ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

W. GRÖBNER

Oberflächenwellen von Flüssigkeiten

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 3-4 (1951), p. 175-191

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_175_0>

OBERFLÄCHENWELLEN VON FLÜSSIGKEITEN

von W. GRÖBNER (Innsbruck)

1. — Das Problem der Oberflächenwellen einer Flüssigkeit wird in den bekannten Lehrbüchern der Hydrodynamik (1) nach einer klassischen Methode, ausgehend von den Eulerschen Grundgleichungen der Hydrodynamik, gelöst. Dabei ist es, um zu einer mathematisch lösbaren Differentialgleichung zu gelangen, unvermeidlich, einige Vernachlässigungen und vereinfachende Voraussetzungen zu machen, deren Auswirkung jedoch nicht in allen Fällen leicht zu kontrollieren ist. Es scheint auch nach dieser Methode kaum möglich zu sein, die Lösungen durch teilweise Berücksichtigung der vernachlässigten Glieder weiter zu verbessern, um einen der Wirklichkeit besser entsprechenden Genauigkeitsgrad zu erreichen.

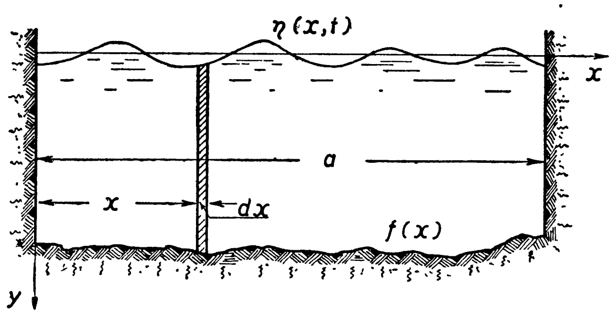
Im folgenden soll daher eine neue Ableitung für die Lösung dieses Problems dargeboten werden, welche sehr einfach und übersichtich ist, und ausserdem gestattet, die mathematische Lösung des Problems bis zu einer beliebig vorgeschriebenen Genauigkeit zu steigern. Der hier eingeschlagene Weg nimmt seinen Ausgang von einer grundsätzlichen Feststellung, die R. COURANT und D. HILBERT (2) ihren für die Lösung der Probleme der mathematischen Physik richtunggebenden Entwicklungen vorangestellt haben: « Bei der Aufstellung und Behandlung der meisten Differentialgleichungen der mathematischen Physik erweist sich die Variationsrechnung als zuverlässiger Führer. Handelt es sich um Probleme des — stabilen — Gleichgewichts, so kann man das *Variationsprinzip vom Minimum der potentiellen Energie* zum Ausgangspunkt nehmen, während die Gesetze der Bewegungs-

(1) Vgl. etwa HORACE LAMB, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1907; ARNOLD SOMMERFELD, Vorlesungen über theoretische Physik II, Mechanik der deformierbaren Medien, Leipzig 1949.

(2) R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik I, Berlin 1931, Kap. IV, § 10, S. 210.

vorgänge ihre einfachste Formulierung an Hand des *Variationsprinzips von Hamilton* finden ».

Es ist in der Tat für die mathematische Behandlung eines physikalischen Problems viel vorteilhafter, von dem zugehörigen Variationsprinzip auszugehen, als von den Euler-Lagrangeschen Gleichungen desselben. Denn die der Mathematik zur Verfügung stehenden Lösungsmethoden lassen sich immer besonders einfach und ohne Kunstgriffe auf ein Variationsproblem anwenden, aber nicht so leicht und unmittelbar auf eine irgendwie vorgelegte Differentialgleichung. Es ist sogar oft notwendig, eine vorgelegte Differentialgleichung neuerdings in ein Variationsproblem umzuwandeln, um sie einer Lösung zuführen zu können. Auf dem Wege dieser Umwandlungen werden gewöhnlich noch einige Vernachlässigungen und Vereinfachungen eingeführt, die fallweise begründet sein mögen, die aber doch das endgültige Resultat mit einer schwer kontrollierbaren Unsicherheit belasten.



Figur 1

Da nun die Differentialgleichungen der Hydrodynamik bereits als Euler-Lagrangesche Gleichungen aus dem Variationsprinzip von Hamilton gewonnen werden können [3], so dürfte grössere Einfachheit und Sicherheit damit gewonnen werden, wenn man das Hamiltonsche Prinzip zum Ausgangspunkt wählt und nicht die Differentialgleichungen, sondern das Variationsprinzip dem vorliegenden physikalischen Problem anpasst.

