

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. GRIOLI

## **Integrazione del problema della statica delle piastre omogenee di spessore qualunque**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 6,*  
n° 1-2 (1952), p. 31-49

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1952\\_3\\_6\\_1-2\\_31\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_1-2_31_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# INTEGRAZIONE DEL PROBLEMA DELLA STATICA DELLE PIASTRE OMOGENEE DI SPESSORE QUALUNQUE (\*)

di G. GRIOLI (Padova)

La teoria dell'integrazione del problema tridimensionale dell'Elastostatica isoterma <sup>(1)</sup> è certamente applicabile allo studio dei sistemi sottili anche senza nessuna particolare modifica ma è evidente che a causa della piccolezza dello spessore deve riuscire possibile uno speciale adattamento che ne renda più agevole e rapida l'applicazione.

Con tale intendimento e riferendomi al più comune dei sistemi sottili — la piastra di spessore costante <sup>(2)</sup> — ho voluto stabilire un procedimento d'integrazione che sostanzialmente opera su un problema reso bidimensionale, pur avendo come punto di partenza il problema tridimensionale.

Esso è valido in generale per una piastra omogenea di forma qualsiasi comunque anisotropa e spessa e abbraccia, in particolare, il caso della piastra elastica sottile considerato nella teoria ordinaria.

Riferendomi al caso isotropo ho voluto anche mostrare che le formule fondamentali della teoria ordinaria, momenti flettenti, sforzi di taglio, ecc., seguono subito dalle proprietà di media e dall'ordine di approssimazione prestabilito.

Nel caso della piastra quadrata omogenea ed isotropa uniformemente caricata ed ovunque appoggiata ho voluto determinare delle espressioni di prima approssimazione dei momenti e dell'abbassamento e il risultato conseguito con sviluppi alquanto semplici mi è sembrato interessante dal confronto con formule risolutive ben note.

---

(\*) Lavoro eseguito per P.I.N.A.C.

<sup>(1)</sup> G. GRIOLI « *Proprietà di media ed integrazione del problema dell'Elastostatica isoterma* » Annali di Matematica pura ed applicata; Serie IV; Vol. 33-1952.

<sup>(2)</sup> Una teoria analoga può stabilirsi anche nel caso di spessore variabile con opportune modifiche che rinuncio ad esporre [vedi nota <sup>(6)</sup>].

Per semplicità, nell'esposizione mi riferisco al caso che i vincoli presenti siano quelli d'incastro e di semplice appoggio privo di attrito. La validità del procedimento d'integrazione per tipi diversi di vincolo riuscirà evidente. Naturalmente presuppongo l'esistenza e l'unicità della posizione di equilibrio e non mi preoccupo delle questioni di convergenza connesse per le quali rimando al lavoro citato in nota (1).

### 1. - P r e m e s s e

Sia  $C$  una piastra elastica di sezione media piana  $A$ ,  $\sigma$  il suo bordo, porzione cilindrica con le generatrici ortogonali alla sezione media ed  $l$  l'intersezione di  $\sigma$  con questa [contorno di  $A$ ]. Si assuma come sistema di riferimento  $O x_1 x_2 x_3$  una terna trirettangola levogira avente il piano  $x_3 = 0$  coincidente con il piano mediano della piastra e — supposto questo orizzontale — con l'asse  $x_3$  orientato verso il basso.

Il piano  $x_3 = 0$  è piano di simmetria geometrica.

Denoto con  $h$  lo spessore [che suppongo costante] della piastra e con  $q(x_1, x_2)$  la densità di un eventuale carico verticale distribuito sulla faccia superiore (3). Sia  $\sigma'$  la porzione di  $\sigma$  ove è eventualmente presente un vincolo d'incastro,  $l'$  la corrispondente parte di  $l$  e  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  le componenti delle reazioni vincolari d'incastro (4).

Se una striscia  $A^*$  della faccia inferiore — che indico con  $\pi^*$  — la piastra è semplicemente appoggiata con vincolo liscio, denoto con  $\psi_3$  la componente della reazione vincolare secondo  $x_3$ , tenendo presente nel seguito che essa è da ritenersi non positiva mentre le altre due componenti sono da assumersi nulle.

(3) Nessuna difficoltà a supporre presenti carichi non verticali distribuiti sulle facce della piastra od anche carichi concentrati. Il metodo può applicarsi, in particolare, per determinare la funzione di Green. Se di questa si conosce la parte singolare — come avviene, ad es. nel problema della flessione di una piastra isotropa per la quale la funzione di Green è del tipo  $c |PQ|^2 \log |PQ| + F(P, Q)$ , con  $c$  costante ed  $F(P, Q)$  funzione regolare di  $P$  e  $Q$  [ $P$  e  $Q$  punti di  $A$ ] — conviene adoperare il metodo unicamente per la determinazione dell'incognita parte regolare.

(4) Se l'incastro agisce anche su sottili striscie dei piani  $x_3 = \pm \frac{h}{2}$  vicine al bordo della piastra esso può trasferirsi — come è evidente e come risulterà meglio dal seguito — sul bordo  $\sigma$ .

\* \* \*

Si denotino con  $X_{rs}$ , ( $r, s = 1, 2, 3$ ), le caratteristiche di tensione, con  $n_1, n_2, n_3 = 0$  i coseni direttori della normale a  $\sigma$  orientata verso l'interno di  $C$  e con  $f_1, f_2, f_3$  le componenti della forza superficiale assegnata su  $\sigma - \sigma'$ .

