ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LANDOLINO GIULIANO

Sull'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata e appoggiata

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 3-4 (1952), p. 147-171

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_3-4_147_0>

SULL'EQUILIBRIO DI UNA PIASTRA INDEFINITA A FORMA DI STRISCIA, INCASTRATA E APPOGGIATA

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa)

In questo lavoro viene studiato il problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo un lato e appoggiata lungo l'altro lato, servendosi del metodo della trasformata di FOURIER. Il metodo è già stato adoperato dal GHIZZETTI [1] a proposito del problema dell'equilibrio della piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo i due lati. Naturalmente analogie molto strette intercorrono fra il problema qui trattato e quello considerato dal GHIZZETTI, e i risultati ottenuti da questo A., a parte necessarie e ovvie modificazioni, vengono soltanto, quando occorre, richiamati.

Dopo avere ottenuto, sotto ipotesi necessarie richieste per l'applicabilità del metodo, riguardanti i dati e la soluzione, una formula risolutiva del problema considerato, e dopo avere dettagliatamente studiato l'equazione degli autovalori, viene dato uno sviluppo in serie uniformemente convergente della funzione di GREEN, sviluppo che mette in evidenza, in modo simmetrico, le autosoluzioni del problema. A differenza però del problema trattato da GHIZZETTI, il problema qui considerato presenta una dissimetria rispetto alle condizioni al contorno. Allo scopo di arrivare in modo naturale a stabilire lo sviluppo in serie a cui si è accennato della funzione di GREEN, s'è pensato di considerare accanto al problema qui trattato il problema che si ottiene quando, fermo restando lo sforzo, si prescriva la condizione dell'incastro al lato della striscia prima soggetto ad appoggio e viceversa: questo

---

(1) A. GHIZZETTI. «*Ricerche analitiche sul problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo i due lati*» Rendiconti di matematica e sue applicazioni, Roma, 1947, pp. 145-187.

problema che possiamo dire ausiliario possiede gli stessi autovalori del problema dato. Ciò ha permesso di esprimere in modo rapido ed elegante l'autosoluzione del problema ausiliario per mezzo dell'autosoluzione del problema che è qui studiato, autosoluzioni entrambe corrispondenti allo stesso autovalore.

Dopo avere indicate le proprietà della funzione di GREEN, si arriva a stabilire che la funzione espressa dalla formula risolutiva fornita dal metodo, sotto opportune ipotesi sui dati, che sono identiche a quelle imposte da GHIZZETTI pel Suo problema, dà una soluzione del problema qui studiato, rilevando che essa gode di un comportamento all'infinito analogo a quello di cui gode la soluzione, fornita dal metodo, del problema trattato da GHIZZETTI.

*
* *

1. Sia $0 \leq x \leq 1$, $-\infty < y < +\infty$ la striscia S. Supposto che essa sia incastrata lungo il lato $x=1$ e appoggiata lungo il lato $x=0$, il problema propostoci equivale a quello di determinare una funzione $u(x, y)$ soddisfacente all'equazione

$$\Delta \Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \text{in} \quad S - FS \tag{1}$$

dove $f(x, y)$ è una funzione nota, e alle condizioni:

$$u(0, y) = u(1, y) = u_x(1, y) = u_{xx}(0, y) = 0 \,. \tag{2}$$

Sia λ un parametro reale. Se la $f(x, y)$ possiede, come funzione di y, la trasformata di FOURIER $f^*(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda y} f(x, y)\, dy$, e se la funzione incognita $u(x, y)$ soddisfa alle stesse ipotesi ammesse da GHIZZETTI [2], si vede facilmente che la trasformata di FOURIER della $u(x, y)$, $u^*(x, \lambda)$, soddisfa all'equazione differenziale del quarto ordine (nella funzione incognita $v(x, \lambda)$):

$$v^{\mathrm{IV}} - 2\lambda^2 v'' + \lambda^4 v = f^* \tag{3}$$

(dove le derivazioni s'intendono eseguite rispetto a x) e alle condizioni:

$$v(0, \lambda) = v''(0, \lambda) = v(1, \lambda) = v'(1, \lambda) = 0 \tag{4}$$

---

[2] loc. cit. [1] pp. 147-148.

Se $\alpha_1(x, \lambda)$, $\alpha_2(x, \lambda)$, $\alpha_3(x, \lambda)$, $\alpha_4(x, \lambda)$ sono quattro integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea:

$$v^{IV} - 2\lambda^2 v'' + \lambda^4 v = 0 \tag{5}$$

e se $K(x, \lambda)$ è l'integrale della (5) soddisfacente alle condizioni:

$$K(0, \lambda) = K'(0, \lambda) = K''(0, \lambda) = 0 \qquad K'''(0, \lambda) = 1$$

si ha, com'è facile constatare, che la $u^*(x, \lambda)$ è della forma:

$$u^*(x, \lambda) = A\,\alpha_1(x, \lambda) + B\,\alpha_2(x, \lambda) + C\,\alpha_3(x, \lambda) + D\,\alpha_4(x, \lambda) + \\ + \int_0^x K(x - \xi, \lambda) f^*(\xi, \lambda)\, d\,\xi$$

dove le costanti A, B, C, D, vanno determinate in modo che siano soddisfatte le (4).

Ora, per la (5), si ha $K^{IV}(0, \lambda) = 0$. Ne segue che $K(x, \lambda)$ e $K''(x, \lambda)$ sono due integrali (linearmente) indipendenti della (5), soddisfacenti alle prime due delle (4). Perciò, imponendo alla $u^*(x, \lambda)$ di soddisfare alle prime due delle (4) si trova che $u^*(x, \lambda)$ è della forma:

$$u^*(x, \lambda) = A\,K(x, \lambda) + B\,K''(x, \lambda) + \\ + \int_0^x K(x - \xi, \lambda) f^*(\xi, \lambda)\, d\,\lambda \tag{6}$$

dove le costanti A e B dovranno determinarsi in modo da soddisfare alle ultime due delle (4) Essendo:

$$\frac{d\,u^*}{d\,x} = A\,K'(x, \lambda) + B\,K'''(x, \lambda) + \int_0^x K'(x - \xi, \lambda) f^*(\xi, \lambda)\, d\,\xi$$

si ha dunque:

$$\left\{\begin{aligned} &A\,K(1, \lambda) + B\,K''(1, \lambda) + \int_0^1 K(1 - \xi, \lambda) f^*(\xi, \lambda)\, d\,\xi = 0 \\ &A\,K'(1, \lambda) + B\,K'''(1, \lambda) + \int_0^1 K'(1 - \xi, \lambda) f^*(\xi, \lambda)\, d\,\xi = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Detto Δ il determinante di questo sistema lineare nelle incognite A e B si ha:

$$\Delta = K(1, \lambda) K'''(1, \lambda) - K'(1, \lambda) K''(1, \lambda)$$

Poichè si trova:

$$K(x, \lambda) = \frac{-\operatorname{senh} \lambda x + \lambda x \cosh \lambda x}{2 \lambda^3}, \qquad K'(x, \lambda) = \frac{x \operatorname{senh} \lambda x}{2 \lambda}$$

$$K''(x, \lambda) = \frac{\operatorname{senh} \lambda x + \lambda x \cosh \lambda x}{2 \lambda}, \qquad K'''(x, \lambda) = \frac{2 \cosh \lambda x + \lambda x \operatorname{senh} \lambda x}{2}$$

risulta:

$$\Delta = \frac{\lambda - \operatorname{senh} \lambda \cosh \lambda}{2 \lambda^3}.$$

Dunque, tenendo presente che $\lambda = 0$ *non* è autovalore del problema omogeneo associato, com'è facile constatare, possiamo affermare: *il problema omogeneo associato ha come autovalori λ le radici non nulle dell'equazione trascendente :*

$$\operatorname{senh} 2 \lambda = 2 \lambda .$$

Essendo queste tutte complesse, *si conclude pertanto che le relazioni :*

$$\frac{\partial^4 u^*(x, \lambda)}{\partial x^4} - 2 \lambda^2 \frac{\partial^2 u^*(x, \lambda)}{\partial x^2} + \lambda^4 u^*(x, \lambda) = f^*(x, \lambda)$$

$$u^*(0, \lambda) = u^*_{xx}(0, \lambda) = u^*(1, \lambda) = u^*_x(1, \lambda) = 0$$

determinano univocamente, per ogni λ reale, la trasformata $u^*(x, \lambda)$ della $u(x, y)$.

