ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIUSEPPE GEMIGNANI

Sui sistemi lineari di ipersuperfiole dotate di un punto multiplo variabile

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 1-2 (1951), p. 143-149

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_1-2_143_0>

SUI SISTEMI LINEARI DI IPERSUPERFICIE DOTATE DI UN PUNTO MULTIPLO VARIABILE

di GEMIGNANI GIUSEPPE (Pisa)

In un lavoro del 1880 E. BERTINI (1) dimostrò il seguente teorema:

Se la generica ipersuperficie di un sistema lineare possiede un punto s-uplo variabile con la ipersuperficie, il luogo di questo punto è una varietà base $(s-1)$-upla per il sistema lineare.

La dimostrazione di questo teorema si riconduce facilmente al caso in cui il sistema lineare sia un fascio, il numero di punti doppi che competono alla generica ipersuperficie sia finito, e il punto multiplo variabile sia doppio $(s=2)$, e si può fare, con BERTINI, (2) poggiando sul teorema di derivazione delle funzioni composte e sul classico teorema di EULERO sulle funzioni omogenee.

Sull'argomento sono tornati vari Autori, o per dare nuove dimostrazioni del teorema o per darne estensioni e complementi (SEVERI (3), ENRIQUES (4), B. SEGRE (5), DANTONI (6), ecc.).

Nel n. 1 del presente lavoro si dà una semplice dimostrazione geometrica del suddetto teorema nel caso di un fascio di curve piane, considerando

---

(1) BERTINI: a) *Sui sistemi lineari*, Rend. Ist. Lomb. (2) 1880;
b) *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*; 2° Ed., Messina, Principato 1923, pag 269.

(2) BERTINI: Loc. cit. in (1) b, pag. 269.

(3) SEVERI: *Trattato di Geometria Algebrica*, 1°, Bologna, Zanichelli, 1926, pagg. 38-42; v. anche il n. 2 del presente lavoro.

(4) ENRIQUES: *Teoria Geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna, Zanichelli, 1915 Vol I, pag 181.

(5) B. SEGRE: a) *Dei sistemi lineari tangenti ecc.*, Rend. acc. Lincei, 1924;
b) *Sui sistemi continui di curve piane con tacnodo*, Rend. Acc. Lincei, 1929, pag. 970.
c) *Sui sistemi continui di ipersuperficie*, Rend. Acc. Lincei, 1946, pag. 564.

(6) G. DANTONI: *Sui sistemi continui di ipersuperficie con un punto multiplo variabile*; di questo lavoro che uscirà negli annali della S N. S., ne ho letto il manoscritto

l'equazione del fascio $f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0$ come equazione di una superficie dello spazio $S_3(x, y, \lambda)$; nel n. 2 si estende la dimostrazione al caso di un fascio di ipersuperficie di S_r. Nei nn. 3, 4 si dimostra, con considerazioni geometriche analoghe, un complemento al citato teorema di BERTINI, provato recentemente (per altra via) da G. DANTONI; una parte di questo complemento era stata dimostrata, precedentemente, da B. SEGRE nel lavoro citato nella nota (5) *c*).

1. — Consideriamo un fascio di curve piane di ordine n

$$f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) = 0 \tag{1}$$

la generica delle quali abbia un gruppo di punti doppi variabili con λ. Sia Γ la curva descritta da tali punti al variare di λ; vogliamo dimostrare che ogni curva del fascio (1) contiene come parte la curva Γ.

Interpretiamo la (1) come equazione di una superficie F^{n+1} dello spazio $S_3(x, y, \lambda)$. La superficie F è di ordine $n + 1$ (7), passa per il punto improprio A della retta $x = 0$, $y = 0$ con molteplicità n, e contiene la retta impropria u del piano xy; inoltre i piani del fascio $\lambda = h$ (con h costante arbitraria) secano la F in una curva che si spezza nella retta u ed in una curva ($\lambda = h$, $f_1 + h f_2 = 0$) la quale non è altro che la curva $f_1 + h f_2 = 0$ del piano xy alla quale si sia imposta la traslazione $\omega(h)$ che porta il punto $(0, 0, 0)$ nel punto $(0, 0, h)$.

Indichiamo con $x_\lambda, y_\lambda, 0$ le coordinate in S_3 di un generico punto di Γ (corrispondente al valore λ del parametro). Il punto di coordinate $x_\lambda, y_\lambda, \lambda$, descrive, al variare di λ, una curva Γ' la quale sta sulla superficie F, ha come proiezione da A sul piano $\lambda = 0$ la curva Γ ed è il luogo del gruppo di punti doppi variabili con h delle curve $\lambda = h$, $f_1 + h f_2 = 0$. In particolare si noti che la curva Γ' non ha alcuna parte giacente in un piano $\lambda = h$.