2. — Wir nehmen eine zweidimensionale Bewegung einer nur der Schwerkraft als äusseren Kraft ausgesetzten Flüssigkeit an, so dass alle Bewegungsvorgänge in der vertikalen xy-Ebene beschrieben werden können. Die x-Achse sei in die ungestörte Oberfläche der Flüssigkeit gelegt, die vertikal nach abwärts gerichtete y-Achse falle in die erste senkrechte Begrenzungswand der Flüssigkeit (siehe Figur 1). Am Boden werde die Flüs-

(3) Vgl. etwa SOMMERFELD, l. c. S. 86 f.

sigkeit durch eine beliebig gestaltete Fläche, entsprechend der Funktion $f(x)$, und sodann durch eine zweite in der Entfernung a von der ersten gelegene vertikale Wand begrenzt. Die Oberfläche der Flüssigkeit ist eine von der Koordinate x und der Zeit t abhängige Funktion $\eta(x, t)$, die eigentliche Unbekannte unseres Problems. Da die Flüssigkeit inkompressibel und daher ihr Volumen konstant ist, muss gelten:

$$\int_0^a \eta(x, t)\, dx = 0 . \tag{1}$$

Da die Flüssigkeit nur der Einwirkung der Schwerkraft ausgesetzt sein soll, lässt sich ihre potentielle Energie U leicht berechnen; wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit bedeutet und die Breite der Flüssigkeit senkreckt zur xy-Ebene gleich 1 angenommen wird, so gilt

$$U = -g\varrho \int_0^a \frac{1}{2}(f+\eta)(f-\eta)\, dx ,$$

oder, weil eine additive Konstante keine Bedeutung besitzt, einfacher:

$$U = \frac{1}{2} g\varrho \int_0^a \eta^2(x, t)\, dx \tag{2}$$

Um auch die kinetische Energie unseres Flüssigkeitsvolumens berechnen zu können, müssen wir eine Annahme über die horizontale Komponente der Geschwindigkeit machen, die den tatsächlichen Verhältnissen Rechnung trägt. Die einfachste Annahme, die bei nicht allzu grossen Tiefen der Wirklichkeit sehr nahe kommt ([4]), ist die folgende: *Voraussetzung A:* Die horizontale Komponente u der Geschwindigkeit der Flüssigkeit an einer Stelle x, y zur Zeit t sei eine von y unabhängige Funktion $u(x, t)$.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich diese Geschwindigkeit $u(x, t)$ nun leicht in Abhängigkeit von $\eta(x, t)$ berechnen; denn die Berechnung des während eines Zeitelementes dt durch die Änderung der Oberfläche verdrängten Volumens dV ergibt:

$$dV = \int_0^x [\eta(\xi, t + dt) - \eta(\xi, t)]\, d\xi = u(x, t)\,[f(x) - \eta(x, t)]\, dt ,$$

([4]) Vgl. etwa Sommerfeld, l. c. S. 173.

also

$$(3)\qquad u(x,t) = \frac{\int\limits_0^x \eta_t(\xi, t)\, d\xi}{f(x) - \eta(x,t)}.$$

Die vertikale Komponente v der Geschwindigkeit lässt sich nun leicht berechnen; denn einerseits ist v zufolge der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ eine lineare Funktion von y, andererseits liefert die direkte Berechnung von v am Boden und an der Oberfläche:

$$v = \frac{f(x + u\, d\, t) - f(x)}{d\, t} = f'(x)\, u(x,t) \qquad \text{für } y = f,$$

$$v = \frac{\eta(x + u\, d\, t, t + d\, t) - \eta(x,t)}{d\, t} = \eta_x(x,t)\, u(x,t) + \eta_t(x,t) \qquad \text{für } y = \eta;$$

daraus folgt nun:

$$(4)\qquad v(x,y,t) = \frac{f'\, u(y - \eta) + (\eta_x u + \eta_t)(f - y)}{f - \eta}.$$

Eine leichte Rechnung liefert nun die gesamte kinetische Energie der Flüssigkeit:

$$(5)\qquad T = \frac{\varrho}{2}\int\limits_0^a d\,x \int\limits_\eta^f (u^2 + v^2)\, d\,y =$$

$$= \frac{\varrho}{6}\int\limits_0^a (f - \eta)\,[3\,u^2 + f'^2 u^2 + f'\, u(\eta_x u + \eta_t) + (\eta_x u + \eta_t)^2]\, d\,x.$$

Die Anwendung des Hamiltonsche Prinzips auf unser Problem zeigt nun, dass die Funktion $\eta(x,t)$, deren Berechnung wir anstreben, so beschaffen sein muss, dass für sie der Werte des Integrals

$$\Omega = \int\limits_{t_1}^{t_2} (T - U)\, d\,t$$

gegenüber allen Variationen von η, welche die Bedingung (1) erfüllen und für t_1 und t_2 verschwinden, einen extremen Wert besitzt. Setzt man (2) und (5) in Ω ein, so folgt zunächst:

$$\Omega = \frac{\varrho}{6}\int_{t_1}^{t_2} d\,t \int_0^a \{(f-\eta)[3\,u^2 + f'^2 u^2 + f'\,u\,(\eta_x u + \eta_t) + (\eta_x u + \eta_t)^2] - 3\,g\,\eta^2\}\,d\,x.$$