Per semplicità suppongo nulla la forza di massa dato che a questo caso ci si riporta facilmente anche quando si voglia tener conto del peso proprio.

Le equazioni di equilibrio si scrivono

$$(1) \quad \sum_{s=1}^3 \frac{\partial X_{rs}}{\partial x_s} = 0, \quad (r = 1, 2, 3), \quad \text{in } C,$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{13} = X_{23} = 0, \quad \text{per } x_3 = \pm \frac{h}{2}, \\ \\ X_{33} = \begin{cases} 0, & \text{per } x_3 = \frac{h}{2}, \text{ in } \pi^* - A^*, \\ -\psi_3, & \text{per } x_3 = \frac{h}{2}, \text{ in } A^*, \\ q, & \text{per } x_3 = -\frac{h}{2}, \end{cases} \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \sum_{s=1}^2 X_{rs} n_s = \begin{cases} f_r, & \text{su } \sigma - \sigma', \\ \Phi_r, & \text{su } \sigma'. \end{cases} \quad (r = 1, 2, 3),$$

## 2. - Sviluppi generali delle caratteristiche di tensione.

Posto

$$(4) \quad Q_t(x_3) = \frac{d^t}{d x_3^t} \left( x_3^2 - \frac{h^2}{4} \right)^t, \quad (t = 0, 1, 2 \dots),$$

si consideri la successione  $\{Q_t\}$  di polinomi ortogonali nell'intervallo  $-\frac{h}{2} \leftrightarrow \frac{h}{2}$ .

Notoriamente i polinomi  $Q_t$  coincidono — se si prescinde da fattori indipendenti da  $x_3$ . — con i polinomi di Legendre relativi all'intervallo

$-\frac{h}{2} \leftrightarrow \frac{h}{2}$  ed ognuna delle  $X_{rs}$  è sviluppabile in quell'intervallo in serie dei  $Q_t$  con coefficienti dipendenti da  $x_1, x_2$ .

Si può pertanto porre [data l'ortogonalità in  $-\frac{h}{2} \leftrightarrow \frac{h}{2}$  dei  $Q_t$ ]

$$(5) \quad X_{rs} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\xi_{rst}}{\mu_t^2} Q_t, \quad (r, s = 1, 2, 3),$$

pur d'intendere

$$(6) \quad \xi_{rst} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{rs} Q_t dx_3,$$

e

$$(7) \quad \mu_t^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_t^2 dx_3.$$

Le  $\xi_{rst}(x_1, x_2)$  sono definite nel dominio  $A$ .

\* \* \*

Se  $\{w_\lambda\}$  è la successione dei monomi  $x_1^\alpha x_2^\beta$  e  $\{P_\lambda\}$  quella dei polinomi ottenuti aggiungendo a  $w_\lambda$  quella combinazione lineare di  $w_0, w_1, \dots, w_{\lambda-1}$  che rende  $P_\lambda$  ortogonale in  $A$  a tali monomi le  $\xi_{rst}$  sono certamente sviluppabili in  $A$  in serie dei  $P_\lambda$ . Pertanto, posto

$$(8) \quad Q_\lambda^2 = \frac{1}{A} \int_A P_\lambda^2 dA,$$

si ha

$$(9) \quad \xi_{rst} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\overline{\xi_{rst} P_\lambda}}{Q_\lambda^2} P_\lambda, \quad (r, s = 1, 2, 3; t = 0, 1, \dots),$$

pur d'intendere che il soprassegno posto sopra il simbolo di una funzione ne indichi il suo valor medio in  $A$ . Se si adoperano per le  $X_{rs}$  le notazioni ad un solo indice

$$(10) \quad X_r = X_{rr}, \quad X_{r+3} = X_{r+1r+2}, \quad (r = 1, 2, 3),$$

per le  $\xi_{rst}$  le corrispondenti a due indici e si denotano con  $m_{rs}$  i coefficienti [costanti] della forma quadratica nelle  $X_r$ , che esprime il doppio dell'energia potenziale elastica specifica, detta  $W$  quella relativa all'intera piastra si ha, in base agli sviluppi (5), (9).

$$(11) \quad W = A \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_t^2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{Q_\lambda^2} \sum_{rs}^6 m_{rs} \overline{\xi_{rt} P_\lambda} \cdot \overline{\xi_{st} P_\lambda}.$$

### 3. - Proprietà di media nel problema della piastra.

Posto (5)

$$(12) \quad \beta_{rt} = \begin{cases} 0, & \text{per } r=1, 2; \quad t=0, 1, 2, \dots, \\ q Q_t \left(-\frac{h}{2}\right), & \text{per } r=3, \quad \text{in } A - A^*, \\ q Q_t \left(-\frac{h}{2}\right) + \psi_3 Q_t \left(\frac{h}{2}\right), & \text{per } r=3, \quad \text{in } A^*. \end{cases}$$

dalle (1), (2), si deducono le equazioni, valide in  $A$ ,

$$(13) \quad \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \xi_{rst}}{\partial x_s} - \xi'_{rst} = \beta_{rt}, \quad (r=1, 2, 3; \quad t=0, 1, 2, \dots),$$

pur d'intendere

$$(14) \quad \xi'_{r3t} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{r3} \frac{d Q_t}{d x_3} d x_3, \quad (r=1, 2, 3; \quad t=0, 1, 2, \dots).$$

Si può sempre ritenere [vedi (4)]

$$(15) \quad Q_t = \sum_p^* \alpha_{pt} x_3^p, \quad \frac{d Q_t}{d x_3} = \sum_p^* p \alpha_{pt} x_3^{p-1},$$

---

(5) Con  $A^*$  denoto anche la proiezione della striscia di appoggio sul piano  $x_3 = 0$ .

ove le  $\Sigma_p^*$  sono estese ai valori  $0, 2, 4, \dots, t$  oppure  $1, 3, 5, \dots, t$  di  $p$  a seconda che  $t$  sia pari o dispari.

