ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GUSTAV DOETSCH

Beitrag zur Asymptotik der durch Komplexe Integrale dargestellten Funktionen

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 1-2 (1951), p. 105-119

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_1-2_105_0>

BEITRAG ZUR ASYMPTOTIK DER DURCH KOMPLEXE INTEGRALE DARGESTELLTEN FUNKTIONEN

von GUSTAV DOETSCH in Freiburg i. B.

Darstellungen von Funktionen durch komplexe Integrale kommen in der klassischen, unmittelbar an LAPLACE anknüpfenden Theorie der Differentialgleichungen dadurch zustande, dass man die Lösung $F(t)$ versuchsweise in der Gestalt

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int e^{ts} f(s)\, d\, s \tag{1}$$

mit vorläufig nicht festgelegtem Integrationsweg ansetzt, und dann $f(s)$ und den Weg in der komplexen Ebene so bestimmt, dass die Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen erfüllt sind. In der modernen Theorie geht man systematischer so vor, dass man zunächst die Differentialgleichung der LAPLACE-Transformation

$$\mathfrak{L}\{F\} \equiv \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, d\, t = f(s)$$

unterwirft, wodurch man eine Gleichung für die Bildfunktion $f(s)$ der Lösung erhält, in die die Anfangsbedingungen mit eingehen. Die Darstellung von $F(t)$ durch ein komplexes Integral der Form (1) erscheint in dieser Theorie als Abschluss des Verfahrens, nämlich als Umkehrformel zur LAPLACE-Transformation, die die gefundene Bildfunktion $f(s)$ in die Originalfunktion $F(t)$ überführt. Dabei ist der Integrationsweg prinzipiell eine vertikale Gerade der komplexen Ebene, sodass $F(t)$ in der Gestalt auftritt:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} f(s)\, d\, s = \frac{e^{xt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} f(x+iy)\, d\, y\,. \tag{2}$$

Im Grunde handelt es sich also um FOURIER-Integrale von analytischen Funktionen. Mit der asymptotischen Entwicklung derartiger Integrale für $t \to \infty$ wollen wir uns hier beschäftigen, und zwar unabhängig davon, ob sie die Umkehrungen von (ein-oder zweiseitigen) LAPLACE-Transformationen darstellen oder nicht.

Hierfür existieren ausser der Passmethode, die wir aber wegen ihrer andersartigen Grundlage beiseitelassen, die Methoden von HJ. MELLIN und A. HAAR, die beide vom Studium der Singularitäten von $f(s)$ ausgehen. Die Methode von MELLIN (¹) beruht auf dem Residuenkalkül und setzt voraus, dass $f(s) = f(x + i\,y)$ links vom Integrationsweg eindeutig und bis auf Pole s_ν mit $\mathfrak{R}\, s_\nu \to -\infty$ analytisch ist und für $|y| \to \infty$ wie $e^{-\vartheta|y|}$ $(\vartheta > 0)$ gegen 0 strebt. Wird der Integrationsweg über n Pole hinweg nach links verschoben, so ergibt sich eine Summe von n Residuen der Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^{(0)} + a_\nu^{(1)}\, t + \ldots + a_\nu^{(k_\nu)}\, t^{k_\nu})\, e^{s_\nu t},$$

die eine asymptotische Darstellung von $F(t)$ liefert, weil das Rest-integral von der Grössenordnung $O(e^{\mathfrak{R} s_{n+1} \cdot t})$ ist. Solche asymptotische Entwicklungen nach Exponential funktionen mit Polynomialkoeffizienten treten in den Anwendungen ziemlich selten auf (meist handelt es sich bei dieser Form nicht um asymptotische, sondern konvergente Entwicklungen). Viel häufiger kommen *asymptotische Darstellungen durch Potenzreihen im Sinne von* POINCARÉ vor, die so definiert sind: Es sei $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, wobei endlich viele λ_ν negativ sein dürfen. Dann schreibt man

$$(3) \qquad g(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, x^{-\lambda_\nu} \text{ für } x \to \infty, \text{ wenn } g(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, x^{-\lambda_\nu} + o(x^{-\lambda_n})$$
$$\text{für } x \to \infty \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

und

$$(4) \qquad g(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (x - x_0)^{\lambda_\nu} \text{ für } x \to x_0, \text{ wenn } g(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu (x - x_0)^{\lambda_\nu} +$$
$$+ o(|x - x_0|^{\lambda_n}) \text{ für } x \to x_0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

(¹) Siehe die Wiedergabe der Mellinschen Ergebnisse in G. DOETSCH: Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation. Berlin 1937 (im folgenden als LT zitiert), S. 255-262, insbesondere Satz 4, S 262 und Beweis von Satz 2, S. 260. In den Mellinschen Untersuchungen tritt das Integral (2) als Umkehrung der MELLIN-Transformation, also in der Gestalt $\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} z^{-s} f(s)\, ds$ auf, sodass in den dortigen Formeln die Substitution $z = e^{-t}$ zu machen ist.

