ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CHERUBINO

Sopra certe famiglie di matrici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 1-2 (1952), p. 69-73
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_1-2_69_0>

SOPRA CERTE FAMIGLIE DI MATRICI

di SALVATORE CHERUBINO (a Pisa)

SUNTO: Richiamata la soluzione dell'A. delle equazioni differenziali lineari in un'algebra di matrici, si segnalano alcune famiglie di matrici più generali di altra indicata da C. C. MAC DUFFEE.

In una breve nota [1] C. C. MAC DUFFEE ha considerato una certa famiglia di matrici, che chiama lorentziane, le cui proprietà mi sembrano degne di attenzione.

Famiglie più generali godenti proprietà analoghe sono quelle qui considerate partendo da un'equazione differenziale lineare omogenea in matrici che invece di operare, come nel caso di MAC DUFFEE, su matrici funzioni di una variabile scalare, opera su funzioni olomorfe di matrici definite in un'algebra [2], la cui variabile indipendente non è necessariamente scalare. Anche per la matrice costante trasformata dalle soluzioni di un tal sistema ci mettiamo in condizioni più generali di quelle C. C. MAC DUFFEE.

---

[1] *Families of Lorentzian matrices* [Proc. Am. Mat. Soc., vol 2, n. 5, october 1951, pp. 794-797].

[2] Se non vado errato, il primo esplicito accenno a tali equazioni differenziali si trova in due mie Note lincee del 1937 [vol. XXV, s. 6, fasc 11-12, giugno 1937, pp. 541-547 e 686-690]. In esse non mi proponevo affatto, perchè cosa già da lungo tempo conosciuta, di risolvere con matrici un sistema di equazioni differenziali lineari omogenee, bensì di indicare classi di detti sistemi le cui soluzioni possono formalmente esprimersi proprio come si esprime la soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea di variabili scalari. In tali Note mi limitavo a considerare matrici funzioni olomorfe di una variabile scalare, ma avvertivo esplicitamente (v. ultimo n. della 2ª Nota) che i risultati ottenuti erano estensibili ai sistemi con coefficienti e variabili matrici. Di ciò si occupò egregiamente G. ZWIRNER: *Sui sistemi di equazioni differenziali lineari in un'algebra*... [Atti Ist. Ven. t. XCVII, p. II, 1937-38, pp. 513-534]. Contemporaneamente compariva la mia Nota: *Integrali di Volterra e funzioni olomorfe di matrici* [Annali Sc. Norm. Pisa, s. II, n. VII (1938) pp. 312-328] che eliminava dalla nozione di funzione olomorfa la condizione della commutatività dell'algebra in cui si opera e dava la soluzione, mediante l'integrale di Volterra esteso ivi introdotto, di un'equazione differenziale lineare omogenea, considerata in un'algebra di matrici, la cui variabile indipendente non è necessariamente scalare.

1. Ricordiamo che se x è una matrice variabile in un insieme perfetto $\mathfrak{I}$ di matrici di ordine n, privo di divisori dello zero, contenuto nella sottoalgebra centrale di un'algebra A complessa dotata di modulo e $P(x)$ è una matrice funzione olomorfa di x definita in A, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y' = y\, P(x)\,, \tag{1}$$

dove y è una matrice incognita di A che per $x = x_0$ assume la determinazione C, si risolve(3) con l'integrale (esteso) destro di Volterra $C\, V_* [P(x)]_{x_0}^{x}$.

Se C si suppone non degenere, anche y è non degenere almeno in un intorno abbastanza piccolo di x_0. Supporremo che y sia non degenere in tutto $\mathfrak{I}$ e che esista una matrice a, appartenente ad A, per la quale si ha:

$$P(x) \,.\, a = -\, a \,.\, P(x)_{-1} \tag{2}$$

essendo a indipendente da x.

