

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

MICHELANGELO VACCARO

**Sui funzionali analitici lineari definiti per le funzioni analitiche  
uniformi sopra una curva algebrica**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 5,*  
n° 1-2 (1951), p. 39-56

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1951\\_3\\_5\\_1-2\\_39\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_1-2_39_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SUI FUNZIONALI ANALITICI LINEARI DEFINITI PER LE FUNZIONI ANALITICHE UNIFORMI SOPRA UNA CURVA ALGEBRICA

di MICHELANGELO VACCARO (Roma)

## INTRODUZIONE

Il presente lavoro si ricollega alla teoria, sviluppata dal 1925 in poi dal Prof. L. FANTAPPIÈ, dei funzionali analitici definiti per le funzioni analitiche uniformi di una o più variabili complesse, e di questa adotta, salvo lievi modifiche, le definizioni generali. Esso trae lo spunto da un analogo lavoro, presentato nel 1942 come tesi di laurea nell'Università di Roma dalla Sig.na ANNA FARINELLI, riguardante il caso particolare delle curve ellittiche o di genere 1.

Nel suddetto lavoro si usa in modo essenziale l'uniformizzazione della curva algebrica mediante funzioni ellittiche, lasciando così prevedere la possibilità di trattare il caso generale, in cui il genere della curva è qualunque, mediante le funzioni automorfe di una variabile. Nel nostro lavoro abbiamo preferito invece staccarci da questo indirizzo e trattare direttamente la questione sulla curva algebrica valendoci dei primi elementi della teoria degli integrali abeliani sulla curva stessa.

La presente trattazione è inoltre impostata in maniera alquanto diversa che non le sistemazioni precedenti, in quanto, oltre a fare uso sistematico delle forme differenziali sulla curva algebrica, comincia col postulare l'esistenza di almeno una *indicatrice* di un dato funzionale lineare (forma differenziale, nel nostro caso, funzione per FANTAPPIÈ, che permette di calcolare il valore del funzionale) riservando alla fine la dimostrazione della sua esistenza mediante l'effettiva costruzione.

Nella nostra esposizione compaiono inoltre alcune novità anche per la teoria generale dei funzionali analitici, e precisamente: l'eliminazione per le linee analitiche della condizione della variabilità continua dell'insieme dei

punti non regolari; la dimostrazione diretta della permutabilità dei funzionali lineari con l'integrazione definita rispetto a un parametro e conseguente immediata dimostrazione della formula di FANTAPPIÈ per i funzionali lineari; l'estensione della formula del CAUCHY (valida in grande) alle funzioni analitiche uniformi sopra una curva algebrica qualunque; la sostituzione del concetto di pararegolarità a quello di biregolarità, in quanto più rispondente alla natura dei funzionali analitici.

Al posto dell'espressione  $\frac{1}{2\pi i} \int$  per il calcolo di un residuo useremo il simbolo  $\oint$ .

### 1. Funzioni e forme differenziali sopra una curva algebrica.

Precisiamo innanzi tutto la natura e le proprietà del campo su cui sono definite le funzioni argomento dei funzionali analitici di cui ci occupiamo.

Esso è costituito da una qualsiasi curva algebrica  $C$ , nel senso della geometria algebrica, ossia dalla classe di tutte le curve algebriche birazionalmente equivalenti fra loro e a una data.

Ogni curva algebrica rappresentante la classe data, è definita in maniera proiettiva in uno spazio proiettivo (il suo spazio di appartenenza) e rappresenta pertanto, con le sue sezioni piane, l'immagine proiettiva di una serie lineare della curva  $C$ . Se la serie lineare è semplice (cioè non composta con una involuzione) la curva proiettiva è anch'essa semplice, altrimenti è da considerarsi contata più volte.

Il caso più interessante per noi è quello in cui si prende come modello della curva algebrica  $C$  una retta multipla, su cui si sia fissato anche un sistema di riferimento di modo che si possa parlare di ascissa  $t$  di un punto qualsiasi della curva  $C$ , bastando, per individuarlo completamente, dire su quale ramo della retta multipla esso si trova. Questa aggiunta sarà sempre fatta nel seguito, conglobata però tacitamente nel semplice simbolo  $t$ .

Sulla curva algebrica  $C$  si può definire un sistema di intorni, detti *circolari*, usufruendo di un particolare modello di  $C$  dato da una retta multipla  $\varphi$  qualsiasi, sua rappresentante. Preso infatti un punto  $t_0$  qualsiasi di  $\varphi$ , indichiamo con  $r$  il numero dei fogli di  $\varphi$  che si permutano ciclicamente intorno ad esso (e pertanto sarà  $r = 1$  se  $t_0$  non è di diramazione per  $\varphi$ ,  $r > 1$  se invece lo è) e distinguiamo i due casi seguenti:

a)  $t_0$  è un punto al finito di  $\varphi$ . Indichiamo con  $\varrho$  la distanza da  $t_0$  dei punti di diramazione di  $\varphi$  più vicini a  $t_0$ , ma distinti da esso e fis-

siamo un numero  $\tau_0 < \varrho^{\frac{1}{r}}$  positivo,

Diremo intorno circolare  $U$  di  $t_0$  di raggio  $\tau_0$  l'insieme dei punti di  $\varphi$  rappresentabili coi valori di una variabile ausiliaria  $\tau$  dati da

$$\tau = (t - t_0)^{\frac{1}{r}}$$

e soddisfacenti la limitazione  $|\tau| < \tau_0$ .

b)  $t_0$  è un punto all'infinito di  $\varphi$ . Con  $\varrho$  indichiamo ora l'inverso della distanza dall'origine  $t = 0$  dei punti di diramazione di  $\varphi$  da essa più lontani e poniamo sempre  $\tau_0 < \varrho^{\frac{1}{r}}$ . L'intorno circolare  $U$  di  $t_0$  di raggio  $\tau_0$  sarà in questo caso dato dai punti di  $\varphi$  rappresentabili con

$$\tau = t^{\frac{-1}{r}}$$

soddisfacente sempre alla limitazione  $|\tau| < \tau_0$ .

Con questo sistema di intorni la curva  $C$  diventa evidentemente uno spazio topologico.

Definiamo ora il concetto di *funzione analitica* sulla curva  $C$ .

Supponiamo di avere una funzione  $y(t)$  definita e uniforme per ogni  $t$  di una regione  $R$  della curva  $C$ . Diremo che la  $y(t)$  risulta *analitica* nel punto  $t_0$  di  $C$  allorchè considerata come funzione della corrispondente variabile ausiliaria  $\tau$  risulta analitica nel punto  $\tau = 0$ . La  $y(t)$  dicesi anche *regolare* in  $t_0$ .