Da quanto sopra segue che Γ' è una curva doppia per la superficie F. Infatti indichiamo con $\overline{\Gamma}$ una parte irriducibile di Γ e con $\overline{\Gamma}'$ la corrispondente parte irriducibile di Γ'. Consideriamo un generico punto $P' \equiv (x_h, y_h, h)$ di $\overline{\Gamma}'$. Se P' fosse semplice per F, il piano $\lambda = h$ sarebbe tangente in P' ad F, perchè esso seca la F in una curva che ha P' come punto doppio; ma allora la curva irriducibile $\overline{\Gamma}'$ avrebbe la tangente in un suo generico punto tutta contenuta in un piano del fascio $\lambda = h$ e quindi $\overline{\Gamma}'$ giacerebbe

(7) Possiamo supporre che f_1 ed f_2 siano di grado n in x, y; se così non fosse basterebbe operare un cambiamento del riferimento nel piano xy per ricondurci a questo caso.

tutta in un piano del detto fascio [8] e ciò non è, come abbiamo osservato sopra.

Proiettando dal punto A la curva Γ' (o la Γ) si ottiene un cilindro Φ la cui generica generatrice è contenuta nella superficie F perchè congiunge un punto n uplo di F con un punto doppio di F. Ne segue che la F contiene come parte il cilindro Φ e quindi le curve del fascio (1) contengono tutte come parte la curva Γ.

2. — Il ragionamento del n. 1 si estende senz'altro al caso di un fascio di ipersuperficie dello spazio $S_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_r) + \lambda f_2(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0 \tag{2}$$

la generica delle quali abbia un gruppo $G(\lambda)$ di punti doppi variabili con λ. [9]

L'equazione (2), nello spazio $S_{r+1}(x_1, x_2, \dots, x_r, \lambda)$ rappresenta una ipersuperficie F di ordine $n+1$ la quale passa per il punto improprio A della retta $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_r = 0$ con molteplicità n. Conservando le notazioni precedenti, con lo stesso ragionamento del n. 1, si prova che la curva Γ' è una curva doppia per F e che il cilindro Φ, che si ottiene proiettando Γ' (o Γ) da A, giace sulla F; ciò vuol dire che una generica ipersuperficie del fascio (2) contiene la curva Γ.

Dimostrato il teorema nel caso in cui la generica ipersuperficie del fascio (2) abbia un gruppo di punti doppi variabili, esso si estende subito per induzione, al caso in cui la generica ipersuperficie del fascio (2) abbia un gruppo $G(\lambda)$ di punti s-upli variabili, con $s \geq 3$.

Infatti, supponiamo che il teorema sia vero per i fasci con punti $(s-1)$-upli variabili e dimostriamolo per un fascio (2) con un gruppo $G(\lambda)$ di punti s-upli variabili. Poichè i punti di $G(\lambda)$ sono s-upli almeno per $f_1 + \lambda f_2 = 0$, in essi si annullano le derivate di ordine $\leq s-1$ di $f_1 + \lambda f_2$ e quindi in essi si annullano le derivate di ordine $\leq s-2$ dei polinomi $\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_i}$, $[i = 1, 2 \dots r]$, cioè i punti di $G(\lambda)$ sono $(s-1)$ upli almeno

---

[8] Se $x_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2 \dots r)$ sono le equazioni parametriche di una curva di S_r, le equazioni della tangente in un suo punto corrispondente al valore t del parametro sono $x_i = u\,\varphi'_i(t) + \varphi_i(t)$ e perchè questa retta appartenga, per ogni t ad un iperpiano del fascio $x_r = K$, occorre che sia $\varphi'_r(t) \equiv 0$, cioè $\varphi_r(t) \equiv$ cost. la quale dice che la curva sta in un iperpiano $x_r = K$.

[9] Possiamo supporre $r \geq 3$, perchè per $r = 1$, ragionando come al n. 1 si prova subito che una serie lineare semplicemente infinita $f_1(x) + \lambda f_2(x) = 0$ non può avere punti doppi variabili.

per le r ipersuperficie $\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 0$ e quindi, per la proprietà ammessa, tutti i punti della curva Γ descritta da $G(\lambda)$ sono $(s-2)$-upli almeno per tutte le ipersuperficie $\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_i} = 0$ (λ qualunque).

