Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Aldo Ghizzetti

Sugli sviluppi in serie di funzioni di Hermite

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 1-2 (1951), p. 29-37

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_1-2_29_0>

SUGLI SVILUPPI IN SERIE DI FUNZIONI DI HERMITE

di ALDO GHIZZETTI (Roma) (*)

In questa Nota mi propongo di dimostrare un teorema che fornisce un semplice criterio sufficiente per la sviluppabilità di una funzione in serie di *funzioni di Hermite* ([1]):

$$\omega_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{1}$$

ove con $H_n(x)$ sono designati i *polinomi di Hermite:*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{d x^n} . \tag{2}$$

Tale teorema sarà poi confrontato con altri tre teoremi dello stesso tipo, di cui uno dovuto a M. H. STONE e due a M. PICONE, facendo vedere che, malgrado le apparenze, essi equivalgono ad un unico teorema che risulta meno generale di quello qui dimostrato.

1. — Il teorema in questione si enuncia come segue:

I. — *Sia $f(x)$ una funzione (reale o complessa) definita per ogni valore reale di x ed assolutamente continua in ogni intervallo finito. Se la $f(x)$ e la*

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

([1]) Si tratta delle serie *di tipo h* secondo la denominazione introdotta da C. V. L. CHARLIER nella sua opera: *Application de la théorie des probabilités à l'astronomie* (tome II, fasc. IV du *Traite du calcul des probabilités et de ses applications* par E. BOREL) Ed. Gauthier-Villars et Cie., Paris 1931. Tali serie sono state profondamente studiate da J. V. USPENSKY, *On the development of arbitrary fonctions in series of Hermite's and Laguerre's polynomials*, Ann of Math. (2), 28, p. 593-619 (1927). Per altri teoremi più generali di quelli qui considerati vedi: G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, New York 1939, p. 240 e segg.. In questa Nota sono considerati teoremi di carattere più elementare e che riteniamo utili per le applicazioni.

sua derivata $f'(x)$ *sono di norma sommabile in* $(-\infty, +\infty)$, *allora la serie di funzioni di Hermite relativa alla* $f(x)$:

$$(3) \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \omega_n(x) \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{p_n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \omega_n(x)\, d\,x \,, \; p_n = 2^n \, n!\, \sqrt{\pi}\,,$$

converge verso la $f(x)$ *stessa, uniformemente in ogni intervallo finito.*

Per la dimostrazione, osserviamo anzitutto che, dalle ipotesi poste su $f(x)$, $f'(x)$, segue:

$$(4) \qquad \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0\,;$$

infatti il prodotto $2 f(x) f'(x) = [f^2(x)]'$ riesce sommabile in $(-\infty, +\infty)$, cosicchè devono esistere finiti entrambi i limiti $\lim\limits_{x \to -\infty} f^2(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f^2(x)$ i quali non possono, evidentemente, aver altro valore che lo zero.

Osserviamo inoltre che dalle note formule

$$H'_n(x) = 2\, n\, H_{n-1}(x) \;,\; H_{n+1}(x) - 2\, x\, H_n(x) + 2\, n\, H_{n-1}(x) = 0 \; (^2)\,,$$

seguono immediatamente queste altre:

$$(5) \qquad \omega'_n(x) = n\, \omega_{n-1}(x) - \frac{1}{2}\, \omega_{n+1}(x)\,,$$

$$(6) \qquad \omega_{n+1}(x) - 2\, x\, \omega_n(x) + 2\, n\, \omega_{n-1}(x) = 0\,.$$

Ciò premesso, consideriamo, assieme alla (3), l'analoga serie relativa alla derivata $f'(x)$:

$$(7) \qquad f'(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \, \omega_n(x) \quad \text{con} \quad c'_n = \frac{1}{p_n} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, \omega_n(x)\, d\,x\,,$$

---

(2) Per le proprietà dei polinomi di Hermite, rimandiamo all'opera: G VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Parte II, 2a edizione, Ed. N Zanichelli, Bologna 1946, p. 281-333. Avvertiamo che in quest'opera è indicato con $H_n(x)$ il polinomio che qui denotiamo con $(-1)^n H_n(x)$.