Hier ist noch u nach (3) durch η auszudrücken. Für diesen Zweck empfiehlt es sich, an Stelle von η die neue unbekannte Funktion

$$\text{(6)} \qquad w\,(x\,;\,t) = \int_0^x \eta\,(\xi\,,\,t)\,d\,\xi$$

einzuführen, sodass unter den üblichen Voraussetzungen über die Stetigkeit von η und seiner Ableitungen gilt:

$$\text{(6 a)} \qquad \eta\,(x\,,\,t) = w_x\,(x\,,\,t)\,, \quad u\,(x\,,\,t) = \frac{w_t\,(x\,,\,t)}{f(x) - w_x\,(x\,,\,t)}\,.$$

So umgerechnet erhält das Integral Ω die Gestalt:

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} \Omega = \frac{\varrho}{6}\int_{t_1}^{t_2} d\,t \int_0^a \Big\{ & \frac{(3 + f'^2)\,w_t^2 + f'\,w_{xx}\,w_t^2 + w_{xx}^2\,w_t^2}{f - w_x} + f'\,w_t\,w_{xt} + 2\,w_t\,w_{xx}\,w_{xt} + \\ & + (f - w_x)\,w_{xt}^2 - 3\,g\,w_x^2 \Big\}\,d\,x\,; \end{aligned}$$

gemäss (1) und (6) ist $w\,(x\,,\,t)$ der Bedingung unterworfen:

$$\text{(8)} \qquad w\,(0\,,\,t) = w\,(a\,,\,t) = 0\,.$$

3. — Um einen besonders einfachen Fall herauszugreifen, nehmen wir die Bodenfläche eben an, also

$$f(x) = H\,, \quad f'\,(x) = 0\,.$$

Setzen wir ferner voraus, dass die Wellen sehr niedrig und flach sind, d. h. dass w und seine Ableitungen dem absoluten Betrag nach klein bleiben, so dürfen wir im Integranden von Ω alle höheren als zweiten Potenzen von w vernachlässigen und können schreiben:

$$(7') \qquad \Omega = \frac{\varrho}{6} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^a \left\{ \frac{3}{H} w_t^2 + H w_{xt}^2 - 3 g w_x^2 \right\} dx .$$

Aus der Bedingug, dass $w(x, t)$ diesem Ausdruck einen extremen Wert verleihen soll, folgt in bekannter Weise durch Variation die Eulersche Differentialgleichung für $w(x, t)$:

$$(9) \qquad \frac{3}{H} w_{tt} - H w_{xxtt} - 3 g w_{xx} = 0 .$$

Ausserdem muss $w(x, t)$ der Bedingung (8) genügen. Daher wird man zweckentsprechend $w(x, t)$ nach dem orthogonalen Funktionensystem $\sin \frac{\nu \pi x}{a}$ entwickeln und erhält nach leichter Rechnung die Lösung

$$w(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin \frac{\nu \pi x}{a} \cos k_\nu (t - t_\nu) ,$$

mit

$$k_\nu = \frac{\nu \pi}{a} \sqrt{\frac{3 g H}{3 + H^2 \nu^2 \pi^2 / a^2}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Die noch unbestimmten Grössen c_ν und t_ν sind frei, um einen beliebigen Anfangszustand $w(x, 0)$ und $w_t(x, 0)$ herzustellen. Durch Differentiation nach x erhält man die entsprechende Entwicklung für η:

$$(10) \qquad \eta(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{c}_\nu \cos \frac{\nu \pi x}{a} \cos k_\nu (t - t_\nu) .$$

Die einzelnen Glieder dieser Reihe stellen reine Sinuswellen dar, deren Wellenlänge $\lambda = \frac{2a}{\nu}$, deren Schwingungsdauer $\tau = \frac{2\pi}{k_\nu} = \sqrt{\frac{3\lambda^2 + 4\pi^2 H^2}{3 g H}}$ und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit daher

$$V = \frac{\lambda}{\tau} \sqrt{\frac{3 g H \lambda^2}{3 \lambda^2 + 4 \pi^2 H^2}}$$

ist.

Nimmt man an, dass die Flüssigkeit verhältnismässig seicht ist, sodass bei niedrigem Wellengang die vertikale Komponente der Geschwindigkeit klein gegenüber der horizontalen ist, so darf man in (7') das von der ersteren herrührende Glied $H\,w_{xt}^2$ vernachlässigen, wodurch sich die Differentialgleichung (9) in folgender Weise vereinfacht:

$$w_{tt} - g\,H\,w_{xx} = 0\,.$$

Die Lösung ist:

$$w\,(x\,,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin\frac{\nu\,\pi\,x}{a}\cos\frac{\nu\,\pi}{a}\sqrt{g\,H}\,(t - t_\nu)\,,$$

$$\eta\,(x\,,t) = w_x\,(x\,,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{c}_\nu \cos\frac{\nu\,\pi\,\nu}{a}\cos\frac{\nu\,\pi}{a}\sqrt{g\,H}\,(t - t_\nu)\,;$$

sie setzt sich aus reinen Sinuswellen zusammen, deren Wellenlänge $\lambda = \frac{2\,a}{\nu}$, deren Schwingungsdauer $\tau = \frac{2\,a}{\nu\sqrt{g\,H}}$ und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $V = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{g\,H}$ ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist hier von der Wellenlänge unabhängig. Das steht genau in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der klassischen Theorie, doch ist bei der obigen Ableitung auch genau ersichtlich, welche Voraussetzungen eingeführt und welche Vernachlässigungen gemacht wurden, sodass man in konkreten Fällen ihre Zulässigkeit leicht nachprüfen kann.