2. — Dalla (7) si ricavano le costanti A e B; sostituiti i valori ottenuti nella (6) si perviene alla formula:

$$u^*(x, \lambda) = \frac{1}{4} \int_0^1 H(x, \xi, \lambda) f^*(\xi, \lambda) d\xi \tag{8}$$

avendo posto, per $0 \leq \xi \leq x$:

$$H(x, \xi, \lambda) = \frac{8\lambda^3}{\lambda - \operatorname{senh}\lambda\cosh\lambda} \Big\{ -K'''(1, \lambda) K(x, \lambda) K(1-\xi, \lambda) + \\ + K'(1, \lambda) K''(x, \lambda) K(1-\xi, \lambda) + \\ + K''(1, \lambda) K(x, \lambda) K'(1-\xi, \lambda) - \\ - K(1, \lambda) K''(x, \lambda) K'(1-\xi, \lambda) + \\ + \frac{\lambda - \operatorname{senh}\lambda\cosh\lambda}{2\lambda^3} K(x-\xi, \lambda) \Big\}$$

e, per $x \leq \xi \leq 1$:

$$H(x, \xi, \lambda) = \frac{8\lambda^3}{\lambda - \operatorname{senh}\lambda\cosh\lambda} \Big\{ -K'''(1, \lambda) K(x, \lambda) K(1-\xi, \lambda) + \\ + K'(1, \lambda) K''(x, \lambda) K(1-\xi, \lambda) + \\ + K''(1, \lambda) K(x, \lambda) K'(1-\xi, \lambda) - \\ - K(1, \lambda) K''(x, \lambda) K'(1-\xi, \lambda) \Big\}$$

Si trova, per $0 \leq \xi \leq x$:

$$H(x, \xi, \lambda) = \frac{4}{\lambda^3(2\lambda - \operatorname{senh}2\lambda)} \Big\{ \cosh^2\lambda \operatorname{senh}\lambda x \operatorname{senh}\lambda\xi - \operatorname{senh}\lambda\cosh\lambda\cosh\lambda x \operatorname{senh}\lambda\xi + \lambda\cosh\lambda x \operatorname{senh}\lambda\xi + \\ + \lambda x \operatorname{senh}\lambda\cosh\lambda\operatorname{senh}\lambda x \operatorname{senh}\lambda\xi - \lambda x\cosh^2\lambda\cosh\lambda x \operatorname{senh}\lambda\xi + \\ + \lambda\xi\operatorname{senh}\lambda\cosh\lambda\cosh\lambda x\cosh\lambda\xi - \lambda\xi\cosh^2\lambda\operatorname{senh}\lambda x\cosh\lambda\xi + \\ + \lambda^2\operatorname{senh}\lambda x\operatorname{senh}\lambda\xi - \lambda^2 x\operatorname{senh}\lambda x\operatorname{senh}\lambda\xi - \\ - \lambda^2\xi\cosh\lambda x\cosh\lambda\xi + \lambda^2 x\xi\cosh\lambda x\cosh\lambda\xi \Big\}$$

e si verifica facilmente che la $H(x, \xi, \lambda)$ è funzione simmetrica in (x, ξ) e funzione pari di λ e che è per $\lambda = 0$:

$$H(x, \xi, 0) = \frac{1}{3}\xi(1-x)^2(3x - x\xi^2 - 2\xi^2), \quad 0 \leq \xi \leq x.$$

Si constata poi che per $x \neq \xi$, $H(x, \xi, \lambda)$ *è un integrale dell'equazione omogenea* (5) *il quale soddisfa alle* (4).

Se si ammette ora che la soluzione $u(x, y)$ si possa dedurre dalla sua trasformata $u^*(x, \lambda)$ mediante la formula d'inversione:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \,{}^*\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y} u^*(x, \lambda)\, d\lambda$$

dove ${}^*\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}$ indica l'integrale principale di CAUCHY, si ha, per la (8):

$$u(x, y) = \frac{1}{8\pi} \,{}^*\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda y}\, d\lambda \int_0^1 H(x, \xi, \lambda)\, d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\eta} f(\xi, \eta)\, d\eta \tag{9}$$

e si può affermare:

Se il problema considerato possiede una soluzione $u(x, y)$ *soddisfacente alle ipotesi ammesse, essa è unica ed è data dalla* (9).

3. — Si supponga ora che nella (9) sia lecito invertire l'ordine delle integrazioni. Si trova, posto:

$$G(x, y, \xi, \eta) = {}^*\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} H(x, \xi, \lambda)\, e^{i\lambda(y-\eta)}\, d\lambda \tag{10}$$

cioè, tenendo presente che $H(x, \xi, \lambda)$ è funzione pari di λ:

$$G(x, y, \xi, \eta) = 2\int_0^{+\infty} H(x, \xi, \lambda) \cos[\lambda(y-\eta)]\, d\lambda \tag{11}$$

che è:

$$u(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_S G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{12}$$

La funzione $G(x, y, \xi, \eta)$ che è simmetrica in (x, ξ) e (y, η) così formalmente costruita, è la funzione di GREEN del nostro problema.

Ci proponiamo di far vedere che le formule scritte hanno senso e che, sotto opportune ipotesi sulla funzione $f(x, y)$, la (12) fornisce una soluzione del nostro problema.

4. — Prima di proseguire vogliamo studiare come sono distribuiti nel piano complesso λ gli autovalori λ_n del problema omogeneo associato al nostro problema (autovalori che, come già si è osservato, sono tutti complessi), vale a dire le radici *non nulle* dell'equazione:

$$(E) \qquad \operatorname{senh} 2\lambda = 2\lambda .$$

È evidente che se $\lambda = \frac{\alpha}{2} + i\frac{\beta}{2}$ è una radice della (E), lo sono anche

$$\bar{\lambda} = \frac{\alpha}{2} - i\frac{\beta}{2}, \; -\lambda = -\frac{\alpha}{2} - i\frac{\beta}{2}, \; -\bar{\lambda} = -\frac{\alpha}{2} + i\frac{\beta}{2} .$$

Perciò ci si può limitare a supporre $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Poniamo allora:

$$\lambda_n = \frac{\alpha_n}{2} + i\frac{\beta_n}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

e intendiamo che sia (3)

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$$

$$0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \ldots$$

Posto dunque $\lambda = \frac{\alpha}{2} + i\frac{\beta}{2}$, la (E) si scriverà:

$$\operatorname{senh}(\alpha + i\beta) = \alpha + i\beta$$

cioè, separando il reale dall'immaginario:

$$\begin{cases} \operatorname{senh}\alpha \,.\, \cos\beta = \alpha \\ \cosh\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta = \beta \end{cases}$$

Esaminiamo, anzitutto, il diagramma:

$$\beta = \arccos\frac{\alpha}{\operatorname{senh}\alpha}, \; \alpha \geq 0, \beta \geq 0 .$$

(3) Le radici non nulle della (E) sono tutte semplici.