Ne segue che in un qualunque punto di Γ sono nulle le derivate di ordine $\leq s-3$ delle $\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f_2}{\partial x_i}$, cioè in un qualunque punto di Γ sono nulle le derivate di ordine $\leq s-2$ di $f_1 + \lambda f_2$, e ciò vuol dire che Γ è una curva base $(s-1)$-upla almeno per il fascio (2).

3. — Ci proponiamo ora di dimostrare, con ragionamento geometrico analogo a quello del n. 1, il complemento al citato teorema di BERTINI di cui abbiamo parlato nell'introduzione.

Per maggior chiarezza ragioneremo sopra un fascio di superficie di S_3, ma il ragionamento che faremo vale senz'altro per un fascio di ipersuperficie di S_r.

Consideriamo nello spazio $S_3(x, y, z)$, un fascio di superficie di ordine n

$$f_1(x, y, z) + \lambda f_2(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

e supponiamo che per un particolare valore di λ, e sia $\bar{\lambda}$, la superficie $f_1 + \bar{\lambda} f_2 = 0$ abbia un punto $\bar{P}$ almeno doppio, origine di un ramo γ tale che le superficie del fascio (3) corrispondenti ai valori di λ che appartengono ad un opportuno intorno di $\bar{\lambda}$, abbiamo uno ed uno solo punto doppio $P(\lambda)$ appartenente a γ, e che $P(\lambda)$ sia variabile con λ. [10]

---

[10] Per particolari valori di λ, nel suddetto intorno di $\bar{\lambda}$, il punto $P(\lambda)$ può avere molteplicità maggiore di due per la corrispondente superficie $f_1 + \lambda f_2 = 0$

Si noti che dalle ipotesi fatte segue $\lim_{\lambda \to \bar{\lambda}} P(\lambda) = \bar{P}$ perchè se fosse $\lim_{\lambda \to \bar{\lambda}} P(\lambda) = P_1 \not\equiv \bar{P}$ la superficie $f_1 + \bar{\lambda} f_2 = 0$ avrebbe due punti multipli su γ, e cioè $\bar{P}$ e P_1.

Si osservi inoltre che se la generica superficie del fascio (3) ha un gruppo $G(\lambda)$ di punti doppi tutti variabili con λ, detta Γ la curva descritta da $G(\lambda)$ (e supposta per semplicità irriducibile), i gruppi $G(\lambda)$ formano una serie lineare g^1_m perchè la loro totalità è una serie algebrica ∞^1 la quale è razionale in quanto ad un generico valore di λ corrisponde un gruppo $G(\lambda)$, ed è di indice uno in quanto un generico punto di Γ non è punto base doppio per il fascio.

Dire che le superficie del fascio corrispondenti ai valori di λ che appartengono ad un opportuno intorno di $\bar{\lambda}$, hanno uno ed un sol punto doppio su γ, equivale a dire che $\bar{P}$ non è punto base almeno doppio per il fascio e che esso, *in quanto punto di* γ, non appartiene al gruppo Jacobiano della g^1_m.

Vogliamo dimostrare che nelle suddette ipotesi:

a) $\overline{P}$ *è punto base semplice per il fascio* (3), *ed è esattamente doppio per* $f_1 + \overline{\lambda} f_2 = 0$

b) Il ramo γ *è lineare*

c) La tangente τ *a* γ *in* $\overline{P}$ *è una generatrice semplice del cono* φ *tangente in* $\overline{P}$ *alla* $f_1 + \overline{\lambda} f_2 = 0$.

d) Il piano tangente in $\overline{P}$ *alla generica superficie del fascio è il piano tangente lungo la retta* τ *al cono* φ.

Analogamente a quanto si è fatto nel n. 1 interpretiamo la (3) come equazione di una ipersuperficie F dello spazio $S_4(x, y, z, \lambda)$. Indichiamo con γ' il ramo descritto dal punto $(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), \lambda)$ essendo $x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)$, 0, le coordinate in S_4 del punto di γ corrispondente al valore λ del parametro; con τ' la tangente al ramo γ' nell'origine $\overline{P}'$; infine indichiamo con Θ il cono tangente in $\overline{P}'$ alla F, e con A il punto improprio della retta $x = y = z = 0$.

Anzitutto osserviamo che $\overline{P}$ *non può essere punto base doppio* (almeno) per il fascio (3), perchè altrimenti ad un valore di λ nell'intorno di $\overline{\lambda}$ corrisponderebbero superficie con due punti doppi (almeno), e cioè $P(\lambda)$ e $\overline{P}$.