Eine ähnliche Vereinfachung findet man, wenn man im Falle « mässig tiefen » Wassers die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit gegenüber ihrer Vertikalkomponente vernachlässigt; es kommt das darauf hinaus, dass man im Integranden von (8′) und in der Differentialgleichung (9) den ersten Term weglässt. Man erhält dann die allgemeine Lösung durch Superponierung von reinen Sinuswellen der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\,a}{\nu}$, der Schwingungsdauer $\tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{H}{3\,g}}$ und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $V = \frac{\lambda}{2\,\pi}\sqrt{\frac{3\,g}{H}}$.

4. — *Berücksichtigung der Oberflächenspannung.* Das Potential der Oberflächenspannung der Flüssigkeit kann proportional der Dehnung der Oberfläche, also genau genug gleich

$$U_1 = D\int_0^a \eta_x^2\,d\,x \tag{11}$$

mit einer passenden Materialkonstanten D angenommen werden. Diese Grösse muss zu dem Ausdruck (2) für die potentielle Energie hinzugefügt werden, was zum Ergebnis hat, dass im Integranden von Ω in (7) das Glied $-\frac{6\,D}{\varrho}\,w_{xx}^2$ hinzukommt. Berechnet man unter denselben Voraussetzungen wie in Nr. 3 die Eulersche Differentialgleichung, so erhält man:

$$\frac{3}{H}\,w_{tt} - H\,w_{xxtt} + \frac{6\,D}{\varrho}\,w_{xxxx} - 3\,g\,w_{xx} = 0\,. \tag{12}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen (8) lässt sich in gleicher Art wie in den vorausgehenden Fällen entwickeln. Man findet schliesslich:

$$\eta\,(x\,,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cos\frac{\nu\,\pi\,x}{a}\cos k_\nu\,(t - t_\nu)\,,$$

mit

$$k_\nu = \frac{\nu\,\pi}{a}\sqrt{\frac{3\,H\left(g + \frac{2\,D}{\varrho}\,\frac{\nu^2\,\pi^2}{a^2}\right)}{3 + H^2\,\frac{\nu^2\,\pi^2}{a^2}}}\,, \qquad \nu = 1\,,2\,,\ldots$$

Diese Wellenbewegung setzt sich also aus reinen Sinuswellen der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\,a}{\nu}$, der Schwingungsdauer $\tau = \lambda\sqrt{\frac{3\,\lambda^2 + 4\,\pi^2\,H^2}{3\,H\left(g\,\lambda^2 + 4\,\pi^2\,\frac{2\,D}{\varrho}\right)}}$ und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$V = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{3\,H\left(g\,\lambda^2 + \frac{8\,\pi^2\,D}{\varrho}\right)}{3\,\lambda^2 + 4\,\pi^2\,H^2}}$$

zusammen.

5. — *Fall einer geneigten Bodenfläche.* Wir wollen das Variationsprinzip (7) noch auf den Fall einer schräg geneigten Bodenfläche spezialisieren, also

$$f(x) = H - \alpha\,x\,, \quad \alpha > 0\,, \quad H - \alpha\,a > 0 \tag{13}$$

zugrundelegen, im übrigen aber wieder die vereinfachenden Voraussetzungen von Nr. 3 gelten lassen, d. h. alle Potenzprodukte höherer als zweiter Ordnung vernachlässigen. Wir erhalten dann aus (7)

$$\Omega = \frac{\varrho}{6}\int_{t_1}^{t_2} d\,t\int_0^a\left\{\frac{3 + \alpha^2}{H - \alpha\,x}\,w_t^2 + (H - \alpha\,x)\,w_{xt}^2 - 3\,g\,w_x^2\right\}d\,x\,,$$

woraus durch Variation die Differentialgleichung

$$(14) \qquad \frac{3+\alpha^2}{H-\alpha x} w_{tt} - (H-\alpha x)\, w_{xxtt} + \alpha\, w_{xtt} - 3\, g\, w_{xx} = 0$$

mit der Bedingung (8) folgt. Auf diese Differentialgleichung scheint die klassische Methode der Entwicklung nach Eigenfunktionen nicht mehr anwendbar zu sein; es wird sich daher empfehlen, statt von der Differentialgleichung (14) vom Variationsproblem Ω auszugehen und dessen Lösung mit Hilfe einer direkten Methode der Variationsrechnung zu suchen.