Oft und so auch im folgenden hat man es mit einer etwas allgemeineren Darstellung zu tun, bei der im Falle $x \to \infty$ noch ein Exponential-faktor und im Falle $x \to x_0$ noch ein logarithmischer Faktor auftritt:

$$(5) \qquad g(x) \sim e^{\gamma x} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{-\lambda_\nu} \text{ für } x \to \infty, \text{ wenn } g(x) = e^{\gamma x} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{-\lambda_\nu} + o\left(e^{\Re \gamma x} x^{-\lambda_n}\right) \text{ für } x \to \infty,$$

$$(6) \qquad g(x) \sim \log(x - x_0) \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (x - x_0)^{\lambda_\nu} \text{ für } x \to x_0,$$

$$\text{wenn } g(x) = \log(x - x_0) \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu (x - x_0)^{\lambda_\nu} + o\left(|x - x_0|^{\lambda_n}\right) \text{ für } x \to x_0.$$

Auf derartige asymptotische Potenzreihen führt die Methode von HAAR, die sich auf den in den Anwendungen am häufigsten vorkommenden Fall bezieht, dass $f(s)$ links vom Integrationsweg eine singuläre Stelle besitzt, in deren Umgebung $f(s)$ *nicht eindeutig* ist, sodass der Integrationsweg nicht darüber hinweg verschoben werden kann. Die Grundlage der Methode bildet der folgende Satz, den wir wegen des Vergleichs mit unserem späteren Resultat zitieren [2]:

Satz 1. *$F(t)$ habe die Gestalt* (2). *$f(s)$ sei in der offenen Halbebene $\Re s > x_0$ $(x_0 < x)$ analytisch und in der abgeschlossenen Halbebene $\Re s \geqq x_0$ in der Form darstellbar:*

$$(7) \qquad f(s) = c(s - s_0)^\alpha + \psi(s) \quad (\alpha \neq 0, 1, \ldots) \qquad \textit{bzw.}$$

$$(8) \qquad f(s) = c(s - s_0)^p \log(s - s_0) + \psi(s) \quad (p = 0, 1, \ldots),$$

wo s_0 ein Punkt der Geraden $\Re s = x_0$ und $\psi(s)$ eine in $\Re s \geqq x_0$ stetige Funktion ist, deren Randwerte $\psi(x_0 + iy)$ n-mal differenzierbar sind. $\psi^{(n)}(x_0 + iy)$ sei in jedem endlichen Intervall integrabel. Hiernach existiert die Randfunktion $f(x_0 + iy)$ ausser für $y = \Im s_0$ und ist n-mal differenzierbar. Die funktionen $f(x_0 + iy)$, $f'(x_0 + iy), \ldots, f^{(n-1)}(x_0 + iy)$ sollen für $y \to \pm\infty$ den Grenzwert 0 haben. Die Integrale

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{y_1} e^{ity} f^{(n)}(x_0 + iy)\, dy \quad \textit{und} \quad \int_{y_2}^{\infty} e^{ity} f^{(n)}(x_0 + iy)\, dy,$$

---

[2] Siehe LT, S. 270. In den dortigen Satz kommen noch einige weitere Bedingungen hinzu, kraft deren $f(s)$ die LAPLACE Transformierte von $F(t)$ ist.

wo y_1 und y_2 zwei feste Zahlen mit $y_1 < \mathcal{J} s_0 < y_2$ sind, sollen für $t \geqq T > 0$ gleichmäßig konvergieren. Die Integrale

$$\int_{x_0 \pm i\omega}^{x \pm i\omega} e^{ts} f(s)\, ds \tag{10}$$

sollen bei $t \geqq T$ für $\omega \to \infty$ gegen 0 streben. Dann ist

$$F(t) = \frac{c}{\Gamma(-\alpha)} e^{s_0 t} t^{-\alpha-1} + o(e^{x_0 t} t^{-n}) \text{ im Falle (7) und} \tag{11}$$

$$F(t) = -c(-1)^p p!\, e^{s_0 t} t^{-p-1} + o(e^{x_0 t} t^{-n}) \text{ im Falle (8) für } t \to \infty \text{ (3)}. \tag{12}$$

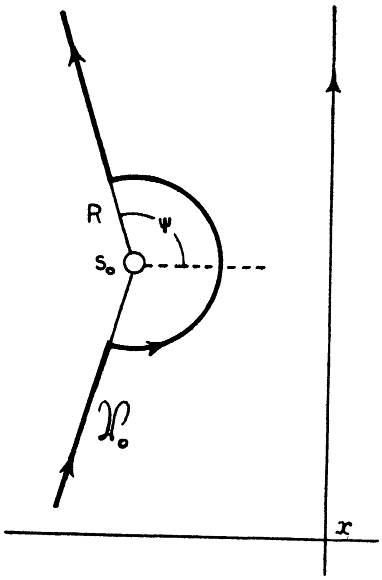

Fig. 1

Wie man auf Grund dieser Satzes mehrgliedrige asymptotische Ausdrücke herleiten kann, ist nicht ensichtlich. Der Satz erfordert eine grosse Anzahl von Voraussetzungen, unter denen die über die Existenz und Nullstrebigkeit der Ableitungen von $f(x_0 + iy)$ und die gleichmäßige Konvergenz der Integrale (9) für die Anwendungen besonders heikel sind, aber gemacht werden müssen, weil sonst in dem o-Glied in (11) und (12) die Potenz t^{-n} nicht auftreten würde. Nur dann, wenn $n > \alpha + 1$ bzw. $\geqq p + 1$ gewählt werden kann, haben die Gleichungen (11) und (12) den Charakter von asymptotischen Darstellungen im Sinne von POINCARÉ.