Poichè

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{\alpha}{\operatorname{senh} \alpha} = 1 \, , \quad \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\alpha}{\operatorname{senh} \alpha} = 0$$

ne viene che la funzione $\beta = \arccos \frac{\alpha}{\operatorname{senh} \alpha}$ ha infinite determinazioni, ognuna delle quali è funzione continua (ad un sol valore) di α in

$$0 \leq \alpha < +\infty \, ,$$

ivi con derivate di tutti gli ordini, continue. La prima di esse è funzione crescente (di α) da 0 (incluso) a $\frac{\pi}{2}$. (escluso) e la retta $\beta = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto; la seconda determinazione è funzione decrescente (di α) da 2π (incluso) a $\frac{3\pi}{2}$ (escluso) e la retta $\beta = 3\frac{\pi}{2}$ è un asintoto; la terza è funzione crescente (di α) da 2π (incluso) a $\frac{5\pi}{2}$ (escluso) e la retta $\beta = \frac{5\pi}{2}$ è un asintoto; ecc. ecc. Ognuna di queste determinazioni ha nel punto $\alpha = 0$ derivata (destra), alternatamente, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Esaminiamo ora il diagramma della funzione:

$$\alpha = \operatorname{sett\,cosh} \frac{\beta}{\operatorname{sen}\beta} \, , \; \alpha \geq 0 \; , \; \beta \geq 0$$

cioè

$$\alpha = \log \left[\frac{\beta}{\operatorname{sen}\beta} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\operatorname{sen}^2\beta} - 1} \right] , \; \alpha \geq 0 \, , \; \beta \geq 0$$

Si trova :

$$\alpha'(\beta) = \frac{\operatorname{sen}\beta - \beta\cos\beta}{\operatorname{sen}^2\beta \sqrt{\frac{\beta^2}{\operatorname{sen}^2\beta} - 1}}$$

I punti nei quali $\alpha'(\beta) = 0$ sono le radici dell'equazione $\operatorname{tag}\beta = \beta$. Quelle, β_n, fra queste, per cui α è reale sono contenute negli intervalli $\left(2n\pi \, , \, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $n = 1, 2 \ldots$ e in ognuno di questi intervalli ve ne è una e una sola. Esse tendono all'infinito per $n \to +\infty$, e poichè $\beta_n^2 = \frac{\operatorname{sen}^2\beta_n}{\cos^2\beta_n}$ cioè $\frac{1}{\cos^2\beta_n} = 1 + \beta_n^2$ ne viene $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^2\beta_n = 0$, vale a dire i β_n tendono asintoticamente, per $n \to \infty$, a $2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Inoltre si vede che i corrispondenti α_n tendono all'infinito. Il diagramma cercato consta dunque di infinite curve che si possono facilmente tracciare. Con facili calcoli si trova, per il primo autovalore $\lambda_1 = \frac{\alpha_1}{2} + i\,\frac{\beta_1}{2}$ $(\alpha_1 > 0\,, \beta_1 > 0)$

$$\frac{\alpha_1}{2} = 1{,}384\ldots \qquad \frac{\beta_1}{2} = 3{,}749\ldots$$

e si hanno, com'è stato osservato, le limitazioni:

$$2\,n\,\pi < \beta_n < \left(2\,n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

e le formule asintotiche:

$$\alpha_n \backsim \text{sett}\cosh\left[2\,n + \frac{1}{2}\right]\pi$$

$$\beta_n \backsim \left(2\,n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad \text{quando } n \to \infty$$

5. — Procuriamoci ora l'espressione $v_n(x)$ dell'autosoluzione del nostro problema corrispondente all'autovalore λ_n. Basterà, per questo, porre, nella (6), $f^*(x\,,\lambda) \equiv 0$, $\lambda = \lambda_n$ e determinare le costanti A e B, non entrambe nulle, in modo da soddisfare al sistema:

$$\begin{cases} A\,K(1\,,\lambda_n) + B\,K''(1\,,\lambda_n) = 0 \\ A\,K'(1\,,\lambda_n) + B\,K'''(1\,,\lambda_n) = 0 \end{cases}$$

A questo sistema si soddisfa, con A e B non entrambe nulle, ponendo

$$A = c\,K''(1\,,\lambda_n)\,,\; B = -\,c\,K(1\,,\lambda_n)$$

essendo c una costante (complessa) arbitraria diversa da zero. Poniamo ad esempio

$$c = 2\cosh^2\lambda_n$$

Si ottiene dunque:

$$v_n(x) = 2\cosh^2\lambda_n\,.\,\{K''(1\,,\lambda_n)\,K(x\,,\lambda_n) - K(1\,,\lambda_n)\,K''(x\,,\lambda_n)\}\,.$$

Ci sarà utile procurarci anche l'espressione $\varphi_n(x)$ dell'autosoluzione del problema che si ottiene considerando, sempre per la stessa $f(x, y)$, la piastra S appoggiata lungo il lato $x = 1$ e incastrata lungo il lato $x = 0$, autosoluzione corrispondente all'autovalore λ_n^*. Ci si convince subito intanto che gli autovalori λ_n^* coincidono con gli autovalori λ_n del problema di cui ci occupiamo. Si trova, con considerazioni analoghe a quelle sviluppate sopra per arrivare all'espressione della $v_n(x)$, che la $\varphi_n(x)$ è data da

$$\varphi_n(x) = A\, K(x, \lambda_n) + B\, K'(x, \lambda_n)$$

dove le costanti A e B non entrambe nulle devono soddisfare al sistema

$$\begin{cases} A\, K(1, \lambda_n) + B\, K'(1, \lambda_n) = 0 \\ A\, K''(1, \lambda_n) + B\, K'''(1, \lambda_n) = 0 \end{cases}$$

e basta prendere ad esempio

$$A = -K'(1, \lambda_n) \quad , \quad B = -K(1, \lambda_n)$$

e perciò si ha:

$$\varphi_n(x) = K'(1, \lambda_n)\, K(x, \lambda_n) - K(1, \lambda_n)\, K'(x, \lambda_n) .$$

È chiaro che dal problema or ora considerato si passa al nostro problema ponendo $x = 1 - t$, dopo di che le $\varphi_n(x)$, autosoluzioni del problema che diciamo *ausiliario,* si mutano nelle $\varphi_n(1-t)$ e queste, a meno di un fattore costante, diverso da zero, che ora calcoleremo, si mutano nelle $v_n(t)$. Si ha dunque:

$$\varphi_n(1-t) = c_n\, v_n(t)$$

e perciò

$$\varphi_n''(1-t) = c_n\, v_n''(t)$$

e, in particolare, ponendo qui $t = 1$:

$$\varphi_n''(0) = c_n\, v_n''(1)$$

cioè, ricordando che $K''(0, \lambda_n) = 0$, $K'''(0, \lambda_n) = 1$:

$$-K(1, \lambda_n) = 2 \cosh^2 \lambda_n \,.\, c_n \,.\, \{[K''(1, \lambda_n)]^2 - K(1, \lambda_n)\, K^{IV}(1, \lambda_n)\}$$

ed eseguendo i calcoli:

$$-K(1, \lambda_n) = 2 \cosh^2 \lambda_n \,.\, c_n \,.\, \frac{\operatorname{senh}^2 \lambda_n}{\lambda_n^2}$$

ossia:

$$c_n = -\frac{K(1, \lambda_n)}{2\cosh^2 \lambda_n} \frac{\lambda_n^2}{\operatorname{senh}^2 \lambda_n}.$$