Wenn wir aber ähnlich wie in Nr. 3 voraussetzen, dass der Beitrag der Vertikalgeschwindigkeit zur Gesamtenergie vernachlässigt werden darf (« seichtes Wasser »), so können wir das mittlere Glied in Ω unterdrücken und erhalten die Differentialgleichung

$$(14') \qquad (3+\alpha^2)\, w_{tt} - 3\, g\, (H-\alpha x)\, w_{xx} = 0\,,$$

deren Lösung wir nach den Eigenfunktionen des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems

$$(15) \qquad (H-\alpha x)\, \varphi_\nu''(x) + \lambda_\nu\, \varphi_\nu(x) = 0\,, \quad \varphi_\nu(0) = \varphi_\nu(a) = 0$$

entwickeln können. Diese Eigenfunktionen sind Besselfunktionen 1. Ordnung [5]:

$$\varphi_\nu(x) = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\lambda_\nu (H-\alpha x)}\left\{N_1\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\lambda_\nu H}\right) J_1\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\lambda_\nu (H-\alpha x)}\right) - \right.$$
$$\left. - J_1\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\lambda_\nu H}\right) N_1\left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{\lambda_\nu (H-\alpha x)}\right)\right\}.$$

Die Eigenwerte sind durch die Bedingung $\varphi_\nu(a) = 0$ zu berechnen und genügen der asymptotischen Formel

$$\lambda_\nu \approx \left[\frac{\nu\pi\alpha}{2\left(\sqrt{H}-\sqrt{H-\alpha a}\right)} - \frac{3\alpha}{16\,\nu\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{H-\alpha a}} - \frac{1}{\sqrt{H}}\right)\right]^2, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

---

[5] Durch die Transformation $x = \frac{H}{\alpha} - \frac{\alpha}{4\lambda} z^2$, $\varphi(x) = z\, v(z)$ geht die Differentialgleichung $(H-\alpha x)\, \varphi''(x) + \lambda\, \varphi(x) = 0$ in die Besselsche Differentialgleichung $v'' + \frac{1}{z} v' + \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) v = 0$ über.

Daraus folgt nach leichter Rechnung für $w(x, t)$ die Entwicklung

$$w(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x) \cos \sqrt{\frac{3 g \lambda_\nu}{3 + \alpha^2}} (t - t_\nu),$$

aus welcher man durch Differentiation nach x die Entwicklung von $\eta(x, t)$ erhält:

$$\eta(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi'_\nu(x) \cos \sqrt{\frac{3 g \lambda_\nu}{3 + \alpha^2}} (t - t_\nu)$$

mit

$$\varphi'_\nu(x) = \frac{2 \lambda_\nu}{\alpha} \left\{ J_1\left(\frac{2}{\alpha} \sqrt{\lambda_\nu H}\right) N_0\left(\frac{2}{\alpha} \sqrt{\lambda_\nu (H - \alpha x)}\right) - \right.$$

$$\left. - N_1\left(\frac{2}{\alpha} \sqrt{\lambda_\nu H}\right) J_0\left(\frac{2}{\alpha} \sqrt{\lambda_\nu (H - \alpha x)}\right) \right\}.$$

Die noch freien Koeffizienten c_ν und t_ν können dazu benützt werden, um einen beliebig vorgegebenen Anfangszustand herzustellen.

6. — Die bisher berechneten Lösungen beruhen alle auf der Voraussetzung, dass die Horizontalgeschwindigkeit von y nicht abhängt, d.h. in allen Punkten eines vertikalen Schnittes dieselbe ist. Diese Voraussetzung wird sicher nicht immer zutreffen, besonders bei grossen Tiefen. Daher möchte ich die Lösung unseres Problems noch unter zwei anderen Voraussetzungen berechnen; es wird sich zeigen, dass die Lösungen dadurch nicht wesentlich komplizierter werden. Zunächst soll die folgende Voraussetzung zugrunde gelegt werden:

Voraussetzung B; Die horizontale Komponente u der Geschwindigkeit sei eine lineare Funktion von y, die am Boden verschwindet:

$$u(x, y, t) = \frac{f(x) - y}{f(x)} u_0(x, t). \tag{15}$$

Wie in Nr. 2 kann $u_0(x, t)$ in Abhängigkeit von $\eta(x, t)$ berechnet werden:

$$u_0(x, t) = \frac{2 f(x)}{(f(x) - \eta(x, t))^2} \int_0^x \eta_t(\xi, t)\, d\xi, \tag{16}$$

und die vertikale Geschwindigkeitskomponente v:

$$v(x, y, t) = \frac{f'(y - \eta) + \eta_x (f - y)}{f - \eta} u + \frac{(f - y)^2}{(f - \eta)^2} \eta_t. \tag{17}$$