Posto

$$(16) \quad \eta_{rp} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{r,3} x_3^p dx_3, \quad (r = 1, 2, 3; p = 0, 1, \dots),$$

le (13), tenuto conto di (14), (15), (16), si scrivono

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \xi_{rst}}{\partial x_s} - \sum_p^* \alpha_{pt} \eta_{rp-1} = 0, \quad (r = 1, 2; t = 0, 1, 2, \dots), \\ \sum_p^* \alpha_{pt} \left[ \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \eta_{sp}}{\partial x_s} - p \eta_{3p-1} \right] = \beta_{3t}, \quad (t = 0, 1, 2, \dots). \end{array} \right.$$

Convien associare le (17) in modo opportuno considerando [vedi (4), (15)] i seguenti aggruppamenti

$$(18) \quad \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \xi_{rs0}}{\partial x_s} = 0, \quad (r = 1, 2),$$

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \xi_{rs1}}{\partial x_s} - 2 \eta_{r0} = 0, \quad (r = 1, 2), \\ \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \eta_{s0}}{\partial x_s} = \beta_{30}; \end{array} \right.$$

.....

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \xi_{rst}}{\partial x_s} - \sum_p^* \alpha_{pt} \eta_{rp-1} = 0, \quad (r = 1, 2), \\ \sum_p^* \alpha_{pt-1} \left[ \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \eta_{sp}}{\partial x_s} - p \eta_{3p-1} \right] = \beta_{3t-1}. \end{array} \right.$$

Al sistema (17) o — se si vuole — ai sistemi (18), (19), (20) vanno associate le condizioni al contorno ottenute trasformando le (3). Esse sono

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{s=1}^2 \xi_{rst} n_s = \begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_r Q_t d x_3, & \text{su } l-l', \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_r Q_t d x_3 & \text{su } l', \end{cases} \\ \sum_p^* \alpha_{pt} \sum_{s=1}^2 \eta_{sp} n_s = \begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_3 Q_t d x_3, & \text{su } l-l' \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_3 Q_t d x_3, & \text{su } l'. \end{cases} \end{array} \right. \quad (r=1, 2),$$

Posto

$$(22) \quad \gamma_{\eta t}^{(r)} = -\frac{1}{A} \left\{ \int_{l'} x_1^\eta x_2^\tau \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_r Q_t d x_3 \right] d l + \right. \\ \left. + \int_{l-l'} x_1^\eta x_2^\tau \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_r Q_t d x_3 \right] d l + \delta_3^{(r)} \int_A \beta_{3t} x_1^\eta x_2^\tau d A \right\},$$

con

$$(23) \quad \delta_3^{(r)} = \begin{cases} 0 & \text{per } r \neq 3, \\ 1 & \text{per } r = 3, \end{cases}$$

da (18), (19), (20), (21), (22) segue

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\eta \xi_{r1t} x_1^{\eta-1} x_2^\tau + \tau \xi_{r2t} x_1^\eta x_2^{\tau-1} + \sum_p^* \alpha_{pt} \overline{\eta_{rp-1} x_1^\eta x_2^\tau}} = \gamma_{\eta t}^{(r)}, \quad (r=1, 2; t=0, 1, \dots), \\ \sum_p^* \alpha_{pt-1} [\overline{\eta \eta_{1p} x_1^{\eta-1} x_2^\tau + \tau \eta_{2p} x_1^\eta x_2^{\tau-1} + p \overline{\eta_{sp-1} x_1^\eta x_2^\tau}}] = \gamma_{\eta t-1}^{(3)} \quad (t=1, 2, 3, \dots). \end{array} \right.$$

#### 4. - Integrazione del problema della piastra comunque spessa in base alle proprietà di media.

Basta osservare le (22) per riconoscere che le equazioni cardinali della Statica sono espresse da :

$$(25) \quad \begin{cases} \gamma_{000}^{(r)} = 0, & (r = 1, 2, 3), \\ \gamma_{100}^{(2)} - \gamma_{010}^{(1)} = \gamma_{100}^{(3)} - \gamma_{001}^{(1)} = \gamma_{001}^{(2)} - \gamma_{010}^{(3)} = 0. \end{cases}$$

Detto  $\varrho_{\eta\tau t}^{(r)}$  l'addendo incognito contenuto nelle espressioni delle  $\gamma_{\eta\tau t}^{(r)}$ , ad ogni scelta dei valori medi  $\overline{\xi_{rst} x_1^{\eta'} x_2^{\tau'}}$ ,  $\overline{\eta_{rp} x_1^{\eta} x_2^{\tau}}$  e dei  $\varrho_{\eta\tau t}^{(r)}$  soddisfacenti alle (24), (25) corrisponde una scelta di valori medi  $\overline{\xi_{rst} P_\lambda}$ , ( $r, s = 1, 2, 3$ ). Per ogni prefissato  $t$  denoto con  $I_{mt}$  l'insieme di tutte le sestuple di valori medi  $\overline{\xi_{rst} P_\lambda}$ , ( $r, s = 1, 2, 3$ ), così costruite per  $\lambda = 0, 1, 2, \dots, m$ .