Dunque:

$$\varphi_n(1-t) = -K(1, \lambda_n) \frac{\lambda_n^2}{\operatorname{senh}^2 \lambda_n} \frac{v_n(t)}{2\cosh^2 \lambda_n}.$$

6. — Ciò premesso, consideriamo la funzione $H(x, \xi, \lambda)$, $0 \leq \xi \leq x \leq 1$ come funzione meromorfa in λ, per la quale gli autovalori del nostro problema sono poli del primo ordine. Indicando con $\varrho_n(x, \xi)$ il residuo di $H(x, \xi, \lambda)$ nel polo λ_n, si ha:

$$\varrho_n(x, \xi) = \lim_{\lambda \to \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) H(x, \xi, \lambda) =$$

$$= 8\lambda_n^3 \{-K'''(1, \lambda_n) K(\xi, \lambda_n) K(1-x, \lambda_n) +$$

$$+ K'(1, \lambda_n) K''(\xi, \lambda_n) K(1-x, \lambda_n) + K''(1, \lambda_n) K(\xi, \lambda_n) K'(1-x, \lambda_n) -$$

$$- K(1, \lambda_n) K''(\xi, \lambda_n) K'(1-x, \lambda_n)\} \cdot \lim_{\lambda \to \lambda_n} \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \operatorname{senh} \lambda \cosh \lambda}.$$

Essendo:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_n} \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \operatorname{senh} \lambda \cosh \lambda} = \lim_{\lambda \to \lambda_n} \frac{1}{1 - \operatorname{senh}^2 \lambda - \cosh^2 \lambda} = -\frac{1}{2\operatorname{senh}^2 \lambda_n}$$

$$K'''(1, \lambda_n) = \frac{K''(1, \lambda_n) K'(1, \lambda_n)}{K(1, \lambda_n)}$$

si ha:

$$\varrho_n(x, \xi) = -\frac{8\lambda_n^3}{2\operatorname{senh}^2 \lambda_n} \left\{ -\frac{K''(1, \lambda_n) K'(1, \lambda_n)}{K(1, \lambda_n)} K(\xi, \lambda_n) K(1-x, \lambda_n) + \right.$$

$$+ K'(1, \lambda_n) K''(\xi, \lambda_n) K(1-x, \lambda_n) + K''(1, \lambda_n) K(\xi, \lambda_n) K'(1-x, \lambda_n) -$$

$$\left. - K(1, \lambda_n) K''(\xi, \lambda_n) K'(1-x, \lambda_n) \right\} = \frac{4\lambda_n^3}{\operatorname{senh}^2 \lambda_n} \frac{1}{K(1, \lambda_n)} \{K''(1, \lambda_n) K(\xi, \lambda_n) -$$

$$- K(1, \lambda_n) K''(\xi, \lambda_n)\} \{K'(1, \lambda_n) K(1-x, \lambda_n) - K(1, \lambda_n) K'(1-x, \lambda_n)\} =$$

$$= \frac{4\lambda_n^3}{\operatorname{senh}^2 \lambda_n} \frac{1}{K(1, \lambda_n)} \frac{v_n(\xi)}{2\cosh^2 \lambda_n} \varphi_n(1-x) = -$$

$$- \frac{4\lambda_n^3}{\operatorname{senh}^2 \lambda_n} \frac{v_n(x)}{K(1, \lambda_n)} \frac{v_n(\xi)}{2\cosh^2 \lambda_n} \frac{K(1, \lambda_n)}{2\cosh^2 \lambda_n} \frac{\lambda_n^2}{\operatorname{senh}^2 \lambda_n}$$

e tenendo presente che $\lambda_n = \operatorname{senh} \lambda_n \cosh \lambda_n$ si ottiene:

$$\varrho_n(x, \xi) = -\lambda_n v_n(x) v_n(\xi)$$

che, infatti per la sua simmetria, vale anche se $x \leq \xi \leq 1$.

7. — Studiamo ora le proprietà della funzione $G(x, y, \xi, \eta)$ espressa dalla (11) del n. 3, e delle sue derivate parziali rispetto alle variabili x, y. Conviene porre la funzione $H(x, \xi, \lambda)$ sotto la forma:

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4$$

dove è

$$H_1 = \frac{[1 + \lambda \mid x - \xi \mid] e^{-\lambda|x-\xi|} - [1 + \lambda(x+\xi) + 2\lambda^2 x \xi] e^{-\lambda(x+\xi)}}{\lambda^3}$$

$$H_2 = \frac{[1 + \lambda(2 + x - \xi) + 2\lambda^2(1 + x - \xi)] e^{-\lambda(2+x-\xi)}}{\lambda^3} -$$

$$- \frac{[1 + \lambda(2 - x - \xi) + 2\lambda^2(1 - x)(1 - \xi)] e^{-\lambda(2-x-\xi)}}{\lambda^3}$$

$$H_3 = 2x\xi \frac{e^{-\lambda(x+\xi)} - e^{-\lambda(2+x+\xi)}}{\lambda}$$

$$H_4 = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3 D(\lambda)} \{ - 2\lambda^2 x \xi e^{-\lambda(1+x-\xi)} +$$

$$+ [1 + \lambda(2 - x + \xi) + 2\lambda^2(1 - x)(1 + \xi)] e^{-\lambda(1-x+\xi)} -$$

$$- [1 + \lambda(2 + x + \xi) + 2\lambda^2(1 + x + \xi)] e^{-\lambda(1+x+\xi)} +$$

$$+ [1 + \lambda(4 + x - \xi) + 4\lambda^2(2 + x - \xi) + 8\lambda^3(1 + x - \xi)] e^{-\lambda(3+x-\xi)} +$$

$$+ [1 - \lambda(x - \xi)] e^{-\lambda(3-x+\xi)} - [1 + \lambda(x + \xi) + 8\lambda^3 x \xi] e^{-\lambda(3+x+\xi)} -$$

$$- [1 + \lambda(4 - x + \xi) + 4\lambda^2(2 - x - \xi) + 8\lambda^3(1 - x)(1 - \xi)] e^{-\lambda(3-x-\xi)} +$$

$$+ [1 + \lambda (2 + x - \xi) + 2 \lambda^2 (1 + x - \xi)] e^{-\lambda(5+x-\xi)} -$$

$$- [1 + \lambda (2 - x - \xi) + 2 \lambda^2 (1 - x)(1 - \xi)] e^{-\lambda(5-x-\xi)} - 2 \lambda^2 x \xi e^{-\lambda(5+x+\xi)} \}$$

essendo

$$D(\lambda) = 1 - 4 \lambda e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda} .$$

Si ponga:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

con

$$G_i = 2 \int_0^{+\infty} H_i \cos [\lambda (y - \eta)] \, d \lambda \qquad (i = 1, 2, 3, 4) . \tag{13}$$

Si trova (4)

$$G_1 = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \log \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{\sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2}} + 2 x \xi$$

$$G_2 = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \log \frac{\sqrt{(2 + x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{\sqrt{(2 - x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} - 2 x (2 - \xi)$$

Tenendo presente l'eguaglianza:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-b\lambda} - e^{-a\lambda}}{\lambda} \cos \alpha \lambda \, d \lambda = \log \frac{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}{\sqrt{b^2 + \alpha^2}}$$

si ha:

$$G_3 = 4 x \xi \log \frac{\sqrt{(2 + x + \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{\sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2}} .$$

Con ragionamento noto (5) si prova che la funzione $G_4(x, y, \xi, \eta)$ è *continua nel dominio* $T : (0 \leq x \leq 1 , 0 \leq \xi \leq 1 , - \infty < y < + \infty ,$ $- \infty < \eta < + \infty)$ insieme a tutte le derivate $\dfrac{\partial^{m+n} G_4}{\partial x^m \partial y^n}$ *e si ha:*

$$\frac{\partial^{m+n} G_4}{\partial x^m \partial y^n} = 2 \int_0^{\infty+} \frac{\partial^m H_4}{\partial x^m} \frac{\partial^n \cos [\lambda (y - \eta)]}{\partial y^n} \, d \lambda .$$

---

(4) loc. cit. (1) p. 154.