Per $x = x_0$ si ponga

$$y(x_0) \,.\, a \,.\, y(x_0)_{-1} = b\,, \tag{3}$$

e mostriamo, come in MAC DUFFEE, che questa relazione vale qualunque sia x in $\mathfrak{I}$. Infatti, scrivendo

$$y(x) \,.\, a \,.\, y(x)_{-1} = z(x)$$

e derivando rispetto ad x, per la (1) si ha:

$$\frac{dz}{dx} = z'(x) = y(x)\,[P(x) \,.\, a + a \,.\, P(x)_{-1}]\, y(x)_{-1},$$

quindi, a causa della (2), $z'(x) = 0$ su tutto $\mathfrak{I}$, e perciò $z(x)$ è costante, cioè eguale a $z(x_0) = b$.

Possiamo dunque scrivere:

$$y(x) \,.\, a \,.\, y(x)_{-1} = b \tag{4}$$

con a e b costanti. Supponendo che queste ultime matrici siano entrambe non degeneri, dalla (4) segue che

$$y(x)_{-1} \,.\, b^{-1} \,.\, y(x) = a^{-1} \tag{5}$$

---

(3) V. la mia Nota cit., § 3, (2), n. 12, pg. 524.

perchè dalla (4) si ha

$$y\ a\ y_{-1}\ b^{-1} = I\,,$$

e perciò:

$$y_{-1}\ b^{-1} = (y\ a)^{-1} = a^{-1}\ y^{-1}$$

che dà appunto la (5).

2. Viceversa, consideriamo in A la funzione $y(x)$ olomorfa in $\mathfrak{J}$ e sia non degenere e soddisfacente alla (4) e perciò alla (5). Prendiamo $P(x)$ e $Q(x)$ definendole univocamente con le posizioni

$$y' = y\ P(x) = Q(x)\ y \tag{6}$$

e mostriamo che queste funzioni soddisfano alle relazioni

$$P(x)\,.\,a = -\,a\ P(x)_{-1}\quad,\quad Q(x)\,.\,b = -\,b\ Q(x)_{-1}\,. \tag{7}$$

Basta, per questo, derivare la (4) che ci darà

$$y'\ a\ y_{-1} + y\ a\ y'_{-1} = 0$$

e quindi:

$$y\ [P\ a + a\ P_{-1}]\ y_{-1} = 0$$

che essendo y non degenere in $\mathfrak{J}$ dà la prima delle (7).

Analogamente, derivando la (5) si ha

$$y_{-1}\ [Q_{-1}\ b^{-1} + b^{-1}\ Q]\ y = 0$$

che dà la seconda delle (7).

3. Sia, in particolare, $b = k\ a$, con k fattore scalare diverso da zero (indipendente da x). Allora la (5) diventa

$$y(x)_{-1}\,.\,a^{-1}\,.\,y(x) = k\ a^{-1} \tag{8}$$

mentre la (4) si scrive

$$y(x)\,.\,a\,.\,y(x)_{-1} = k\ a\,. \tag{9}$$

Il fattore scalare k si supponga indeterminato: allora $y(x)$ si può alterare di un fattore scalare indeterminato, pur esso indipendente da x. In tal caso, $y(x)$ ed $y(x)_{-1}$ si interpretano come le matrici dei coefficienti di due omografie che mutano in sè rispettivamente le quadriche Q, Q' di matrici discriminanti a ed a^{-1}, che supponiamo appartenenti a due spazi distinti. Queste omografie costituiscono due gruppi trasposti G e G_{-1} che si scambiano coi loro isomorfi HGH^{-1}, $H_{-1}\,G_{-1}\,H_{-1}^{-1}$ quando sulle quadriche considerate si fanno cambiamenti di coordinate di matrice H ed H_{-1} rispettivamente. Poichè $y(x)$ ed $y(x)_{-1}$ stanno, ordinatamente, nell'algebra A e nella sua trasposta A_{-1}, ed in queste sono anche $\varrho\, y(x)$ e $\varrho\, y(x)_{-1}$ con ϱ fattore complesso scalare arbitrario, i due gruppi predetti hanno in comune con A ed A_{-1} due sottogruppi che continuiamo ad indicare con G e G_{-1}.

Se a è simmetrica e se i 2 spazi coincidono, le due quadriche Q, Q' sono l'una inviluppo aderente dell'altra e le omografie che le trasformano in sè sono fra loro *congiunte*, quindi, considerate nell'S_{n-1} *completo* in cui sono immerse le due quadriche, costituiscono una stessa omografia; così pei gruppi G e G_{-1} totali o contenuti in A, A_{-1}.