ed osserviamo che, in virtù di (4), (5), si ha:

$$c'_n = -\frac{1}{p_n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\omega'_n(x)\,d\,x = -\frac{n}{p_n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\omega_{n-1}(x)\,d\,x +$$

$$+\frac{1}{2p_n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\omega_{n+1}(x)\,d\,x = -\frac{n}{p_n}\,p_{n-1}\,c_{n-1} + \frac{1}{2\,p_n}\,p_{n+1}\,c_{n+1}\,,$$

vale a dire

$$c'_n = -\frac{1}{2}\,c_{n-1} + (n+1)\,c_{n+1}\,, \tag{8}$$

coll'intesa di ritenere che sia $c_{-1} = 0$.

Le due serie (3), (7) convergono in media rispettivamente verso $f(x)$, $f'(x)$ e perciò, per un noto teorema ([3]), si può scrivere:

$$\int_{-\infty}^{x} \xi\,e^{-\xi^2/2} f(\xi)\,d\,\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{x} \xi\,e^{-\xi^2/2}\,\omega_n(\xi)\,d\,\xi\,,$$

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2/2} f'(\xi)\,d\,\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2/2}\,\omega_n(\xi)\,d\,\xi\,,$$

con le serie scritte assolutamente ed uniformemente convergenti in $(-\infty, +\infty)$. Ne segue, sottraendo membro a membro e ricordando la (4):

$$e^{-x^2/2} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[c'_n \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2/2}\,\omega_n(\xi)\,d\,\xi - c_n \int_{-\infty}^{x} \xi\,e^{-\xi^2/2}\,\omega_n(\xi)\,d\,\xi\right], \tag{9}$$

sempre con l'assoluta ed uniforme convergenza della serie in $(-\infty, +\infty)$.

([3]) Vedi p. es. M. Picone, *Appunti di Analisi superiore*, Ed. A. Rondinella, Napoli 1940, p. 207. L'assoluta convergenza deriva dal fatto che le serie (3), (7) convergono in media, indipendentemente dall'ordine con cui si considerano i loro termini.

Ma è facile verificare, in base alle (1), (2), (6), che si ha:

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2/2}\,\omega_n(\xi)\,d\xi = -\,e^{-x^2/2}\,\omega_{n-1}(x)\,,$$

$$\int_{-\infty}^{x} \xi\, e^{-\xi^2/2}\,\omega_n(\xi)\,d\xi = -\,e^{-x^2/2}\left[n\,\omega_{n-2}(x) + \frac{1}{2}\,\omega_n(x)\right],$$

$$\left[\text{con } \omega_{-1}(x) = -\,e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2}\,d\xi\right],$$

cosicchè, tenendo anche conto della (8), la (9) può scriversi

$$e^{x^2/2} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2/2}\left\{\frac{1}{2}\,c_n\,\omega_n(x) + \left[\frac{1}{2}\,c_{n-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (n+1)\,c_{n+1}\right]\omega_{n-1}(x) + n\,c_n\,\omega_{n-2}(x)\right\},$$

con la serie assolutamente ed uniformemente convergente in $(-\infty, +\infty)$.

Risulta pertanto

$$(10)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\,c_n\,\omega_n(x) + \left[\frac{1}{2}\,c_{n-1} - (n+1)\,c_{n+1}\right]\omega_{n-1}(x) + n\,c_n\,\omega_{n-2}(x)\right\}$$

con la serie assolutamente ed uniformemente convergente in ogni intervallo finito.