(5) loc. cit. (1) pp. 152-153.

Si sa poi [6] che le G_1 e G_2 sono, in T, funzioni continue insieme alle derivate parziali $\frac{\partial G_1}{\partial x}, \frac{\partial G_1}{\partial y}, \frac{\partial G_2}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial y}$, derivate che si possono calcolare derivando sotto il segno i corrispondenti integrali (13).

Si trova infine:

$$\frac{\partial G_3}{\partial x} = 4\,\xi \log \frac{\sqrt{(2+x+\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}} +$$

$$+ 4\,x\,\xi \left\{ \frac{2+x+\xi}{(2+x+\xi)^2+(y-\eta)^2} - \frac{x+\xi}{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2} \right\}$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial y} = 4\,x\,\xi \left\{ \frac{y-\eta}{(2+x+\xi)^2+(y-\eta)^2} - \frac{y-\eta}{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2} \right\}.$$

Ne viene che G_3, $\frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_3}{\partial y}$ sono funzioni continue in T. Si verifica poi facilmente che queste due derivate si possono ottenere anche derivando sotto il segno, in T, il corrispondente integrale (13).

Se infine si tiene presente che H è identicamente nulla per $x = 0$ e per $x = 1$ e che $\frac{\partial H}{\partial x}$ è identicamente nulla per $x = 1$, si conclude, raccogliendo quanto si è detto. col seguente:

TEOREMA. — *La funzione $G(x, y, \xi, \eta)$ e le sue derivate $\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}$ sono funzioni continue nel dominio $T\,(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq \xi \leq 1,\ -\infty < y < +\infty,\ -\infty < \eta < +\infty)$. Queste due derivate si possono calcolare colla* (11) *derivando sotto il segno di integrale. La G si annulla identicamente per $x = 0$ e per $x = 1$ e la $\frac{\partial G}{\partial x}$ si annulla identicamente per $x = 1$.*

8. — Passiamo ora a studiare le derivate successive della funzione G. Esaminiamo anzitutto le funzioni G_2 e G_3. Con il solito ragionamento [7] si stabilisce l'uniforme convergenza degli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^m H_2}{\partial x^m} \cos[\lambda(y-\eta)]\, d\lambda, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\partial^m H_3}{\partial x^m} \cos[\lambda(y-\eta)]\, d\lambda, \ldots\ldots$$

---

(6) loc. cit. (1) pp. 154-155.

(7) loc. cit. (1) pp. 152-153.

nell'insieme $\left[0 \leq x \leq 1,\ \varepsilon \leq \xi \leq 1 - \varepsilon,\ -\infty < y < +\infty,\ -\infty < \eta < +\infty\right.$ dove $\left. 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right]$ e anche nell'insieme $\left[\varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon,\quad 0 \leq \xi \leq 1,\right.$ $\left. -\infty < y < +\infty,\ -\infty < \eta < +\infty,\ \text{dove } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right]$ e si conclude che tutte le derivate parziali $\frac{\partial^{m+n} G_2}{\partial x^m \partial y^n}$, $\frac{\partial^{m+n} G_3}{\partial x^m \partial y^n}$ sono continue nell'insieme $T' : [0 \leq x \leq 1,\ 0 < \xi < 1,\ -\infty < y < +\infty,\ -\infty < \eta < +\infty]$ e anche nell'insieme T'': $[0 < x < 1,\ 0 \leq \xi \leq 1,\ -\infty < y < +\infty,\ -\infty < \eta < +\infty]$ ed espresse, in ognuno di questi due insiemi, dalle uguaglianze:

$$\frac{\partial^{m+n} G_2}{\partial x^m \partial y^n} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\partial^m H_2}{\partial x^m} \frac{\partial^n \cos[\lambda (y - \eta)]}{\partial y^n} d\lambda$$

$$\frac{\partial^{m+n} G_3}{\partial x^m \partial y^n} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\partial^m H_3}{\partial x^m} \frac{\partial^n \cos[\lambda (y - \eta)]}{\partial y^n} d\lambda .$$

Quanto a G_1, si ha (8), nell'insieme T' e anche in T'':

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = 2 \log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \frac{2(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \text{termini finiti e continui}$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y} = \frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \text{termini finiti e continui}$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2} = 2 \log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} - \frac{2(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} + \text{termini finiti e continui}$$

e si hanno singolarità se, nella striscia S, il punto (x, y) coincide col punto (ξ, η). Quando il primo punto è distinto dal secondo punto le derivate ora scritte si possono calcolare derivando sotto il segno il corrispondente integrale (13). Tenendo presente quanto è stato detto nel n. 7 a proposito della funzione G_4 si ha, per tutto quello che qui è stato detto, in particolare, l'uguaglianza

$$\frac{\partial^2 G(0, \xi, y, \eta)}{\partial x^2} = \int_0^{+\infty} H_{xx}(0, \xi, \lambda) \cos[\lambda (y - \eta)]\, d\lambda = 0$$

---

(8) loc. cit. (1) p. 156.

identicamente rispetto a $\xi\,(0<\xi<1)$, $y\,(-\infty<y<+\infty)$ e $\eta\,(-\infty<\eta+\infty)$, essendo, come fu osservato nel n. 4, $H_{xx}(0,\xi,\lambda)=0$ identicamente rispetto a $\xi\,(0<\xi<1)$ e a $\lambda\,(-\infty<\lambda<+\infty)$.

Quel che qui è stato detto, quel che ha stabilito GHIZZETTI [9] e quel che è stato detto nel n. 7 sulla funzione G_4, permette di enunciare il seguente:

TEOREMA. — *Le derivate parziali di* 2^0, 3^0, 4^0, *ordine rispetto alle variabili* x, y, *della funzione* $G(x, y, \xi, \eta)$ *sono finite e continue nell'insieme* T': $0\leq x\leq 1$, $0<\xi<1$, $-\infty<y<+\infty$, $-\infty<\eta<+\infty$ *e anche nell'insieme* T'': $0<x<1$, $0\leq\xi\leq 1$, $-\infty<y<+\infty$, $-\infty<\eta<+\infty$, *salvo che per* $x=\xi$, $y=\eta$.

Le singolarità che ivi presentano tali derivate sono definite dalle

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} &= 2\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\frac{2(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\text{termini finiti e continui}\\
\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y} &= \frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\text{termini finiti e continui}\\
\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} &= 2\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}-\frac{2(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\text{termini finiti e continui}
\end{aligned}\right.$$

e dalle uguaglianze che si ottengono derivandole parzialmente una o due volte.

Sussiste la formula :

$$\frac{\partial^{m+n} G}{\partial x^m\,\partial y^n}=2\int_0^{+\infty}\frac{\partial^m H}{\partial x^m}\,\frac{\partial^n\cos[\lambda(y-\eta)]}{\partial y^n}\,d\lambda \qquad (m+n=2,\,3,\,4)$$

con $m+n=2$ *se* $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2>0$, *con* $m+n=3{,}4$ *se* $x\neq\xi$.