Se invece a non è simmetrica, detto $z=(z_1,\dots,z_n)$ la riga delle coordinate del punto variabile dell'S_{n-1} in cui giacciono le due quadriche, si ha che Q è rappresentata indifferentemente dalle tre equazioni

$$z\,a\,z_{-1}=0\,,\quad z\,a_{-1}\,z_{-1}=0\,,\quad z\,(a+a_{-1})\,z_{-1}=0\,,$$

come si riconosce osservando che $z\,(a-a_{-1})\,z_{-1}=0$ è un'identità. Così per Q'.

Orbene, dalla (8)-(9) si ha ovviamente

$$y\,(a+a_{-1})\,y_{-1}=k\,(a+a_{-1})$$

$$y_{-1}\,(a^{-1}+a_{-1}^{-1})\,y=k\,(a^{-1}+a_{-1}^{-1})$$

quindi, *solo se si avesse*

$$a^{-1}+a_{-1}^{-1}=\lambda\,(a+a_{-1})^{-1} \tag{10}$$

con λ fattore scalare opportuno, potrebbe dedursi

$$y_{-1}\,(a+a_{-1})^{-1}\,y=\frac{k}{\lambda}\,(a^{-1}+a_{-1}^{-1})=k\,(a+a_{-1})^{-1}$$

quindi le due quadriche sarebbero aderenti e l'omografia $y(x)$ descriverebbe il gruppo delle omografie appartenenti ad A o ad A_{-1} che trasformano in sè la quadrica Q ed il suo inviluppo aderente.

4. Supponimo infine che a sia simmetrica e ancora non degenere. Esistono allora matrici H per le quali si ha

$$H\, a\, H_{-1} = I = H_{-1}^{-1}\, a^{-1}\, H^{-1}\,, \tag{11}$$

ove I è la matrice identica di ordine n.

Prendendo $k = 1$ e ponendo

$$Y(x) = H\, y(x)\, H^{-1} \tag{12}$$

dalle (8)-(9) si ha:

$$Y(x)\,.\,Y(x)_{-1} = I = Y(x)_{-1}\, Y(x)\,, \tag{13}$$

cioè che $Y(x)$ è una matrice ortogonale.

I gruppi G e G_{-1} sono dunque isomorfi anzi simili a gruppi di matrici ortogonali (in generale complesse) e, qualunque sia x in $\mathfrak{J}$, le radici caratteristiche di $Y(x)$, quindi quelle di $y(x)$, diverse da ± 1, saranno a due a due fra loro reciproche e con la stessa segnatura.

Se a fosse hermitiana definita positiva vi sarebbero matrici H non necessariamente reali per le quali

$$H\, a\, \overline{H}_{-1} = I = \overline{H}_{-1}^{-1}\, a^{-1}\, H^{-1} \tag{14}$$

e ponendo

$$Y(x) = H\, y(x)\, H^{-1}\,, \quad Z(x) = \overline{H}\, y(x)\, \overline{H}^{-1} \tag{15}$$

si avrebbe (sempre per $k = 1$):

$$Y(x)\,.\,Z(x)_{-1} = Z(x)_{-1}\,.\,Y(x) = I\,. \tag{16}$$

Le due ultime relazioni ci assicurano che le radici caratteristiche diverse da ± 1, per ciascuna delle tre matriei $y(x)$, $Y(x)$, $Z(x)$, sono ancora a coppie reciproche e con la stessa segnatura.

Nel primo caso di cui in questo n., le segnature delle radici caratteristiche di $y(x)$ eventualmente eguali $a + 1$ od $a - 1$ soddisfanno a conosciute condizioni [4].

---

[4] Esse sono state indicate dal FROBENIUS. Per una dimostrazione ottenuta con l'uso della mia forma canonica, vedi: V. CHECCUCCI: *Sulle omografie che trasformano in sè una quadrica o un'antiquadrica* [Annali Sc Norm. Pisa, s. III, vol. II (1948) pp. 132-149].