo osservato in (I) il punto $(x^*(\eta_1), u^*(x^*(\eta_1), \eta_1))$ appartiene a una delle curve (65): supponiamo, per esempio, che si trovi sulla $y = g(x)$, e distinguiamo due casi:

(*i*) per tutti gli x con $0 \leq x < x^*(\eta_1)$ è
$$u^*(x, \eta_1) < h(x);$$

(*ii*) esiste almeno un x_0 con $0 < x_0 < x^*(\eta)$ tale che
$$u^*(x_0, \eta_1) = h(x_0).$$

Nel caso (*i*) si possono fissare un valore α con $x^*(\eta_1) < \alpha < x(\eta_1)$ e un numero positivo $\delta_1 < h_0 - \eta_1$ in modo che per ogni η con $\eta_1 < \eta \leq \eta_1 + \delta_1$ sia verificata la (62) per $0 \leq x \leq \alpha$; e quindi, in virtù di quanto abbiamo osservato in (II), per ogni η con $\eta_1 < \eta \leq \eta_1 + \delta_1$ è valida in tutto $(0, \alpha)$ la prima delle (66). Per la continuità rispetto a η delle funzioni $u(x, \eta)$, $u^*(x, \eta)$ ne segue
$$u(x, \eta_1) = u^*(x, \eta_1), \qquad \text{per} \quad 0 \leq x \leq \alpha,$$
e quindi i punti $(x, u^*(x, \eta_1))$ con $x^*(\eta_1) < x \leq \alpha$, quali punti di accumulazione di punti interni a Ω_0^*, appartengono a Ω_0^*, cioè a dire non può essere $x^*(\eta_1) < \alpha$.

Se poi ci troviamo nel caso (*ii*) in tutto $(0\,, x^*(\eta_1))$ è $u(x,\eta_1)=u^*(x,\eta_1)$, mentre per $x > x^*(\eta_1)$ i punti della curva $y=u(x\,,\eta_1)$ non possono appartenere al campo Ω_0 (32), e quindi non può essere verificata la (68).

La (67) è così provata; vale a dire i campi Δ_0 e Δ_0^* coincidono e in tutto Δ_0 valgono le (66). Quindi nel campo Ω_0, che nel piano $(x\,,y)$ corrisponde biunivocamente a Δ_0, è soddisfatta la (47), vale a dire è provata l'unicità.

5. OSSERVAZIONI. — *a*) Dalla (63) segue che per ogni punto della superficie integrale $z=z(x\,,y)$ della (7), il quale abbia come proiezione sul piano $(x\,,y)$ un punto di Ω_0, passa un'unica curva della superficie stessa, nei punti della quale valgono le (63) [curva caratteristica della superficie, uscente da uno dei punti della curva $x=0\,,\ z=\varphi(y)$ (33)].

b) Supponiamo che le ipotesi del n. 2 *a*) siano soddisfatte quando si sostituisca a'' con a_0 e $Y(x\,,\eta)$ con $u(x\,,\eta)$. In tal caso le considerazioni del n. 2 *a*) assicurano che il campo Ω_0 coincide con D; vale a dire si ha in tutto D l'unicità della soluzione.

In particolare ciò ha luogo se valgono le (32) e (33), oppure rispettivamente le (37) e (38) (ove si sostituisca a'' con a_0).

c) Assumiamo come campo D il campo Ω, definito nella dimostrazione del teorema di esistenza (n. 1 *c*)). Ad Ω si possono applicare le considerazioni sviluppate in *b*) e quindi in tutto Ω è assicurata l'unicità dell'integrale di cui abbiamo provato l'esistenza nel n. 1.

Così l'unicità è stabilita anche nei campi in cui, nel n. 3 *b*), *c*), abbiamo dimostrato l'esistenza.

d) Dati nel campo D due integrali della (7) $z(x\,,y)$ e $z^*(x\,,y)$, soddisfacenti entrambi alla (8), essi coincidono nella parte Ω_0 del campo D già definita, ma possono non coincidere in quella parte di D che non appartiene a Ω_0 (cfr. l'esempio del n. 6 *a*)): vale a dire, per l'equazione non lineare (7) il campo di unicità dipende, in generale, oltrechè dalla (7), anche dalla funzione $\varphi(y)$, cioè dal particolare integrale che si considera (34).

---

(32) Si tenga presente quanto abbiamo rilevato in (29).

(33) Come complemento al n. 6 della nostra Memoria A. M., si fa presente che il risultato raggiunto nel luogo citato vale non soltanto in $D_\infty^{[1]}$ ma in tutto D_∞.

(34) È ben noto che se l'equazione (7) è del tipo

$$p=a(x\,,y)\,q+b(x\,,y\,,z) \tag{7'}$$

il campo Ω_0 dipende soltanto dall'equazione e non dalla funzione $\varphi(y)$ (cioè dal particolare integrale considerato).

6. ESEMPIO. — *a*) Considerato il campo

$$D: \qquad 0 \leq x \leq 4, \qquad 0 \leq y \leq 1,$$

per ogni (x, y) di D con $x > 0$ e per $-\infty < z < +\infty$, $-5 \leq q \leq 5$ sia

$$f(x, y, z, q) = \frac{1}{4\sqrt{x}} q^2,$$

e per $x = 0$

$$f(0, y, z, q) = 0.$$

Consideriamo l'equazione

$$p = \frac{1}{4\sqrt{x}} q^2; \tag{69}$$

e, fino ad avviso contrario, i valori iniziali siano dati dalla funzione

$$\varphi_k(y) = k(y - 1)^2 + y,$$

ove k è un qualunque numero reale con

$$0 \leq k \leq \frac{1}{5}. \tag{70}$$

Il sistema (10) assume la forma

$$\begin{cases} Y = \eta - \displaystyle\int_0^x \frac{Q}{2\sqrt{t}}\, dt \\ Z = k(\eta - 1)^2 + \eta - \displaystyle\int_0^x \frac{Q^2}{4\sqrt{t}}\, dt \\ Q = 2k(\eta - 1) + 1; \end{cases}$$

Inoltre facciamo presente che le condizioni del § 1, n. 2, ove si ponga $f_q(x, y, z, q) = a(x, y)$ e ove $b(x, y, z)$ sia definita per ogni valore reale di z e soddisfi a condizioni che si deducono dal caso generale, assicurano l'esistenza e l'unicità in tutto il campo D dell'integrale della (7′), che assume valori assegnati per $x = 0$, $g_0 \leq y \leq h_0$ (si ha cioè per la (7′) un teorema di esistenza e di unicità in grande).

quindi dall'ultima e dalla prima si deduce

$$\eta = \frac{Y - (2k-1)\sqrt{x}}{1 - 2k\sqrt{x}},$$

e con calcoli elementari che tralasciamo si ricava che

$$z_k(x, y) = \frac{2ky^2 + 2(1-2k)y + (1-4k)\sqrt{x} + 2k}{2(1 - 2k\sqrt{x})}$$

è un integrale della (69) soddisfacente alla condizione

$$z_k(0, y) = \varphi_k(y), \qquad (0 \leq y \leq 1).$$

A questo punto fissiamo l'attenzione sulla condizione iniziale

$$\varphi_0(y) = y, \qquad (0 \leq y \leq 1), \tag{71}$$

e consideriamo nel campo D il corrispondente integrale della (69)

$$z_0(x, y) = y + \frac{1}{2}\sqrt{x}, \tag{72}$$

rilevando che la soluzione individuata dalla condizione iniziale (71) è unica soltanto nel campo (35)

$$\Omega_0: \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1 - \sqrt{x}.$$

Infatti, rileviamo che per $y = 1 - \sqrt{x}$ risulta, per qualunque valore reale di k soddisfacente alla (70), in tutto $0 \leq x \leq 1$

$$z_k(x, 1-\sqrt{x}) = 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}, \quad p_k(x, 1-\sqrt{x}) = \frac{1}{4\sqrt{x}}, \quad q_k(x, 1-\sqrt{x}) = 1;$$

pertanto nel campo D l'equazione (69) ammette, oltre all'integrale (72), gli

(35) Nel presente esempio Ω_0 è proprio il campo definito nel teorema di unicità del n. 4; cfr. anche la nota (29).

infiniti integrali $z_{0,k}(x, y)$, $\left(\text{ove } 0 < k \leq \frac{1}{5}\right)$ [soddisfacenti alla condizione iniziale (71)], definiti nel seguente modo

$$z_{0,k}(x, y) = z_0(x, y), \qquad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - \sqrt{x},$$

$$z_{0,k}(x, y) = z_k(x, y), \qquad \text{per ogni altro } (x, y) \text{ di } D.$$

Ciò è conforme alle proprietà di cui godono, anche nella teoria classica, le curve caratteristiche di una superficie integrale.

b) È superfluo osservare che se è $g(0) = h(0)$ il teorema di unicità del n. 4 non è più valido.