La funzione $G(x, y, \xi, \eta)$, *pensata come funzione di* x, y, *soddisfa nei punti interni di* S, *diversi dal punto* (ξ, η) *all'equazione :*

$$\Delta\Delta G=0\,.$$

Inoltre si ha

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_{x=0}=0$$

identicamente rispetto a ξ, $0<\xi<1$, y, $-\infty<y<+\infty$ *e* η, $-\infty<\eta<+\infty$.

---

[9] loc. cit. [1] pp. 157-158.

9. — Scopo di questo n°. è quello di stabilire uno sviluppo in serie della funzione di GREEN uniformemente convergente nel dominio T: $(0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < \eta < +\infty)$, sviluppo che mette in evidenza, in modo simmetrico, le autosoluzioni del problema [10]. Da ciò dedurremo, in particolare, il comportamento all'infinito della funzione G e delle sue derivate.

Riprendiamo l'espressione (10) di $G(x, y, \xi, \eta)$. Essa si può scrivere, ricordando che la $H(x, \xi, \lambda)$ è funzione pari di λ:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \int_{-\infty}^{*+\infty} H(x, \xi, \lambda)\, e^{i\lambda|y-\eta|}\, d\lambda$$

dove l'integrazione va eseguita lungo l'asse reale. Consideriamo ora nel piano della variabile complessa $\lambda = \mu + i\nu$ il rettangolo R_k così definito:

$$-K \leq \mu \leq K, \quad 0 \leq \nu \leq \left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad (N \text{ intero positivo, } 2K > \alpha_N)$$

essendo, come fu convenuto, $\lambda_n = \dfrac{\alpha_n}{2} + i\dfrac{\beta_n}{2}$. Il rettangolo R_k contiene nel suo interno i $2n$ poli

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, \quad -\bar{\lambda}_1, -\bar{\lambda}_2, \ldots, -\bar{\lambda}_N.$$

Il residuo di $H(x, \xi, \lambda)$ nel polo $-\bar{\lambda}_n$ è $-\overline{\varrho_n(x, \xi)}$ (dove $\overline{\varrho_n(x, \xi)}$ è il complesso coniugato di $\varrho_n(x, \xi)$). Si ha dunque, pel teorema dei residui, indicando con FR_k la frontiera del rettangolo R_k:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{FR_k} H(x, \xi, \lambda)\, e^{i\lambda|y-\eta|}\, d\lambda = \sum_{n=1}^{N} e^{i\lambda_n|y-\eta|}\, \varrho_n(x, \xi) - \sum_{n=1}^{N} e^{-i\bar{\lambda}_n|y-\eta|} \cdot \overline{\varrho_n(x, \xi)}$$

cioè ponendo

$$\varrho_n(x, \xi) = a_n(x, \xi) + i\, b_n(x, \xi)$$

---

[10] Solo per maggior chiarezza abbiamo preferito riportare qui sostanzialmente le linee generali di un ragionamento di GHIZZETTI (loc. cit. [1]) p. 161 e pp. 176 e segg.).

$$\int_{FR_k} H(x, \xi, \lambda)\, e^{i\lambda|y-\eta|}\, d\lambda = -4\pi \sum_{n=1}^{N} e^{-\frac{\beta_n}{2}|y-\eta|}\, I\left[e^{i\frac{\alpha_n}{2}|y-\eta|}\, \varrho_n(x, \xi)\right] (^{11}) =$$

$$= -4\pi \sum_{n=1}^{N} e^{-\frac{\beta_n}{2}|y-\eta|} \left[a_n(x, \xi) \operatorname{sen} \frac{\alpha_n}{2}|y-\eta| + b_n(x, \xi) \cos \frac{\alpha_n}{2}|y-\eta|\right] =$$

$$= 4\pi \sum_{n=1}^{N} e^{-\frac{\beta_n}{2}|y-\eta|}\, I\left[e^{i\frac{\alpha_n}{2}|y-\eta|}\, \lambda_n v_n(x)\, v_n(\xi)\right]$$

ossia:

$$\int_{-k}^{k} H(x, \xi, \mu)\, e^{i\mu|y-\eta|}\, d\mu + \int_{0}^{\left(2N+\frac{1}{2}\right)\pi} H(x, \xi, K + i\nu)\, e^{i(k+i\nu)|y-\eta|}\, i\, d\nu +$$

$$+ \int_{k}^{-k} H\left[x, \xi, \mu + i\left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi\right] e^{i\left[\mu + i\left(2N+\frac{1}{2}\right)\pi\right]|y-\eta|}\, d\mu +$$

$$+ \int_{\left(2N+\frac{1}{2}\right)\pi}^{0} H(x, \xi, -K + i\nu)\, e^{i(-k+i\nu)|y-\eta|}\, i\, d\nu =$$

$$= -4\pi \sum_{n=1}^{N} e^{-\frac{\beta_n}{2}|y-\eta|} \left[a_n(x, \xi) \operatorname{sen} \frac{\alpha_n}{2}|y-\eta| + b_n(x, \xi) \cos \frac{\alpha_n}{2}|y-\eta|\right].$$

Tenendo presente la decomposizione:

$$H = \frac{A + e^{-2\lambda} B + e^{-4\lambda} C}{\lambda^3 D(\lambda)}$$

dove:

$$A = [1 + \lambda(x - \xi)]\, e^{-\lambda(x-\xi)} - [1 + \lambda(x + \xi)]\, e^{-\lambda(x+\xi)}$$

$$\begin{aligned} B = {} & [1 - \lambda(2 - x + \xi) + 2\lambda^2(1 - x)(1 + \xi)]\, e^{-\lambda(x-\xi)} + \\ & + [1 + \lambda(2 - x + \xi) + 2\lambda^2(1 - x)(1 + \xi)] \,.\, e^{\lambda(x-\xi)} - \\ & - [1 - \lambda(2 - x - \xi) + 2\lambda^2(1 - x)(1 - \xi)]\, e^{-\lambda(x+\xi)} - \\ & - [1 + \lambda(2 - x - \xi) + 2\lambda^2(1 - x)(1 - \xi)]\, e^{\lambda(x+\xi)} \end{aligned}$$

---

(11) Dato un numero complesso z, i simboli $R(z)$ e $I(z)$ indicano, rispettivamente, la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di z.

$$C = [1 - \lambda (x - \xi)]\, e^{\lambda(x-\xi)} - [1 - (x + \xi)]\, e^{\lambda(x+\xi)}$$

$$D(\lambda) = 1 - 4\, \lambda\, e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda}$$

si prova facilmente (12) che il secondo e il quarto integrale tendono a zero per $K \to \infty$, uniformemente rispetto a ν $\left[0 \leq \nu \leq \left(2\,N + \frac{1}{2}\right)\pi\right]$. Si arriva pertanto, facendo tendere K all'infinito, alla formula:

$$G(x\,,y\,,\xi\,,\eta) =$$

$$= -\,4\,\pi \sum_{n=1}^{N} e^{-\frac{\beta_n}{2}|y-\eta|} \left[a_n(x\,,\xi)\,\text{sen}\,\frac{\alpha_n}{2}\,|\,y-\eta\,| + b_n(x\,,\xi)\cos\frac{\alpha_n}{2}\,|\,y-\eta\,|\right] +$$

$$+\, e^{-\left(2N+\frac{1}{2}\right)\pi|y-\eta|} \int\limits_{-\infty}^{*+\infty} H\left[x\,,\xi\,,\mu + i\left(2\,N + \frac{1}{2}\right)\pi\right] e^{i\mu|y-\eta|}\, d\,\mu\,.$$