Dopo ciò ragionando come al n. 1, si prova che il generico punto di γ' è doppio per F; inoltre il punto $\overline{P}'$ è esattamente doppio per F, perchè se fosse triplo (almeno), la retta $A\,\overline{P}'\,\overline{P}$ sarebbe doppia (almeno) per F (in quanto A è n-uplo), e quindi $\overline{P}$ sarebbe punto base doppio (almeno) per il fascio. Da ciò segue *che la retta* τ' *è doppia per il cono* Θ. ([11])

Il *ramo* γ' *è lineare e l'*S_3 $\lambda = \overline{\lambda}$ non contiene la tangente τ' a γ' in $\overline{P}'$, altrimenti gli S_3 $\lambda = \overline{\lambda} + \varepsilon$, con $|\varepsilon| \neq 0$ e sufficientemente piccolo, incontrerebbero γ' in più di un punto, e le corrispondenti superficie $f_1 + (\overline{\lambda} + \varepsilon) f_2 = 0$ avrebbero più di un punto doppio su γ. ([12])

Da ciò segue che l'S_3 $\lambda = \overline{\lambda}$ non può far parte di Θ (perchè non contiene τ' che una generatrice doppia di Θ) e quindi esso seca la F in una superficie che ha $\overline{P}'$ come punto esattamente doppio; ciò vuol dire *che* $\overline{P}$ *è esattamente doppio per la superficie* $f_1 + \overline{\lambda} f_2 = 0$.

([11]) Un generico piano per τ' seca la F in una curva C che ha il punto $\overline{P}'$ come doppio, ed il punto infinitamente vicino a $\overline{P}'$ sulla τ' pure doppio perchè τ' è tangente a γ' che è luogo di punti doppi per F; la retta τ' è quindi una tangente doppia per la detta curva C, e da questo segue l'asserto.

Vedi BERTINI: Loc cit. in (1) *b)* pag. 235.

([12]) Siano $x = x(\overline{\lambda}) + t^\alpha P_1(t)$, $y = y(\overline{\lambda}) + t^\alpha P_2(t)$, $z = z(\overline{\lambda}) + t^\alpha P_3(t)$, $\lambda = \overline{\lambda} + t^\alpha P_4(t)$. le equazioni del ramo γ', dove $\alpha \geq 1$ è l'ordine di γ' e le $P_i(t)$ sono serie di potenze in t, non tutte nulle per $t = 0$. Secando γ' con l'S_3 $\lambda = \overline{\lambda} + \varepsilon$ si ha $t^\alpha P_4(t) = \varepsilon$, da cui tenendo presente che i detti S_3 incontrano γ' in uno e un sol punto segue $\alpha = 1$ e $P_4(0) \neq 0$, cioè γ' è lineare e l'S_3 $\lambda = \overline{\lambda}$ non contiene la tangente τ'.

Inoltre è $\tau' \not\equiv A \overline{P}' \overline{P}$ perchè altrimenti la retta $A \overline{P}' \overline{P} \equiv \tau'$ sarebbe doppia per Θ e un piano generico per essa secherebbe la F in una curva C di ordine $n+1$ avente il punto A come punto n-uplo ed il punto $\overline{P}'$ come punto doppio con la retta $A \overline{P}' \overline{P}$ come tangente doppia in $\overline{P}'$, cioè la C conterrebbe la retta $A \overline{P}' \overline{P}$ contata due volte, cioè questa retta sarebbe doppia per F e quindi $\overline{P}$ sarebbe punto base doppio per il fascio (3).

Poichè γ è la proiezione del ramo lineare γ' dal punto A che non sta sulla tangente τ' nell'origine $\overline{P}'$, si ha che *il ramo γ è lineare.*

Consideriamo ora il piano π individuato dalla retta τ' e dalla $A \overline{P}' \overline{P}$. Questo piano sta nel cono Θ ed è semplice per Θ perchè τ' è generatrice doppia e $A \overline{P}' \overline{P}$ è generatrice semplice di Θ.