Osserviamo ora che, per ogni intero positivo m, si ha:

$$\sum_{n=0}^{m}\left\{\frac{1}{2}\,c_n\,\omega_n(x) + \left[\frac{1}{2}\,c_{n-1} - (n+1)\,c_{n+1}\right]\omega_{n-1}(x) + n\,c_n\,\omega_{n-2}(x)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{2}\,c_n\,\omega_n(x) + \sum_{n=-1}^{m-1}\frac{1}{2}\,c_n\,\omega_n(x) - \sum_{n=1}^{m+1} n\,c_n\,\omega_{n-2}(x) + \sum_{n=0}^{m} n\,c_n\,\omega_{n-2}(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{m} c_n\,\omega_n(x) - \frac{1}{2}\,c_m\,\omega_m(x) - (m+1)\,c_{m+1}\,\omega_{m-1}(x)\,,$$

e perciò dalla (10) si potrà dedurre la tesi del teorema, ossia:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\omega_n(x)\,,$$

con convergenza uniforme della serie in ogni intervallo finito, non appena si sia provato che sussistono le

$$(11)\qquad \lim_{m\to\infty} c_m\,\omega_m(x) = 0 \quad , \quad \lim_{m\to\infty} (m+1)\,c_{m+1}\,\omega_{m-1}(x) = 0\,,$$

uniformemente rispetto a x.

A tale scopo ricordiamo che, per una nota limitazione dovuta a H. CRAMER (4), esiste una costante positiva A tale da aversi:

$$|\,\omega_n(x)\,| < A\sqrt{p_n}\,.$$

Si può dunque asserire che

$$|\,c_m\,\omega_m(x)\,| < A\,|\,c_m\,|\sqrt{p_m}\,,$$

$$|\,(m+1)\,c_{m+1}\,\omega_{m-1}(x)\,| < A\,(m+1)\,|\,c_{m+1}\,|\sqrt{p_{m-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,A\sqrt{\frac{m+1}{m}}\,|\,c_{m+1}\,|\sqrt{p_{m+1}}\,,$$

e da ciò seguono immediatamente le (11) quando si tenga conto che, essendo convergente la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n\,|\,c_n\,|^2$ (per la relazione di Parseval), si ha $\lim\limits_{n\to\infty}\,|\,c_n\,|\sqrt{p_n} = 0$.

Il teorema I è così dimostrato.

2. — Ricordiamo ora che, relativamente allo sviluppo di una funzione in serie di polinomi di Hermite, sussistono i seguenti tre teoremi che riuniamo in un unico enunciato:

II. — *Sia $f(x)$ una funzione (reale o complessa) definita per ogni valore reale di x ed assolutamente continua in ogni intervallo finito. Se è verificata una qualsiasi delle seguenti ipotesi* (5).

$$(12)\ f(x) = O(e^{kx^2})\ (\text{per } |\,x\,| \to \infty) \text{ con } k < 1\ ;\ e^{-x^2}[f'(x) - 2\,x\,f(x)]^2 \in L\ (6)\,,$$

$$(13)\ f(x) = o(e^{x^2})\ (\text{per } |\,x\,| \to \infty)\ ;\ e^{-x^2}[f'(x) - 2\,x\,f(x)]^2 \in L\ (7)$$

$$(14)\qquad e^{x^2} f^2(x) \in L\ ;\ e^{-x^2} f'^2(x) \in L\ (7)\,,$$

(4) Vedi C. V. L. CHARLIER, op. cit in (1), p. 49-53; G. VITALE e G. SANSONE, op. cit. in (2) p. 295-296.

(5) Scrivendo $f(x) \in L$ intendiamo esprimere che la $f(x)$ è sommabile (nel senso di Lebesgue) in $(-\infty, +\infty)$.

(6) Cfr. M. H. STONE, *Developments in Hermite polynomials,* Ann. of Math. (2), **29**, p. 1-13 (1927). Vedi anche G. VITALI e G. SANSONE, op. cit. in (2), p. 318-322.