Condizioni analoghe a quelle svolte nel lavoro citato in nota (1) assicurano — data la completezza della successione  $\{P_\lambda\}$  — che ogni soluzione di quadrato sommabile delle equazioni (17) o — se si vuole — delle (18), (19), (20), e delle condizioni al contorno (21) è sviluppabile nelle serie (9) purchè le sestuple  $\overline{\xi_{rst} P_\lambda}$  appartengano, per ogni  $t$ , all'insieme  $I_{mt}$ .

Costruite le  $\overline{\xi_{rst}}$  le (5) danno (6) tutte le soluzioni di quadrato sommabile delle equazioni (1), (2), (3).

Di esse quella che rispecchia lo stato tensionale effettivamente esistente nella piastra viene determinata in base al teorema di Menabrea: *le (5), (9) vanno costruite con quelle sestuple  $\overline{\xi_{rst} P_\lambda}$  che appartenendo per ogni  $t$  all'insieme  $I_{mt}$  minimizzano (7) l'espressione (11) di  $W$ .*

(6) Si tenga presente che il sistema di funzioni della successione  $\{Q_t P_\lambda\}$  è in  $C$  completo nel senso specificato in loco cit. in nota (1). È evidente che nel caso di una piastra di spessore variabile bisogna rinunciare ad assumere il sistema di polinomi di Legendre (4) [data la dipendenza di  $h$  da  $x_1, x_2$ ] e alla doppia condizione di ortogonalità cui soddisfano le  $Q_t P_\lambda$ . In tal caso conviene identificare  $Q_t$  con  $x_3^t$  imponendo agli elementi della successione  $\{Q_t P_\lambda\}$  di costituire un sistema ortogonale semplicemente in  $C$ . Ciò implica opportune modifiche negli sviluppi generali.

(7) Naturalmente se in corrispondenza ad una parte  $\overline{A^*}$  della striscia di appoggio dalla soluzione trovata risultasse  $\psi_3 > 0$  [distacco dall'appoggio] si dovrebbe escludere in  $\overline{A^*}$  il vincolo d'appoggio e ripetere l'applicazione del metodo ponendo nelle (12)  $\psi_3 \equiv 0$  in  $\overline{A^*}$  [vedi a proposito loco cit. in nota (1), n. 5 OSSERVAZIONE 1<sup>a</sup>].

\* \* \*

Naturalmente nelle applicazioni concrete gli sviluppi (5), (9), (11) vanno arrestati ad un certo termine: sia ad es.  $t \leq n$ ;  $\lambda \leq m$ . Le corrispondenti approssimazioni minimizzanti delle  $X_{rs}$  al divergere di  $m$  ed  $n$  convergono in media verso la soluzione richiesta ed è rimarchevole il fatto che esse — qualunque siano  $m$  ed  $n$  — verificano le condizioni di integrabilità di De Saint-Venant per cui è possibile risalire mediante integrazione alle corrispondenti espressioni degli spostamenti.

Ma il principale vantaggio di trattare il problema della piastra considerando a se uno sviluppo del tipo (5) sta nel fatto che la piccolezza dello spessore rispetto alle dimensioni trasversali permette generalmente di limitare a pochi termini gli sviluppi (5).

La teoria ordinaria della piastra rappresenta una teoria di prima approssimazione consistente nell'assumere negli sviluppi (5) solo i primi due termini, quando sia  $r, s = 1, 2$ .

Rinviando al n. 6 il compito di mostrare come da quegli sviluppi discendano le formule fondamentali della teoria ordinaria, nel numero seguente preciserò, fondandomi sugli sviluppi generali di questo numero, il procedimento d'integrazione nel caso delle piastre sottili nell'ordine di approssimazione conseguito dalla teoria classica.

Se però si vuole costruire una teoria di seconda approssimazione — adatta al caso che lo spessore non sia troppo sottile — basta considerare negli sviluppi (5) qualche altro termine oltre ai primi due anche per  $r, s = 1, 2$  e tener conto delle corrispondenti equazioni (20), (24).

## 5. - Il problema della piastra sottile. Sua integrazione.

Si ponga

$$(26) \quad N_{rs} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X_{rs} dx_3, \quad M_{rs} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 X_{rs} dx_3, \quad (r, s = 1, 2, 3).$$

Notoriamente gli  $N_{rr}$ , ( $r = 1, 2$ ), rappresentano gli sforzi normali,  $N_{13}$ ,  $N_{23}$  ed  $N_{12}$  quelli di taglio,  $M_{12}$  e  $-M_{12}$  i momenti torcenti,  $M_{11}$  e  $-M_{22}$  quelli flettenti.

Tenuto conto di (4), da (6), (16), (26) segue

$$(27) \quad \begin{cases} \xi_{rs0} = N_{rs}, & \xi_{rs1} = 2 M_{rs}, & (r, s = 1, 2, 3) \\ \eta_{r0} = \xi_{r30}, & (r = 1, 2). \end{cases}$$

Nella teoria ordinaria — supposto  $h$  molto piccolo di fronte alle dimensioni trasversali della piastra — si ritiene lecito arrestare gli sviluppi di  $X_{11}, X_{22}, X_{12}$  ai termini di primo grado in  $x_3$ . Conseguentemente, in base a (4), (5), (7), (27), le espressioni di tali caratteristiche di tensione sono

$$(28) \quad X_{rs} = \frac{1}{h} \left[ N_{rs} + \frac{12}{h^2} M_{rs} x_3 \right], \quad (r, s = 1, 2),$$

con le  $N_{rs}, M_{rs}$  legate dal sistema

$$(29) \quad \sum_{s=1}^2 \frac{\partial N_{rs}}{\partial x_s} = 0, \quad (r = 1, 2),$$

$$(30) \quad \begin{cases} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial M_{rs}}{\partial x_s} - N_{r3} = 0, & (r = 1, 2), \\ \sum_{s=1}^2 \frac{\partial N_{3s}}{\partial x_s} = \beta_{30}, \end{cases}$$

direttamente deducibile dalle (18), (19) in base a (27).