L'S_3 $\lambda = \overline{\lambda}$ sega π in una retta $\overline{\tau}'$ la quale è semplice per Θ perchè è distinta da τ' che non sta nel detto S_3. Inoltre $\overline{\tau}'$ è semplice anche per il cono φ', tangente in $\overline{P}'$ alla sezione di F con l'S_3 $\lambda = \overline{\lambda}$, perchè altrimenti il detto S_3 sarebbe tangente in $\overline{\tau}'$ a Θ e quindi conterrebbe la generatrice doppia τ'. Ne segue che *τ è una generatrice semplice del cono φ.*

Sia ora R un generico punto della retta $A \overline{P}' \overline{P}$ ed osserviamo che l'iperpiano Σ tangente in R alla F non varia al variare di R sulla retta $A \overline{P}' \overline{P}$ e che tale iperpiano è tangente a Θ lungo la retta $A \overline{P}' \overline{P}$.

La proprietà è evidente se Σ fa parte di F, giacchè in tal caso la parte residua è una ipersuperficie F', di ordine n la quale non contiene la retta $A \overline{P}' \overline{P}$ (altrimenti essa sarebbe doppia per la F), ha molteplicità uno in $\overline{P}'$ (altrimenti $\overline{P}'$ sarebbe triplo almeno per F) ed il cono Θ è spezzato nell'iperpiano Σ e in un altro iperpiano (tangente ad F' in $\overline{P}'$).

Se Σ non fa parte di F, detto α un generico piano di Σ passante per $A \overline{P}' \overline{P}$, esso seca F in una curva K di ordine $n+1$, avente il punto A come n-uplo almeno, R e $\overline{P}$ come doppi (almeno) e contenente quindi la retta $A \overline{P}' \overline{P}$ come componente doppia (almeno). Σ è quindi tangente ad F nei punti di $A \overline{P}' \overline{P}$. È inoltre tangente anche a Θ negli stessi punti: infatti se Σ fa parte di Θ, la proprietà è evidente e se Σ non fa parte di Θ allora α seca Θ in una conica spezzata nella $A \overline{P}' \overline{P}$ contata due volte.

Da quanto sopra segue che *il piano tangente in $\overline{P}$ alla generica superficie del fascio* (3) *non varia al variare di λ e coincide con il piano tangente a φ lungo la retta τ.* [13]

---

[13] Si noti che il piano tangente in $\overline{P} \equiv (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, 0)$ alla $f_1 + h f_2 = 0$ si ottiene secando Σ con l'S_3 $\lambda = h$ e proiettando il piano così trovato da A in $\lambda = 0$. Tale piano è tangente a φ lungo la τ perchè Σ è tangente a Θ lungo il piano individuato dalla retta $A \overline{P}' \overline{P}$ e dalla τ'.

4. — Come abbiamo già detto, il ragionamento del n. 3 e il relativo teorema valgono senz'altro per un fascio di ipersuperficie di S_r ($r \geq 3$) con un punto doppio variabile.

Con ragionamento analogo si prova più in generale, la seguente proposizione.

Sia dato, nello spazio $S_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, un fascio di ipersuperficie:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_r) + \lambda f_2(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0 \tag{4}$$

e supponiamo che per un particolare valore di λ, e sia $\bar{\lambda}$, l'ipersuperficie $f_1 + \bar{\lambda} f_2 = 0$ abbia un punto $\bar{P}$ almeno s-uplo, origine di un ramo γ tale che le ipersuperficie del fascio (4) corrispondenti ai valori di λ che appartengono ad un opportuno intorno di $\bar{\lambda}$ abbiano uno ed un solo punto s-uplo $P(\lambda)$ appartenente a γ e che $P(\lambda)$ sia variabile con λ. [14]

In queste ipotesi si ha che:

a) $\bar{P}$ *è un punto base* $(s-1)$*-uplo per il fascio* (4), *ed è esattamente* s*-uplo per* $f_1 + \bar{\lambda} f_2 = 0$;

b) il ramo γ *è lineare*;

c) la tangente τ *a* γ *in* $\bar{P}$ *è esattamente* $(s-1)$ *upla per il cono* φ_s *tangente in* $\bar{P}$ *alla* $f_1 + \bar{\lambda} f_2 = 0$;

d) Il cono ψ_{s-1} *tangente in* $\bar{P}$ *alla generica ipersuperficie del fascio è il cono tangente lungo la retta* τ *al cono* φ_s. [15]

Pisa, giugno 1951

(14) Vedi nota (10) al n. 3.

(15) In particolare se φ_s possiede una generatrice s'-upla distinta da τ ($2 \leq s' \leq s$) tale retta è $(s'-1)$-upla per ψ_{s-1}; giacchè ψ_{s-1} è la polare prima di τ rispetto a φ_s (cfr. DANTONI: Loc. cit. 8).