Anstelle dieses komplizierten Satzes kann man nun in vielen Fällen einen einfacheren benutzen, der statt der zahlreichen Einzelvoraussetzungen nur die eine macht, dass sich der geradlinige Integrationsweg in (2) durch einen winkelförmigen mit dem Scheitel s_0 und einer Öffnung $> \pi$ ersetzen lässt, wobei s_0 selbst durch einen Kreisbogen umgangen wird.

---

(3) Die Voraussetzung (10) dient nach Subtraktion des singulären Bestandteils von $f(s)$ der Verlegung des Integrationsweges an die Stelle s_0; die Voraussetzungen über die Ableitungen ermöglichen eine n-fache partielle Integration und die Voraussetzung (9) die Anwendung des Riemann-Lebesgueschen Lemmas auf das unendliche Intervall $-\infty < y < +\infty$.

Eine solche Kurve, bestehend aus den Strahlen $s = s_0 + r\, e^{\pm i\psi}$, $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$, $r > R$, und dem Bogen $s = R\, e^{i\vartheta}$, $|\vartheta| \leqq \psi$, heisse eine Kurve $\mathfrak{W}_0$. Für Integrale der Gestalt (1) mit einer Kurve $\mathfrak{W}_0$ als Weg gilt folgender Satz (4), der die Grundlage unserer Methode bildet:

Satz 2. *Die funktion $\varphi(s)$ sei in dem Sektor $|arc(s - s_0)| \leqq \psi$ $\left(\frac{\pi}{2} < \psi < \pi\right)$ einer Umgebung von s_0 holomorph mit Ausnahme der Stelle s_0. Es sei gleichmässig in $|arc(s - s_0)| \leqq \psi$:*

$$\varphi(s) = o(|s - s_0|^{\lambda}) \qquad \textit{mit beliebigem reellem } \lambda .$$

Auf den Strahlen $arc(s - s_0) = \pm \psi$ sei $\varphi(s)$ für $s \neq s_0$ holomorph (5) und

$$\varphi(s) = O(e^{k|s|}) \qquad \textit{für } |s| \to \infty \textit{ mit } k > 0 .$$

Dann gilt:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{W}_0} e^{ts}\, \varphi(s)\, ds = o(e^{x_0 t}\, t^{-\lambda-1}) \textit{ für } t \to \infty \;\; (x_0 = \Re\, s_0).$$

Hieraus leiten wir folgendes Theorem über asymptotische Entwicklungen ab.

Entwicklungssatz: *$F(t)$ habe die Gestalt (2). Die Funktion $f(s)$ sei analytisch in dem Bereich B, der rechts von der Geraden $\Re\, s = x$, links von den von einem Punkt s_0 ($\Re\, s_0 = x_0 < x$) ausgehenden Strahlen $s = s_0 + r\, e^{\pm i\psi}$, $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$, $r > 0$, begrenzt ist, einschliesslich Rand, aber ohne den Punkt s_0. Die Funktion verhalte sich im Unendlichen so, dass der Integrationsweg in (2) durch die Kurve $\mathfrak{W}_0$ ersetzt werden kann (6). In der zu B gehörigen Umgebung von s_0 besitze $f(s)$ gleichmässig hinsichtlich $arc(s - s_0)$ eine asymptotische Potenzentwicklung der Form*

$$\text{(A)} \quad f(s) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (s - s_0)^{\lambda_\nu} \quad (\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots; \textit{ endlich viele } \lambda_\nu \textit{ können negativ sein})$$

oder

---

(4) G. DOETSCH: Handbuch der LAPLACE-Transformation, I. Band. Basel 1950 (im folgenden als *HB* zitiert), S. 498.

(5) Auf den Strahlen braucht $\varphi(s)$ nicht holomorph zu sein, wie aus dem Beweis unmittelbar hervorgeht. Es genügt, dass $\varphi(s)$ integrabel und in jedem endlichen Intervall beschränkt ist. Diese Bemerkung ist für eine spätere Stelle wichtig.

(6) Natürlich könnten wir unmittelbar von einem Integral mit dem Weg $\mathfrak{W}_0$ ausgehen. In den Anwendungen liegt aber meist zunächst ein Integral der Gestalt (2) vor.

