Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Giovanni Dantoni

Due dimostrazioni elementari dell'esistenza di modelli birazionali privi di punti multipli di una curva algebrica, con applicazioni alle superficie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 3-4 (1951), p. 355-365

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_355_0>

DUE DIMOSTRAZIONI ELEMENTARI DELL'ESISTENZA DI MODELLI BIRAZIONALI PRIVI DI PUNTI MULTIPLI DI UNA CURVA ALGEBRICA, CON APPLICAZIONI ALLE SUPERFICIE

di Giovanni Dantoni (Pisa)

Ci proponiamo di dare due dimostrazioni geometriche e molto elementari, del classico teorema che afferma l'esistenza di modelli birazionali privi di punti multipli, di una qualunque curva algebrica irriducibile C ([1]).

La prima dimostrazione (nn. 2, 3, 4) si estende, ma solo in parte, alle superficie (nn. 9, 10) e permette di ottenere rapidamente e con semplicità di mezzi, qualche risultato in questo delicato argomento.

Il ragionamento della seconda dimostrazione (nn. 12, 13) indica anche una nuova via che si potrebbe seguire per la costruzione della geometria sopra una curva algebrica.

Per maggior chiarezza, nel seguito saranno richiamate alcun ben note proprietà elementari di geometria proiettiva degli iperspazi.

([1]) Una dimostrazione di questo teorema, senza passare (direttamente o indirettamente) attraverso l'analisi delle singolarità della curva C, è stata data da F. Severi [Atti Ist. Veneto, **79**, 929, (1920)] il quale ha provato l'esistenza sulla curva C di serie lineari g_n^r con $r > 2$, non contenenti g_m^{r-1} con $m < n - 1$. Successivamente G. Albanese [Rend. Acc. Lincei, **33**$_1$, 13 (1924)] ha dimostrato la stessa proprietà in modo notevolmente più elementare. Recentemente B. Segre [Rend. Acc. Lincei, **3**$_2$, 411, (1947)] ha dimostrato il teorema restando sempre nel corpo commutativo in cui è data la curva. Per l'analogo teorema relativo alle superficie algebriche, ricordiamo i lavori di B. Levi [Atti Acc. Sc. Torino, **33**, 66, (1897)], O. Chisini [Mem. Acc. Sc. Bologna, **8**, 3, (1921)], G. Albanese [Rend. Circ. Mat. Palermo, **48**, 321, (1924)], Du Val [Recueil de Mémoires ecc., Istanbul, 1948]. Con i metodi dell'algebra moderna, l'esistenza di un modello birazionale privo di punti multipli di una qualunque superficie algebrica irriducibile, è stata provata da R. J. Walker [Annals of Math., **36**, 336, (1935)] e O. Zariski [Annals of Math., **40**, 639, (1939)].

1. Ricordiamo che se V_1^ν è una curva algebrica irriducibile, di ordine ν e appartenente ad uno spazio S_ϱ di dimensione $\varrho \geq 2$, allora:

a) La proiezione di V_1^ν da un punto P_0 qualunque di S_ϱ, su un $S_{\varrho-1}$ di S_ϱ non passante per P_0, è una curva algebrica irriducibile $V_1^{\nu'}$, appartenente ad $S_{\varrho-1}$. Se infatti la detta proiezione giacesse in un $S_{\varrho-2}$, allora la V_1^ν giacerebbe nell'$S_{\varrho-1}$ congiungente P_0 con questo $S_{\varrho-2}$; e se la detta proiezione fosse spezzata, anche la V_1^ν sarebbe spezzata.

b) Se P_0 è s-uplo per la V_1^ν, e se un generico punto di $V_1^{\nu'}$ è proiezione di μ punti di V_1^ν (distinti da P_0), allora l'ordine della $V_1^{\nu'}$ è $\nu' = \dfrac{\nu - s}{\mu}$. Infatti, per $\varrho = 2$ la proprietà è immediata perchè si ha $\nu' = 1$ e $\nu = \mu + s$. Sia $\varrho \geq 3$. Un generico $S_{\varrho-2}$ dello spazio $S_{\varrho-1}$ al quale appartiene la $V_1^{\nu'}$, sega questa curva in ν' punti ciascuno dei quali è proiezione di μ punti della V_1^ν; segue che l'$S_{\varrho-1}$ che congiunge P_0 col detto $S_{\varrho-2}$ (cioè un $S_{\varrho-1}$ generico per P_0) sega la V_1^ν, fuori di P_0, in $\nu' \mu$ punti, e quindi $\nu = \nu' \mu + s$.

c) Si ha $\nu \geq \varrho$. Ciò è vero per $\varrho = 2$; ammessa la proprietà per la dimensione $\varrho - 1$, essa si prova subito per la dimensione ϱ osservando che la proiezione della V_1^ν da un suo punto semplice su un $S_{\varrho-1}$ generico di S_ϱ, è, per *a*) e *b*), una curva algebrica irriducibile, appartenente ad $S_{\varrho-1}$, e di ordine $\nu' \leq \nu - 1$. E poichè per la dimensione $\varrho - 1$ si ha $\nu' \geq \varrho - 1$, segue $\nu \geq \varrho$ per la dimensione ϱ.