Diconsi *punti singolari* per la  $y(t)$  tutti i punti di  $C$  appartenenti alla frontiera della regione  $R$  di regolarità di  $y(t)$ , *non regolari* per la  $y(t)$  tutti i punti di  $C$  non di  $R$ .

Una funzione analitica  $y_1(t)$  dicesi *prolungamento* di una data funzione  $y(t)$  allorchè la sua regione  $R_1$  di definizione contiene la regione  $R$  di  $y(t)$  e inoltre la  $y_1(t)$  coincide con la  $y(t)$  in tutta la  $R$ .

Passiamo ora a definire il concetto di *forma differenziale analitica*. Fissiamo una regione  $\Omega$  di una curva algebrica  $C$  e a ogni punto  $\alpha$  di  $\Omega$  associamo un intorno circolare  $U_\alpha$  e un elemento di funzione analitica  $u(\tau)$  della variabile ausiliaria  $\tau$  corrispondente, regolare in tutto  $U_\alpha$ , con la seguente condizione: se due intorni  $U_{\alpha_1}$  e  $U_{\alpha_2}$  di due punti diversi  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  hanno un punto  $\alpha$  in comune, i due punti hanno i due corrispondenti elementi  $u_1(\tau_1)$  e  $u_2(\tau_2)$  aventi in quel punto  $\alpha$  due corrispondenti valori  $u_1$  e  $u_2$  legati dalla relazione

$$u_1 = \vartheta_1^2 u_2$$

ove  $\vartheta_1^2$  è il valore nel punto in questione della derivata  $\frac{d\tau_2}{d\tau_1}$ . Diremo in tal caso che  $u_1(\tau_1)$  e  $u_2(\tau_2)$  sono i *trasformati covarianti* l'uno dell'altro.

Se si tiene ora conto della relazione tra i differenziali corrispondenti

$$d\tau_2 = \vartheta_1^2 d\tau_1$$

si può dire che in ogni punto  $\alpha$  di  $\Omega$  vale l'uguaglianza

$$u_1(\tau_1) d\tau_1 = u_2(\tau_2) d\tau_2$$

ogni volta che due intorni distinti  $U_{a_1}$  e  $U_{a_2}$  vengono a sovrapporsi in esso.

Risulta da tutto ciò che l'espressione  $u(\alpha) d\alpha$  non dipende dal sistema di intorni usato per costruirla ossia è invariante su  $C$ . Noi la chiameremo una *forma differenziale analitica* della curva  $C$  (regolare e uniforme in  $\Omega$ ).

Oltre che la regolarità in un punto, sono concetti invarianti, per una forma differenziale di una curva  $C$ , quello di avere uno zero o un polo in un punto e il relativo ordine <sup>(1)</sup>.

Data infine una linea  $\lambda$  sulla curva algebrica  $C$  e una forma differenziale  $v(\alpha) d\alpha$  regolare in ogni punto di  $\lambda$ , dal fatto che la  $v(\alpha) d\alpha$  è invariante, risulta altresì invariante il suo integrale

$$\int_{\lambda} v(\alpha) d\alpha$$

calcolato lungo la linea  $\lambda$ , e il suo calcolo effettivo si può condurre ricorrendo a  $\lambda$  con un numero finito di intorni circolari, spezzandola in un numero finito di archi di linea contenuti in un solo intorno circolare di questo ricoprimento e infine eseguendo l'integrazione lungo ognuno di questi archi mediante la corrispondente variabile ausiliaria e sommando i risultati ottenuti.

## 2. Spazio funzionale analitico. Intorni. Funzionali analitici lineari.

Richiamiamo brevemente le definizioni e i teoremi preliminari della teoria dei funzionali analitici lineari così come si hanno dalla teoria generale dei funzionali analitici <sup>(2)</sup>; adattati naturalmente al nostro punto di vista.

<sup>(1)</sup> Il coefficiente di una forma differenziale sulla curva  $C$  coincide col noto concetto di *covariante analitico* sopra una superficie di RIEMANN.

<sup>(2)</sup> L. FANTAPPIÈ: *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, Atti Acc. d'Italia v. 12 (1941) pag. 617 - 706.

Diciamo innanzi tutto *spazio funzionale analitico*  $\mathcal{S}_C$  l'insieme di tutte le funzioni analitiche localmente e uniformi definite in corrispondenti regioni della curva algebrica  $C$  non vuote nè esaurienti la  $C$  <sup>(3)</sup>.

Dato un insieme  $A$  qualsiasi, purchè chiuso e non vuoto, contenuto nella regione  $R$  di definizione di una funzione  $y$  di  $\mathcal{S}_C$  e un numero reale positivo  $\sigma$  arbitrario, dicesi *intorno di base*  $A$  e *ampiezza*  $\sigma$  (e si indica col simbolo  $(A, \sigma)$ ) della funzione  $y$  di  $\mathcal{S}_C$  l'insieme di tutte le funzioni  $y'$  di  $\mathcal{S}_C$  regolari in ogni punto di  $A$  e presentanti uno scarto  $y' - y$  dalla  $y$  in modulo inferiore a  $\sigma$ , tale cioè che

$$|y' - y| < \sigma \quad \text{in } A.$$

Dicesi *regione funzionale*  $\mathcal{R}$  di  $\mathcal{S}_C$  ogni insieme di  $\mathcal{S}_C$  contenente almeno un intorno  $(A, \sigma)$  di ogni sua funzione.

Una regione funzionale dicesi *lineare di base*  $A$  allorchè essa consiste nell'insieme  $(A)$  delle funzioni regolari in ogni punto di un dato insieme chiuso  $A$  non vuoto nè esauriente la  $C$ . Una regione funzionale lineare coincide pertanto con l'intorno di base  $A$  e ampiezza infinita di una qualsiasi sua funzione.

La base  $A$  determina la regione funzionale lineare  $(A)$  e pertanto essa dicesi anche il suo *insieme caratteristico*.

Vale tal quale anche nel nostro caso la dimostrazione <sup>(4)</sup> che le regioni funzionali che sono anche campi lineari (ossia tali che prese in una qualsiasi di esse un numero finito di sue funzioni, appartenga alla regione anche ogni combinazione lineare di queste funzioni) si riducono a regioni lineari, in quanto anche la curva  $C$  è uno spazio topologico compatto (ogni suo insieme infinito ha in  $C$  almeno un punto di accumulazione) ed è questa appunto la proprietà che permette la dimostrazione nella teoria generale.