La determinazione delle  $X_{r3}$ , ( $r = 1, 2, 3$ ) [che generalmente presenta meno interesse di quella di  $X_{11}, X_{22}, X_{12}$  richiede però la considerazione delle (20,1) per  $t = 2, 3, 4$  e delle (20,2) per  $t = 1, 2, 3, 4$ . Si riconosce facilmente che le  $X_{13}, X_{23}$  sono polinomi di secondo grado in  $x_3$  le  $X_{33}$  di terzo.

Tenendo presente che le  $\xi_{rst}$  sono da ritenersi nulle per  $r, s = 1, 2$  e  $t > 1$ , data l'ortogonalità dei secondi membri di (28) a  $Q_t$  per  $t > 1$ , da (20) precisamente si trova

$$(31) \quad X_{r3} = \frac{3}{2h} \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h} \right) N_{r3}, \quad (r = 1, 2)$$

e, in corrispondenza ad  $A - A^*$ ,

$$(32) \quad X_{33} = \frac{q}{2} \left[ 1 - \frac{3x_3}{h} + 4 \frac{x_3^3}{h^3} \right]$$

È facile riconoscere che le (28), (31), (32) verificano in base alle (29), (30), le equazioni (1) mentre le espressioni (31), soddisfano alle condizioni al contorno (2), la (32) a quelle valide per  $x_3 = -\frac{h}{2}$  e, in  $\pi^* - A^*$ , per  $x_3 = \frac{h}{2}$ .

\* \* \*

Le condizioni al contorno su  $l - l'$  da associare alle (29), (30) si ottengono dalle (21,1) per  $t = 0, 1$  e dalle (21,2) per  $t = 0$ .

Posto

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_r \, dx_3, \quad m_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_r x_3 \, dx_3, \quad (r = 1, 2), \\ T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_3 \, dx_3, \end{array} \right.$$

esse in base a (27), si scrivono

$$(34) \quad \sum_{s=1}^2 N_{rs} n_s = \sigma_r, \quad (r = 1, 2),$$

$$(35) \quad \sum_{s=1}^2 M_{rs} n_s = m_r, \quad (r = 1, 2), \quad \sum_{s=1}^2 N_{3s} n_s = T.$$

Gli insiemi  $I_{m0}, I_{m1}$  che qui occorre considerare sono formati con i valori medi  $\overline{N_{11} P_\lambda}$ , ecc. che si esprimono per combinazioni lineari dei valori medi  $\overline{N_{11} x_1^\eta x_2^\tau}$ , ecc., legati da relazioni deducibili dalle (24) in base a (27).

Precisamente si ha

$$(36) \quad \eta \overline{N_{r1} x_1^{\eta-1} x_2^\tau} + \tau \overline{N_{r2} x_1^\eta x_2^{\tau-1}} = \gamma_{\eta\tau}^{(r)}, \quad (r = 1, 2),$$

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta \overline{M_{r1} x_1^{\eta-1} x_2^\tau} + \tau \overline{M_{r2} x_1^\eta x_2^{\tau-1}} + \overline{N_{3r} x_1^\eta x_2^\tau} = \frac{1}{2} \gamma_{\eta\tau}^{(r)}, \quad (r = 1, 2) \\ \eta \overline{N_{31} x_1^{\eta-1} x_2^\tau} + \tau \overline{N_{32} x_1^\eta x_2^{\tau-1}} = \gamma_{\eta\tau}^{(3)}. \end{array} \right.$$

Nella teoria ordinaria non ci si preoccupa di ciò che accade in corrispondenza ad  $A^*$ : la striscia di appoggio è talmente sottile che la si suppone addirittura unidimensionale. Del resto è facile convincersi dall'osservazione delle (22) e dagli sviluppi seguenti che sostanzialmente — per  $A^*$  molto sottile — si può ritenere sostituito il vincolo d'appoggio con un vincolo fittizio agente sul bordo  $\sigma$  e capace di reagire solo nella direzione dell'asse  $x_3$  e verso l'alto.

In altri termini, denotando con  $\sigma''$  l'insieme di  $\sigma'$  e di quella parte,  $\sigma^*$ , di  $\sigma$  corrispondente ad  $A^*$ , i vincoli possono ritenersi presenti solo su  $\sigma''$  supponendo, però, che in quella parte di  $\sigma^*$  non appartenente a  $\sigma'$  sia  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ ,  $\Phi_3 \leq 0$ . Conseguentemente nelle espressioni (12) delle  $\beta_{rt}$  va posto  $\psi_3 \equiv 0$ .