2. Indichiamo con C una curva algebrica irriducibile e osserviamo che esistono modelli birazionali di C che sono curve V_1^ν di un certo ordine ν, appartenenti ad uno spazio a ϱ dimensioni, con

$$\nu \leq 2(\varrho - 1) \tag{1}$$

Per ottenere modelli del tipo suddetto, fissiamo un modello birazionale della C che sia una curva piana $\bar{C}^n$ di un certo ordine n, e trasformiamo la $\bar{C}^n$ mediante il sistema lineare di tutte le curve di ordine $n + m$ $(m \geq 1)$ che stanno nel suo piano [2]. Otteniamo così curve $V_1^{\nu m}$, birazionalmente

(2) Sia $f(x_0\, x_1\, x_2) = 0$ l'equazione della curva $\bar{C}^n$. Se indichiamo con $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ tutti gli $N = \binom{n+m+2}{2}$ monomi di grado $n+m$ in $x_0\, x_1\, x_2$, le equazioni $y_i = \varphi_i$ $(i = 1,2\ldots,N)$ rappresentano, nello spazio S_{N-1} delle y, una superficie in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con i punti del piano; ai punti della $f = 0$ corrispondono biunivocamente i punti di una curva $V_1^{\nu m}$ la quale ha come equazioni $y_i = \varphi_i$, $f = 0$. La $V_1^{\nu m}$ ha l'ordine

identiche alla $\overline{C}^n$ (e quindi alla C), le quali hanno ordine

$$\nu_m = n\,(n + m) \tag{2}$$

e appartengono a spazi di dimensione

$$\varrho_m = n\,m + \frac{1}{2}\,n\,(n + 3) - 1 \tag{3}$$

E poichè $2\,(\varrho_m - 1) - \nu_m = n\,(m + 3) - 4 \geq 0$, per queste curve vale la (1).

3. Consideriamo ora l'insieme I di tutti i modelli birazionali della curva C, per i quali vale la (1), e dimostriamo che proiettando una qualunque curva di I da un suo punto multiplo P_0 qualunque, sopra un iperpiano dello spazio al quale essa appartiene e non passante per P_0, si ottiene ancora una curva di I. In seguito, per esprimere brevemente la detta proprietà dell'insieme I, diremo che I *è chiuso rispetto alle proiezioni dai punti multipli.*

Sia V_1^ν una curva dell'insieme I; indichiamo con ν l'ordine di V_1^ν, con ϱ la dimensione dello spazio S_ϱ al quale essa appartiene, con P_0 un suo punto s-uplo ($s \geq 2$), e con $S_{\varrho-1}$ un iperpiano di S_ϱ non passante per P_0. Per la definizione di I, si ha $\nu \leq 2\,(\varrho - 1)$ e quindi $\varrho \geq 2$. Inoltre, proiettando la V_1^ν da P_0 su $S_{\varrho-1}$, si ottiene [n. 1, a), b)] una curva $V_1^{\nu'}$ la quale appartiene ad $S_{\varrho-1}$ ed ha l'ordine

$$\nu' = \frac{\nu - s}{\mu} \tag{4}$$

essendo μ il numero dei punti di V_1^ν (distinti da P_0) che si proiettano in un generico punto di $V_1^{\nu'}$. Dalla (4), tenendo presente che è $\nu' \geq \varrho - 1$ [n. 1, c)] e (per ipotesi) $\nu \leq 2\,(\varrho - 1)$, $s \geq 2$, si ha

$$\varrho - 1 \leq \nu' = \frac{\nu - s}{\mu} \leq \frac{2\,(\varrho - 1) - 2}{\mu} \tag{5}$$

$\nu_m = n\,(n + m)$ perchè un generico iperpiano $\Sigma\,\lambda_i\,y_i = 0$ la incontra negli $n\,(n + m)$ punti che corrispondono ai punti comuni alle due curve $\Sigma\,\lambda_i\,\varphi_i = 0$, $f = 0$. Inoltre la $V_1^{\nu_m}$ appartiene ad uno spazio di dimensione $\varrho_m = n\,m + \frac{1}{2}\,n\,(n + 3) - 1$ perchè gli iperpiani $\Sigma\,\lambda_i\,y_i = 0$ che la contengono sono tutti e soli quelli per cui il polinomio $\Sigma\,\lambda_i\,\varphi_i$ contiene f come fattore, e quindi questi iperpiani formano un sistema lineare $\infty^{N'-1}$ con $N' = \binom{m+2}{2}$.

da cui segue $(\mu - 2)(\varrho - 1) + 2 \leq 0$ e quindi $\mu = 1$; cioè la proiezione è biunivoca e quindi la $V_1^{\nu'}$ è birazionalmente identica alla V_1^{ν}. Inoltre dalla (5), essendo $\mu = 1$, segue $\nu' \leq 2(\varrho - 2)$ la quale prova che l'ordine ν' di $V_1^{\nu'}$ e la dimensione $\varrho' = \varrho - 1$ dello spazio a cui essa appartiene, soddisfano alla (1). La $V_1^{\nu'}$ è quindi una curva dell'insieme I.