Dicesi *linea analitica* nello spazio funzionale  $\mathcal{S}_C$  ogni insieme di funzioni analitiche di  $\mathcal{S}_C$  ottenibili considerando una qualsiasi funzione analitica localmente  $y(t, \alpha)$  di una coppia di variabili  $t$  ed  $\alpha$ , descrivente una regione della superficie algebrica prodotto topologico della curva  $C$  su cui varia la  $t$  e di un'altra curva  $G$  su cui varia  $\alpha$ , e dando ad  $\alpha$  ogni possibile valore

<sup>(3)</sup> Si noti l'abbandono della restrizione « a priori » della biregolarità all'infinito che si ha nella sistemazione precedente della teoria dei funzionali analitici, dato che essa nella nostra rielaborazione si presenta in seguito sotto un aspetto operativo e trasformata nella pararegolarità.

<sup>(4)</sup> Ved. L. FANTAPPIÈ: *Nuovi fondamenti...*, loc. cit. pag. 647.

$\alpha_0$  per cui la corrispondente  $y(t, \alpha_0)$  appartenga ad  $\mathcal{S}_C$  ossia la sua regione  $R_{\alpha_0}$  di definizione non sia nè vuota nè esaurente la  $C$ .

Si verifica facilmente che  $\alpha$ , parametro della linea analitica, descrive una regione  $\Omega$  della curva algebrica  $G$ .

Facciamo vedere che presa una qualsiasi funzione  $y(t, \alpha_0)$  di una data linea analitica, c'è tutto un intorno di  $\alpha_0$  in  $\Omega$  tale che le corrispondenti funzioni della linea sono tutte contenute in un intorno  $(A, \sigma)$  di  $y(t, \alpha_0)$  comunque dato.

Si consideri all'uopo l'insieme chiuso  $A$  nella superficie algebrica  $C \times G$  alla quota  $\alpha_0$ .  $A$  è tutto contenuto nella regione di regolarità di  $y(t, \alpha)$  e pertanto è ricopribile con un numero finito di bicilindri (ognuno cioè prodotto di un intorno circolare in  $C$  per un intorno circolare in  $G$ ) di  $C \times G$  tutti quanti contenuti in questa regione. Si può pertanto scegliere un intorno circolare di  $\alpha_0$  contenuto in  $\Omega$  di raggio così piccolo che per ogni  $\bar{\alpha}$  di questo intorno si abbia:

a) la corrispondente funzione  $y(t, \bar{\alpha})$  è regolare in una regione di  $C \times G$  di quota  $\bar{\alpha}$  intersecante ognuno dei bicilindri in un intorno circolare a quota  $\bar{\alpha}$  del ricoprimento di  $A$ , e quindi regolare in ogni punto dell'insieme  $A$  posto a quota  $\bar{\alpha}$ ;

b) la funzione  $y(t, \bar{\alpha})$  abbia in ogni punto dell'insieme chiuso  $A$  uno scarto dalla  $y(t, \alpha_0)$  in modulo inferiore all'ampiezza  $\sigma$  dell'intorno considerato.

Queste due proprietà ci dicono appunto che per ogni  $\bar{\alpha}$  dell'intorno di  $\alpha_0$  considerato la corrispondente  $y(t, \bar{\alpha})$  appartiene al dato intorno  $(A, \sigma)$  di  $y(t, \alpha_0)$ , con il che resta dimostrato l'asserto (5).

La nostra elaborazione esige l'introduzione, accanto alle linee analitiche, del concetto, nuovo nella teoria dei funzionali analitici, di *linea differenziale analitica*. Si consideri una funzione  $y(t, \alpha)$  regolare in una regione della superficie  $C \times G$  la quale sia invariante rispetto alla variabile  $t$  e covariante rispetto alla  $\alpha$ . Ogni volta cioè che si fissa un punto  $\alpha_0$  in  $G$  e una rap-

---

(5) La dimostrazione è quindi una diretta conseguenza della regolarità della  $y(t, \alpha)$  in una regione di  $C \times G$ . A questo proposito si noti che l'esempio in contrario portato dal FANTAPPIÈ (*Nuovi fondamenti...* loc. cit. pag. 642) con la linea analitica

$$y(t, \alpha) = \operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{t - \alpha}$$

(con  $t$  e  $\alpha$  variabili complesse ordinarie) non soddisfa a questa condizione in quanto nel punto  $(0, 0)$  la  $y(t, 0)$  è regolare ma non vi è regolare la  $y(t, \alpha)$  considerata come funzione di entrambe le variabili  $t$  e  $\alpha$ .  $(0, 0)$  è cioè un punto singolare per la  $y(t, \alpha)$ .

presentazione del suo intorno con una variabile ausiliaria, la nostra funzione  $y(t, \alpha_0)$  diventa una ordinaria funzione analitica sulla curva  $C$  mentre, se si fissa invece un punto  $t_0$  su  $C$ , la corrispondente  $y(t_0, \alpha)$  dà luogo a una ordinaria forma differenziale  $y(t_0, \alpha) d\alpha$  analitica sulla curva  $G$ .

La linea differenziale considerata, che indicheremo con  $y(t, \alpha) d\alpha$ , ha quindi il duplice aspetto di linea di funzioni e di linea di forme differenziali a seconda di quale delle due variabili si assume come parametro.

Dicesi *funzionale analitico* (uniforme)  $F$  una qualsiasi corrispondenza (univoca) che associi a ogni funzione di una data regione funzionale  $\mathcal{R}$  di  $\mathcal{S}_C$  un numero complesso, soddisfacente le seguenti proprietà:

a) ogni volta che in  $\mathcal{R}$  compaiono due funzioni di cui almeno una è prolungamento dell'altra, il funzionale  $F$  assume in esse lo stesso valore;

b) lungo ogni linea analitica contenuta in  $\mathcal{R}$  il funzionale  $F$  diventa una ordinaria funzione analitica del parametro  $\alpha$  della linea.

Un funzionale analitico dicesi *lineare* di base  $A$  allorchè esso è definito nella regione funzionale lineare ( $A$ ) ed inoltre è una rappresentazione lineare delle funzioni di  $A$  nell'insieme dei numeri complessi (valgono cioè sempre le relazioni

$$F[y_1 + y_2] = F[y_1] + F[y_2]$$

e

$$F[cy] = c F[y]$$

con  $y, y_1, y_2$  di ( $A$ ) e  $c$  numero complesso qualsiasi).