In tale accezione, posto

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_r d x_3, \quad m_r^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_r x_3 d x_3, \quad (r = 1, 2), \\ T^* = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_3 d x_3 \end{array} \right.$$

e detta  $l''$  l'intersezione di  $\sigma''$  con il piano  $x_3 = 0$ , si deve assumere<sup>(8)</sup> [(12), (22)]

$$(39) \quad \gamma_{\eta r 0}^{(r)} = -\frac{1}{A} \left\{ \int_{l'} x_1^\eta x_2^\tau \sigma_r^* d l + \int_{l-l'} x_1^\eta x_2^\tau \sigma_r d l \right\}, \quad (r = 1, 2),$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\eta r 1}^{(r)} = -\frac{2}{A} \left\{ \int_{l'} x_1^\eta x_2^\tau m_r^* d l + \int_{l-l'} x_1^\eta x_2^\tau m_r d l \right\}, \quad (r = 1, 2), \\ \gamma_{\eta r 0}^{(3)} = -\frac{1}{A} \left\{ \int_{l''} x_1^\eta x_2^\tau T^* d l + \int_{l-l''} x_1^\eta x_2^\tau T d l + \int_A x_1^\eta x_2^\tau q d A \right\}. \end{array} \right.$$

<sup>(8)</sup> Naturalmente su  $\sigma^*$  possono risultare assegnate forze parallele al piano  $x_3 = 0$ .

\* \* \*

Per  $t = 0, 1$  gli sviluppi (9), arrestati al termine di ordine  $m + 1$ , divengono, in base a (27),

$$(41) \quad N_{rs}^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^m \frac{\overline{N_{rs} P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda, \quad (r, s = 1, 2),$$

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{rs}^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^m \frac{\overline{M_{rs} P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda, \quad (r, s = 1, 2), \\ N_{3r}^{(m)} = \sum_{\lambda=0}^m \frac{\overline{N_{3r} P_\lambda}}{\varrho_\lambda^2} P_\lambda, \quad (r = 1, 2). \end{array} \right.$$

Adoperando per le  $N_{rs}$ ,  $M_{rs}$ , notazioni ad un solo indice analoghe a quelle delle  $X_{rs}$ , da (28), (31), (32) si deduce che l'espressione dell'energia potenziale elastica corrispondente agli sviluppi (41), (42), è

$$(43) \quad \frac{W_m^*}{2} = \frac{A}{h} \sum_{\lambda=0}^m \frac{1}{\varrho_\lambda^2} \left\{ \sum_{r,s=1,2,6} m_{rs} \overline{N_r P_\lambda} \cdot \overline{N_s P_\lambda} + \frac{6}{5} \sum_{r,s=4,5} m_{rs} \overline{N_r P_\lambda} \cdot \overline{N_s P_\lambda} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{r=1,2,6}^{s=4,5} m_{rs} \overline{N_r P_\lambda} \cdot \overline{N_s P_\lambda} + h \sum_{s=1,2,4,5,6} m_{3s} \overline{N_s P_\lambda} \cdot \overline{q P_\lambda} + \right. \\ \left. + \frac{12}{h^2} \left[ \sum_{r,s=1,2,6} m_{rs} \overline{M_r P_\lambda} \cdot \overline{M_s P_\lambda} - \frac{h^2}{5} \sum_{s=1,2,6} m_{3s} \overline{M_s P_\lambda} \cdot \overline{q P_\lambda} + \frac{13 h^4}{420} m_{33} \overline{q P_\lambda}^2 \right] \right\}.$$

La determinazione dei  $\lim_{m \rightarrow \infty} N_{rs}^{(m)}$ , ecc., equivale sostanzialmente alla risoluzione del problema di equilibrio secondo la teoria ordinaria. Se i coefficienti che intervengono nelle (41), (42) appartengono agli insiemi  $I_{m0}$ ,  $I_{m1}$ , gli sviluppi (41), (42) verificano le equazioni (29), (30), (34), (35).

Pertanto, in accordo a quanto è detto nel numero precedente, la soluzione del problema di equilibrio della piastra nell'ordine di approssimazione corrispondente agli sviluppi (28) [teoria ordinaria] si ottiene scegliendo tra tutti gli sviluppi (41), (42) così formati quelli che rendono minima l'energia potenziale elastica.

In altri termini i coefficienti che compaiono nelle (41), (42) per dar luogo alle soluzioni richieste devono rendere minima l'espressione (43) di  $W_m^*$  negli insiemi  $I_{m0}$ ,  $I_{m1}$ .

OSSERVAZIONE I. — Se si osservano le (29), (30), (34), (35), (36), (37), (43) si riconosce che il problema di integrazione si sciude, nel caso dei corpi isotropi e di quelli cristallini per i quali sia

$$(44) \quad m_{14} = m_{15} = m_{24} = m_{25} = m_{46} = m_{56} = 0$$

[sistemi monoclini, rombico, esagonale, tetragonale, monometrico], in due separati: uno riguardante la determinazione di  $N_{11}, N_{22}, N_{12}$  [problema piano], l'altro quella di  $M_{11}, M_{22}, M_{12}, N_{13}, N_{23}$  [problema flessionale].