4. Indichiamo con ϱ_0 la dimensione minima degli spazi ai quali appartengono curve dell'insieme I. Dal fatto che l'insieme I è chiuso rispetto alle proiezioni dai punti multipli, segue subito che:

Le curve di I che appartengono a spazi di dimensione minima ϱ_0, sono tutte prive di punti multipli.

Infatti se una tale curva $V_1^{\nu_0}$ avesse un punto multiplo P_0, proiettandola da P_0 su un generico $S_{\varrho_0 - 1}$ dello spazio S_{ϱ_0} al quale appartiene la $V_1^{\nu_0}$, si otterrebbe una curva dell'insieme I (perchè I è chiuso rispetto alle proiezioni dai punti multipli) la quale apparterrebbe ad uno spazio di dimensione $\varrho_0 - 1 < \varrho_0$ e quindi ϱ_0 non sarebbe la minima dimensione degli spazi ai quali appartengono curve di I.

Risulta così provato che:

Data una qualunque curva algebrica C irriducibile, esistono sempre modelli birazionali della C che sono del tutto privi di punti multipli.

5. L'esistenza di modelli birazionali di una curva algebrica irriducibile C, che sono del tutto privi di punti multipli, è stata dimostrata, nei numeri precedenti, costruendo un insieme di modelli birazionali di C, chiuso rispetto alle proiezioni dai punti multipli.

Sia ora V_h una varietà algebrica irriducibile ad $h \geq 2$ dimensioni, e supponiamo che esista un insieme I di modelli birazionali della V_h, il quale sia chiuso rispetto alle proiezioni dai punti di molteplicità maggiore di un dato intero positivo $\bar{s}$ $(\bar{s} \geq 1)$; cioè supponiamo che ogni varietà W di I sia birazionalmente identica alla V_h e inoltre, o non abbia punti di molteplicità maggiore di $\bar{s}$, oppure, se ha di tali punti, proiettandola da uno qualunque di essi su un generico iperpiano dello spazio al quale appartiene W, si ottenga ancora una varietà di I. Orbene, dall'esistenza dell'insieme I segue subito, ragionando come al n. 4, l'esistenza di un modello birazionale della V_h il quale è privo di punti di molteplicità maggiore di $\bar{s}$.

Nei nn. 9, 10 faremo alcune applicazioni di questa osservazione, nel caso $h = 2$.

6. Osserviamo anzitutto che *se fra i modelli birazionali di una superficie algebrica irriducibile F, c'è una rigata V_2, allora esiste un modello birazionale della F che è privo di punti multipli.*

Infatti, una generica sezione iperpiana della rigata V_2 è una curva algebrica irriducibile ([3]) V_1, di cui esiste (n. 4) un modello birazionale $\overline{V}_1$ che è privo di punti multipli. Proiettando la curva $\overline{V}_1$ da un punto $\overline{P}_0$ fuori dello spazio al quale essa appartiene, si ottiene un cono $\overline{V}_2$ il quale è birazionalmente identico alla rigata V_2 ([4]) e non ha generatrici multiple. Trasformando il cono $\overline{V}_2$ con il sistema lineare di tutte le quadriche dello spazio al quale esso appartiene, passanti per $\overline{P}_0$, si ottiene un modello birazionale di $\overline{V}_2$ (e quindi della F) il quale è privo di punti multipli ([5]).

7. Un modello birazionale privo di punti multipli della rigata V_2, si può ottenere anche nel seguente modo.

Sia S_ϱ lo spazio al quale appartiene la curva $\overline{V}_1$, che, ricordiamolo, è una curva priva di punti multipli e birazionalmente identica ad una generica sezione iperpiana V_1 della rigata V_2. Si pensi questo S_ϱ immerso in un $S_{2\varrho+1}$ e dentro questo $S_{2\varrho+1}$ si fissino due spazi a ϱ dimensioni S'_ϱ, S''_ϱ, in

---

([3]) Se V_1 fosse spezzata per esempio in due parti V'_1 e V''_1, la rigata V_2 sarebbe spezzata nella superficie luogo delle generatrici di V_2 che si appoggiano a V'_1 e nella superficie luogo delle generatrici di V_2 che si appoggiano a V''_1.