L'applicazione di un funzionale lineare alle funzioni di una linea differenziale dà luogo, come facilmente si vede, a una funzione covariante  $u(\alpha)$  del parametro  $\alpha$  analitica localmente ossia a una forma differenziale

$$F_t[y(t, \alpha) d\alpha] = u(\alpha) d\alpha$$

regolare in una regione della curva  $G$ .

Non si può dire altrettanto pei funzionali analitici non lineari.

Data una linea analitica  $y(t, \alpha)$  la differenziazione di essa rispetto al parametro  $\alpha$  fornisce evidentemente una linea differenziale

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(t, \alpha) d\alpha$$

regolare nella stessa regione di regolarità di  $y(t, \alpha)$ . Se si prende quindi un qualsiasi funzionale lineare  $F$  hanno contemporaneamente senso entrambi i membri della relazione

$$d F[y(t, \alpha)] = F \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} y(t, \alpha) d\alpha \right]$$



esprime la permutabilità dei funzionali lineari con la differenziazione rispetto a un parametro, e questa relazione si può agevolmente dimostrare seguendo l'identica via seguita dal FANTAPPIÈ<sup>(6)</sup> per la permutabilità dei funzionali lineari con la derivazione.

Ci proponiamo viceversa di dimostrare dettagliatamente l'altra relazione

$$F \left[ \int_{\lambda} y(t, \alpha) d\alpha \right] = \int_{\lambda} F_t [y(t, \alpha) d\alpha]$$

esprime la permutabilità dei funzionali lineari con l'integrazione definita rispetto a un parametro, la quale, nella sistemazione attuale della teoria generale, risulta una conseguenza della formula del FANTAPPIÈ, mentre qui riceve una dimostrazione diretta, valida anche per la teoria generale, la quale trae di conseguenza, come vedremo, una dimostrazione immediata della formula del FANTAPPIÈ stessa<sup>(7)</sup>.

### 3. Permutabilità dei funzionali lineari con l'integrazione rispetto a un parametro

Consideriamo un funzionale lineare  $F$  relativo a una data base  $A$ , una linea differenziale  $y(t, \alpha) d\alpha$  contenuta nella regione funzionale lineare ( $A$ ) e la regione  $\Omega$  descritta dal parametro  $\alpha$  della linea sopra una data curva algebrica  $G$ .

L'applicazione di  $F$  alla linea data fornisce una forma differenziale

$$u(\alpha) d\alpha = F_t [y(t, \alpha) d\alpha]$$

regolare in ogni punto di  $\Omega$ . Fissiamo un punto  $\alpha_0$  di  $\Omega$  e consideriamo la funzione

$$g_1(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} u(\alpha) d\alpha$$

<sup>(6)</sup> L. FANTAPPIÈ; *Nuovi fondamenti...*, loc. cit. pag. 656.

<sup>(7)</sup> Nell'esposizione di questa dimostrazione, riportiamo per intero, adattandolo al nostro punto di vista, quanto il FANTAPPIÈ ha cominciato a fare in: *I Funzionali Analitici*, Mem. Acc. dei Lincei, ser. VI, v. 3 (1930), pag. 39.

definita e regolare in ogni punto  $\alpha$  di un intorno circolare  $U$  di  $\alpha_0$  e nulla per  $\alpha = \alpha_0$ . A fianco alla  $g_1(\alpha)$  costruiamo un'altra funzione  $g_2(\alpha)$  nello stesso intorno  $U$  di  $\alpha_0$  come segue.

L'integrazione di  $y(t, \alpha) d\alpha$  in  $U$  a partire da  $\alpha_0$  dà luogo alla funzione

$$v(t, \alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} y(t, \alpha) d\alpha$$

la quale, se l'intorno  $U$  di  $\alpha_0$  è di raggio abbastanza piccolo, continua ad essere, per ogni  $\alpha$  di  $U$ , sempre contenuta nella regione lineare  $(A)$ . L'applicazione ad essa del funzionale  $F'$  fornisce la funzione

$$g_2(\alpha) = F_t[v(t, \alpha)]$$

nulla anch'essa per  $\alpha = \alpha_0$  e regolare in tutto  $U$ .

Confrontiamo le due funzioni  $g_1(\alpha)$  e  $g_2(\alpha)$ . Esse sono entrambe nulle per  $\alpha = \alpha_0$ . Quanto ai loro differenziali si ha rispettivamente

$$d g_1(\alpha) = u(\alpha) d\alpha = F_t[y(t, \alpha) d\alpha],$$

$$d g_2(\alpha) = d F_t[v(t, \alpha)];$$

ossia, tenendo conto della permutabilità dei funzionali lineari con la differenziazione,

$$d g_2(\alpha) = F_t[y(t, \alpha) d\alpha].$$

Le due funzioni dunque oltre a coincidere in  $\alpha = \alpha_0$  hanno in tutto  $U$  differenziali coincidenti e pertanto coincidono esse stesse in tutto l'intorno considerato di  $\alpha_0$ . Si ha quindi la relazione

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} F_t[y(t, \alpha) d\alpha] = F_t\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha} y(t, \alpha) d\alpha\right]$$

valida per ogni  $\alpha$  di un opportuno intorno circolare  $U$  di  $\alpha_0$ .

Cerchiamo ora di sostituire in questa relazione al posto dell'integrazione nell'intorno di un punto, l'integrazione lungo un cammino qualsiasi  $\lambda$  di  $\Omega$ .

Per ogni punto  $\alpha_0$  di  $\Omega$  sono definibili, come abbiamo visto, in modo diverso due elementi di funzione analitica  $g_1(\alpha)$  e  $g_2(\alpha)$  fra loro coincidenti.

Se si parte ora da  $\alpha_0$  e si fa il prolungamento analitico, lungo un qualsiasi cammino  $\lambda$  contenuto in  $\Omega$ , sia di  $g_1(\alpha)$  che di  $g_2(\alpha)$  si ottiene

evidentemente in ogni punto di  $\lambda$  un ugual valore sia per  $g_1(\alpha)$  che per  $g_2(\alpha)$ . In particolare, per il secondo estremo di  $\lambda$  ciò equivale a dire (ricordando il significato di  $g_1(\alpha)$  e di  $g_2(\alpha)$ ) che sussiste l'uguaglianza:

$$\int_{\lambda} F_t [y(t, \alpha) d\alpha] = F \left[ \int_{\lambda} y(t, \alpha) d\alpha \right]$$

che ci proponevamo di stabilire.