Die potentielle Energie U ist wieder durch die Formel (2) gegeben, während man für die kinetische Energie den Ausdruck findet:

$$T = \frac{\varrho}{2} \int_0^a d\,x \int_\eta^f (u^2 + v^2)\, d\,y = \frac{\varrho}{2} \int_0^a (f - \eta) \left\{ \frac{(f-\eta)^2}{f^2} u_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{30} f'^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{10} f' \eta_x + \frac{1}{5} \eta_x^2 \right) + \frac{f - \eta}{10 f} (f' + 4\,\eta_x)\, \eta_t\, u_0 + \frac{1}{5} \eta_t^2 \right\} d\,x\,.$$

Damit ist der Ausdruck für das Hamiltonsche Prinzip

$$\Omega = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, d\,t$$

gefunden, den wir gleich gemäss Formel (6) auf die Funktion $w(x, t)$ umrechnen wollen, wobei jetzt

$$u_0 = \frac{2 f\, w_t}{(f - w_x)^2}$$

gesetzt werden muss. Wir erhalten so:

$$\Omega = \frac{\varrho}{2} \int_{t_1}^{t_2} d\,t \int_0^a \left\{ \frac{4\, w_t^2}{f - w_x} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{30} f'^2 + \frac{1}{10} f'\, w_{xx} + \frac{1}{5} w_{xx}^2 \right) + \right. \tag{18}$$

$$\left. + \frac{1}{5} (f' + 4\, w_{xx})\, w_{xt}\, w_t + \frac{1}{5} (f - w_x)\, w_{xt}^2 - g\, w_x^2 \right\} d\,x\,,$$

welche Formel sich nur in den Zahlenkoeffizienten von (7) unterscheidet. Wenn wir das Problem wieder linearisieren, indem wir alle höheren Potenzen von w vernachlässigen, und ferner

$$f(x) = H\,,\ f'(x) = 0$$

setzen, so erhalten wir:

$$\Omega = \frac{\varrho}{2} \int_{t_1}^{t_2} d\,t \int_0^a \left\{ \frac{4}{3H} w_t^2 + \frac{1}{5} H\, w_{xt}^2 - g\, w_x^2 \right\} d\,x\,.$$

Soll die Funktion $w(x, t)$, die wieder den Bedingungen (8) genügen wuss, dieses Funktional zu einem Extremum machen, so muss w der Eulerschen Differentialgleichung genügen:

$$\frac{4}{3H} w_{tt} - \frac{1}{5} H w_{xxtt} - g w_{xx} = 0 , \tag{19}$$

also durch die folgende Reihe dargestellt werden:

$$w(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin \frac{\nu \pi x}{a} \cos k_\nu (t - t_\nu) ,$$

mit

$$k_\nu = \frac{\nu \pi}{a} \sqrt{\frac{15 g H}{20 + 3 H^2 \nu^2 \pi^2/a^2}} , \nu = 1, 2, \ldots$$

Die Wellenbewegung selbst wird wieder durch die partielle Ableitung von w nach x geliefert:

$$\eta(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{c}_\nu \cos \frac{\nu \pi x}{a} \cos k_\nu (t - t_\nu) .$$

Sie setzt sich aus einzelnen Sinuswellen zusammen, deren Wellenlänge $\lambda = \frac{2a}{\nu}$, deren Schwingungsdauer $\tau = \frac{2\pi}{k_\nu} = 2 \sqrt{\frac{5\lambda^2 + 3\pi^2 H^2}{15 g H}}$, und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$V = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{15 g H}{5 \lambda^2 + 3 \pi^2 H^2}}$$

ist.

7. — Eine noch allgemeinere Voraussetzung, die wir machen können, ist die folgende:

Voraussetzung C: Die horizontale Komponente u der Geschwindigkeit sei eine mit y exponentiell abnehmende Funktion:

$$u(x, y, t) = e^{-ky} u_0(x, t) \tag{20}$$

mit einer nicht näher bestimmten positiven Konstanten k.

Wir können wieder leicht u_0 in Abhängigkeit von η berechnen:

$$u_0(x, t) = \frac{k}{e^{-k\eta} - e^{-kf}} \int_0^x \eta_t(\xi, t)\, d\xi , \tag{21}$$

und

$$v(x\,,y\,,t)=\frac{(e^{-ky}-e^{-kf})\,(\eta_t+e^{-k\eta}\,\eta_x\,u_0)+(e^{-k\eta}-e^{-ky})\,e^{-kf}f'\,u_0}{e^{-k\eta}-e^{-kf}} \tag{22}$$