(B) $$f(s) \sim \log(s - s_0) \sum_{p=0}^{\infty} c_p (s - s_0)^p \quad \textit{für} \quad s \to s_0.$$

Auf den Strahlen von $\mathfrak{W}_0$ *sei*

$$f(s) = O(e^{k|s|}) \quad \textit{für} \quad |s| \to \infty \quad (k > 0).$$

Dann lässt sich $F(t)$ *im Falle* (A) *in die asymptotische Potenzreihe*

(A') $$F(t) \sim e^{s_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\Gamma(-\lambda_\nu)} t^{-\lambda_\nu - 1} \quad \text{für} \quad t \to \infty$$

entwickeln; hierbei ist $\dfrac{1}{\Gamma(-\lambda_\nu)} = 0$ *für* $\lambda_\nu = 0, \ldots$ *zu setzen, sodass die den Potenzen von* $s - s_0$ *mit nichtnegativ ganzzahligen Exponenten entsprechenden Glieder wegfallen. Im Falle* (B) *ist*

(B') $$F(t) \sim - e^{s_0 t} \sum_{p=0}^{\infty} c_p (-1)^p p!\, t^{-p-1} \quad \textit{für} \quad t \to \infty.$$

Beweis: Die Funktion

$$\varphi(s) = f(s) - \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (s - s_0)^{\lambda_\nu}$$

erfüllt im Falle (A) alle Voraussetzungen von Satz 2 mit $\lambda = \lambda_n$, also ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{W}_0} e^{ts} \left\{ f(s) - \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (s - s_0)^{\lambda_\nu} \right\} ds = o(e^{x_0 t} t^{-\lambda_n - 1}) \quad \text{für} \quad t \to \infty.$$

Nun ist aber (7)

(13) $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{W}_0} e^{ts} (s - s_0)^{\lambda_\nu} ds = e^{ts_0} \frac{t^{-\lambda_\nu - 1}}{\Gamma(-\lambda_\nu)} \quad \text{für} \quad t > 0,$$

wo $\dfrac{1}{\Gamma(-\lambda_\nu)} = 0$ für nichtnegativ ganzzahliges λ_ν zu setzen ist. Daher gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{W}_0} e^{ts} f(s)\, ds = e^{s_0 t} \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \frac{t^{-\lambda_\nu - 1}}{\Gamma(-\lambda_\nu)} + o(e^{x_0 t} t^{-\lambda_n - 1}) \quad \text{für} \quad t \to \infty.$$

---

(7) HB, S. 499.

Nach Voraussetzung ist die linke Seite gleich $F(t)$. Im Fall (B) ist

$$f(s) - \log(s - s_0) \sum_{p=0}^{n} c_p (s - s_0)^p = o(|s - s_0|^n),$$

also nach Satz 2

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{W}_0} e^{ts} \left\{ f(s) - \log(s - s_0) \sum_{p=0}^{n} c_p (s - s_0)^p \right\} ds = o(e^{x_0 t} t^{-n-1}).$$

Wegen (8)

$$(14) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{W}_0} e^{ts} \log(s - s_0)(s - s_0)^p \, ds = -(-1)^p p! \, t^{-p-1} \quad \text{für } t > 0, p = 0, 1, \ldots$$

folgt die Behauptung im Falle (B).

B e m e r k u n g e n : 1. — Bei diesem Satz braucht $f(s)$ nicht wie bei den aus Satz 1 sich ergebenden Entwicklungen gleich der Summe aus Funktionen der Gestalt $(s - s_0)^{\lambda_\nu}$ bzw. $\log(s - s_0)(s - s_0)^p$ und einer auch noch in s_0 stetigen Funktion zu sein, sondern es genügt, dass sich $f(s)$ *asymptotisch* durch eine Summe von Funktionen jener Art darstellen lässt.

2. — Der Satz erhält auf diese Weise die gleiche abgerundete Gestalt wie der Satz über die durch *Laplace-integrale* darstellbaren Funktionen $f(s) = \mathfrak{L}\{F\}$, der von einer asymptotischen Entwickluhg $F(t) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^{\lambda_\nu}$ in der Nähe von $t = 0$ auf eine asymptotische Entwicklung $F(s) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{\Gamma(\lambda_\nu + 1)}{s^{\lambda_\nu} + 1}$ für $s \to \infty$ schliesst (9).

3. — Besonders bemerkenswert ist im Falle (A) das völlige *Verschwinden* der den nichtnegativ ganzzahligen Exponenten entsprechenden Glieder (10). Bekanntlich wird im Operatorenkalkül bei einem der sogenannten Heavisideschen Entwicklungssätze (11) der von einer Entwicklung der Operator-

(8) Hb, S. 499-500.

(9) LT, S. 231.

(10) Vgl. die auf Grund des Haarschen Satzes von T. von STACHÓ abgeleitete Entwicklung, bei der diese Glieder auch wegfallen, in LT, S. 277.

(11) Siehe z. B. J R. CARSON: Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung. Berlin 19-9, S. 55 flg.; K W. WAGNER: Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig 1940, S 255 flg.

funktion $f(s)$ der Gestalt $\Sigma a_\nu s^{\frac{\nu}{2}}$ auf eine Entwicklung der Form $F(t) \sim$ $\sim \Sigma a_\nu \frac{t^{-\frac{\nu}{2}-1}}{\Gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ für die effektive Funktion schliesst, auch der Wegfall der Potenzen mit ganzzahligen Exponenten postuliert, aber ohne wirklichen Beweis und ohne exakte Festlegung von Gültigkeitsgrenzen.