In questa relazione  $\lambda$  è un qualsiasi cammino aperto o chiuso di  $\Omega$ . Ad esso tuttavia si può sostituire una qualsiasi linea di  $\Omega$  in quanto il ragionamento suddetto si può applicare ai cammini che la compongono e poi sommando concludere come sopra.

#### 4. Le indicatrici di un funzionale analitico lineare

Dato un qualsiasi funzionale lineare  $F$  di base  $A$  dicesi sua *indicatrice* ogni forma differenziale  $u(\alpha) d\alpha$  analitica localmente sulla curva  $C$  godente delle due seguenti proprietà:

a) la regione  $\Gamma$  di regolarità di  $u(\alpha) d\alpha$  non contenga  $A$  ma sia tale che aggiungendo ad essa tutti i punti di  $A$  si ottenga una regione  $\Gamma'$  contenente  $A$  al suo interno;

b) il prodotto  $y(\alpha) \cdot u(\alpha) d\alpha$  della forma data per una qualsiasi funzione  $y(\alpha)$  della regione  $(A)$  sia tale che il suo residuo (certo esistente per la prima proprietà) intorno all'insieme caratteristico  $A$  fornisca il valore di  $F$  per la funzione  $y$  prescelta.

Supponiamo ora di avere due diverse forme indicatrici  $u_1$  e  $u_2$  dello stesso funzionale  $F$  e vediamo in che relazione sono fra loro.

Consideriamo la forma

$$u = u_1 - u_2$$

differenza delle due date. La  $u$  gode tuttora della prima proprietà delle indicatrici di  $F$  come agevolmente si vede; quanto alla seconda proprietà si riconosce che la forma  $u$  è una indicatrice del funzionale identicamente nullo in tutta  $(A)$  giacchè la forma

$$u \cdot y = (u_1 - u_2) \cdot y = u_1 \cdot y - u_2 \cdot y$$

prodotto della  $u$  per una qualsiasi funzione  $y$  di  $(A)$  ha sempre residuo nullo intorno all'insieme chiuso  $A$ .

Viceversa data una indicatrice  $u$  di  $F$  si passa a ogni altra sua indicatrice aggiungendo ad  $u$  una qualsiasi indicatrice del funzionale identicamente nullo avente la stessa base  $A$  di  $F$ .

Data una indicatrice  $u$  di  $F$  e una funzione  $y$  di  $(A)$ , se con  $J$  indichiamo l'insieme chiuso dei punti non regolari di  $u$  fuori di  $A$  e con  $I$  quelli non regolari di  $y$ , il prodotto  $u.y$  risulta una forma differenziale non regolare in tutti i punti dell'insieme

$$A + I + J$$

ottenuto mettendo insieme i due insiemi chiusi privi di punti comuni  $A$  e  $I + J$ .

Il residuo che dà il valore del funzionale  $F$  va dunque calcolato lungo una linea  $\lambda$  contorno di una qualsiasi regione della curva  $C$  avente all'interno  $A$  e all'esterno i punti di  $I + J$ .

Diremo *separatrice* dei due insiemi  $A$  e  $I + J$  ogni linea  $\lambda$ , non avente alcun punto in comune con  $A + I + J$  e godente della suddetta proprietà.

Due diverse separatrici degli stessi due insiemi  $A$  e  $I + J$  sono evidentemente *omologhe* fra loro nella regione complementare su  $C$  di  $A + I + J$  ossia nella regione di regolarità della forma  $u.y$ . Ogni separatrice è inoltre per la sua stessa definizione omologa a zero sulla curva algebrica  $C$ .

Supponiamo ora di avere una forma differenziale  $w$  sulla  $C$ , anch'essa non regolare in  $A$ , ma che nel resto sia un prolungamento effettivo della  $u.y$ . L'insieme  $W$  dei punti non regolari di  $w$  distinti da  $A$  è contenuto in  $I + J$  ma non lo esaurisce e ciò porta di conseguenza che la classe delle separatrici di  $A$  e  $W$  contiene quella delle separatrici di  $A$  e  $I + J$  ma ne è più ampia.

Vedremo in seguito su una particolare indicatrice, che diremo elementare, di quali proprietà deve godere una funzione meromorfa, prolungamento di una funzione  $y$  di  $(A)$ , in un punto di  $I + J$  perchè questi non appartenga all'insieme  $W$  dei punti non regolari del corrispondente prolungamento  $W$  di  $u.y$ .

## 5. Esistenza di almeno una indicatrice per ogni funzionale lineare

Consideriamo il funzionale misto « identità », definito per tutte le funzioni di  $\mathcal{S}_C$ , espresso dalla formula

$$\mathcal{J}[y(\alpha), t] = y(t)$$

(ossia che fa corrispondere a ogni funzione la funzione stessa). Se si fissa un valore  $t_0$  di  $t$  il funzionale misto  $\mathcal{J}$  diventa un funzionale puro definito

per ogni funzione regolare in  $t_0$  e, uguale al valore di essa in  $t_0$ , ossia un funzionale lineare  $\mathcal{I}_{t_0}$  di base  $t_0$ .

Dicesi *indicatrice dell'identità* relativa alla regione  $H$  di  $C$  ogni linea differenziale  $v(t, \alpha) d\alpha$ , con  $t$  e  $\alpha$  variabili entrambe su  $C$ , godente delle due seguenti proprietà:

a) per ogni  $t_0$  di  $H$  la  $v(t_0, \alpha) d\alpha$  è una indicatrice pel corrispondente funzionale identità  $\mathcal{I}_{t_0}$  e di conseguenza è regolare in tutto un intorno circolare di  $t_0$  ed ha intorno ad esso un residuo uguale a 1,

b) la  $v(t_0, \alpha) d\alpha$  è regolare in ogni punto di  $H$ , ad esclusione naturalmente di  $t_0$ , e quindi ha residuo 1 lungo ogni linea  $\lambda$  di  $H$  contorno di una regione contenuta in  $H$  e contenente  $t_0$ .