Die potentielle Energie der Flüssigkeit ist wieder durch (2) gegeben, während wir für die kinetische Energie nach Ausführung der Integration hinsichtlich y den Ausdruck finden:

$$T=\frac{\varrho}{2}\int_0^a d\,x\int_\eta^f (u^2+v^2)\,d\,y$$

$$=\frac{\varrho}{2}\int_0^a\Big\{\frac{e^{-2k\eta}-e^{-2kf}}{2\,k}\,u_0^2+\frac{e^{-k\eta}+e^{-kf}}{2\,k\,(e^{-k\eta}-e^{-kf})}\,(\eta_t+e^{-k\eta}\,\eta_x\,u_0-e^{-kf}f'\,u_0)^2-$$

$$-\frac{2\,e^{-kf}}{k\,(e^{-k\eta}-e^{-kf})}\,(\eta_t+e^{-k\eta}\,\eta_x\,u_0-e^{-kf}f'\,u_0)\,(\eta_t+e^{-k\eta}\,\eta_x\,u_0-e^{-k\eta}f'\,u_0)+$$

$$+\frac{e^{-2kf}(f-\eta)}{(e^{-k\eta}-e^{-kf})^2}\,(\eta_t+e^{-k\eta}\,\eta_x\,u_0-e^{-k\eta}f'\,u_0)^2\Big\}\,d\,x\,.$$

Mit diesen Ausdrücken kann man nun das Hamiltonsche Prinzip

$$\Omega=\int_{t_1}^{t_2}(T-U)\,d\,t$$

bilden und die Funktion $\eta\,(x\,,t)$ so bestimmen, dass Ω einen extremen Wert annimmt. Wir wollen diese Rechnung unter den vereinfachenden Voraussetzungen weiterführen, dass die Tiefe der Flüssigkeit so gross sei, das $e^{-kf}=0$ gesetzt werden darf, und dass die Wellenbewegung η so klein sei, dass $e^{-k\eta}=1$ gesetzt werden darf. Führen wir dann wieder die Funktion $w\,(x\,,t)$ nach Formel (6) ein, woraus $u_0=k\,w_t$ folgt, so erhalten wir

$$\Omega=\frac{\varrho}{2}\int_0^a\Big\{\frac{k}{2}\,w_t^2+\frac{1}{2\,k}\,(w_{xt}+k\,w_{xx}\,w_t)^2-g\,w_x^2\Big\}\,d\,x\,. \tag{23}$$

Um die Lösung in erster Annäherung zu berechnen, können wir hier die höheren Potenzen vernachlässigen, und finden so für $w\,(x\,,t)$ die Eulersche Differentialgleichung

$$k^2\,w_{tt}-w_{xxtt}-2\,k\,g\,w_{xx}=0\,. \tag{24}$$

Auch diese Differentialgleichung unterscheidet sich nur in den Zahlenkoeffizienten von den entsprechenden Differentialgleichungen (9) und (19), die wir unter den Voraussetzungen A und B ermittelt haben; die Lösung ist

$$w(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin \frac{\nu \pi x}{a} \cos m_\nu (t - t_\nu)$$

mit

$$m_\nu = \frac{\nu \pi}{a} \sqrt{\frac{2 k g}{k^2 + \nu^2 \pi^2/a^2}}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

und entsprechend

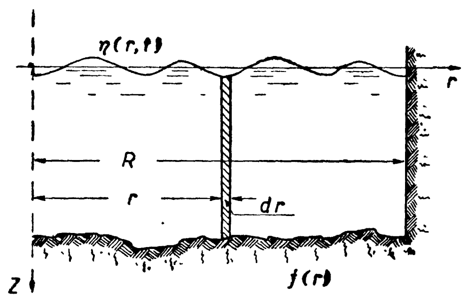
$$\eta(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{c}_\nu \cos \frac{\nu \pi x}{a} \cos m_\nu (t - t_\nu).$$

Sie setzt sich aus einzelnen Sinuswellen zusammen, deren Wellenlänge $\lambda = \frac{2a}{\nu}$, deren Schwingunsdauer $\tau = \sqrt{\frac{k^2 \lambda^2 + 4 \pi^2}{2 k g}}$, und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{2 k g \lambda^2}{k^2 \lambda^2 + 4 \pi^2}}$$

ist.

Für genauere Berechnungen ist es notwendig, vom Variationsproblem für Ω auszugehen und Ω mit Hilfe direkter Methoden der Variationsrechnung zu einem Extremam zu machen.



Figur 2.

8. — *Ringwellen.* Ohne besondere Schwierigkeit lässt sich dieselbe Methode auch auf Oberflächenwellen mit Zentralsymmetrie, sogenannte Ringwellen, anwenden. Wir verwenden hier zweckmässig Zylinderkoordinaten und legen die z-Achse des Koordinatensystems senkrecht nach unten in die Symmetrieachse der Flüssigkeit, die xy-Ebene ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) in

die Oberfläche der ungestörten Flüssigkeit. Die Bewegung und alle Zustandsgrössen hängen dann voraussetzungsgemäss nur von den Koordinaten r, z und von der Zeit t ab. Der Boden der Flüssigkeit (Fig. 2), der beliebig gestaltet sein kann, aber ebenfalls die geforderte Symmetrie zur z-Achse aufweisen muss, ist durch eine Funktion $f(r)$ gegeben. Die Oberfläche des Flüssigkeit ist eine Funktion $\eta(r, t)$, die eigentliche Unbekannte unseres Problems.