OSSERVAZIONE II. — Nel gruppo di termini dell'espressione (43) di  $W_m^*$  che dipendono dalle  $\overline{N_r P_\lambda}$  come pure in quello contenente le  $\overline{M_r P_\lambda}$  ci sono dei termini che nella teoria ordinaria vengono trascurati [ciò si può ritenere lecito a causa della potenza di  $h$  che hanno a fattore e del fatto che ciò non capita nelle (36), (37)]. Nello stesso ordine di approssimazione, posto

$$(45) \quad W_{0m}^* = \sum_{\lambda=0}^m \frac{1}{Q_\lambda^2} \sum_{r,s=1,2,6} m_{rs} \overline{N_r P_\lambda} \cdot \overline{N_s P_\lambda},$$

$$(46) \quad W_{1m}^* = \sum_{\lambda=0}^m \frac{1}{Q_\lambda^2} \sum_{r,s=1,2,6} m_{rs} \overline{M_r P_\lambda} \cdot \overline{M_s P_\lambda},$$

si può pertanto affermare che — quando valgono le (44) — la soluzione del problema piano della piastra si ottiene mediante gli sviluppi (41) se i coefficienti  $\overline{N_1 P_\lambda}$ , ecc appartenendo all'insieme  $I_{m0}$  minimizzano  $W_{0m}^*$ , mentre quella del problema della flessione è espressa dalle (42) se i coefficienti  $\overline{M_1 P_\lambda}$ , ecc. minimizzano  $W_{1m}^*$  negli insiemi  $I_{m0}, I_{m1}$ .

## 6. - Deduzione delle formule fondamentali della teoria ordinaria.

Mi riferirò al caso di una piastra isotropa e mostrerò che le note espressioni che la teoria ordinaria del problema della flessione fornisce per i momenti flettenti, sforzi di taglio, ecc., sono conseguenza necessaria delle proprietà di media e dell'ordine di approssimazione concomitante all'assunzione delle (28) e non richiedono ipotesi di speciali relazioni lineari [che invece seguono] tra momenti e curvature linearizzate.

A tal fine osservo che dalle note espressioni delle caratteristiche di deformazione in funzione delle  $X_{rs}$ , detta  $u_3$  la terza componente dello sposta-

mento [abbassamento], si deduce

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} &= -\frac{1}{E} \left\{ 2(1+\nu) \frac{\partial X_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3} [X_{11} - \nu(X_{22} + X_{33})] \right\}, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} &= -\frac{1}{E} \left\{ 2(1+\nu) \frac{\partial X_{23}}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} [X_{22} - \nu(X_{11} + X_{33})] \right\}, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{1+\nu}{E} \left\{ \frac{\partial X_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial X_{12}}{\partial x_3} \right\}, \end{aligned} \right.$$

ove  $E$  e  $\nu$  denotano il modulo di Young ed il coefficiente di Poisson.

Le (47), in base a (28), (31), (32), divengono

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} &= \frac{12}{E h^3} \left\{ M_{11} - \nu M_{22} - \frac{h^2}{4} \left[ (1+\nu) \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} - \nu q \left( \frac{1}{2} - \frac{2x_3^2}{h^2} \right) \right] \right\}, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} &= \frac{12}{E h^3} \left\{ M_{22} - \nu M_{11} - \frac{h^2}{4} \left[ (1+\nu) \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} - \nu q \left( \frac{1}{2} - \frac{2x_3^2}{h^2} \right) \right] \right\}, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{12(1+\nu)}{E h^3} \left\{ M_{12} - \frac{h^2}{8} \left( 1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \left( \frac{\partial N_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_1} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Si riconosce che nell'ordine di approssimazione della teoria ordinaria è lecito sostituire alle (48) le espressioni più semplici

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} &= \frac{12}{E h^3} (M_{11} - \nu M_{22}), \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} &= \frac{12}{E h^3} (M_{22} - \nu M_{11}), \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{12(1+\nu)}{E h^3} M_{12}. \end{aligned} \right.$$

Le condizioni d'integrabilità delle (49), sono certamente verificate dagli sviluppi (42) minimizzanti in  $I_{m0}$ ,  $I_{m1}$  l'espressione (46) di  $W_{1m}^*$ . Da (49) si ot-

tiene subito

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{11} = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right), \\ M_{22} = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right), \\ M_{12} = \frac{E h^3}{12 (1 + \nu)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{array} \right.$$

che coincidono con le note formule della teoria ordinaria della flessione della piastra sottile.

Da (30,1), (50) si deducono le espressioni degli sforzi di taglio e da queste, in base a (12), (30,2), la nota equazione differenziale della flessione

$$(51) \quad \Delta_2 \Delta_2 u_3 = \frac{12 (1 - \nu^2)}{E h^3} q, \quad (\text{in } A).$$

OSSERVAZIONE. — Le condizioni al contorno che la teoria ordinaria associa all'equazione (51) ove sono assegnate le forze sono quelle ben note di Kirchoff che corrispondono solo in parte alle (35). Ciò non deve meravigliare se si pensa che la teoria ordinaria trascura i termini dipendenti dagli sforzi di taglio e da  $X_{33}$  nelle espressioni dell'energia potenziale elastica e nelle (48).

### 7. - Soluzione di prima approssimazione nel problema della piastra quadrata ovunque appoggiata e soggetta a carico uniforme.

Il problema della flessione della piastra rettangolare uniformemente caricata ed ovunque appoggiata nello schema della teoria ordinaria si lascia trattare — com'è ben noto — nel caso omogeneo ed isotropo mediante sviluppi in serie doppia trigonometrica <sup>(9)</sup> o — se si vuole — in serie semplice con funzioni iperboliche e trigonometriche <sup>(10)</sup>.

Riferendomi, per semplicità di sviluppi, al caso quadrato, ho voluto applicare il procedimento d'integrazione esposto nel numero precedente per determinare espressioni polinomiali di prima approssimazione della soluzione del problema della flessione della piastra sottile appoggiata.

<sup>(9)</sup> NADAI « *Elastische Platten* » pag. 118.