Dato ora un qualsiasi funzionale lineare  $F$  di base  $A$ , facciamo vedere che *esiste almeno una sua indicatrice ogni volta che esiste una indicatrice dell'identità relativa a una regione  $H$  di  $C$  contenente  $A$ .*

Supponiamo infatti di avere una tale indicatrice dell'identità  $v(t, \alpha) d\alpha$  e prendiamo una qualsiasi funzione  $y(t)$  di  $(A)$ . Sia  $\lambda$  una linea qualsiasi contenuta in  $H$  e nella regione  $R$  di regolarità di  $y(t)$  e contorno a sua volta di una regione  $\bar{R}$  contenente  $A$ . La forma differenziale

$$y(\alpha) v(t_0, \alpha) d\alpha$$

per ogni  $t_0$  di  $\bar{R}$  risulta regolare in ogni punto di  $\lambda$  e in ogni punto di  $\bar{R}$  escluso  $t_0$ . Il suo residuo lungo  $\lambda$  pertanto risulta uguale al suo residuo intorno a  $t_0$  ossia uguale al numero  $y(t_0)$ . Vale quindi la formula

$$y(t) = \oint_{\lambda} y(\alpha) v(t, \alpha) d\alpha$$

per ogni  $t$  di  $\bar{R}$ . Essa, che ha l'aspetto di una generalizzazione della formula del CAUCHY, ci fornisce solamente una funzione  $\bar{y}(t)$  definita in  $\bar{R}$  di cui la  $y(t)$  è un prolungamento. Ma  $\bar{R}$  contiene ancora  $A$  ossia  $F$  è definito anche per  $\bar{y}(t)$  e si ha quindi l'uguaglianza

$$F[y(t)] = F[\bar{y}(t)] = F\left[\oint_{\lambda} y(\alpha) v(t, \alpha) d\alpha\right]$$

ove la linea differenziale  $y(\alpha) v(t, \alpha) d\alpha$  è regolare in ogni punto del prodotto della linea  $\lambda$  per l'insieme chiuso  $A$ . Possiamo quindi applicare la permutabilità da noi dimostrata del funzionale  $F$  con l'integrazione rispetto ad  $\alpha$  e scrivere

$$F[y(t)] = \oint_{\lambda} y(\alpha) F_t[v(t, \alpha) d\alpha],$$

formula che estende al nostro caso la formula del FANTAPPIÈ per funzionali lineari delle funzioni di una variabile complessa.

In essa compare come indicatrice di  $F$  la forma differenziale

$$u(\alpha) d\alpha = F_t [v(t, \alpha) d\alpha]$$

che diremo l'indicatrice di  $F$  corrispondente alla data indicatrice dell'identità di cui abbiamo supposta l'esistenza.

Resta dunque da dimostrare che per ogni insieme chiuso  $A$  di  $C$  (che però non la esaurisca) esiste almeno una indicatrice dell'identità relativa a una regione  $H$  contenente  $A$ .

Questo è ciò che faremo nel numero seguente ove risponderemo a questa questione con la costruzione effettiva di una indicatrice  $v(t, \alpha) d\alpha$  dell'identità la quale, per le ipotesi restrittive che faremo su di essa per la sua determinazione univoca, sarà detta *indicatrice elementare dell'identità* e la sua corrispondente per  $F$ , *indicatrice elementare* del funzionale lineare  $F$ .

## 6. Costruzione dell'indicatrice elementare dell'identità

Siano dati due punti  $M$  e  $Q$  qualsiasi, purchè distinti, della curva algebrica  $C$ . È noto dalla geometria algebrica che su  $C$  esiste almeno un integrale abeliano di 3ª specie elementare, ossia privo di poli e avente due soli punti logaritmici coincidenti rispettivamente con  $M$  e  $Q$  e con rispettivi periodi polari  $2\pi i$  e  $-2\pi i$ .

Un tale integrale dipende linearmente da  $p$  parametri indipendenti in quanto la differenza di due qualsiasi di siffatti integrali, non avendo singolarità, è un qualsiasi integrale abeliano di 1ª specie e di questi sulla curva  $C$  ce ne sono  $p$  linearmente indipendenti.

Per determinare razionalmente uno di questi  $\infty^p$  integrali con i due punti logaritmici in  $M$  e  $Q$  procediamo alla seguente maniera. Consideriamo la forma differenziale integranda di un integrale variabile di questo tipo e imponiamole di avere fra i suoi zeri i punti di un dato gruppo *non speciale*  $G_p$  di  $C$ ; non contenente nè  $M$  nè  $Q$ . L'integrale corrispondente resta con ciò perfettamente determinato in quanto, se ce ne fossero due distinti, l'integrale di 1ª specie loro differenza avrebbe la forma integranda anch'essa con  $G_p$  tra i suoi zeri.

Un tale fatto non può succedere perchè un siffatto integrale di 1ª specie darebbe luogo in un generico modello piano  $\Phi_m$  di  $C$  a una aggiunta d'ordine  $m - 3$  passante pel gruppo  $G_p$  di  $C$ , ossia  $G_p$  sarebbe contenuto nel gruppo canonico staccato su  $C$  da questa aggiunta e quindi speciale contro il supposto.

Inoltre di siffatti integrali ce n'è almeno uno in quanto il passaggio per  $G_p$  comporta tante condizioni lineari quanti sono i parametri da cui dipende linearmente l'integrale elementare di 3<sup>a</sup> specie considerato.

Si conclude che c'è una e una sola forma differenziale (integranda cioè dell'integrale ora determinato)  $r(t, \alpha) d\alpha$  avente come zeri fissi (rispetto a  $t$ ) i punti di un qualsiasi gruppo non speciale  $G_p$  di  $C$ , un polo fisso del primo ordine in un punto  $Q$  qualsiasi purchè non di  $G_p$  e un polo del primo ordine nel punto  $M$  di ascissa  $t$ , variabile comunque su  $C$  purchè distinto dal gruppo di punti  $G_p + Q$ , con residuo intorno ad esso uguale a 1.

Ciò ci permette di dire che la  $r(t, \alpha) d\alpha$  così costruita è indicatrice dell'identità relativa a ogni regione  $H$  non contenente  $G_p + Q$ , possiamo scrivere cioè la relazione

$$y(t) = \oint_{\lambda} y(\alpha) r(t, \alpha) d\alpha$$

valida per ogni linea  $\lambda$  contenuta nella regione  $R$  di regolarità di  $y(t)$  e contorno di una regione  $\bar{R}$  anch'essa contenuta in  $R$  ma non contenente  $G_p + Q$ , e per ogni  $t$  di questa regione  $\bar{R}$ .

La  $r(t, \alpha) d\alpha$  è la preannunciata *indicatrice elementare dell'identità* individuata da  $G_p$  e da  $Q$  e la formula scritta sopra è la nostra estensione della formula del CAUCHY alle funzioni analitiche uniformi sopra la curva algebrica data  $C$ . La sua importanza risiede nel fatto che è valida *in grande* nel senso che dà il valore della funzione in ogni punto di  $C$  ad esclusione solamente di  $p + 1$  punti.