Infatti l'equazione (69) ammette gli infiniti integrali $z = z_k(x, y)$ ove $0 \leq k \leq \frac{1}{5}$, soddisfacenti alla condizione iniziale

$$z_k(0, 1) = 1.$$

Capitolo II

§ 3

7. Lemma. — *Siano $g^{[i]}(x)$, $(i = 1, 2)$ due funzioni continue in $(0, a)$, (ove $a > 0$) con $g^{[1]}(x) < g^{[2]}(x)$, e sia $z(x, y)$ una funzione continua, assieme alla propria derivata parziale $z'_y(x, y)$, nel campo*

$$D: \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x),$$

e tale che, per ogni y fissato, sia assolutamente continua rispetto a x; e si abbia

$$z(0, y) = 0, \qquad (g^{[1]}(0) \leq y \leq g^{[2]}(0)). \tag{1}$$

Si supponga che esistano un numero $\sigma > 0$ e due funzioni $H(x)$, $L(x)$ quasi continue, non negative e integrabili in $(0, a)$, in modo che, su ogni intersezione di D con una parallela all'asse x, sia verificata, per quasi tutti gli x nei quali è $z(x, y) \neq 0$, la disuguaglianza

$$\frac{\partial \mid z(x, y) \mid}{\partial x} \leq H(x) \mid z(x, y) \mid + L(x) \left| \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right|, \tag{2}$$

mentre si abbia

$$\frac{\partial \mid z(x, y) \mid}{\partial x} \leq H(x) \mid z(x, y) \mid + G^{[1]}(x) \frac{\partial \mid z(x, y) \mid}{\partial y} \tag{3}$$

per quelli tra gli (x, y) *sopra indicati per i quali è* $g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[1]}(x) + \sigma$; *e*

$$\frac{\partial \mid z(x, y) \mid}{\partial x} \leq H(x) \mid z(x, y) \mid + G^{[2]}(x) \frac{\partial \mid z(x, y) \mid}{\partial y} \tag{4}$$

per quelli tra gli (x, y) *sopra indicati per i quali è* $g^{[2]}(x) - \sigma \leq y \leq g^{[2]}(x)$; *ove* $G^{[i]}(x)$, $(i = 1, 2)$ *sono due funzioni quasi continue e integrabili in* $(0, a)$, *le quali, per ogni coppia di valori* x', x'' *con* $0 \leq x' < x'' \leq a$, *verificano, rispettivamente le disuguaglianze*

$$g^{[1]}(x') \leq g^{[1]}(x'') + \int_{x'}^{x''} G^{[1]}(x)\, dx, \tag{5}$$

$$g^{[2]}(x'') + \int_{x'}^{x''} G^{[2]}(x)\, dx \leq g^{[2]}(x'). \tag{6}$$

Sotto queste ipotesi risulta in tutto il campo D

$$z(x, y) = 0. \tag{7}$$

a) Infatti cominciamo a rilevare che, per semplicità, possiamo supporre che sia in quasi tutto $(0, a)$

$$\mid G^{[i]}(x) \mid \leq L(x), \qquad (i = 1, 2), \tag{8}$$

e che il numero 2σ sia minore del minimo della differenza $g^{[2]}(x) - g^{[1]}(x)$ - $(0 \leq x \leq a)$. Considerato un numero $\lambda > 0$ e indicato con D_λ il campo costituito da tutti i punti (x, y) di D e da quelli del rettangolo $-\lambda \leq x < 0$, $g^{[1]}(0) \leq y \leq g^{[2]}(0)$, definiamo

$$z(x, y) = 0 \tag{8'}$$

in tutto il rettangolo ora indicato, facendo presente che $z(x, y)$, $z'_y(x, y)$ risultano continue in tutto D_λ, e che per $x < 0$ è

$$z'_x(x, y) = z'_y(x, y) = 0.$$

Sia μ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ una successione di numeri reali positivi, decrescenti e tendenti a zero, con

$$\mu_1 < \frac{1}{3}\sigma, \tag{9}$$

e sia λ_n, $(n=1,2,\ldots)$, (con $2\lambda_1<\lambda$) un'altra successione di numeri reali positivi, decrescenti, tendenti a zero e tali che:

I) l'integrale definito di $L(x)$, esteso a un qualsiasi intervallo di $(0,a)$ avente ampiezza non superiore a λ_n, sia non superiore a μ_n;

II) su ogni intervallo parziale di $(0,a)$ avente ampiezza λ_n l'oscillazione di ciascuna delle funzioni $g^{[i]}(x)$, $(i=1,2)$ sia non superiore a $\mu_n:2$;

III) su ogni intervallo tutto costituito di punti di D, parallelo all'asse x e avente ampiezza λ_n, l'oscillazione di ciascuna delle funzioni $z(x,y)$, $z'_y(x,y)$ risulti non superiore a μ_n.

Posto per $i=1,2$

$$g^{[i]}(x)=g^{[i]}(0), \qquad (-\lambda\leq x<0),$$

definiamo in $(0,a)$ le successioni di funzioni continue

$$g_n^{[1]}(x)=\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0} g^{[1]}(x+t)\,dt+2\mu_n, \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{10}$$

$$g_n^{[2]}(x)=\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0} g^{[2]}(x+t)\,dt-2\mu_n, \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{11}$$

osservando che, per la condizione II), su ogni intervallo parziale di $(0,a)$ avente ampiezza λ_n, l'oscillazione di ciascuna delle funzioni $g_n^{[i]}(x)$, $(i=1,2)$ è non superiore a $\mu_n:2$. Facciamo presente che, per quanto abbiamo convenuto all'inizio della dimostrazione e per la (9), dalle (10) e (11) si trae in tutto $(0,a)$

$$g_n^{[2]}(x)-g_n^{[1]}(x)=\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0}[g^{[2]}(x+t)-g^{[1]}(x+t)]\,dt-4\mu_n> \tag{11'}$$

$$>2\sigma-4\mu_n>\frac{2}{3}\sigma,$$

e che dalle identità

$$g_n^{[1]}(x)-g^{[1]}(x)=\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0}[g^{[1]}(x+t)-g^{[1]}(x)]\,dt+2\mu_n, \tag{12}$$

$$g^{[2]}(x)-g_n^{[2]}(x)=\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0}[g^{[2]}(x)-g^{[2]}(x+t)]\,dt+2\mu_n, \tag{13}$$

in virtù della condizione II) si deduce per ogni x di $(0, a)$

$$g_n^{[1]}(x) - g^{[1]}(x) \geq \frac{3}{2}\mu_n, \tag{14}$$

$$g^{[2]}(x) - g_n^{[2]}(x) \geq \frac{3}{2}\mu_n; \tag{15}$$

pertanto il campo

$$D_n: \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad g_n^{[1]}(x) \leq y \leq g_n^{[2]}(x)$$

è tutto costituito di punti di D, e inoltre, siccome dalle (12) e (13) segue [sempre per la condizione II)] in tutto $(0, a)$

$$g_n^{[1]}(x) - g^{[1]}(x) \leq \frac{5}{2}\mu_n, \qquad g^{[2]}(x) - g_n^{[2]}(x) \leq \frac{5}{2}\mu_n, \tag{16}$$

tenendo presente che è $\lim_{n \to +\infty} \mu_n = 0$, si conclude che, per $n \to +\infty$, il campo D_n tende a D.

Inoltre, se (x, y) è un punto di D_n, tutto il segmento avente come estremi i punti $(x - 2\lambda_n, y)$, (x, y) è costituito di punti di D_λ. Infatti, usufruendo ancora della condizione II), dalle (14) e (15) si trae per ogni u di $(x - 2\lambda_n, x)$ rispettivamente

$$g^{[1]}(u) + \frac{1}{2}\mu_n \leq g_n^{[1]}(x), \qquad g_n^{[2]}(x) \leq g^{[2]}(u) - \frac{1}{2}\mu_n, \tag{17}$$

e quindi siccome, se (x, y) appartiene a D_n, è $g_n^{[1]}(x) \leq y \leq g_n^{[2]}(x)$, risulta

$$g^{[1]}(u) + \frac{1}{2}\mu_n \leq y \leq g^{[2]}(u) - \frac{1}{2}\mu_n;$$

quanto abbiamo asserito è così provato.

Ciò premesso, consideriamo la successione di funzioni

$$z_n(x, y) = \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0} z(x + t, y)\, dt, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

rilevando che $z_n(x, y)$ risulta definita e continua in tutto il campo D_n assieme alle proprie derivate parziali [36]

$$(19) \qquad \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{0} z'_x(x+t, y)\, dt, \qquad \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{0} z'_y(x+t, y)\, dt,$$

e che per le (1) e (8′) è

$$(20) \qquad z_n(0, y) = 0, \qquad \text{per} \qquad g_n^{[1]}(0) \le y \le g_n^{[2]}(0).$$

Inoltre essendo, in virtù della condizione III), in ogni punto (x, y) di D_n

$$| z_n(x, y) - z(x, y) | = \left| \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{0} [z(x+t, y) - z(x, y)]\, dt \right| \le \mu_n,$$

per $n \to \infty$ $z_n(x, y)$ tende a $z(x, y)$ in ogni punto interno a D.