4. — Natürlich kann es vorkommen, dass bei ein und derselben Funktion zwei Entwicklungen der Form (A) und (B) im Punkt s_0 *superponiert* erscheinen. Dann ist für $F(t)$ die Superposition der entsprechenden Entwicklungen anzusetzen.

5. — Man kann die Anweisung zur Bildung der Entwicklung für $F(t)$ im Falle (A) kurz so ausdrücken: Man ersetze in der Entwicklung für $f(s)$ jedes Glied $(s - s_0)^\alpha$ durch $e^{s_0 t} \frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$. Für negative α ist das gerade die durch die *Laplace Transformation* gestiftete Zuordnung. Für $\alpha \geqq 0$ existiert diese Zuordnung innerhalb der LAPLACE-Transformation nicht. In dem in den Anwendungen besonden häufigen Fall $\alpha = \nu \frac{1}{2}$ kann man übrigens $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} = (-1)^\nu \pi^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)$ setzen.

Wir müssen nun noch die Frage behandeln, welche Bedeutung die Existenz *weiterer singulärer Stellen* von $f(s)$ ausser s_0 für die Asymptotik von $F(t)$ hat. Eine singuläre Stelle s_1 mit $\mathfrak{R}\, s_1 < \mathfrak{R}\, s_0$ würde bei der Entwicklung von $F(t)$ Veranlassung geben zu Gliedern, die den Faktor $e^{s_1 t}$ enthalten, also von geringerer Grössenordnung sind als der « Fehler », der schon in der von s_0 herrührenden Entwicklung steckt und von der Grössenordnung $o(e^{\mathfrak{R} s_0 t})$ ist. Für die Asymptotik von $F(t)$ kommen daher nur solche Stellen in Frage, die denselben Realteil haben und am weitesten rechts liegen. Bei der Uberlegung, wie die obigen Betrachtungen beim Vorhandensein mehrerer solcher Stellen zu modifizieren sind, können wir uns auf den Fall beschränken, dass es deren zwei sind. Wir nehmen an, dass $f(s)$ in dem rechts von der Geraden $\mathfrak{R}\, s = x$ und links von dem in Figur 2 gezeichneten Linienzug [12] $A\,(\infty)\, B\, s_0\, C\, D\, s_1\, F\, G\,(\infty)$ begrenzten

---

[12] A (∞) soll den unendlich fernen Punkt des Strahls $B\,A$ bedeuten, entsprechend in den übrigen Fällen.

Bereich einschliesslich Rand analytisch ist mit Ausnahme der Punkte s_0 und s_1 $(\mathcal{R}\, s_0 = \mathcal{R}\, s_1 = x_0)$, in deren Umgebung, soweit sie zum Bereich gehört, die Funktion $f(s)$ asymptotische Entwicklungen der Form

$$f(s) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (s - s_0)^{\lambda_\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad f(s) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu (s - s_1)^{\lambda_\nu}$$

gleichmässig hinsichtlich aller Richtungen besitzt. (Treten Entwicklungen des Typs (B) auf, so sind die Betrachtungen ganz analog).

Dass wir die Exponenten in beiden Entwicklungen als dieselben voraussetzen, bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, da wir, wenn sie verschiedene Folgen bilden, diese zu einer einzigen vereinigen und für die in einer Entwicklung nicht auftretenden Exponenten die Koeffizienten gleich 0 setzen können. $f(s)$ möge sich im Unendlichen so verhalten, dass der Integrationsweg in (2) auf den aus geradlinigen Stücken und zwei Kreisbogen um die Punkte s_0 und s_1 bestehenden Linienzug $A(\infty)\, B\, C\, D\, E\, F\, G(\infty)$ verlegt werden kann. Eine Kurve dieses Typs heisse eine Kurve $\mathfrak{W}_{01}$. Wir setzen

$$\varphi(s) = f(s) - \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (s - s_0)^{\lambda_\nu}$$

und betrachten zunächst das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{A(\infty)}^{D} e^{ts}\, \varphi(s)\, ds,$$