## 7. Indicatrici elementari di un funzionale lineare. Pararegolarità

Nel numero precedente abbiamo costruito una linea differenziale  $r(t, \alpha) d\alpha$  indicatrice dell'identità per ogni regione  $H$  di  $C$  non contenente  $G_p + Q$ . Dato quindi un funzionale lineare  $F$  di base  $A$ , scelti  $G_p$  e  $Q$  fuori di  $A$  (e ciò si può sempre fare perchè  $C - A$  è una regione non vuota e un  $G_p$  generico in essa è sempre non speciale) e poi una regione  $H$  contenente  $A$  e non  $G_p + Q$ , la corrispondente  $r(t, \alpha) d\alpha$  risulta indicatrice dell'identità in tutta la regione  $H$  contenente  $A$ . Questa conclusione, confrontata con quanto è detto al n. 5 ci porta ad affermare l'esistenza di almeno una indicatrice per funzionale lineare  $F$  di base  $A$  anzi di tante quante sono le scelte possibili di un gruppo non speciale  $G_p$  fuori di  $A$  e di un punto  $Q$  fuori di  $A + G_p$ . Esse si diranno le *indicatrici elementari* del funzionale lineare  $F$  relative al  $G_p$  e al  $Q$  prescelti.

Ogni indicatrice elementare  $u(\alpha) d\alpha$  di  $F$  è per definizione non regolare in  $A$ . In questo numero ci proponiamo di studiare il suo comportamento in un punto qualsiasi di  $C$  fuori di  $A$ .

Pel modo stesso con cui è stata definita, l'indicatrice  $u(\alpha) d\alpha$  è regolare in ogni punto di  $C$  distinto oltre che da  $A$  anche dal punto  $Q$ , ossia  $Q$  è una singolarità isolata per la  $u(\alpha) d\alpha$  ed è l'unica sua singolarità fuori di  $A$ .

Prendiamo comunque un punto  $\alpha_0$  qualsiasi di  $C$  fuori di  $A$  e ad esso associamo un intero  $\varrho$ , uguale alla molteplicità che ha in  $G_p$  se sta in esso, uguale a zero se non sta in  $G_p + Q$  e uguale a  $-1$  se coincide con  $Q$ .

Se si fissa genericamente  $t_0$  su  $C$  la forma differenziale  $r(t, \alpha) d\alpha$  possiede in ogni punto  $\alpha_0$  di  $C$ , fuori di  $A$  uno zero d'ordine  $\varrho$  (per  $\varrho = 0$  è da intendersi regolare e non nulla in  $\alpha$  e per  $\varrho = -1$  possedente ivi un polo del primo ordine).

Consideriamo un intorno circolare  $U$  di  $\alpha_0$  e la corrispondente variabile ausiliaria  $\tau$ . Corrispondentemente la  $u(\alpha) d\alpha$  dà luogo a una funzione  $u(\tau)$  regolare in tutto  $U$ , ad esclusione al più in  $\tau = 0$ , e pertanto si può sviluppare nella serie di LAURENT:

$$u(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n \tau^{-n}$$

Come è noto in questa serie il coefficiente  $b_n$  è dato dal residuo della funzione  $u(\tau) \tau^{n-1}$  intorno al punto  $\tau = 0$  ossia è dato dalla formula

$$b_n = \oint_l F_t[r(t, \tau)] \tau^{n-1} d\tau$$

ove  $l$  è una linea circondante  $\tau = 0$ .

Se teniamo ora conto della permutabilità di  $F$  con l'integrazione otteniamo

$$b_n = F \left[ \oint_l r(t, \tau) \tau^{n-1} d\tau \right].$$

Ora la funzione  $r(t, \tau) \tau^{n-1}$  ha, per  $t$  fissato genericamente, uno zero  $(\varrho + n - 1)$ -plo in  $\tau = 0$  e quindi per

$$n > -\varrho$$

non ha ivi residuo mentre per

$$n = -\varrho$$

ha ivi un residuo  $k_n(t)$  generalmente non nullo.



La funzione  $k_n(t)$  è regolare su tutta la  $C$  ad esclusione di  $G_p + Q$  e quindi fa parte di  $(A)$  ossia  $F$  è definito anche per  $k_n(t)$ .

Si conclude pertanto che è

$$b_n = 0 \quad \text{per} \quad n > -\varrho$$

mentre risulta

$$b_n = F[k_n(t)] \quad \text{per} \quad n = -\varrho$$

e quindi  $b_{-\varrho}$  può essere diverso da zero. In definitiva la  $u(\alpha) d\alpha$ , qualora non sia addirittura identicamente nulla in tutto un intorno di  $\alpha_0$ , ha in  $\alpha_0$  uno zero almeno  $\varrho - p$  (al più un polo del primo ordine se  $\alpha_0$  coincide con  $Q$ ) in quanto in  $U_{\alpha_0}$  è data da una serie di potenze cominciante per lo meno con la potenza  $\tau^\varrho$ .

Supponiamo ora per semplicità che il funzionale  $F$  sia tale che la sua indicatrice elementare  $u(\alpha) d\alpha$  non sia identicamente nulla in alcuna componente della sua regione di regolarità. Allora l'insieme  $Z$  dei punti in cui la  $u(\alpha) d\alpha$  è meromorfa con una polarità diversa da quella nulla (ossia avente ivi uno zero o un polo) è costituito da punti tutti isolati con eventuali punti di accumulazione contenuti in  $A$ .

Consideriamo ora su  $C$  una funzione  $y(t)$  di  $(A)$  meromorfa in una regione  $R^*$  di  $C$  contenente  $A$ . Preso un punto  $t_0$  di  $C$  fuori di  $A$  che sia uno zero  $\sigma - p$  per la  $u(\alpha) d\alpha$  (con  $\sigma = 0$  se vi è regolare e non nulla e con  $\sigma = -1$  se vi ha un polo del primo ordine) diremo che la funzione  $y(t)$  è *pararegolare* in  $t_0$  se essa risulta meromorfa in  $t_0$  (ossia se  $t_0$  sta in  $R^*$ ) con un polo d'ordine al più uguale a  $\sigma$  (e quindi, per  $\sigma = 0$ , se vi è regolare e, per  $\sigma = -1$ , se vi ha uno zero almeno del primo ordine).

La *pararegolarità* in un punto è quindi in generale una condizione più larga che non la semplice regolarità, a meno che non si tratti del punto  $Q$  ove invece è più ristretta.

Quella che abbiamo introdotta è una *pararegolarità complessiva* della funzione  $y(t)$  in cui si tiene conto sia dell'indicatrice elementare dell'identità prescelta che del funzionale lineare  $F$  dato.