<sup>(10)</sup> Loco cit. in nota <sup>(9)</sup> pag. 122.

Ciò anche al fine di saggiare il metodo d'integrazione dal punto di vista concreto effettuando qualche raffronto.

Ho constatato così che nel problema specifico di cui mi occupo non è faticoso determinare approssimazioni polinomiali di quarto grado per  $M_{11}$ , ecc. e risalire quindi al polinomio di sesto grado esprimente l'abbassamento  $u_3$  ma certo non è da pretendersi molto da polinomi di grado così basso.

Tuttavia il risultato conseguito mi sembra ugualmente accettabile come soluzione di prima approssimazione ed interessante per il fatto che esso mostra che già con sviluppi modesti si ottengono *praticamente* i valori della freccia e del massimo del modulo del momento flettente — come risulta dal confronto con risultati noti — mentre si può constatare che delle due condizioni al contorno — annullamento di  $u_3$  e del momento flettente — la prima è rigorosamente soddisfatta mentre per la seconda si trova che il massimo modulo del momento flettente sulla frontiera è circa un settimo del massimo raggiunto nella piastra.

Naturalmente qui mi limiterò a riportare i risultati. Detto  $a$  il semilato della piastra, ho assunto come polinomi approssimanti

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0 = 1, \quad P_1 = x_1, \quad P_2 = x_2, \quad P_3 = x_3, \quad P_4 = x_1^2 - \frac{a^2}{3}, \\ P_5 = x_2^2 - \frac{a^2}{3}, \quad P_6 = x_1 x_2, \\ P_7 = x_1^4 - \frac{6}{7} a^2 x_1^2 + \frac{3}{35} a^4, \quad P_8 = x_2^4 - \frac{6}{7} a^2 x_2^2 + \frac{3}{35} a^4, \\ P_9 = x_1^2 x_2^2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{9} a^2 + \frac{a^4}{9}, \\ P_{10} = x_1^3 x_2 - \frac{3}{5} a^2 x_1 x_2, \quad P_{11} = x_1 x_2^3 - \frac{3}{5} a^2 x_1 x_2. \end{array} \right.$$

Tenuto conto delle varie condizioni di simmetria si riconosce che il sistema (37) è — in corrispondenza ai monomi che intervengono nelle (52) — di facilissima soluzione <sup>(41)</sup> e che l'espressione (46) di  $W_{1m}^*$  dipende da sei indeterminate.

Le equazioni algebriche che esprimono la condizione di minimo di  $W_{1m}^*$  — data la loro particolare struttura — si lasciano risolvere senza fatica.

---

(41) Generalmente esso si spezza in sistemi parziali contenente ciascuno poche incognite.

In definitiva si trova

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{11} &= \frac{87}{10^7 a^2} q \{ -17451 a^4 (1 + \nu) + 2457 [6 a^2 (x_1^2 + \nu x_2^2) - \\ &\quad - (\nu x_1^4 + x_2^4) - 6 (1 + \nu) x_1^2 x_2^2] + 19908 a^2 (\nu x_1^2 + x_2^2) \}, \\ M_{22} (x_1, x_2) &= M_{11} (x_2, x_1), \\ M_{12} &= \frac{3132}{10^7 a^2} q [1106 a^2 - 273 (x_1^2 + x_2^2)] x_1 x_2, \end{aligned} \right.$$

$$(54) \quad \begin{aligned} D u_3 &= \frac{87}{10^7 a^2} q \left\{ -\frac{17451}{2} a^4 (x_1^2 + x_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2457}{2} [a^2 (x_1^4 + x_2^4) - x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)] + 9954 a^2 x_1^2 x_2^2 + 7497 a^6 \right\}, \end{aligned}$$

ove  $D$  è la *rigidità flessionale*, espressa da

$$(55) \quad D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}.$$

Da (53), (54) segue subito

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{11} (0,0) &= M_{22} (0,0) = -0,153 (1 + \nu) q, \\ u_3 (0,0) &= 0,0652 \frac{a^4}{D} q. \end{aligned} \right.$$

Se si consulta il Nadai <sup>(12)</sup> si trova invece

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{11} (0,0) &= M_{22} (0,0) = -0,160 (1 + \nu) q, \\ u_3 (0,0) &= 0,0649 \frac{a^4}{D} q \end{aligned} \right.$$

ed è evidente la *pratica* coincidenza di tali risultati numerici.

<sup>(12)</sup> Loco cit., in nota (9). Le (57) sono immediatamente deducibili dalla (25) di pag. 118. Del resto il valore della freccia può leggersi nella tabella di pag. 127 e così pure, per  $\nu = 0,3$ , quello di  $M_{11}$  (si tenga però presente che il simbolo  $a$  usato dal Nadai a pag. 127 si riferisce alla lunghezza dell'intero lato della piastra e non del semilato come qui si fa).

Non è difficile constatare che l'espressione (54) di  $u_3$  si annulla identicamente per  $x_1 = \pm a$  e per  $x_2 = \pm a$ .

Invece  $M_{11}$  non è identicamente nullo per  $x_1 = \pm a$  ma il massimo del suo modulo si ha per  $x_2 = 0$  ove risulta

$$(58) \quad | M_{11}(\pm a, 0) | = 0,0236 q,$$

raggiungendo un valore che è circa un settimo di quello assunto nel centro (meno di un ottavo per  $\nu = 0,25$ ).

Per brevità non dò le espressioni di  $N_{13}$ ,  $N_{23}$  facilmente deducibili.