Posto

$$H(x) = L(x) = G^{[1]}(x) = G^{[2]}(x) = 0, \qquad \text{per} \qquad -\lambda \le x < 0,$$

definiamo le seguenti funzioni: per ogni x di $(0, a)$

$$(21) \qquad H_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{0} H(x+w)\, dw,$$

$$(22) \qquad L_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{0} L(x+w)\, dw,$$

$$(23) \qquad G_n^{[i]}(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{0} G^{[i]}(x+w)\, dw, \qquad (i = 1, 2);$$

e per ogni (x, y) di D_n e per ogni t di $(-\lambda_n, 0)$

$$(24) \qquad \Delta_n(x, y, t) = z'_y(x+t, y) - \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{0} z'_y(x+w, y)\, dw,$$

---

[36] Cfr. la nostra Memoria A. M., n. 7 *a*).

facendo presente che, in virtù del primo teorema della media e di quanto abbiamo affermato in III), risulta

$$(25) \qquad | \Delta_n(x, y, t) | \leq \mu_n .$$

b) Se (x, y) è un punto di D_n tale che per $x - \lambda_n \leq u \leq x$ sia $z(u, y) > 0$, procedendo in modo quasi identico a quello seguito al n. 7 della nostra Memoria A. M. [cfr. la (50)] dalla prima delle (19) in virtù della (2) segue

$$(26) \qquad \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} \leq H_n(x) z_n(x, y) + L_n(x) \left| \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} \right| + [H_n(x) + L_n(x)] \mu_n .$$

Inoltre, se in più della condizione ora indicata è

$$(27) \qquad g^{[2]}(u) - \sigma \leq y \leq g^{[2]}(u), \qquad \text{per} \qquad x - \lambda_n \leq u \leq x,$$

con procedimento analogo a quello ora richiamato, tenendo conto tra l'altro delle (4), (24), (8) e infine delle (25) e (22) risulta

$$(28) \qquad \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} \leq \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{0} [H(x+t) z(x+t, y) + G^{[2]}(x+t) z'_y(x+t, y)] \, dt \leq$$

$$\leq H_n(x) [z_n(x, y) + \mu_n] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{0} G^{[2]}(x+t) \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^{0} z'_y(x+w, y) \, dw + \Delta_n(x, y, t) \right\} dt \leq$$

$$\leq H_n(x) z_n(x, y) + G_n^{[2]}(x) \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} + [H_n(x) + L_n(x)] \mu_n .$$

Allo stesso modo, se, oltre alla condizione indicata all'inizio del presente capoverso, è

$$(29) \qquad g^{[1]}(u) \leq y \leq g^{[1]}(u) + \sigma, \qquad \text{per} \qquad x - \lambda_n \leq u \leq x,$$

basandosi sulla (3) si ottiene

$$(30) \qquad \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} \leq H_n(x) z_n(x, y) + G_n^{[1]}(x) \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} + [H_n(x) + L_n(x)] \mu_n .$$

D'altra parte, se (x, y) è un punto di D_n tale che per $x - \lambda_n \leq u \leq x$ sia $z(u, y) < 0$, con considerazioni analoghe a quelle fatte finora risulta

$$(31) \qquad \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} \geq H_n(x)\, z_n(x, y) - L_n(x) \left| \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} \right| - [H_n(x) + L_n(x)]\, \mu_n;$$

e anche

$$(32) \qquad \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} \geq H_n(x)\, z_n(x, y) + G_n^{[2]}(x) \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} - [H_n(x) + L_n(x)]\, \mu_n,$$

se ha luogo la (27); e così pure

$$(33) \qquad \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} \geq H_n(x)\, z_n(x, y) + G_n^{[1]}(x) \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} - [H_n(x) + L_n(x)]\, \mu_n,$$

se ha luogo la (29).

c) Considerata per $x \geq 0$ l'equazione differenziale ordinaria

$$(34) \qquad v_n'(x) = H_n(x)\, v_n(x) + [H_n(x) + L_n(x) + 1]\, \mu_n,$$

ove $v_n(x)$ è la funzione incognita, l'integrale della (34) che si ottiene attribuendo alla costante arbitraria il valore μ_n, vale a dire

$$(35) \qquad v_n(x) = \mu_n \int_0^x [H_n(u) + L_n(u) + 1]\, e^{\int_u^x H_n(w)\, dw}\, du + \mu_n\, e^{\int_0^x H_n(w)\, dw}$$

soddisfa alla disuguaglianza

$$(36) \qquad v_n(x) \geq \mu_n > 0, \qquad (0 \leq x \leq a);$$

pertanto per la (20) è

$$z_n(0, y) < v_n(0), \qquad \text{per} \qquad g_n^{[1]}(0) \leq y \leq g^{[2]}(0).$$

Affermiamo che è in tutto D_n

$$(37) \qquad z_n(x, y) < v_n(x).$$

Infatti, in caso contrario, sia x_n il minimo valore di x con $0 < x_n \leq a$, per il quale esiste almeno un y_n, con (x_n, y_n) appartenente a D_n, tale che sia

$$(38) \qquad z_n(x_n, y_n) = v_n(x_n);$$

evidentemente è

$$z_n(x_n, y_n) \geq \mu_n . \tag{39}$$

Ne segue

$$z(x, y_n) > 0 , \qquad \text{per} \qquad x_n - \lambda_n \leq x \leq x_n ; \tag{40}$$

infatti se per un x'_n di tale intervallo fosse $z(x'_n, y_n) \leq 0$, in virtù di quanto abbiamo affermato in III) sarebbe $z(x, y_n) \leq \mu_n$ in tutto l'intervallo in questione, con $z(x, y_n) < \mu_n$ almeno in un suo intervallo parziale, e quindi non potrebbe aver luogo la (39).

Provata, così, la (40) distinguiamo tre casi:

(i) tra i punti (x_n, y_n), per i quali è verificata la (38) ce n'è almeno uno con $g_n^{[1]}(x_n) < y_n < g_n^{[2]}(x_n)$;

(ii) la (38) ha luogo per

$$y_n = g_n^{[2]}(x_n), \tag{41}$$

ma non per $g_n^{[1]}(x_n) < y_n < g_n^{[2]}(x_n)$;

(iii) la (38) è verificata soltanto per $y_n = g_n^{[1]}(x_n)$.

Nel caso (i), per il modo in cui è stato definito il punto (x_n, y_n), abbiamo necessariamente, sia per $y > y_n$, sia per $y < y_n$

$$z_n(x_n, y) \leq z_n(x_n, y_n) ,$$

e quindi risulta

$$\frac{\partial z_n(x_n, y_n)}{\partial y} = 0 ;$$

pertanto dalla (26) abbiamo

$$\frac{\partial z_n(x_n, y_n)}{\partial x} \leq H_n(x_n) z_n(x_n, y_n) + [H_n(x_n) + L_n(x_n)] \mu_n . \tag{42}$$

D'altra parte, essendo per $x < x_n$

$$z_n(x, y_n) < v_n(x) ,$$

per la (38) è

$$\frac{\partial z_n(x_n, y_n)}{\partial x} - v'_n(x_n) \geq 0 ,$$

e usufruendo delle (42) e (34) ne segue, tenendo ancora presente la (38),

$$-\mu_n \geq 0,$$

contrariamente all'ipotesi $\mu_n > 0$.

Passiamo al caso (*ii*) [37]. Dalla (6) si trae per ogni x di $(x_n - \lambda_n, x_n)$ e per ogni t di $(-\lambda_n, 0)$

$$g^{[2]}(x_n + t) + \int_{x+t}^{x_n+t} G^{[2]}(w)\, d\, w \leq g^{[2]}(x + t),$$

da cui evidentemente

$$\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0} g^{[2]}(x_n + t)\, d\, t - 2\,\mu_n + \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0} d\, t \int_{x}^{x_n} G^{[2]}(u + t)\, d\, u \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0} g^{[2]}(x + t)\, d\, t - 2\,\mu_n;$$

e quindi, siccome $G^{[2]}(u + t)$, considerata come funzione delle due variabili u, t, risulta superficialmente integrabile nel rettangolo $x \leq u \leq x_n$, $-\lambda_n \leq t \leq 0$ [38],

---

(37) In questo caso si può rilevare che è $z_n(x_n, y) < z_n(x_n, y_n)$ per $y < y_n$ (e sufficientemente prossimo a y_n), e quindi risulta $\dfrac{\partial z_n(x_n, y_n)}{\partial y} \geq 0$.