([4]) La corrispondenza birazionale fra V_1 e $\overline{V}_1$ determina una corrispondenza birazionale τ fra il sistema delle ∞^1 generatrici della rigata V_2 e il sistema delle ∞^1 generatrici del cono $\overline{V}_2$. Se riferiamo proiettivamente un generico fascio di iperpiani dello spazio al quale appartiene V_2, ad un generico fascio di iperpiani dello spazio al quale appartiene $\overline{V}_2$, si ha subito che questa proiettività, insieme alla τ, determina una corrispondenza birazionale fra V_2 e $\overline{V}_2$.

([5]) Ricordiamo che trasformando lo spazio $S_{\varrho+1}$ al quale appartiene il cono $\overline{V}_2$, mediante il sistema lineare di tutte le quadriche per $\overline{P}_0$, si ottiene una varietà $V_{\varrho+1}$ la quale è in corrispondenza biunivoca con $S_{\varrho+1}$, e le *uniche* eccezioni a questa corrispondenza T sono il punto $\overline{P}_0$ su $S_{\varrho+1}$ e un certo S_ϱ su $V_{\varrho+1}$; inoltre i punti di questo S_ϱ sono in corrispondenza proiettiva con i punti di $S_{\varrho+1}$ infinitamente vicini a $\overline{P}_0$ nelle ∞^ϱ direzioni uscenti da $\overline{P}_0$.

Ne segue che la T muta birazionalmente il cono $\overline{V}_2$ in una superficie V'_2; le uniche eccezioni alla biunivocità della corrispondenza fra $\overline{V}_2$ e V'_2 sono il punto $\overline{P}_0$ su $\overline{V}_2$, e i punti comuni a V'_2 ed S_ϱ, sulla V'_2; questi ultimi punti formano una curva V'_1 proiettivamente identica al sistema ∞^1 delle generatrici del cono. Inoltre se ν è l'ordine di $\overline{V}_2$, allora l'ordine di V'_2 è 3ν.

Un punto P' di V'_2, se non sta in V'_1, proviene da un ben determinato punto $\overline{P}$ di $\overline{V}_2$, distinto da $\overline{P}_0$; e P' è semplice perchè $\overline{V}_2$ e due generiche quadriche passanti per $\overline{P}_0$ e $\overline{P}$, hanno a comune, fuori di $\overline{P}_0$ e $\overline{P}$, esattamente $3\nu - 1$ punti variabili con le due quadriche Un punto P'_1 di V'_1 proviene dal punto infinitamente vicino a $\overline{P}_0$ su una ben determinata generatrice g del cono $\overline{V}_2$; e P'_1 è semplice per V'_2, perchè $\overline{V}_2$ e due generiche quadriche tangenti in $\overline{P}_0$ a g, hanno a comune $3\nu - 1$ punti variabili con le due quadriche.

modo che i tre spazi S_ϱ, S'_ϱ, S''_ϱ siano due a due privi di punti a comune. Per ogni punto di $\overline{V}_1$ passa una ed una sola retta che si appoggia ai due spazi S'_ϱ, S''_ϱ, e il luogo di queste rette è una superficie rigata W_2, birazionalmente identica alla V_2 perchè V_1 e $\overline{V}_1$ sono curve birazionalmente identiche [vedi nota (4)]. Si vede facilmente che la W_2 ha ordine 2ν, se ν è l'ordine della curva $\overline{V}_1$ (6). La W_2 è mutata in sè da ogni omografia di $S_{2\varrho+1}$ che ha come spazi di punti uniti, due dei tre spazi S_ϱ, S'_ϱ, S''_ϱ; indicheremo queste omografie con $\Omega(S_\varrho, S'_\varrho)$, $\Omega(S_\varrho, S''_\varrho)$, $\Omega(S'_\varrho, S''_\varrho)$.

Supponiamo che la W_2 abbia un punto multiplo P_0. Per P_0 passa una ed una sola generatrice g_0 della W_2, perchè da P_0 esce una sola retta che si appoggia a due dei tre spazi S_ϱ, S'_ϱ, S''_ϱ. Il punto $\overline{P}_0$ in cui g_0 si appoggia alla curva $\overline{V}_1$, è multiplo per W_2. Infatti se P_0 non sta nè in S'_ϱ nè in S''_ϱ, allora c'è una $\Omega(S'_\varrho, S''_\varrho)$ che muta P_0 in $\overline{P}_0$, e quindi $\overline{P}_0$ è multiplo come P_0. Se P_0 sta in S'_ϱ, detto P'_0 un punto di g_0 fuori degli spazi S_ϱ, S'_ϱ, S''_ϱ, c'è una $\Omega(S_\varrho, S''_\varrho)$ che muta P_0 in P'_0, quindi P'_0 è multiplo come P_0, e, per quanto sopra, è multiplo anche $\overline{P}_0$; analogamente se P_0 sta in S''_ϱ.