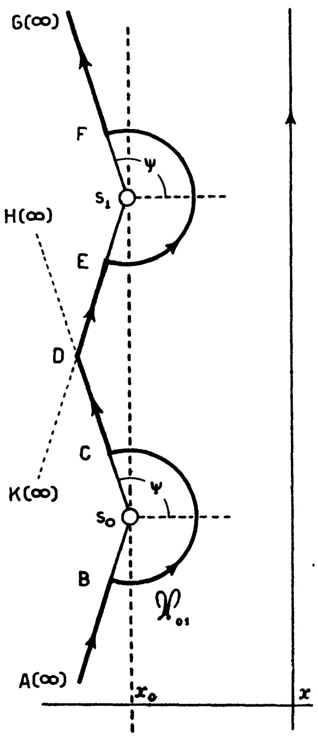

Fig. 2

das nur über die untere Hälfte der Kurve $\mathfrak{W}_{01}$ zu erstrecken ist. Würde das letzte Wegstück $C\, D$ über D hinaus bis zu dem in dieser Richtung liegenden unendlich fernen Punkt $H(\infty)$ laufen, so könnten wir, da $\varphi(s) = o(|\, s - s_0\, |^{\lambda_n})$ ist, den Satz 2 anwenden und schliessen, dass das Integral gleich $o(e^{x_0 t}\, t^{-\lambda_n - 1})$ ist. Nun machten wir schon in (5) die Bemerkung, dass $\varphi(s)$ auf den Strahlen von $\mathfrak{W}_0$ nicht holomorph zu sein braucht, sondern dass Integrierbarkeit und Beschränktheit in jedem endlichen Intervall genügt. Wir können daher auf $D\, H(\infty)$ $\varphi(s) = 0$ setzen, womit das Integral von Satz 2 gleich unserem obigen Integral wird. Es gilt also

$$(15) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{A(\infty)}^{D} e^{ts}\left\{f(s)-\sum_{\nu=0}^{\lambda_n} c_\nu (s-s_0)^{\lambda_\nu}\right\} d\,s = o\,(e^{x_0 t}\, t^{-\lambda_n-1}).$$

Ebenso ergibt sich

$$(16) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{D}^{G(\infty)} e^{ts}\left\{f(s)-\sum_{\nu=0}^{\lambda_n} d_\nu (s-s_1)^{\lambda_\nu}\right\} d\,s = o\,(e^{x_0 t}\, t^{-\lambda_n-1})$$

für $t \to \infty$. Wir behaupten weiterhin, dass bei beliebigem reellen λ

$$\int_{D}^{H(\infty)} e^{ts}\,(s-s_0)^{\lambda}\, d\,s = o\,(e^{x_0 t}\, t^{-k}) \qquad \text{für } t \to \infty$$

mit jedem reellen k ist. Es ist, wenn $s_0\,D = d$ gesetzt wird:

$$\left|\int_{D}^{H(\infty)} e^{ts}\,(s-s_0)^{\lambda}\, d\,s\right| = \left|\int_{d}^{\infty} e^{t}\,(s_0 + r\,e^{i\psi})\, r^{\lambda}\, e^{i(\lambda+1)\psi}\, d\,r\right| \leqq e^{x_0 t}\int_{d}^{\infty} e^{tr\cos\psi}\, d\,r$$

$(\cos\psi < 0)$. Für $\lambda \leqq 0$ ist

$$\int_{d}^{\infty} e^{tr\cos\psi}\, r^{\lambda}\, d\,r \leqq d^{\lambda}\,\frac{e^{td\cos\psi}}{-d\cos\psi} = o\,(t^{-k}) \quad \text{für } t \to \infty\,.$$

Für $\lambda > 0$ ist $r^{\lambda} < M(\lambda)\, e^{r}$, also

$$\int_{d}^{\infty} e^{tr\cos\psi}\, r^{\lambda}\, d\,r \leqq M(\lambda)\int_{d}^{\infty} e^{(1+t\cos\psi)\,r}\, d\,r = M(\lambda)\,\frac{e^{(1+t\cos\psi)\,d}}{-(1+t\cos\psi)}\,.$$

Für $t > -\dfrac{1}{\cos\psi}$ ist der Exponent negativ, also die Majorante $= o\,(t^{-k})$. Damit ist die Behauptung bewiesen. Für endlich viele λ-Werte gilt die Abschätzung offenbar gleichmässig, folglich können wir schliessen, dass

$$(17) \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{D}^{H(\infty)} e^{ts}\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\,(s-s_0)^{\lambda_\nu}\, d\,s = o\,(e^{x_0 t}\, t^{-\lambda_n-1})$$

und ebenso

$$(18) \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K(\infty)}^{D} e^{ts}\sum_{\nu=0}^{n} d_\nu (s-s_1)^{\lambda_\nu}\, d\, s = o\,(e^{x_0 t}\, t^{-\lambda_n - 1} \quad \text{für } t \to \infty\,.$$

Die Addition der formeln (15) bis (18) ergibt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{W}_{01}} e^{ts} f(s)\, d\, s - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{A(\infty)}^{H(\infty)} e^{ts}\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (s-s_0)^{\lambda_\nu}\, d\, s -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K(\infty)}^{G(\infty)} e^{ts}\sum_{\nu=0}^{n} d_\nu (s-s_1)^{\lambda_\nu}\, d\, s = o\,(e^{x_0 t}\, t^{-\lambda_n - 1}).$$

Nach Formel (13) kann man hierfür schreiben:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{W}_{01}} e^{ts} f(s)\, d\, s = e^{s_0 t}\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \frac{t^{-\lambda_\nu - 1}}{\Gamma(-\lambda_\nu)} + e^{s_1 t}\sum_{\nu=0}^{n} d_\nu \frac{t^{-\lambda_\nu - 1}}{\Gamma(-\lambda_\nu)} = o\,(e^{x_0 t}\, t^{-\lambda_n - 1})\,.$$

Wir können also zu dem Entwicklungssatz folgende Ergänzung aus sprechen:

Wenn $f(s)$ auf einer Vertikalen $\mathfrak{R}\, s = x_0$ links von der Geraden $\mathfrak{R}\, s = x$ endlich viele singuläre Stellen hat, in deren Umgebung $f(s)$ asymptotische Darstellungen vom Typus (A) *oder* (B) *zulässt, und wenn sich der Integrationsweg auf einen Linienzug von der Art der Kurve $\mathfrak{W}_{01}$ verlegen lässt, so besitzt $F(t)$ für $t \to \infty$ eine asymptotische Entwicklung, die durch Superposition der entsprechenden Entwicklungen vom Typus* (A′) *und* (B′) *estrteht.*

Als Beispiel wollen wir die asymptotische Entwicklung der Besselfunktion $J_0(t)$ für reell gegen ∞ laufendes t ableiten, weil sie sich auch mittels der Haarschen Methode [13] und mittels der auf LAPLACE-Integrale bezüglichen « Abelschen Asymptotik » [14] gewinnen lässt und man durch Vergleich des benötigten Aufwandes am besten einen Massstab für die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Methoden bilden kann. Bekanntlich ist

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts}\frac{1}{(s^2+1)^{\frac{1}{2}}}\, d\, s \quad (x > 0) \quad \text{für } t > 0,$$

---

(13) LT, S. 276

(14) LT, S. 239.

was man am einfachsten aus $\mathcal{L}\{J_0\} = \dfrac{1}{(s^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ vermittels der komplexen Umkehrformel ableitet. $f(s)$ hat hier links von $\mathcal{R}\, s = x$ die zwei singulären Stellen $s = \pm i$, die auf der Vertikalen $\mathcal{R}\, s = x_0 = 0$ liegen, sodass die obige Ergänzung zum Entwicklungssatz benötigt wird. Zunächst ist zu zeigen, dass sich der Integrationsweg durch eine Kurve $\mathfrak{W}_{01}$ ersetzen lasst. Dazu genügt es nach dem Cauchyschen Satz, dass das Integral, erstreckt über eine zwischen der Vertikalen $\mathcal{R}\, s = x$ und der Kurve $\mathfrak{W}_{01}$ in der Höhe $\pm\omega$ eingespannte horizontale Strecke mit den Endpunkten σ_1 und σ_2 für $\omega \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Auf dieser Strecke ist $|e^{ts}| \leqq e^{tx}$, $(s_2+1)^{-\frac{1}{2}}$ von der Grössenordnung ω^{-1} und die Länge des Integrationsweges von der Grössenordnung ω. Der Schluss lässt sich also nicht unmittelbar ziehen. Integriert man aber partiell:

$$(19)\qquad \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{ts}(s^2+1)^{-\frac{1}{2}}\, d\, s = \frac{1}{t}\, e^{ts}(s^2+1)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} + \frac{1}{t}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{ts}(s^2+1)^{-\frac{3}{2}}\, s\, ds\,,$$

so sieht man sofort, dass das Integral gegen 0 strebt. Die Ersetzung des Integrationsweges durch die Kurve $\mathfrak{W}_{01}$ ist also statthaft. In der Umgebung der singulären Stellen ist $f(s)$ nicht bloss in einem Sektor mit einer Öffnung $> \pi$ durch eine asymptotische, sondern sogar ringsherum durch eine konvergente Entwicklung darstellbar:

$$f(s) = (s-i)^{-\frac{1}{2}}(2i + (s-i))^{-\frac{1}{2}} = (2i)^{-\frac{1}{2}}(s-i)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \left(\frac{s-i}{2i}\right)^{\nu}$$

$$= \frac{(2i)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\nu\,!\,(2i)^{\nu}}\,(s-i)^{\nu-\frac{1}{2}}\,,$$

und analog

$$f(s) = \frac{(-2i)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\nu\,!\,(-2i)^{\nu}}\,(s+i)^{\nu-\frac{1}{2}}\,.$$

Also ist nach der Ergänzung zum Entwicklungssatz [15]:

$$J_0(t) \to \frac{(-2i)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{it} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{\nu!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(2i)^\nu} t^{-\nu-\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{(-2i)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{it} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{\nu!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(-2i)^\nu} t^{-\nu-\frac{1}{2}}.$$

Dies ist bekannte asymptotische Entwicklung von $J_0(t)$ für t (reell) $\to \infty$, die man noch auf mannigfache Art umformen kann.

In der gleichen mühelosen Art erhält man mit dieser Methode die asymptotische Entwicklung der allgemeinen Besselfunktion $J_\alpha(t)$, wenn man von der LAPLACE-Transformation

$$\mathcal{L}\{t^\alpha J_\alpha(t)\} = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(s^2+1)^{\alpha+\frac{1}{2}}} \qquad \left(\mathcal{R}\alpha > -\frac{1}{2}\right)$$

ausgeht und $t^\alpha J_\alpha(t)$ durch die komplexe Umkehrformel darstellt.