(38) Ciò è ovvio: infatti siccome

$$\Phi(t) = \int_{x+t}^{x_n+t} |\, G^{[2]}(w) \,|\, d\, w = \int_{x}^{x_n} |\, G^{[2]}(u + t)\,|\, d\, u$$

è funzione continua di t, esiste finito l'integrale $\int_{-\lambda_n}^{0} d\, t \int_{x}^{x_n} |\, G^{[2]}(u + t)\,|\, d\, t$; pertanto per il teorema di Fubini-Tonelli $|\, G^{[2]}(u + t)\,|$ è superficialmente integrabile nel rettangolo in questione, e perciò della stessa proprietà gode anche $G^{[2]}(u + t)$.

in virtù del teorema di FUBINI sugli integrali multipli e tenendo presente la (11) e la (23) (per $i = 2$) si ottiene

$$g_n^{[2]}(x_n) + \int_x^{x_n} G_n^{[2]}(u)\,d\,u \leq g_n^{[2]}(x)\,,$$

vale a dire per la (41) la curva

$$y = y_n + \int_x^{x_n} G_n^{[2]}(u)\,d\,u\,. \qquad (x_n - \lambda_n \leq x \leq x_n)$$

appartiene al campo D_n (39). Allora per ogni x con $x_n - \lambda_n \leq x < x_n$ è

$$z_n\left(x\,,\, y_n + \int_x^{x_n} G_n^{[2]}(u)\,d\,u\right) - v_n(x) < 0\,,$$

e quindi, in virtù della (38), deve essere

$$\left[\frac{d}{d\,x}\left\{z_n\left(x\,,\, y_n + \int_x^{x_n} G_n^{[2]}(u)\,d\,u\right) - v_n(x)\right\}\right]_{x=x_n} \geq 0\,,$$

ossia

$$\frac{\partial\, z_n(x_n\,,\,y_n)}{\partial\, x} - G_n^{[2]}(x_n)\frac{\partial\, z_n(x_n\,,\,y_n)}{\partial\, y} - v_n'(x_n) \geq 0\,. \tag{43}$$

Rilevato che, siccome dalla seconda delle (16), in virtù di quanto abbiamo convenuto in II) e della (9), si trae per ogni u di $(x_n - \lambda_n\,,\, x_n)$

$$g_n^{[2]}(x_n) \geq g^{[2]}(u) - 3\,\mu_n > g^{[2]}(u) - \sigma\,,$$

e tenuto conto della seconda delle (17), possiamo affermare che nel punto $(x_n\,,\,y_n)$ è verificata la (28). Pertanto, usufruendo anche delle (34) e (38), dalla (43) segue

$$-\mu_n \geq 0\,,$$

contrariamente al modo in cui è stato scelto μ_n.

---

(39) In virtù della (8), di quanto abbiamo affermato in I) e del fatto che, in ogni intervallo parziale di $(0\,,a)$, avente ampiezza λ_n, l'oscillazione di $g_n^{[2]}(x)$ risulta $\leq \mu_n : 2$, la disuguaglianza $g_n^{[2]}(x_n) + \int_x^{x_n} G_n^{[2]}(u)\,d\,u \geq g_n^{[1]}(x)$, $(x_n - \lambda_n \leq x \leq x_n)$ è conseguenza immediata della (11').

Infine se è verificato il caso (*iii*) [40], muovendo dalla (5) e procedendo in modo del tutto analogo si perviene allo stesso assurdo.

Possiamo dunque concludere che la (37) è verificata in tutto il campo D_n.

d) D'altra parte consideriamo quell'integrale dell'equazione differenziale ordinaria

$$V_n'(x) = H_n(x)\, V_n(x) - [H_n(x) + L_n(x) + 1]\, \mu_n$$

(ove $V_n(x)$ è la funzione incognita) che si ottiene attribuendo alla costante arbitraria il valore $-\mu_n$; vale a dire

$$(44) \qquad V_n(x) = -\mu_n \int_0^x \{H_n(u) + L_n(u) + 1\}\, e^{\int_u^x H_n(w)\,dw}\, du - \mu_n\, e^{\int_0^x H_n(w)\,dw}$$

rilevando che è

$$V_n(x) \leq -\mu_n < 0\,, \qquad (0 \leq x \leq a).$$

Procedendo come in *c*) e utilizzando rispettivamente le (31), (32), (33) si conclude che in tutto il campo D_n è

$$(45) \qquad z_n(x, y) > V_n(x)\,.$$

e) Teniamo presente che, in virtù delle (21) e (22), siccome è $H(x) = L(x) = 0$ per ogni $x < 0$, abbiamo per ogni x con $0 \leq x \leq a$

$$\int_0^x H_n(u)\,du = \int_0^x du\, \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 H(u+w)\,dw = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-\lambda_n}^0 dw \int_0^x H(u+w)\,du \leq$$

$$\leq \int_0^a H(x)\,dx\,,$$

$$\int_0^x L_n(u)\,du \leq \int_0^a L(x)\,dx\,,$$

[40] In analogia a quanto abbiamo rilevato in [37], in questo caso risulta $\dfrac{\partial z_n(x_n, y_n)}{\partial y} \leq 0$.

e anche per $0 \leq u \leq x \leq a$

$$\int_u^x H_n(w)\, d\, w \leq \int_0^a H(x)\, d\, x .$$

Allora dalle (37) e (45), tenendo conto delle (35) e (44), si ottiene per ogni (x, y) del campo D_n

$$| z_n(x, y) | \leq \xi \mu_n , \tag{46}$$

ove

$$\xi = \left[\int_0^a \{H(x) + L(x)\}\, d\, x + a + 1 \right] e^{\int_0^a H(x)\, d\, x}$$

è un numero fisso.

f) Dalla (46) si deduce immediatamente che in tutto D è verificata la (7). Infatti, ragionando per assurdo, supponiamo che esista un punto (x_0, y_0) interno a D con $z(x_0, y_0) \neq 0$. Sia n_0 il minimo intero positivo tale che (x_0, y_0) appartenga al campo D_{n_0} e che sia verificata la disuguaglianza

$$\xi \mu_{n_0} < \frac{| z(x_0, y_0) |}{2} .$$

Allora, siccome la successione μ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ è decrescente, dalla (46) segue per ogni $n \geq n_0$

$$| z_n(x_0, y_0) | < \frac{| z(x_0, y_0) |}{2} ,$$

contrariamente al fatto che, per $n \to +\infty$, la successione $z_n(x, y)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ converge a $z(x, y)$ in ogni punto interno a D.

Pertanto la (7) è così stabilita in ogni punto interno a D, e siccome ogni punto della frontiera di D è punto di accumulazione di punti interni a D, per la continuità di $z(x, y)$ si conclude che la (7) è verificata in tutto il campo D.

OSSERVAZIONE. — *Se è* $g^{[1]}(x) < g^{[2]}(x)$ per $0 \leq x < a$, *e*

$$g^{[1]}(a) = g^{[2]}(a) ,$$

il lemma del presente n°. è ancora pienamente valido.

Infatti, considerata una successione di numeri positivi crescenti a_m, $(m = 1, 2, \ldots)$ con $\lim\limits_{m \to +\infty} a_m = a$, possiamo applicare il lemma del presente n° ad ogni campo

$$D_m^*: \qquad 0 \leq x \leq a_m, \qquad g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x),$$

e quindi risulta in tutto D_m^*

$$z(x, y) = 0.$$

Pertanto è evidente che in ogni punto (x, y) di D con $x < a$ è $z(x, y) = 0$, e per la continuità di $z(x, y)$ ne segue $z(x, y) = 0$ in tutto D.

8. Teorema di unicità. — *Siano $g^{[i]}(x)$, $(i = 1, 2, \ldots)$ due funzioni continue in $(0, a)$ [ove $a > 0$] con $g^{[1]}(x) < g^{[2]}(x)$, sia $f(x, y, z, q)$ una funzione definita per ogni (x, y) del campo*

$$D: \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x)$$

e per ogni coppia di numeri reali z, q, e sia $\varphi(y)$ una funzione continua assieme alla propria derivata $\varphi'(y)$ nell'intervallo $(g^{[1]}(0), g^{[2]}(0))$.

Supponiamo che esistano un numero $\sigma > 0$ e due funzioni $H(x)$, $L(x)$ quasi continue, non negative e integrabili in $(0, a)$ in modo che, su ogni intersezione di D con una parallela all'asse x sia verificata, per quasi tutti gli x e per ogni coppia (z_1, q_1), (z_2, q_2) con $z_2 > z_1$, la disuguaglianza

$$f(x, y, z_2, q_2) - f(x, y, z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + L(x)\,|\,q_2 - q_1\,|, \tag{47}$$

mentre si abbia

$$f(x, y, z_2, q_2) - f(x, y, z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + G^{[1]}(x)(q_2 - q_1), \tag{48}$$

quando è anche $g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[1]}(x) + \sigma$; e

$$f(x, y, z_2, q_2) - f(x, y, z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + G^{[2]}(x)(q_2 - q_1), \tag{49}$$

quando è anche $g^{[2]}(x) - \sigma \leq y \leq g^{[2]}(x)$; ove $G^{[i]}(x)$, $(i = 1, 2)$ sono due funzioni quasi continue e integrabili in $(0, a)$, le quali, per ogni coppia x', x'' con $0 \leq x' < x'' \leq a$ verificano rispettivamente le disuguaglianze

$$g^{[1]}(x') \leq g^{[1]}(x'') + \int_{x'}^{x''} G^{[1]}(x)\, d\, x, \tag{50}$$

$$g^{[2]}(x'') + \int_{x'}^{x''} G^{[2]}(x)\, d\, x \leq g^{[2]}(x'). \tag{51}$$

Sotto queste ipotesi esiste al più una funzione $z(x\,,y)$ *continua, assieme alla propria derivata parziale* $\frac{\partial z(x\,,y)}{\partial y}$, *nel campo* D *e tale che, su ogni intersezione di* D *con una parallela all'asse* x, *sia assolutamente continua rispetto a* x, *la quale su ogni intersezione di* D *con una parallela all'asse* x *soddisfa, per quasi tutti gli* x, *all'equazione*

$$\frac{\partial z(x\,,y)}{\partial x} = f\left(x\,,y\,,z(x\,,y)\,,\frac{\partial z(x\,,y)}{\partial y}\right), \tag{52}$$

e inoltre verifica la condizione iniziale

$$z(0\,,y) = \varphi(y)\,, \qquad \textit{per} \quad g^{[1]}(0) \leq y \leq g^{[2]}(0)\,.$$