(7) Cfr. M. PICONE, *Trattazione elementare dell'approssimazione lineare in insiemi non limitati,* Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, **5**, p. 155-195 (1934).

allora la serie di polinomi di Hermite relativa alla $f(x)$:

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x) \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{p_n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) H_n(x)\, dx ,$$

converge assolutamente per ogni valore di x, *uniformemente in ogni intervallo finito ed ha per somma la* $f(x)$ *stessa.*

Cambiando $f(x)$ in $e^{x^2/2} f(x)$ e tenendo conto che l'ipotesi (12) è evidentemente più restrittiva della (13), il teor. II si trasforma in quest'altro:

III. — *Sia* $f(x)$ *una funzione (reale o complessa) definita per ogni valore reale di* x *ed assolutamente continua in ogni intervallo finito. Se è verificata una qualsiasi delle seguenti ipotesi:*

$$(15) \qquad f(x) = o\,(e^{x^2/2}) \text{ (per } |x| \to \infty) \quad ; \quad [f'(x) - x f(x)]^2 \in L ,$$

$$(16) \qquad f^2(x) \in L \quad ; \quad [f'(x) + x f(x)]^2 \in L ,$$

allora la serie (3) *di funzioni di Hermite relativa alla* $f(x)$ *converge assolutamente per ogni valore di* x, *uniformemente in ogni intervallo finito ed ha per somma la* $f(x)$ *stessa.*

Per mettere in relazione questo teor. III col nostro teor. I, cominceremo col dimostrare che *le due ipotesi* (15), (16) *sono equivalenti* e più precisamente che sussiste la proposizione seguente:

IV. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione* $f(x)$, *definita per ogni valore reale di* x *ed assolutamente continua in ogni intervallo finito, verifichi una qualsiasi delle due ipotesi* (15), (16) *è che essa verifichi quest'altra:*

$$(17) \qquad x^2 f^2(x) \in L \quad ; \quad f'^2(x) \in L .$$

Inoltre dalla (17) *viene di conseguenza:*

$$(18) \qquad f(x) = o\,(|x|^{-1/2}) \quad (\text{per } |x| \to \infty) .$$

Cominciamo col provare che dalla (17) discende la (18). Infatti da (17) deriva $2 x f(x) f'(x) \in L$, $f^2(x) \in L$, $x f^2(x) \in L$; ma si ha

$$\int_a^b 2 x f(x) f'(x)\, dx = b f^2(b) - a f^2(a) - \int_a^b f^2(x)\, dx ,$$

e perciò devono esistere finiti i limiti $\lim_{x \to \infty} x f^2(x)$, $\lim_{x \to +\infty} x f^2(x)$, necessariamente col valore zero, e ciò prova la (18).

Dopo ciò è evidente che, se la $f(x)$ verifica la (17), essa verifica anche ciascuna delle (15), (16).

Rimane da provare che, viceversa, da ciascuna delle (15), (16) deriva la (17). Per semplicità *supporremo che la $f(x)$ sia reale;* il passaggio al caso di una $f(x)$ complessa è poi immediato.

Cominciamo dalla (16). Considerando la funzione $[f'(x) + x f(x)]^2$ nell'intervallo $(0, +\infty)$, deve, per la seconda delle (16), esistere finito il limite

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X [f'(x) + x f(x)]^2 \, d\, x =$$

$$= -\int_0^{+\infty} f^2(x) \, d\, x + \lim_{X \to +\infty} \left\{ X f^2(X) + \int_0^X f'^2(x) \, d\, x + \int_0^X x^2 f^2(x) \, d\, x \right\};$$

ma, ovviamente, ciò è possibile solo se esistono separatamente i tre limiti

$$\lim_{X \to +\infty} X f^2(X) \quad , \quad \lim_{X \to +\infty} \int_0^X f'^2(x) \, d\, x \quad , \quad \lim_{X \to +\infty} \int_0^X x^2 f^2(x) \, d\, x \, .$$

Analogamente si può ragionare per l'intervallo $(-\infty, 0)$ e si conclude pertanto che, effettivamente, da (16) segue (17).