Proviamo ora che la W_2 non può avere un punto multiplo $\overline{P}_0$ sulla curva $\overline{V}_1$. Infatti, un generico $S_{\varrho-1}$ di S_ϱ sega la $\overline{V}_1$ in ν punti P_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ distinti fra di loro e da $\overline{P}_0$; proiettando i punti P_i da S''_ϱ su S'_ϱ, si ottengono ν punti P'_i i quali stanno nello spazio $S'_{\varrho-1}$, proiezione di $S_{\varrho-1}$ da S''_ϱ su S'_ϱ. Le ν rette $P_i P'_i$ sono generatrici della rigata W_2 e stanno nell'$S_{2\varrho}$ che congiunge S_ϱ con $S'_{\varrho-1}$. Segue che l'iperpiano $S_{2\varrho}$ sega la rigata W_2 in una curva $C^{2\nu}$ di ordine 2ν, spezzata nella $\overline{V}_1$ e nelle ν rette $P_i P'_i$; questa curva $C^{2\nu}$ ha il punto $\overline{P}_0$ come punto semplice e quindi $\overline{P}_0$ non può essere multiplo per W_2 (altrimenti sarebbe multiplo anche per $C^{2\nu}$). Si può dunque concludere che la W_2 è priva di punti multipli.

8. Sia V_2^ν una superficie algebrica irriducibile, di ordine ν, appartenente ad uno spazio S_ϱ a $\varrho \geq 3$ dimensioni; supponiamo inoltre che la V_2^ν non sia un cono. In queste ipotesi, ragionando come al n. 1, si provano le ben note proprietà:

a) La proiezione di V_2^ν da un punto P_0 qualunque di S_ϱ, su un $S_{\varrho-1}$ di S_ϱ non passante per P_0, è una superficie algebrica $V_2^{\nu'}$ irriducibile ed appartenente ad $S_{\varrho-1}$.

---

(6) L'ordine del luogo delle rette che si appoggiano a $\overline{V}_1$, S'_ϱ, S''_ϱ, è uguale a ν volte l'ordine del luogo delle rette che si appoggiano ad S'_ϱ, S''_ϱ e ad un $S_{2\varrho-1}$ generico dello spazio ambiente $S_{2\varrho+1}$; l'ordine di questo secondo luogo è uguale a quello del luogo delle rette che si appoggiano ad S'_ϱ, S''_ϱ, e ad una retta generica di $S_{2\varrho+1}$, e quest'ultimo luogo è una quadrica a due dimensioni.

b) Se P_0 è s-uplo per la V_2^{ν}, e se un generico punto di $V_2^{\nu'}$ è proiezione di μ punti di V_2^{ν} (distinti da P_0), allora l'ordine della $V_2^{\nu'}$ è $\nu' = \dfrac{\nu - s}{\mu}$.

c) Si ha $\nu \geq \varrho - 1$.

9. ***Se fra i modelli birazionali di una superficie algebrica irriducibile F, c'è una superficie tale che il suo ordine ν e la dimensione ϱ dello spazio a cui essa appartiene soddisfano alla***

$$\nu \leq 2(\varrho - 2) \tag{6}$$

allora esiste un modello birazionale della F che è privo di punti multipli.

Infatti, se fra i modelli birazionali della F ci sono coni, allora la proprietà è vera per l'osservazione del n. 6. Se non ci sono coni, allora si prova subito che l'insieme I dei modelli birazionali della F per i quali vale la (6), è chiuso rispetto alle proiezioni dai punti multipli. Infatti, consideriamo una superficie V_2^{ν}, di I e sia P_0 un suo punto s-uplo $(s \geq 2)$, S_ϱ lo spazio al quale appartiene la V_2^{ν}, ed $S_{\varrho-1}$ un iperpiano di S_ϱ non passante per P_0. Poichè per la (6) è $\varrho \geq 3$ e la V_2^{ν} non è un cono (per ipotesi), essa si proietta da P_0 su $S_{\varrho-1}$, μ-uplamente in una superficie $V_2^{\nu'}$ di ordine ν' appartenente ad $S_{\varrho-1}$. Ne segue

$$\varrho - 2 \leq \nu' = \frac{\nu - s}{\mu} \leq \frac{2(\varrho - 2) - 2}{\mu} \tag{7}$$

e quindi $(\mu - 2)(\varrho - 2) + 2 \leq 0$, da cui segue $\mu = 1$ e [per la (7)] $\nu' \leq 2(\varrho - 3)$. Queste ultime due relazioni provano che la $V_2^{\nu'}$ è una superficie di I, quindi I è chiuso rispetto alle proiezioni dai punti multipli; da ciò, per l'osservazione del n. 5, segue la proprietà enunciata.

Osservazione. — Il teorema ora dimostrato si estende subito, per induzione, alle varietà di dimensione $h > 2$. Cioè si ha:

Se fra i modelli birazionali di una varietà algebrica irriducibile V_h ad h dimensioni, c'è una varietà tale che il suo ordine ν e la dimensione ϱ dello spazio al quale essa appartiene soddisfano alla

$$\nu \leq 2(\varrho - h) \tag{8}$$

allora esiste un modello birazionale della V_h che è privo di punti multipli.