Infatti, se $z_1(x\,,y)$ e $z_2(x\,,y)$ sono due integrali della (52) soddisfacenti a tutte le condizioni indicate nell'enunciato del teorema, posto $z(x\,,y) = z_2(x\,,y) - z_1(x\,,y)$ e considerata rispettivamente la differenza

$$f\left(x\,,y\,,z_2(x\,,y)\,,\frac{\partial z_2(x\,,y)}{\partial y}\right) - f\left(x\,,y\,,z_1(x\,,y)\,,\frac{\partial z_1(x\,,y)}{\partial y}\right)$$

in quei punti $(x\,,y)$ nei quali è $z(x\,,y) > 0$, e la sua contraria in quei punti $(x\,,y)$ nei quali è $z(x\,,y) < 0$, si verifica immediatamente che la funzione $z(x\,,y)$ soddisfa, per $z(x\,,y) \neq 0$, alle condizioni del lemma del n. 7. Pertanto risulta, in tutto D, $z(x\,,y) = 0$, ossia $z_1(x\,,y) = z_2(x\,,y)$.

OSSERVAZIONE I [41]. *Il teorema di unicità del presente n⁰. mantiene la propria validità anche se è* $g^{[1]}(x) < g^{[2]}(x)$ *per* $0 \leq x < a$, *e* $g^{[1]}(a) = g^{[2]}(a)$.
Ciò è conseguenza immediata dell'osservazione del n. 7.

OSSERVAZIONE II. *Il teorema del presente n.⁰ continua a essere valido, se esiste un numero* $\eta > 0$ *in modo che la* (48) *abbia luogo soltanto per quelle coppie* $q_1\,,q_2$ *per le quali è* $q_2 - q_1 \leq \eta$, *e la* (49) *abbia luogo soltanto per quelle coppie* $q_1\,,q_2$ *per le quali è* $q_2 - q_1 \geq -\eta$.

---

(41) Un esempio relativo al teorema del presente n.⁰ è indicato al n. 4 della nostra Nota lincea citata in (4), alla quale rinviamo.

Quanto abbiamo affermato si prova arrecando qualche variante alla dimostrazione [42].

9. UN COMPLEMENTO AL TEOREMA DEL N. 8. *Se la funzione* $f(x, y, z, q)$ *è definita nel campo*

$$0 \leq x \leq a, \quad g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x), \quad b_1 \leq z \leq b_2, \quad b'_1 \leq q \leq b'_2,$$

ove b_1, b_2, b'_1, b'_2 *sono quattro numeri reali con* $b_1 < b_2, b'_1 < b'_2$, *e se le disuguaglianze* (47), (48), (49) *sono verificate quando* z_1, z_2 *appartengono all'intervallo* (b_1, b_2), *e* q_1, q_2 *a* (b'_1, b'_2), *il teorema di unicità del n. 8 è ancora pienamente valido.*

Ciò è evidente; infatti se $z_1(x, y), z_2(x, y)$ sono due integrali della (52), necessariamente in ogni punto (x, y) di D è

$$b_1 \leq z_i(x, y) \leq b_2, \quad b'_1 \leq \frac{\partial z_i(x, y)}{\partial y} \leq b'_2, \qquad (i = 1, 2).$$

Pertanto considerata la funzione $z(x, y) = z_2(x, y) - z_1(x, y)$, dalle (47), (48) (49) segue che essa soddisfa alle condizioni del lemma del n. 7, e quindi risulta $z_1(x, y) = z_2(x, y)$ in tutto D.

OSSERVAZIONE. Le osservazioni fatte alla fine del n. 8 sono ancora valide.

§ 4.

10. TEOREMA DI UNICITÀ. *Sia* $f(x, y, z, q)$ *una funzione definita per ogni* (x, y) *del rettangolo*

$$R: \qquad 0 \leq x \leq a, \quad c_1 \leq y \leq c_2,$$

(*ove* $0 < a$, $c_1 < c_2$) *e per ogni coppia di numeri reali* z, q; *e supponiamo che esistano un numero* $\eta > 0$ *e quattro funzioni* $H(x) \geq 0$, $L(x) \geq 0$, $\Gamma_1(x) \geq 0$, $\Gamma_2(x) \leq 0$, *quasi continue e integrabili in* $(0, a)$ *in modo che, per quasi tutti gli* x *di* $(0, a)$ *e per ogni coppia* $(z_1, q_1), (z_2, q_2)$ *con* $z_2 > z_1$, *risulti*

$$(53) \quad f(x, y, z_2, q_2) - f(x, y, z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + L(x) \mid q_2 - q_1 \mid$$

[42] In particolare si tenga conto di quanto abbiamo rilevato in [37] e in [40]; cfr. anche le dimostrazioni del § 4.

per $c_1 < y < c_2$, *e anche*

$$f(x, c_1, z_2, q_2) - f(x, c_1, z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + \Gamma_1(x)(q_2 - q_1), \tag{54}$$

per $q_2 - q_1 \leq \eta$;

$$f(x, c_2, z_2, q_2) - f(x, c_2, z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + \Gamma_2(x)(q_2 - q_1), \tag{55}$$

per $q_2 - q_1 \geq -\eta$.

Inoltre sia $\varphi(y)$, $(c_1 \leq y \leq c_2)$ *una funzione continua assieme alla propria derivata del primo ordine.*

Sotto queste ipotesi esiste al più una funzione $z(x, y)$, *la quale:*

1°) *nel rettangolo* R *è continua assieme alla propria derivata parziale* $z'_y(x, y)$;

2°) *per ogni* y *fissato di* (c_1, c_2), $z(x, y)$, *considerata come funzione della sola* x, *è assolutamente continua in* $(0, a)$;

3°) *su ogni segmento di* R *parallelo all'asse* x *soddisfa per quasi tutti gli* x *all'equazione*

$$z'_x(x, y) = f(x, y, z(x, y), z'_y(x, y)); \tag{56}$$

4°) *verifica la condizione iniziale*

$$z(0, y) = \varphi(y), \qquad (c_1 \leq y \leq c_2).$$

a) Infatti, se $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ sono due funzioni soddisfacenti alle condizioni 1°), 2°), 3°), 4°), poniamo per ogni (x, y) di R

$$\omega(x, y) = | z_2(x, y) - z_1(x, y) |,$$

rilevando che: $\omega(x, y)$ è continua in tutto R; per ogni y fissato è funzione assolutamente continua della sola x; in ogni punto (x, y) di R in cui è $\omega(x, y) > 0$, la derivata parziale $\omega'_y(x, y)$ esiste finita e continua; è

$$\omega(0, y) = 0, \qquad (c_1 \leq y \leq c_2). \tag{57}$$

Inoltre in virtù della (56), su ogni segmento di R parallelo all'asse x e tutto costituito di punti nei quali è $\omega(x, y) > 0$, dalle (53), (54), (55) segue rispettivamente per quasi tutti gli x di $(0, a)$

$$\omega'_x(x, y) \leq H(x)\,\omega(x, y) + L(x)\,| \omega'_y(x, y) | \tag{58}$$

per $c_1 < y < c_2$; e anche

$$\omega'_x(x, c_1) \leq H(x)\,\omega(x, c_1) + \Gamma_1(x)\,\omega'_y(x, c_1) \tag{59}$$

se è $\omega'_y(x, c_1) \leq \eta$, e

$$\omega'_x(x, c_2) \leq H(x)\,\omega(x, c_2) + \Gamma_2(x)\,\omega'_y(x, c_2) \tag{60}$$

se è $\omega'_y(x, c_2) \geq -\eta$.

Facciamo pure presente che, per semplicità, potremo sempre supporre che, per quasi tutti gli x di $(0, a)$, sia

$$0 \leq \Gamma_1(x) \leq L(x), \qquad 0 \leq -\Gamma_2(x) \leq L(x). \tag{61}$$

b) Sia λ un numero positivo tale che l'integrale di $L(x)$, esteso a un qualunque intervallo parziale di $(0, a)$ avente ampiezza λ, risulti non superiore a $c_2 - c_1$. Indicato con R_λ il rettangolo

$$-\lambda \leq x \leq a, \qquad c_1 \leq y \leq c_2,$$

definiamo

$$\omega(x, y) = 0 \tag{62}$$

per $-\lambda \leq x < 0$, $c_1 \leq y \leq c_2$, rilevando che, in virtù della (57), $\omega(x, y)$ risulta continua in tutto R_λ.