Die Methode ist auch bei allen *ganzen Funktionen* $F(t)$ *vom Exponentialtypus* anwendbar, da ihre LAPLACE-Transformierte im Unendlichen holomorph ist und mindestens von erster Ordnung, ihre Ableitung also mindestens von zweiter Ordnung verschwindet [16], sodass, nachdem $F(t)$ durch die hier immer anwendbare komplexe Umkerformel dargestellt ist, der Integrationsweg auf Grund derselben Uberlegung wie bei Formel (19) ohne

---

[15] Der Sinn dieser Gleichung ist:

$$\lim_{t\to\infty} t^{n+\frac{1}{2}} \left\{F_0(t) - \frac{(2i)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{it} \sum_{\nu=0}^{n} - \frac{(-2i)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-it} \sum_{\nu=0}^{n}\right\} = 0.$$

Man vergleiche damit das nach der Haarschenn Methode gewonnene Ergebnis in LT, S 277, das um eine Potenz $t^{\frac{1}{2}}$ schlechter ist, da vor der Klammer nur der Faktor t^n steht. Dagegen liefert die Abelsche Asymptotik des LAPLACE-Integrals dasselbe scharfe Ergebnis wie oben, siehe LT, S. 239-242.

[16] LT, S. 64; HB, S. 358.

weiteres auf eine Kurve vom Typus $\mathfrak{W}_{01}$ verlegt werden kann. Voraussetzung ist nur, dass die «am weitesten rechts» gelegenen Singularitäten der LAPLACE Transformierten $f(s)$ von algebraischem oder logarithmischem Charakter sind und in endlicher Anzahl auftreten.

Für die ganzen Funktionen vom Exponentialtypus kann man die asymptotische Entwicklung auch *für jede beliebige Richtung in der komplexen*

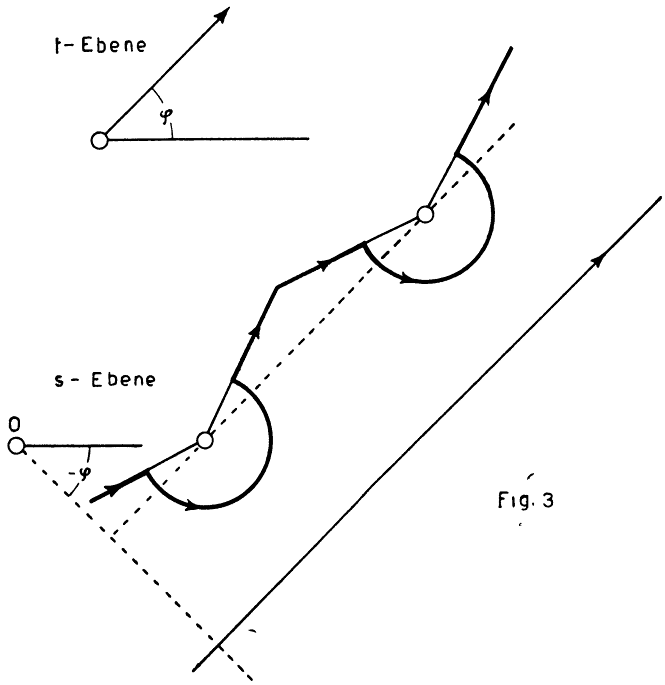

Fig. 3

t-Ebene erhalten. (Im allgemeinen Fall braucht $F(t)$ nicht analytisch und nur für reelle t definiert zu sein). Bei ihnen kann man nämlich, nachdem man zunächst die LAPLACE-Transformation mit reellem Integrationsweg angeschrieben hat, den Integrations strahl $\operatorname{arc} t = \varphi = 0$ stetig in eine andere Richtung φ drehen, wobei sich die Konvergenzhalbebene des Integrals in der s-Ebene in entgegengesetzter Richtung dreht, bis ihre Randgerade auf der Richtung $\operatorname{arc} s = -\varphi$ senkrecht steht ([17]). Man kann dann $F(t)$ für die t mit $\operatorname{arc} t = \varphi$ durch ein Umkehrintegral der Form (2) darstellen, bei dem aber der Integrationsweg eine Gerade in dieser Konvergenzhalbebene, also eine Gerade mit der Normalenrichtung $-\varphi$ ist ([18]). Man erhält daher die

---

([17]) LT, S. 66, 75; HB, S. 362, 373.
([18]) HB, S. 375, 376.

asymptotische Darstellung von $F(t)$ für die Richtung $\operatorname{arc} t = \varphi$, indem man in der s Ebene diejenigen singulären Stellen der LAPLACE-Transformierten $f(s)$ aufsucht, die in der Richtung $-\varphi$ «am weitesten aussen» liegen, genau gesagt: die Punkte der konvexen Singularitätenhülle von $f(s)$, die auf der Stützgeraden mit der Normalenrichtung $-\varphi$ liegen. Im obigen Spezialfall der Besselfunktion ist das für $0 < \varphi < \pi$ die singuläre Stelle $s = -i$, für $0 > \varphi > -\pi$ die Stelle $s = i$; für $\varphi = \pi$ hat man wie für $\varphi = 0$ beide Stellen zu berücksichtigen. So erklärt es sich, dass für die nichtreellen Richtungen nur eine asymptotische Reihe auftritt, für die reellen Richtungen dagegen zwei.