Ammettiamo che la proprietà sia vera per la dimensione $h - 1$ e dimostriamola per la dimensione h. Consideriamo l'insieme I dei modelli birazionali di V_h che soddisfano alla (8). Se in I c'è un cono $\overline{V}_h$, allora segandolo con un iperpiano generico del suo spazio di appartenenza si ottiene una V_{h-1} che soddisfa alla (8) e quindi (per quanto abbiamo ammesso) esiste un modello birazionale di questa V_{h-1} che è privo di punti multipli. Da ciò, ragionando come al n. 6, segue l'esistenza di un modello birazionale di $\overline{V}_h$ (e quindi di V_h) che è privo di punti multipli. Se in I non ci sono coni, ragionando come nel caso $h = 2$, si prova che I è chiuso rispetto alle proiezioni dai punti multipli. Si tenga presente che le proprietà ricordate al n. 8, si estendono alle varietà ad h dimensioni con la sola differenza che la c) diventa in questo caso $\nu \geq \varrho - h + 1$.

10. *Se una superficie algebrica irriducibile F non possiede involuzioni di ordine due* (7)*, allora esiste un modello birazionale della F che è privo di punti di molteplicità maggiore di due.*

Osserviamo anzitutto che esistono modelli birazionali della F che sono superficie V_2^ν di ordine ν, appartenenti ad uno spazio a ϱ dimensioni, con

$$\nu \leq 3 (\varrho - 2) \tag{9}$$

Per ottenere modelli di tipo suddetto, fissiamo un modello birazionale della F che sia una superficie $\overline{F}^n$ di un certo ordine n di uno spazio S_3 a tre dimensioni, e trasformiamo la $\overline{F}^n$ mediante il sistema lineare di tutte le superficie di ordine $n + m$ di S_3. Si ottengono così superficie $V_2^{\nu_m}$, birazionalmente identiche alla $\overline{F}^n$ (e quindi alla F), le quali hanno l'ordine $\nu_m = n (n + m)^2 = n m^2 + \ldots$ (8) e appartengono ad uno spazio di dimensione $\varrho_m = \frac{1}{2} n m^2 + \ldots$; e poichè $3 (\varrho_m - 2) - \nu_m = \frac{1}{2} n m^2 + \ldots$, per m sufficientemente grande si ha $3 (\varrho_m - 2) - \nu_m \geq 0$, e per i corrispondenti modelli vale la (9).

Premesso ciò, consideriamo l'insieme I di tutti i modelli birazionali della F per i quali vale la (9). Se fra questi modelli ci sono dei coni, la nostra proprietà è vera per l'osservazione del n. 6. Se non ci sono coni, ragionando come al n. 9 e tenendo presente che la F non ha involuzioni di ordine due, si prova subito che l'insieme I è chiuso rispetto alle proiezioni dai punti di molteplicità maggiore di due (9) ($s \geq 3$).

---

(7) Cioè supponiamo che F non possieda trasformazioni birazionali *involutorie* in sè.

(8) I puntini indicano termini di grado minore di due in m.

(9) La (7) nel nostro caso diventa

$$\varrho - 2 \leq \nu' = \frac{\nu - s}{\mu} \leq \frac{3 (\varrho - 2) - 3}{\mu} \tag{7'}$$

e quindi $(\mu - 3)(\varrho - 2) + 3 \leq 0$, da cui segue $\mu = 1$ oppure $\mu = 2$; ma se fosse $\mu = 2$ la

11. Nei nn. 12, 13 daremo una seconda dimostrazione elementare del teorema che afferma l'esistenza di un modello birazionale privo di punti multipli, di una curva algebrica irriducibile qualunque. Per maggior chiarezza richiamiamo qui alcune semplici proprietà delle curve algebriche, che ci serviranno nel seguito.

Sia V_1^ν una curva algebrica irriducibile, di ordine ν, ed appartenente ad uno spazio S_ϱ di dimensione $\varrho \geq 3$. È noto che la V_1^ν si proietta *biunivocamente* da un suo generico punto semplice P_0, su un $S_{\varrho-1}$ di S_ϱ non passante per P_0 (10).

La detta proiezione è quindi (n. 1) una curva algebrica irriducibile, appartenente ad $S_{\varrho-1}$, di ordine $\nu - 1$, e birazionalmente identica alla V_1^ν. Da ciò segue che esistono modelli birazionali della V_1^ν i quali appartengono a spazi di dimensione $\varrho, \varrho - 1, \varrho - 2, \ldots, 2$.

Sia ora C una qualunque curva algebrica irriducibile. Poichè per quanto abbiamo visto nel n. 2, esistono modelli birazionali della C che appartengono a spazi di dimensione ϱ_m grande quanto si vuole [vedi la (3)], dall'ultima osservazione segue che, fissato un intero $\varrho \geq 2$ qualunque, esistono modelli birazionali della curva C i quali appartengono ad uno spazio a ϱ dimensioni.