Sia μ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ (con $\mu_1 < \eta$) una successione di numeri reali positivi, decrescenti e tendenti a zero, e sia λ_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, (con $\lambda_1 < \lambda$) un'altra successione di numeri reali positivi, decrescenti, tendenti a zero e tali che:

I) l'integrale definito di $L(x)$, esteso a un qualsiasi intervallo parziale di $(0, a)$ avente ampiezza non superiore a λ_n, sia non superiore a μ_n;

II) su ogni segmento rettilineo di R parallelo all'asse x e avente ampiezza non superiore a λ_n risultino minori di μ_n sia l'oscillazione di $\omega(x, y)$ sia quella della derivata parziale $\dfrac{\partial\,[z_2(x, y) - z_1(x, y)]}{\partial y}$.

Definiamo nel rettangolo R la successione di funzioni continue

$$\omega_n(x, y) = \frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0} \omega(x + t, y)\, dt, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{63}$$

rilevando che in virtù delle (57) e (62) risulta

$$\omega_n(0, y) = 0 \qquad \text{per } c_1 \leq y \leq c_2; \tag{64}$$

che la derivata parziale

$$\frac{\partial\,\omega_n(x\,,y)}{\partial\,x}=\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0}\omega'_x(x+t\,,y)\,d\,t \tag{65}$$

risulta finita e continua in tutto il rettangolo R, e che anche la derivata parziale

$$\frac{\partial\,\omega_n(x\,,y)}{\partial\,y}=\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0}\omega'_y(x+t\,,y)\,d\,t$$

esiste finita in ogni punto $(x\,,y)$ di R tale che sia

$$\omega(u\,,y)>0\,,\qquad \text{per } x-\lambda_n\leq u\leq x. \tag{66}$$

c) Posto

$$H(x)=L(x)=\Gamma_1(x)=\Gamma_2(x)=0,\qquad \text{per } -\lambda\leq x<0,$$

definiamo per ogni x di $(0\,,a)$ le seguenti funzioni

$$H_n(x)=\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0}H(x+t)\,d\,t\,,$$

$$L_n(x)=\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0}L(x+t)\,d\,t\,,$$

$$\Gamma_{i,n}(x)=\frac{1}{\lambda_n}\int_{-\lambda_n}^{0}\Gamma_i(x+t)\,d\,t\,,\qquad (i=1\,,2),$$

ed osserviamo che, se $(x\,,y)$ è un punto di R per il quale ha luogo la (66), dalla (65), tenuto presente quanto abbiamo affermato in II), in virtù della (58) segue in modo ben noto

$$\frac{\partial\,\omega_n(x\,,y)}{\partial\,x}\leq H_n(x)\,\omega_n(x\,,y)+L_n(x)\left|\frac{\partial\,\omega_n(x\,,y)}{\partial\,y}\right|+[H_n(x)+L_n(x)]\,\mu_n\,, \tag{67}$$

per $c_1<y<c_2$; e anche per le (59) e (60)

$$\frac{\partial\,\omega_n(x\,,c_1)}{\partial\,x}\leq H_n(x)\,\omega_n(x\,,c_1)+\Gamma_{1,n}(x)\,\frac{\partial\,\omega_n(x\,,c_1)}{\partial\,y}+[H_n(x)+L_n(x)]\,\mu_n\,, \tag{68}$$

se, per $x - \lambda_n \leq u \leq x$, è $\dfrac{\partial\, \omega(u, c_1)}{\partial y} \leq \eta$;

$$(69)\quad \frac{\partial\, \omega_n(x, c_2)}{\partial x} \leq H_n(x)\, \omega_n(x, c_2) + \Gamma_{2,n}(x) \frac{\partial\, \omega_n(x, c_2)}{\partial y} + [H_n(x) + L_n(x)]\, \mu_n,$$

se, per $x - \lambda_n \leq u \leq x$, è $\dfrac{\partial\, \omega(u, c_2)}{\partial y} \geq -\eta$.

d) Dell'equazione differenziale ordinaria (34) [vedi n. 7 *c*)] consideriamo l'integrale (35), osservando che esso verifica la (36), e pertanto per la (64) è

$$\omega_n(0, y) < v_n(0), \qquad (c_1 \leq y \leq c_2).$$

Affermiamo che in tutto il rettangolo R è

$$(70)\qquad \omega_n(x, y) < v_n(x).$$

Infatti, in caso contrario, sia x_n il minimo valore di x con $0 < x_n \leq a$, per il quale esiste almeno un y_n con $c_1 \leq y_n \leq c_2$, tale che

$$(71)\qquad \omega_n(x_n, y_n) = v_n(x_n);$$

onde, in virtù della (36) e della condizione II),

$$(72)\qquad \omega(x, y_n) > 0, \qquad \text{per } x_n - \lambda_n \leq x \leq x_n.$$

Come al n. 7 *c*), distinguiamo tre casi:

(*i*) tra i punti (x_n, y_n), per i quali è verificata la (71), ce n'è almeno uno con $c_1 < y_n < c_2$;

(*ii*) la (71) ha luogo per $y = c_2$, ma non per $c_1 < y_n < c_2$;

(*iii*) la (71) ha luogo soltanto per $y_n = c_1$.

Nel caso (*i*) risulta come al n. 7 *c*)

$$\frac{\partial\, \omega_n(x_n, y_n)}{\partial y} = 0,$$

e quindi, siccome nel punto (x_n, y_n) la (67) diviene

$$\frac{\partial\, \omega_n(x_n, y_n)}{\partial x} \leq H_n(x_n)\, \omega_n(x_n, y_n) + [H_n(x_n) + L_n(x_n)]\, \mu_n,$$

procedendo come al citato n. 7 *c*), tenendo conto delle (71) e (34) ne segue

$$-\mu_n \geq 0 ,$$

contrariamente all'ipotesi $\mu_n > 0$.

Se ha luogo il caso (*ii*), essendo

$$\omega_n(x_n , y) < \omega_n(x_n , c_2)$$

per $c_1 < y < c_2$, risulta

$$\frac{\partial\, \omega_n(x_n , c_2)}{\partial\, y} \geq 0$$

e quindi per la (72) e per la condizione II) nell'intervallo $(x_n - \lambda_n , x_n)$ è

$$\frac{\partial\, \omega(x , c_2)}{\partial\, y} > -\mu_n > -\eta .$$

D'altra parte, siccome dall'ipotesi $\Gamma_2(x) \leq 0$ segue $\Gamma_{2,n}(x) \leq 0$, $(0 \leq x \leq a)$ la curva

$$y = c_2 + \int_x^{x_n} \Gamma_{2,n}(u)\, d\, u , \qquad (x_n - \lambda_n \leq x \leq x_n)$$

appartiene al rettangolo R e pertanto per ogni x con $x_n - \lambda_n \leq x < x_n$ è

$$\omega_n\left(x , c_2 + \int_x^{x_n} \Gamma_{2,n}(u)\, d\, u\right) - v_n(x) < 0 ,$$

e quindi in virtù della (71) deve essere

$$\left[\frac{d}{d\, x}\left\{ \omega_n\left(x , c_2 + \int_x^{x_n} \Gamma_{2,n}(u)\, d\, u\right) - v_n(x) \right\}\right]_{x = x_n} \geq 0 ,$$

ossia

$$(73) \qquad \frac{\partial\, \omega_n(x_n , c_2)}{\partial\, x} - \Gamma_{2,n}(x_n)\, \frac{\partial\, \omega_n(x_n , c_2)}{\partial\, y} - v_n'(x_n) \geq 0 .$$

Allora, tenendo conto della (69), dalla (34) in virtù della (73) segue

$$-\mu_n > 0,$$

in contrasto con la scelta di μ_n.

Infine, se è verificato il caso (*iii*), tenendo presente che, siccome risulta $\Gamma_{1,n}(x) \geq 0$, $(0 \leq x \leq a)$, la curva

$$y = c_1 + \int_x^{x_n} \Gamma_{1,n}(u)\,du, \qquad (x_n - \lambda_n \leq x \leq x_n)$$

appartiene al rettangolo R, usufruendo della (68) si arriva allo stesso assurdo.

Possiamo dunque concludere che la (70) è verificata in tutto il rettangolo R.

e) Per il modo in cui sono state definite le funzioni $H_n(x)$, $L_n(x)$, dalla (70) tenendo ancora conto della (35) si ottiene, in modo analogo al n. 7 *e*), per ogni (x, y) del rettangolo R

$$\omega_n(x, y) \leq \xi\,\mu_n,$$

ove ξ è il numero fisso indicato al luogo citato.

Ne segue in tutto R (in modo identico al n. 7 *f*))

$$\omega(x, y) = 0,$$

cioè a dire $z_1(x, y) = z_2(x, y)$ per ogni (x, y) di R.