Bei Voraussetzung konstanter Dichte ϱ der Flüssigkeit wird dann die potentielle Energie durch das Integral

$$-\pi g \varrho \int_0^R (f - \eta)(f + \eta)\, r\, d r$$

gegeben sein, und da eine additive Konstante ohne Einfluss ist, dürfen wir setzen:

$$U = g \pi \varrho \int_0^R r \eta^2 (r, t)\, d r . \tag{25}$$

Für die Berechnung der kinetischen Energie machen wir wieder die Voraussetzung A, dass die horizontale Komponente der Geschwindigkeit eine nur von r und t abhängige Funktion $u(r, t)$ ist. Diese lässt sich analog den Entwicklungen in Nr. 2 als Funktion von $\eta(r, t)$ berechnen:

$$u(r, t) = \frac{\int_0^T \eta_t (\xi, t)\, \xi\, d \xi}{r (f - \eta)} . \tag{26}$$

Für die vertikale Komponente der Geschwindigkeit finden wir auf Grund der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

nach leichter Rechnung:

$$v(r, t) = \frac{(f - z)(\eta_t + \eta_r u) + (z - u) f' u}{f - \eta} . \tag{27}$$

Die Berechnung der kinetischen Energie lässt sich nun durchführen und liefert nach Ausführung der Integration bezüglich z den Ausdruck:

$$T = \pi \varrho \int_0^R r\, d r \int_\eta^f (u^2 + v^2)\, d z = \tag{28}$$

$$= \pi \varrho \int_0^R (f - \eta) \left\{ u^2 + \frac{1}{3} f'^2 u^2 + \frac{1}{3} f' u (\eta_t + \eta_p u) + \frac{1}{3} (\eta_t + \eta_p u)^2 \right\} r\, d r .$$

Setzen wir (25) und (27) in das Hamiltonsche Prinzip ein und rechnen auf die neue unbekannte Funktion

$$\mathrm{w}(r, t) = \int_0^p \xi \, \eta (\xi, t)\, d \xi , \tag{29}$$

wobei $\eta = \frac{1}{r} w_r$ und $u = \frac{w_t}{r f - w_r}$ zu setzen ist, um, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Omega = \pi \varrho \int_{t_1}^{t_2} d t \int_0^R \Bigg\{ & \frac{w_t^2 \left[1 + \frac{1}{3} f'^2 + \frac{1}{3 r^2} f' (r w_{rr} - w_r) + \frac{1}{3 r^4} (r w_{rr} - w_r)^2 \right]}{r f - w_r} + \\ & + \frac{w_t\, w_{rt}}{3 r} \left[f' + \frac{2}{r^2} (r w_{rr} - w_r) \right] + \frac{w_{rt}^2}{3 r^2} (r f - w_r) - \frac{g}{r} w_r^2 \Bigg\} d r . \end{aligned} \tag{30}$$

Setzen wir konstante Tiefe der Füssigkeit:

$$f(r) = H , \qquad f'(r) = 0$$

und niedere Wellen voraus, sodass mit genügender Annäherung in (30) alle Potenzprodukte höheren als zweiten Grades vernachlässigt werden dürfen, so vereinfacht sich das Funktional (30) auf die Gestalt

$$\Omega = \pi \varrho \int_{t_1}^{t_2} d t \int_0^R \left\{ \frac{w_t^2}{H} + \frac{H}{3} w_{rt}^2 - g\, w_r^2 \right\} \frac{d r}{r} ; \tag{30 a}$$

ausserdem folgen aus (29) noch die Bedingungen

$$w(0, t) = w(R, t) = 0 . \tag{31}$$

Da die gesuchte Funktion $w(r, t)$ den Ausdruck (30 a) zu einem Minimum machen muss, folgt, dass $w(r, t)$ der Eulerschen Gleichung

$$\frac{1}{H} w_{tt} - \frac{H}{3} w_{rrtt} + \frac{H}{3r} w_{rtt} - g\, w_{rr} + g \frac{w_r}{r} = 0 \tag{32}$$

genügt. Die Lösung dieser Differentialgleichung kann nach Besselfunktionen entwickelt werden, und zwar erhält man

$$w(r, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\, r\, J_1(\sqrt{\lambda_\nu}\, r) \cos k_\nu (t - t_\nu), \tag{33}$$

$$\eta(r, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{c}_\nu\, J_0(\sqrt{\lambda_\nu}\, r) \cos k_\nu (t - t_\nu), \tag{33 a}$$

mit den Eigenwerten

$$\sqrt{\lambda_\nu} \approx \frac{1}{R}\left(\frac{\pi}{4} + \nu\pi - \frac{3}{2(4\nu+1)\pi}\right), \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{34}$$

und den Koeffizienten

$$k_\nu = \sqrt{\frac{3 g \lambda_\nu H}{3 + H^2 \lambda_\nu}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

Colle Isarco, 12 novembre 1950 Gröbner