Vogliamo ora provare che *vale il seguente sviluppo in serie, uniformemente convergente nel dominio T*:

$$G(x\,,y\,,\xi\,,\eta) =$$

$$= -\,4\,\pi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n}{2}|y-\eta|} \left[a_n(x\,,\xi)\,\text{sen}\,\frac{\alpha_n}{2}\,|\,y-\eta\,| + b_n(x\,,\xi)\cos\frac{\alpha_n}{2}\,|\,y-\eta\,|\right] =$$

$$= 4\,\pi \sum_{n=1}^{\infty} I\,[\lambda_n\, e^{i\lambda_n|y-\eta|}\, v_n(x)\, v_n(\xi)]\,.$$

Dimostreremo che si ha:

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{*+\infty} H\left[x\,,\xi\,,\mu + i\left(2\,N + \frac{1}{2}\right)\pi\right] e^{i\mu|y-\eta|}\, d\,\mu = 0$$

uniformemente in T.

Poichè, essendo $H(x\,,\xi\,,\lambda)$ funzione pari di λ, si può scrivere:

$$\int\limits_{-\infty}^{*+\infty} H\left[x\,,\xi\,,\mu + i\left(2\,N + \frac{1}{2}\right)\pi\right] e^{i\mu|y-\eta|}\, d\,\mu =$$

$$= 2\,R\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H\left[x\,,\xi\,,\mu + i\left(2\,N + \frac{1}{2}\right)\pi\right] e^{i\mu|y-\eta|}\, d\,\mu\right]$$

---

(12) loc. cit. (1) p. 161.

basterà provare che è, uniformemente in T:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H\left[x\,,\,\xi\,,\,\mu+i\left(2N+\frac{1}{2}\right)\pi\right] e^{i\mu|y-\eta|}\,d\mu=0\,.$$

Supponiamo $0\leq\xi\leq x$ e osserviamo che, dalla decomposizione poco sopra adoperata, si deduce che si può scrivere:

$$H(x\,,\xi\,,\lambda)=\frac{1}{D(\lambda)}\left\{\frac{K_0(x\,,\xi\,,\lambda)}{\lambda^3}+\frac{K_1(x\,,\xi\,,\lambda)}{\lambda^2}+\frac{K_2'(x\,,\xi\,,\lambda)+K_2''(x\,,\xi\,,\lambda)}{\lambda}\right\}$$

dove

$$K_0(x\,,\xi\,,\lambda)=e^{-\lambda(x-\xi)}-e^{-\lambda(x+\xi)}+e^{-\lambda(2+x-\xi)}+e^{-\lambda(2-x+\xi)}-e^{-\lambda(2+x+\xi)}-$$
$$-e^{-\lambda(2-x-\xi)}+e^{-\lambda(4-x+\xi)}-e^{-\lambda(4-x-\xi)}$$

$$K_1(x\,,\xi\,,\lambda)=(x-\xi)\,e^{-\lambda(x-\xi)}-(x+\xi)\,e^{-\lambda(x+\xi)}-(2-x+\xi)\,e^{-\lambda(2+x-\xi)}+$$
$$+(2-x+\xi)\,e^{-\lambda(2-x+\xi)}+(2-x-\xi)\,e^{-\lambda(2+x+\xi)}-(2-x-\xi)\,e^{-\lambda(2-x-\xi)}-$$
$$-(x-\xi)\,e^{-\lambda(4-x+\xi)}+(x+\xi)\,e^{-\lambda(4-x-\xi)}$$

$$K_2'(x\,,\xi\,,\lambda)=2\,(1-x)(1+\xi)\,e^{-\lambda(2+x-\xi)}+2\,(1-x)(1+\xi)\,e^{-\lambda(2-x+\xi)}-$$
$$-2\,(1-x)(1-\xi)\,e^{-\lambda(2+x+\xi)}$$

$$K_2''(x\,,\xi\,,\lambda)=-2\,(1-x)(1-\xi)\,e^{-\lambda(2-x-\xi)}\,.$$

Si riconosce subito che, essendo $0\leq\xi\leq x\leq 1$, sussistono per $0\leq\mu<+\infty$ le limitazioni seguenti:

$$\left|K_0\left[x\,,\xi\,,\mu+i\left(2N+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\right|\leq 8,\quad\left|K_1\left[x\,,\xi\,,\mu+i\left(2N+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\right|\leq 14$$

$$\left|K_2'\left[x\,,\xi\,,\mu+i\left(2N+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\right|\leq 8\,e^{-\mu}$$

Si può scrivere:

$$\int_0^{+\infty} H\left[x, \xi, \mu + i\left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi\right] e^{i\mu|y-\eta|}\, d\mu =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{K_0[\ldots]\, e^{i\mu|y-\eta|}}{\left[\mu + i\left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi\right]^3 D\left[\mu + i\left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi\right]}\, d\mu +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \frac{K_1[\ldots]\, e^{i\mu|y-\eta|}}{[\mu + \ldots]^2\, D[\ldots]}\, d\mu + \int_0^{+\infty} \frac{K_2'[\ldots]\, e^{i\mu|y-\eta|}}{[\mu + \ldots]\, D[\ldots]}\, d\mu +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \frac{K_2''[\ldots]\, e^{i\mu|y-\eta|}}{[\mu + \ldots]\, D[\ldots]}\, d\mu = I_0 + I_1 + I_2' + I_2''$$

Ciò premesso, proviamo che è:

$$\left| D\left[\mu + i\left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi\right]\right| > \sqrt{\left(\frac{2\mu}{\cosh 2\mu}\right)^2 + \left(1 - \frac{\cosh 2p_N}{\cosh 2\mu}\right)^2}$$

avendo posto

$$2\left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi = \cosh 2p_N$$

e perciò quando $N \to \infty$ è $p_N \to \infty$.

Poichè è

$$D(\lambda) = 1 - 4\lambda e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda}$$

si ha

$$D(\lambda) = 2e^{-2\lambda}\{\operatorname{senh} 2\lambda - 2\lambda\}$$

e dunque

$$D\left[\mu + i\left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi\right] = 2e^{-2\left\{\mu + i\left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}}\left[\frac{e^{2\left\{\mu + i\left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}} - e^{-2\left\{\mu + i\left(2N + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}}}{2} -\right.$$

$$\left. - 2\mu - 2i\left\{2N + \frac{1}{2}\right\}\pi\right] = -2e^{-2\mu}\left[\frac{-e^{2\mu} + e^{-2\mu}}{2} - 2\mu - 2i\left\{2N + \frac{1}{2}\right\}\pi\right] =$$

$$= -2\,e^{-2\mu}\left[-\frac{e^{2\mu}-e^{-2\mu}}{2} - 2\,\mu - 2\,i\left\{2\,N+\frac{1}{2}\right\}\pi\right] =$$

$$= 2\,e^{-2\mu}\left[2\,\mu + 2\,i\left\{2\,N+\frac{1}{2}\right\}\pi + \operatorname{senh} 2\,\mu\right]$$

e perciò

$$\left|D\left[\mu + i\left(2\,N+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\right| = 2\,e^{-2\mu}\sqrt{4\,\mu^2 + \operatorname{senh}^2 2\,\mu + 4\left(2\,N+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2} =$$

$$= 2e^{-2\mu}\cosh 2\mu\sqrt{\frac{4\,\mu^2}{\cosh^2 2\mu} + 1 - \frac{1}{\cosh^2 2\mu} + \frac{4\left(2N+\frac{1}{2}\right)\pi}{\cosh 2\mu} - \frac{4\left(2N+\frac{1}{2}\right)\pi}{\cosh 2\mu} + \frac{4\left(2N+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{\cosh^2 2\mu}} >$$

$$> \sqrt{\left(\frac{2\,\mu}{\cosh 2\,\mu}\right)^2 + \left(1 - \frac{\cosh 2\,p_N}{\cosh 2\,\mu}\right)^2}$$

essendo

$$2\,e^{-2\mu}\cosh 2\,\mu = e^{-4\mu} + 1 > 0$$

$$\frac{4\left(2\,N+\frac{1}{2}\right)\pi}{\cosh 2\,\mu} > \frac{1}{\cosh^2 2\,\mu}\,.$$