Meno immediato è lo studio della (15). Posto $f'(x) - x f(x) = \varphi(x)$, si ricava

$$e^{-x^2/2} f(x) = c + \int_0^x e^{-\xi^2/2} \varphi(\xi) \, d\, \xi \, , \qquad \text{(con } c \text{ costante)}. \tag{19}$$

Dall'ipotesi $\varphi^2(x) \in L$ segue $e^{-x^2/2} \varphi(x) \in L$ ed allora, se nella (19) si passa al limite per $x \to \pm\infty$ e si tien conto della prima delle (15), si deduce

$$c = \int_{-\infty}^0 e^{-\xi^2/2} \varphi(\xi) \, d\, \xi = -\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2/2} \varphi(\xi) \, d\, \xi \, .$$

Deve dunque essere $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/2} \varphi(\xi)\, d\xi = 0$ e ne deriva che la (19) può scriversi:

$$f(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2/2} \varphi(\xi)\, d\xi \quad \text{oppure} \quad f(x) = -\, e^{x^2/2} \int_{x}^{+\infty} e^{-\xi^2/2} \varphi(\xi)\, d\xi ,$$

onde, per la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$| f(x) | \leq e^{x^2/2} \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2}\, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{x} \varphi^2(\xi)\, d\xi \right)^{1/2}$$

(20) oppure

$$| f(x) | \leq e^{x^2/2} \left(\int_{x}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{x}^{+\infty} \varphi^2(\xi)\, d\xi \right)^{1/2} .$$

Osserviamo ora che, essendo

$$\lim_{x \to -\infty} x\, e^{x^2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2}\, d\xi = -\frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} x\, e^{x^2} \int_{x}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{1}{2} .$$

le funzioni $x\, e^{x^2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\xi^2}\, d\xi$, $x\, e^{x^2} \int_{x}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi$ si mantengono limitate rispettivamente in $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, cosicchè dalle (20) si trae, designando con C un'opportuna costante positiva:

$$| f(x) | \leq C\, | x |^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{x} \varphi^2(\xi)\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{per } x < 0 .$$

$$| f(x) | \leq C\, x^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{x}^{+\infty} \varphi^2(\xi)\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{per } x > 0 ,$$

onde si può intanto asserire che *la* $f(x)$ *verifica la* (18).

Dopo ciò, considerando la funzione $[f'(x) - x f(x)]^2$ nell'intervallo $(0, +\infty)$, si deduce dalla seconda delle (15) che esiste finito il limite

$$\lim_{X \to +\infty} \int_0^X [f'(x) - x f(x)]^2 \, dx =$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \left\{ - X f^2(X) + \int_0^X f'^2(x) \, dx + \int_0^X x^2 f^2(x) \, dx + \int_0^X f^2(x) \, dx \right\},$$

il quale, per la validità ora dimostrata della (18), si riduce a quest'altro

$$\lim_{X \to +\infty} \left\{ \int_0^X f'^2(x) \, dx + \int_0^X x^2 f^2(x) \, dx + \int_0^X f^2(x) \, dx \right\}.$$

Devono dunque esistere separatamente i limiti dei tre addendi e, siccome un ragionamento analogo si può fare per l'intervallo $(-\infty, 0)$, si conclude che effettivamente dalle (15) seguono le (17).

Il teor. IV è così dimostrato.

In base ad esso, si vede che il teor. III di M. PICONE può enunciarsi come segue:

III'. — *Sia* $f(x)$ *una funzione (reale o complessa) definita per ogni valore reale di* x *ed assolutamente continua in ogni intervallo finito. Se la* $f(x)$ *verifica le ipotesi* (17), *allora la serie* (3) *di funzioni di Hermite relativa alla* $f(x)$ *converge, assolutamente ed uniformemente in ogni intervallo finito, verso la* $f(x)$ *stessa.*

Confrontando questo teor. III' col nostro teor. I si vede che quest'ultimo richiede ipotesi meno restrittive sulla $f(x)$. Vi è però da osservare che il teor. III' assicura anche l'assoluta convergenza dello sviluppo (3), la quale invece non è garantita dal teor. I; *ma basta mettere lo sviluppo della* $f(x)$ *sotto la forma* (10) *per avere* (come si è visto) *l'assoluta convergenza anche nelle nostre ipotesi.*

[*Pervenuta alla Redazione il 7-5-1951*].