12. Consideriamo ora tutti i modelli birazionali di una data curva algebrica irriducibile C, che appartengono ad uno spazio di data dimensione $\varrho \geq 2$.

Ciascuno di questi modelli ha un certo ordine, e l'insieme di questi ordini ha un minimo che indicheremo con $\bar{\nu}(\varrho)$. Il numero $\bar{\nu}(\varrho)$ è dunque il minimo ordine delle curve che sono birazionalmente identiche alla C ed appartengono ad uno spazio a ϱ dimensioni; si noti che $\bar{\nu}(\varrho)$ è una ben determinata funzione di ϱ, definita per ogni intero $\varrho \geq 2$ (n. 11).

Consideriamo ora la funzione

$$M(\varrho) = \bar{\nu}(\varrho) - \varrho$$

la quale risulta definita per ogni intero $\varrho \geq 2$; si noti che *è sempre* $M(\varrho) \geq 0$. Inoltre:

La funzione $M(\varrho)$ *è non decrescente,* cioè si ha, per ogni intero $\varrho \geq 2$

$$M(\varrho) \leq M(\varrho + 1).$$

V_2^ν si proietterebbe doppiamente da P_0 e quindi possiederebbe una involuzione di ordine due, contro l'ipotesi. Dunque si ha $\mu = 1$ e, per la (7'), $\nu' \leq 3(\varrho - 3)$; queste provano che l'insieme I è chiuso rispetto alle proiezioni dai punti di molteplicità ≥ 3.

(10) E. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi,* 2ª ed. Messina 1923, pag. 229.

Infatti sia $V_1^{\bar\nu(\varrho+1)}$ un modello birazionale della curva C, di ordine (minimo) $\bar\nu(\varrho+1)$ ed appartenente ad uno spazio $S_{\varrho+1}$ a $\varrho+1$ dimensioni; la proiezione di $V_1^{\bar\nu(\varrho+1)}$ da un suo punto semplice generico P_0, su un S_ϱ di $S_{\varrho+1}$ non passante per P_0, è una curva algebrica irriducibile $V_1^{\bar\nu(\varrho+1)-1}$, birazionalmente identica alla $V_1^{\bar\nu(\varrho+1)}$, appartenente ad S_ϱ, e di ordine $\bar\nu(\varrho+1)-1$ (n. 11). Ne segue che il minimo ordine $\bar\nu(\varrho)$ dei modelli birazionali di C che appartengono ad uno spazio a ϱ dimensioni, non supera $\bar\nu(\varrho+1)-1$, cioè $\bar\nu(\varrho)\leq\bar\nu(\varrho+1)-1$, e quindi $\bar\nu(\varrho)-\varrho\leq\bar\nu(\varrho+1)-\varrho-1$, cioè $M(\varrho)\leq M(\varrho+1)$. Dimostriamo infine che:

La funzione $M(\varrho)$ è limitata superiormente. Per provare ciò, fissiamo un modello birazionale della curva C, che sia una curva piana $\bar C^n$ di un certo ordine n, e consideriamo i modelli birazionali di C che si ottengono trasformando la $\bar C^n$ mediante il sistema lineare di tutte le curve piane di ordine $n+m$ (n. 2). Questi modelli hanno l'ordine $\nu_m = n(n+m)$ ed appartengono a spazi di dimensione $\varrho_m = nm + \frac{1}{2}n(n+3)-1$. E poichè $\bar\nu(\varrho_m)\leq$ $\leq \nu_m$, si ha $M(\varrho_m) = \bar\nu(\varrho_m)-\varrho_m \leq \nu_m - \varrho_m = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, cioè

$$M(\varrho_m)\leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,. \tag{10}$$

Ma essendo $\lim\limits_{m\to+\infty}\varrho_m = +\infty$, si ha che, fissato un qualunque intero $\varrho\geq 2$, si può sempre trovare un intero $\bar m$ tale che sia $\varrho<\varrho_{\bar m}$, e quindi, poichè $M(\varrho)$ è non decrescente, si ha $M(\varrho)\leq M(\varrho_{\bar m})$, da cui per la (10) segue

$$M(\varrho)\leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) \tag{11}$$

la quale prova che $M(\varrho)$ è limitata superiormente.

13. Poichè la funzione $M(\varrho)$ è non decrescente e limitata superiormente, *essa ammette un massimo p, ed esiste un intero $\bar\varrho\geq 2$ tale che per $\varrho\geq\bar\varrho$ si ha $M(\varrho)=p$, e (se $\bar\varrho>2$) per $\varrho<\bar\varrho$ si ha $M(\varrho)<p$.*

Da ciò segue subito che:

I modelli birazionali della curva C che appartengono ad uno spazio S_ϱ di dimensione ϱ maggiore di p e di $\bar\varrho$, e che hanno l'ordine $\bar\nu(\varrho)$, sono tutti privi di punti multipli.