Poichè è (13)

$$\sqrt{\left(\frac{2\,\mu}{\cosh 2\,\mu}\right)^2 + \left(1 - \frac{\cosh 2\,p_N}{\cosh 2\,\mu}\right)^2} > \frac{2\,p_N}{\cosh 2\,p_N}\sqrt{1 - \frac{1}{2\,p_N}}$$

da quanto è stato provato si ricava dunque:

$$\left|D\left[\mu + i\left(2\,N+\frac{1}{2}\right)\pi\right]\right| > \frac{2\,p_N}{\cosh 2\,p_N}\sqrt{1 - \frac{1}{2\,p_N}}\,.$$

Usufruendo, fra l'altro, di questa diseguaglianza, si prova (14) che è $I_0, I_1, I_2', I_2'', \to 0$, quando $N \to \infty$, uniformemente in T e perciò rimane provata la validità dello sviluppo in serie della funzione di GREEN, in T, uniformemente, sviluppo annunciato all'inizio di questo n°.

---

(13) loc. cit. (1) pag. 185.

(14) loc. cit (1) p. 180 e segg.

Dallo sviluppo in serie:

$$G(x, y, \xi, \eta) =$$

$$= -4\pi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta_n}{2}|y-\eta|} \left[a_n(x, \xi) \operatorname{sen} \frac{\alpha_n}{2} \mid y - \eta \mid + b_n(x, \xi) \cos \frac{\alpha_n}{2} \mid y - \eta \mid \right]$$

moltiplicando ambo i membri per $e^{\frac{\beta_1}{2}|y-\eta|}$ si ottiene:

$$e^{\frac{\beta_1}{2}|y-\eta|} G(x, y, \xi, \eta) + 4\pi \left[a_1(x, \xi) \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{2} \mid y - \eta \mid + b_1(x, \xi) \cos \frac{\alpha_1}{2} \mid y - \eta \mid \right] =$$

$$= -4\pi \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\left[\frac{\beta_n}{2} - \frac{\beta_1}{2}\right]|y-\eta|} \left[a_n(x, \xi) \operatorname{sen} \frac{\alpha_n}{2} \mid y - \eta \mid + b_n(x, \xi) \cos \frac{\alpha_n}{2} \mid y - \eta \mid \right]$$

da cui, essendo per $n \geq 2$:

$$\beta_n > \beta_1$$

si ha che il primo membro è infinitesimo per $\mid y - \eta \mid \rightarrow \infty$ in *modo uniforme* rispetto a (x, ξ) e poichè tale primo membro è continuo in T e perciò limitato, ne viene che la funzione

$$e^{\frac{\beta_1}{2}|y-\eta|} G(x, y, \xi, \eta)$$

è limitata in T.

Un ragionamento perfettamente analogo si può fare per le funzioni $e^{\frac{\beta_1}{2}|y-\eta|} G_x(x, y, \xi, \eta)$, $e^{\frac{\beta_1}{2}|y-\eta|} G_y(x, y, \xi, \eta)$.

Possiamo dunque enunciare il

TEOREMA 1. — *Detto* $\frac{\beta_1}{2} = 3{,}749\ldots$ *il valore assoluto del coefficiente dell'immaginario delle radici non nulle e di minimo modulo dell'equazione trascendente* $\operatorname{senh} 2\lambda = 2\lambda$, *le funzioni* $e^{\frac{\beta_1}{2}|y-\eta|} G(x, y, \xi, \eta)$, $e^{\frac{\beta_1}{2}|y-\eta|} G_x(x, y, \xi, \eta)$, $e^{\frac{\beta_1}{2}|y-\eta|} G_y(x, y, \xi, \eta)$ *sono limitate nel dominio* $T: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < \eta < +\infty$.

Si può enunciare (15) poi il

TEOREMA 2. — *Se* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, *col solito significato della costante* β_1, *le funzioni*

$$e^{\frac{\beta_1}{2}|y-\eta|} \frac{\partial^{m+n} G}{\partial x^m \partial y^n} \qquad (m+n=2, 3, 4)$$

si mantengono limitate nel dominio $[\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon, 0 \leq \xi \leq 1, -\infty < y < +\infty, -\infty < \eta < +\infty, (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \geq \varepsilon^2]$ *e anche nel dominio* $[0 \leq x \leq 1, \varepsilon \leq \xi \leq 1-\varepsilon, -\infty < y < +\infty, -\infty < \eta < +\infty, (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \geq \varepsilon^2]$.

10. — Si arriva finalmente al seguente *teorema di esistenza.*

TEOREMA. — *Se* $f(x, y)$ *soddisfa alle seguenti ipotesi:*

I) *sia definita nella striscia* S, *e verifichi la condizione di Hölder, esistano cioè tre costanti positive* d, M, α *tali che per ogni coppia di punti* P, Q, *di* S *per cui sia* $\overline{PQ} < d$, *risulti* $|f(P) - f(Q)| < M \cdot \overline{PQ}^{\alpha}$

II) *la funzione* $e^{-\frac{\beta_1}{2}|y|} f(x, y)$ *sia integrabile in* S; *allora la funzione*

$$\text{(A)} \qquad u(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_S G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

soddisfa al nostro problema.

Ripetendo un ragionamento noto (16) si prova che la funzione $u(x, y)$ definita dalla (A) e continua nella striscia S, insieme alle sue derivate parziali prime $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ e che è

$$u(0, y) = u(1, y) = u_x(1, y) = 0$$

identicamente rispetto a y e, inoltre, che è, nell'interno di S:

$$\Delta \Delta u(x, y) = f(x, y)$$

Ci rimane da provare che è, identicamente rispetto a y:

$$u_{xx}(0, y) = 0 .$$

(15) loc. cit. (1) p. 165.
(16) loc. cit. (1) pp. 165-166.

Poichè dal teorema del n. 8 e dal teorema 2 del n. 9 risulta che la G_{xx} ha una singolarità logaritmica per $Q(0, \eta) \equiv P(0, y)$, con ragionamenti analoghi a quelli di GHIZZETTI si giustifica l'uguaglianza

$$u_{xx}(0, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_S G_{xx}(0, \xi, y, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

e perciò, essendo $G_{xx}(0, \xi, y, \eta) = 0$ identicamente rispetto a $\xi\ (0 < \xi < 1)$, $y\ (-\infty < y < +\infty)$ e $\eta\ (-\infty < \eta < +\infty)$, si ha, come volevasi, $u_{xx}(0, y) = 0$.

11. — Si prova (17) poi che è

$$\lim_{|y| \to \infty} \left[e^{-\frac{\beta_1}{2}|y|} u(x, y) \right] = 0 \text{ uniformemente per } 0 \leq x \leq 1 .$$

(17) loc. cit. (1) pp. 168-169.