11. Teorema di unicità. — *Siano* $g^{[i]}(x)$, $(i = 1, 2)$ *due funzioni assolutamente continue in* $(0, a)$, (*ove* $a > 0$) *con* $g^{[1]}(x) < g^{[2]}(x)$, $(0 \leq x \leq a)$; *sia* $f(x, y, z, q)$ *una funzione definita per ogni* (x, y) *del campo*

$$D: \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x),$$

e per ogni coppia di numeri reali z, q; *e sia* $\varphi(y)$ *una funzione continua, insieme con la sua derivata del primo ordine, nell'intervallo* (c_1, c_2), *ove si è posto* $g^{[i]}(0) = c_i$, $(i = 1, 2)$.

Supponiamo che esistano due funzioni $H(x)$, $L(x)$ *quasi continue, non negative e integrabili in* $(0, a)$ *in modo che, su ogni intersezione di* D *con una* *parallela all'asse* x, *per quasi tutti gli* x *e per ogni coppia* (z_1, q_1), (z_2, q_2) *con* $z_2 > z_1$ *sia verificata la disuguaglianza*

$$f(x, y, z_2, q_2) - f(x, y, z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + L(x) \mid q_2 - q_1 \mid, \tag{74}$$

e inoltre si abbia per quasi tutti gli x *di* $(0, a)$ *e per ogni coppia* (z_1, q_1), (z_2, q_2) *con* $z_2 > z_1$

$$f(x, g^{[1]}(x), z_2, q_2) - f(x, g^{[1]}(x), z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + G^{[1]}(x)(q_2 - q_1), \tag{75}$$

se è $q_2 - q_1 \leq \eta_0$; *e*

$$f(x, g^{[2]}(x), z_2, q_2) - f(x, g^{[2]}(x), z_1, q_1) \leq H(x)(z_2 - z_1) + G^{[2]}(x)(q_2 - q_1), \tag{76}$$

se è $q_2 - q_1 \geq -\eta_0$; *ove* η_0 *è un numero positivo e* $G^{[i]}(x)$, $(i = 1, 2)$ *sono due funzioni quasi continue e integrabili in* $(0, a)$, *le quali, per quasi tutti gli* x *di* $(0, a)$ *verificano le disuguaglianze*

$$G^{[1]}(x) + \frac{d\, g^{[1]}(x)}{d\, x} \geq 0, \qquad G^{[2]}(x) + \frac{d\, g^{[2]}(x)}{d\, x} \leq 0. \tag{77}$$

Allora, considerata la classe K *delle funzioni* $z(x, y)$, *soddisfacenti alle seguenti condizioni:*

1^0) $z(x, y)$ *è continua in* D *assieme alla propria derivata parziale* $z'_y(x, y)$;

2^0) *su ogni intersezione di* D *con una parallela all'asse* x $z(x, y)$ *è funzione assolutamente continua rispetto a* x;

3^0) *in corrispondenza a ogni funzione* $z(x, y)$ *esiste una funzione* $M(x)$ *quasi continua, non negativa e integrabile in* $(0, a)$ *in modo che, per quasi tutti gli* x *di* $(0, a)$ *e per ogni* y *con* $g^{[1]}(x) \leq y \leq g^{[2]}(x)$, *sia verificata la disuguaglianza*

$$\mid z'_x(x, y) \mid \leq M(x);$$

4^0) *le funzioni* $z(x, g^{[i]}(x))$, $(i = 1, 2)$ *sono assolutamente continue in* $(0, a)$ *e per quasi tutti gli* x *di* $(0, a)$ *è*

$$\frac{d\, z(x, g^{[i]}(x))}{d\, x} = z'_x(x, g^{[i]}(x)) + z'_y(x, g^{[i]}(x)) \frac{d\, g^{[i]}(x)}{d\, x}, \quad (i = 1, 2); \tag{78}$$

esiste al più una funzione $z(x, y)$ *della classe* K, *la quale, su ogni intersezione di* D *con una parallela all'asse* x, *soddisfa per quasi tutti gli* x *l'equazione*

$$z'_x(x, y) = f(x, y, z(x, y), z'_y(x, y)) \tag{79}$$

e verifica la condizione iniziale

$$z(0, y) = \varphi(y), \qquad (c_1 \leq y \leq c_2). \tag{80}$$

a) La dimostrazione del teorema del presente n. si riconduce facilmente a quella del teorema del n. 10 con un semplice cambiamento della variabile y. Infatti, posto

$$y = g^{[1]}(x) + \frac{g^{[2]}(x) - g^{[1]}(x)}{c_2 - c_1}(Y - c_1), \tag{81}$$

se $z(x, y)$ è una funzione della classe K la funzione

$$Z(x, Y) = z\left(x, g^{[1]}(x) + \frac{g^{[2]}(x) - g^{[1]}(x)}{c_2 - c_1}(Y - c_1)\right),$$

risulta definita e continua in tutto il rettangolo

$$R: \qquad 0 \leq x \leq a, \qquad c_1 \leq Y \leq c_2$$

insieme con la propria derivata parziale

$$\frac{\partial Z(x, Y)}{\partial Y} = \frac{g^{[2]}(x) - g^{[1]}(x)}{c_2 - c_1} \frac{\partial z}{\partial y}; \tag{82}$$

inoltre, se è verificata la (80), risulta

$$Z(0, Y) = \varphi(Y), \qquad (c_1 \leq Y \leq c_2). \tag{83}$$

Affermiamo che, su ogni segmento di R parallelo all'asse x, $Z(x, Y)$ risulta funzione assolutamente continua di x: per $Y = c_i$, $(i = 1, 2)$ questa affermazione è contenuta nella condizione 4⁰), perchè

$$Z(x, c_i) = z(x, g^{[i]}(x)), \qquad (i = 1, 2),$$

mentre per $c_1 < Y < c_2$ tale proprietà si verifica in modo elementare ([43]).

([43]) Infatti definita $z(x, y)$ in tutto il campo $0 \leq x \leq a$, $-\infty < y < +\infty$ ponendo $z(x, y) = z(x, g^{[1]}(x))$, per $y < g^{[1]}(x)$; $z(x, y) = z(x, g^{[2]}(x))$, per $g^{[2]}(x) < y$, osserviamo che, in virtù delle condizioni 3⁰) e 4⁰), risulta per quasi tutti gli x di $(0, a)$ e per qualunque valore di y

$$| z'_x(x, y) | \leq M_0(x),$$

ove

$$M_0(x) = M(x) + \left| \frac{d\, z(x, g^{[1]}(x))}{d\, x} \right| + \left| \frac{d\, z(x, g^{[2]}(x))}{d\, x} \right|,$$

Inoltre, tenuto presente che, indicato con ϱ il minimo della differenza $g^{[2]}(x) - g^{[1]}(x)$ in $(0, a)$, dalla (81) segue

$$\frac{dy}{dY} \geq \frac{\varrho}{c_2 - c_1} > 0,$$

---

mentre, indicato con $N > 0$ il massimo valore assoluto di $z'_y(x, y)$ nel campo D, per ogni x di $(0, a)$ e per ogni coppia y_1, y_2 con $-\infty < y_j < +\infty$, $(j = 1, 2)$ è

$$| z(x, y_2) - z(x, y_1) | \leq N \, | y_2 - y_1 | .$$

Pertanto, considerato un numero finito qualunque di intervalli (α_r, β_r), $(r = 1, 2, \ldots, m)$ appartenenti all'intervallo $(0, a)$ e a due a due distinti, si ottiene in modo ovvio

$$\sum_{r=1}^{m} | Z(\beta_r, Y) - Z(\alpha_r, Y) | = \sum_{r=1}^{m} \left| z\left(\beta_r, g^{[1]}(\beta_r) + \frac{g^{[2]}(\beta_r) - g^{[1]}(\beta_r)}{c_2 - c_1}(Y - c_1)\right) - \right.$$

$$\left. - z\left(\alpha_r, g^{[1]}(\alpha_r) + \frac{g^{[2]}(\alpha_r) - g^{[1]}(\alpha_r)}{c_2 - c_1}(Y - c_1)\right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{m} \left| z\left(\beta_r, g^{[1]}(\beta_r) + \frac{g^{[2]}(\beta_r) - g^{[1]}(\beta_r)}{c_2 - c_1}(Y - c_1)\right) - \right.$$

$$\left. - z\left(\alpha_r, g^{[1]}(\beta_r) + \frac{g^{[2]}(\beta_r) - g^{[1]}(\beta_r)}{c_2 - c_1}(Y - c_1)\right) \right| +$$

$$+ \sum_{r=1}^{m} \left| z\left(\alpha_r, g^{[1]}(\beta_r) + \frac{g^{[2]}(\beta_r) - g^{[1]}(\beta_r)}{c_2 - c_1}(Y - c_1)\right) - \right.$$

$$\left. - z\left(\alpha_r, g^{[1]}(\alpha_r) + \frac{g^{[2]}(\alpha_r) - g^{[1]}(\alpha_r)}{c_2 - c_1}(Y - c_1)\right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{m} \int_{\alpha_r}^{\beta_r} M_0(x)\, dx +$$

$$+ N \sum_{r=1}^{m} \left\{ | g^{[1]}(\beta_r) - g^{[1]}(\alpha_r) | \frac{c_2 - Y}{c_2 - c_1} + | g^{[2]}(\beta_r) - g^{[2]}(\alpha_r) | \frac{Y - c_1}{c_2 - c_1} \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{m} \int_{\alpha_r}^{\beta_r} M_0(x)\, dx + N \sum_{r=1}^{m} \{ | g^{[1]}(\beta_r) - g^{[1]}(\alpha_r) | + | g^{[2]}(\beta_r) - g^{[2]}(\alpha_r) | \},$$

e quindi per l'assoluta continuità delle funzioni $\int_0^x M_0(t)\, dt$, $g^{[1]}(x)$, $g^{[2]}(x)$ il nostro asserto è evidente.