Se si tiene conto ora che l'indice  $\sigma$  della *pararegolarità* soddisfa la relazione

$$\sigma \geq \varrho$$

si vede che nella *pararegolarità* in un punto, consentente un polo d'ordine al più  $\sigma$ , una parte  $\varrho$  del suo indice è dovuta alla  $r(t, \alpha) d\alpha$  indipendentemente dal funzionale  $F$  e il resto  $\sigma - \varrho$  è un intero non negativo dipendente esclusivamente, come vedremo meglio nel prossimo numero, dal funzionale  $F$  dato.

La funzione  $y(t)$ , in quanto regolare in  $A$ , ha la propria regione  $R_1$  di pararegolarità (contenuta in  $R^*$ ) contenente al più un numero finito di poli in quanto questi si possono esclusivamente accumulare intorno a punti di  $A$  mentre in tutto un intorno di  $A$  la  $y(t)$  è regolare. La  $R_1$  in quanto è costituita dai punti di  $R^*$  in cui la  $y(t)$  è pararegolare, contiene tutti i punti della regione  $R$  dei punti di regolarità in  $R^*$  ad esclusione al più del punto  $Q$  (se ivi la  $y(t)$  è regolare ma non nulla).

Consideriamo ora il prodotto

$$y(\alpha) \cdot u(\alpha) d\alpha;$$

esso risulta una forma differenziale regolare in tutti i punti della regione  $R_1$  di pararegolarità della  $y$  fuori della base  $A$  in quanto ogni polo eventuale ivi presentato dalla  $y$  o dalla  $u$  risulta sufficientemente compensato dallo zero della funzione rimanente e ciò grazie appunto alla pararegolarità in esso della  $y$ . Quindi nella formula

$$F[y(t)] = \oint_l y(\alpha) \cdot u(\alpha) d\alpha$$

al posto della separatrice  $l$  dei punti di  $A$  dai punti in cui non sono regolari almeno uno dei due fattori  $y(\alpha)$  o  $u(\alpha) d\alpha$ , si può sostituire una separatrice dei punti di  $A$  dai punti di non pararegolarità per la  $y(t)$ .

### 8. Relazione fra le varie indicatrici elementari di uno stesso funzionale lineare

Col procedimento seguito nei numeri precedenti siamo riusciti a costruire una forma differenziale  $u(\alpha) d\alpha$  soddisfacente alla condizione di essere una indicatrice del funzionale lineare dato.

Nella costruzione della  $u$  tuttavia rimangono alcune arbitrarietà, e precisamente la scelta, fuori della base  $A$ , del gruppo non speciale  $G_p$  e di un punto  $Q$  distinto anche da  $G_p$ .

Per scelte diverse di questi elementi si ottengono altrettante indicatrici elementari diverse di  $F$ , e differenti quindi fra loro per una forma indicatrice del funzionale nullo relativo alla stessa base  $A$ .

In questo numero ci occupiamo appunto della natura di ogni siffatta indicatrice del funzionale nullo.

Date dunque due indicatrici  $r'$  e  $r''$  elementari dell'identità, supponiamo che i corrispondenti gruppi di punti  $G'_p, Q'$  e  $G''_p, Q''$  che le caratterizzano siano stati presi tutti fuori della base  $A$  di un dato funzionale lineare  $F$ ,

Esaminiamo ora la forma differenziale

$$\bar{r} = r' - r''$$

differenza delle due precedenti forme, e fissiamo un valore  $t_0$  per  $t$ .

A priori le possibili singolarità della  $\bar{r}(t_0, \alpha) d\alpha$  possono essere solo i punti singolari per almeno una delle due  $r'(t_0, \alpha) d\alpha$  e  $r''(t_0, \alpha) d\alpha$  ossia i tre punti  $Q'$ ,  $Q''$  e  $t_0$ .

Il punto  $t_0$  tuttavia non è singolare per la  $\bar{r}(t_0, \alpha) d\alpha$  in quanto esso è un polo del primo ordine sia per la  $r'$  che per la  $r''$  e con egual residuo onde nella loro differenza scompare come singolarità.

Non altrettanto si può dire per  $Q'$  e  $Q''$ . Distinguiamo i due casi:

a)  $Q'$  e  $Q''$  coincidono. In questo caso particolare anch'essi scompaiono come singolarità della  $\bar{r}$ , ossia la  $\bar{r}$  è regolare su tutta la  $C$  e quindi il suo integrale è un integrale abeliano di prima specie a meno che non si annulli identicamente (ma ciò può avvenire solo per  $G'_p \equiv G''_p$ ).

b) i punti  $Q'$  e  $Q''$  sono distinti fra loro. In questo caso la  $\bar{r}$  presenta sia in  $Q'$  che in  $Q''$  un polo del primo ordine con residuo rispettivamente  $-1$  e  $1$  onde il suo integrale è un integrale abeliano di 3ª specie elementare i cui due punti logaritmici sono inversamente  $Q''$  e  $Q'$ .

Passiamo ora alle corrispondenti indicatrici  $u'$  e  $u''$  di  $F$  e alla loro differenza  $\bar{u} = u' - u''$ .

Per la linearità di  $F$  si ha

$$\bar{u}(\alpha) d\alpha = F_t[\bar{r}(t, \alpha) d\alpha].$$

La linea differenziale  $\bar{r}(t, \alpha) d\alpha$ , preso  $\alpha$  come parametro risulta contenuta in  $(A)$  per ogni posizione di  $\alpha$  sulla  $C$  ad esclusione *solamente* dei due punti  $Q'$  e  $Q''$  nel caso in cui essi sono distinti

Siccome però sia in  $Q'$  che in  $Q''$  (essendo questi fuori di  $A$ ) la  $u'$  e la  $u''$  hanno rispettivamente al più un polo del primo ordine, si conclude che la  $\bar{u} = F[\bar{r}]$  loro differenza ha anch'essa in ciascuno di essi, al più un polo del primo ordine.

In definitiva la  $\bar{u}(\alpha) d\alpha$  è una forma differenziale sulla  $C$  senza singolarità sulla  $C$  o con due poli del primo ordine nei due punti  $Q'$  e  $Q''$  ossia il suo integrale è un integrale abeliano di prima specie oppure di terza specie con due soli punti logaritmici  $Q'$  e  $Q''$  e senza poli. (Non può essere che uno solo dei due punti  $Q'$  e  $Q''$  sia un polo per la  $\bar{u}$  giacchè un residuo diverso da zero intorno all'uno porta di conseguenza un residuo di segno opposto intorno al rimanente).