Infatti supponiamo che un tale modello $V_1^{\bar\nu(\varrho)}$ abbia un punto P_0 s-uplo ($s\geq 2$); la proiezione di $V_1^{\bar\nu(\varrho)}$ da P_0 su un $S_{\varrho-1}$ di S_ϱ non passante per P_0, è una curva $V_1^{\nu'}$ irriducibile, appartenente ad $S_{\varrho-1}$, e di ordine $\nu' = \dfrac{\bar{\nu}(\varrho) - s}{\mu}$, essendo μ il numero dei punti di $V_1^{\bar{\nu}(\varrho)}$ (distinti da P_0) che si proiettano in un generico punto di $V_1^{\nu'}$. E poichè $s \geq 2$, $\bar{\nu}(\varrho) = \varrho + p$, e $\nu' \geq \varrho - 1$ si ha

$$\varrho - 1 \leq \nu' = \frac{\bar{\nu}(\varrho) - s}{\mu} \leq \frac{\varrho + p - 2}{\mu} \tag{12}$$

e quindi $(\mu - 1)(\varrho - 1) \leq p - 1$, da cui, essendo per ipotesi $\varrho > p$, segue $\mu = 1$; cioè la $V_1^{\nu'}$ è birazionalmente identica alla $V_1^{\bar{\nu}'(\varrho)}$. Inoltre, dalla $\mu = 1$ e dalla (12) segue $\nu' \leq \varrho + p - 2$ e quindi $\bar{\nu}(\varrho - 1) \leq \nu' \leq \varrho + p - 2$, cioè

$$M(\varrho - 1) = \bar{\nu}(\varrho - 1) - (\varrho - 1) \leq p - 1$$

e ciò è assurdo perchè, essendo per ipotesi $\varrho > \bar{\varrho}$, si ha $M(\varrho - 1) = p$.

14. Il numero intero p, per il modo stesso come è stato definito, è un invariante birazionale della curva C. Inoltre esso è positivo o nullo, perchè è sempre $M(\varrho) \geq 0$.

Se è $p = 0$ la curva C è razionale perchè si ha $0 \leq M(2) \leq M(\bar{\varrho}) = p = 0$, cioè $M(2) = \bar{v}(2) - 2 = 0$, e quindi fra i modelli birazionali di C ci sono coniche.

Viceversa se C è razionale, fra i suoi modelli birazionali ci sono le curve $y_i = x_0^i x_1^{\varrho - i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, \varrho)$ le quali hanno l'ordine $\nu = \varrho$ e appartengono ad uno spazio a ϱ dimensioni; quindi per ogni intero $\varrho \geq 2$ è $0 \leq M(\varrho) = \bar{\nu}(\varrho) - \varrho \leq \nu - \varrho = 0$ cioè $M(\varrho) = 0$ per ogni $\varrho \geq 2$, e da ciò segue $p = 0$.

Ora si noti che se $V_1^{\bar{\nu}(\varrho)}$ è un modello birazionale di C appartenente ad uno spazio S_ϱ a ϱ dimensioni e di ordine $\bar{\nu}(\varrho)$, allora la $V_1^{\bar{\nu}(\varrho)}$ è *normale* in S_ϱ, perchè se fosse proiezione (biunivoca) di una curva $\bar{V}_1^{\bar{\nu}(\varrho)}$ dello stesso ordine $\bar{\nu}(\varrho)$ ed appartenente ad un $S_{\varrho+1}$, allora proiettando la $\bar{V}_1^{\bar{\nu}(\varrho)}$ da un suo punto semplice generico su un S_ϱ, si otterrebbe una curva birazionalmente identica alla $\bar{V}_1^{\bar{\nu}(\varrho)}$ (e quindi alla C), appartenente ad S_ϱ, e di ordine $\bar{\nu}(\varrho) - 1$ (n. 11); e ciò è assurdo per la definizione di $\bar{\nu}(\varrho)$.

Da quanto sopra segue che la serie lineare $g^\varrho_{\bar{\nu}(\varrho)}$, segata sulla $V_1^{\bar{\nu}(\varrho)}$ dagli iperpiani di S_ϱ è completa; e poichè è sempre $\bar{\nu}(\varrho) \geq \varrho$, si ha che per ϱ sufficientemente grande, la detta serie $g^\varrho_{\bar{\nu}(\varrho)}$ è anche non speciale. Detto quindi π il genere di C, per ϱ sufficientemente grande si ha $\varrho = \bar{\nu}(\varrho) - \pi$, da cui, per la $\bar{\nu}(\varrho) - \varrho = p$, segue $p = \pi$. Cioè *l'intero p definito al n. 13 non è altro che il genere della curva C.*

Pisa, luglio 1951