a ogni insieme di punti (x, y) del campo D, avente misura superficiale nulla, corrisponde nel piano (x, Y) un insieme di punti del rettangolo R avente misura superficiale nulla, e quindi, fatta eccezione per un insieme E', avente misura lineare nulla, di valori Y dell'intervallo (c_1, c_2), su ogni altra parallela all'asse x, risulta per quasi tutti gli x di $(0, a)$

$$\frac{\partial Z(x, Y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{c_2 - c_1}\left[(c_2 - Y)\frac{d\, g^{[1]}(x)}{d\, x} + \right. \tag{84}$$

$$\left. + (Y - c_1)\frac{d\, g^{[2]}(x)}{d\, x}\right] \frac{\partial z}{\partial y}.$$

b) Ciò premesso, se $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ sono due integrali della (79) appartenenti alla classe K e soddisfacenti alla (80), e se $Z_1(x, Y)$, $Z_2(x, Y)$ sono le funzioni che la (81) fa loro corrispondere, posto

$$\omega(x, y) = |\, z_2(x, y) - z_1(x, y)\,|\,,$$

$$\Omega(x, Y) = \omega\left(x, g^{[1]}(x) + \frac{g^{[2]}(x) - g^{[1]}(x)}{c_2 - c_1}(Y - c_1)\right),$$

onde

$$\Omega(x, Y) = |\, Z_2(x, Y) - Z_1(x, Y)\,|\,,$$

per la (83) è evidentemente

$$\Omega(0, Y) = 0\,, \qquad (c_1 \leq Y \leq c_2).$$

In virtù della (78) per quasi tutti gli x di $(0, a)$ è

$$\Omega'_x(x, c_i) = \frac{d\,\omega(x, g^{[i]}(x))}{d\, x} = \omega'_x(x, g^{[i]}(x)) + \omega'_y(x, g^{[i]}(x))\frac{d\, g^{[i]}(x)}{d\, x}, \qquad (i = 1, 2),$$

e quindi, tenendo conto delle (79), (75) e (82), per quasi tutti gli x di ogni segmento $Y = c_1$, tutto costituito di punti nei quali è $\Omega(x, c_1) > 0$, risulta

$$\Omega'_x(x, c_1) \leq H(x)\,\omega(x, g^{[1]}(x)) + \left[G^{[1]}(x) + \frac{d\, g^{[1]}(x)}{d\, x}\right]\omega'_y(x, g^{[1]}(x))$$

per $\omega'_y(x, g^{[1]}(x)) \leq \eta_0$, ossia

$$\Omega'_x(x, c_1) \leq H(x)\,\Omega(x, c_1) + \tag{85}$$

$$+ \frac{c_2 - c_1}{g^{[2]}(x) - g^{[1]}(x)}\left[G^{[1]}(x) + \frac{d\, g^{[1]}(x)}{d\, x}\right]\Omega'_Y(x, c_1)$$

per $\Omega'_Y(x, c_1) \leq \dfrac{\varrho}{c_2 - c_1}\eta_0$; e così pure per quasi tutti gli x di ogni segmento $Y = c_2$, tutto costituito di punti nei quali è $\Omega(x, c_2) > 0$, risulta [usufruendo della (76)]

$$(86) \qquad \Omega'_x(x, c_2) \leq H(x)\,\Omega(x, c_2) + \\ + \frac{c_2 - c_1}{g^{[2]}(x) - g^{[1]}(x)}\left[G^{[2]}(x) + \frac{d\,g^{[2]}(x)}{d\,x}\right]\Omega'_Y(x, c_2)$$

per $\Omega'_Y(x, c_2) \geq -\dfrac{\varrho}{c_2 - c_1}\eta_0$.

Tenute presenti le (77), le (85) e (86) non differiscono, se non per la forma, dalle (59) e (60) del n. 10, *a*), ove $\eta = \dfrac{\varrho}{c_2 - c_1}\eta_0$.

Inoltre, fatta eccezione per quei valori di Y che appartengono all'insieme E', su ogni altro segmento parallelo all'asse x, con $c_1 < Y < c_2$ e tutto costituito di punti nei quali è $\Omega(x, Y) > 0$, dalla (84) tenendo conto della (79) e della (74) si ottiene

$$\frac{\partial\,\Omega(x, Y)}{\partial\,x} = \\ = \frac{\partial\,\omega(x, y)}{\partial\,x} + \frac{1}{c_2 - c_1}\left[(c_2 - Y)\frac{d\,g^{[1]}(x)}{d\,x} + (Y - c_1)\frac{d\,g^{[2]}(x)}{d\,x}\right]\frac{\partial\,\omega(x, y)}{\partial\,y} \leq \\ \leq H(x)\,\omega(x, y) + \left[L(x) + \left|\frac{d\,g^{[1]}(x)}{d\,x}\right| + \left|\frac{d\,g^{[2]}(x)}{d\,x}\right|\right]\left|\frac{\partial\,\omega(x, y)}{\partial\,y}\right|,$$

ed anche per la (82)

$$(87) \qquad \Omega'_x(x, Y) \leq H(x)\,\Omega(x, Y) + \\ + \frac{c_2 - c_1}{g^{[2]}(x) - g^{[1]}(x)}\left[L(x) + \left|\frac{d\,g^{[1]}(x)}{d\,x}\right| + \left|\frac{d\,g^{[2]}(x)}{d\,x}\right|\right]|\,\Omega'_Y(x, Y)\,|\,.$$

Pertanto, posto

$$L^*(x) = \frac{c_2 - c_1}{g^{[2]}(x) - g^{[1]}(x)}\left[L(x) + \left|\frac{d\,g^{[1]}(x)}{d\,x}\right| + \left|\frac{d\,g^{[2]}(x)}{d\,x}\right|\right]$$

e procedendo in modo identico al n. 10 *b*), *c*) possiamo dire [cfr. la (67)] che, fatta eccezione per gli Y di E', la disuguaglianza

$$(88) \qquad \frac{\partial\,\Omega_n(x, Y)}{\partial\,x} \leq H_n(x)\,\Omega_n(x, Y) + L^*_n(x)\left|\frac{\partial\,\Omega_n(x, Y)}{\partial\,Y}\right| + [H_n(x) + L^*_n(x)]\,\mu_n$$

è verificata in ogni punto (x, Y) tale che sia

$$\Omega(u, Y) > 0, \qquad \text{per} \quad x - \lambda_n \leq u \leq x.$$

Allora riprendendo le considerazioni del n. 10 *d*), con l'avvertenza di sostituire, nelle (34) e (35) del n. 7 *c*), $2\mu_n$ al posto di μ_n, in virtù dell'analoga della (71) [vale a dire $\Omega_n(x_n, Y_n) = v_n(x_n)$] possiamo dire che esiste un numero $h_n > 0$ in modo che la disuguaglianza $\Omega(x, Y) > 0$ è verificata per ogni (x, Y) con

$$x_n - \lambda_n \leq x \leq x_n, \qquad Y_n - h_n \leq Y \leq Y_n + h_n,$$

vale a dire la (88) ha luogo per $x = x_n$ e per quasi tutti gli Y di $(Y_n - h_n, Y_n + h_n)$, e quindi anche per tutti gli Y di tale intervallo, perchè i due membri della (88) sono, nell'intervallo indicato, funzioni continue di Y. In particolare la (88) è verificata per $x = x_n$ e per $Y = Y_n$, e tutto il resto della dimostrazione procede in modo identico al n. 10, salvo qualche evidente particolare.

12. OSSERVAZIONI. *a*) — A entrambi i teoremi di unicità dei nn. 10 e 11 si può arrecare il complemento analogo a quello che ha formato oggetto del n. 9 del § 3.

b) Inoltre *il teorema di unicità del n. 11* (e così pure il relativo complemento indicato nell'*a*) del presente n°.) *è valido anche se è* $g^{[1]}(x) < g^{[2]}(x)$, *per* $0 \leq x < a$, *con*

$$g^{[1]}(a) = g^{[2]}(a).$$

Ciò è conseguenza immediata di considerazioni del tutto analoghe a quelle dell'osservazione del n. 7.