

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

CARMELO LONGO

**Studio numerativo sopra le varietà di contatto delle superficie
in uno spazio ad n dimensioni**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 4,
n° 3-4 (1950), p. 223-230

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_3-4_223_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STUDIO NUMERATIVO SOPRA LE VARIETÀ DI CONTATTO DELLE SUPERFICIE IN UNO SPAZIO AD n DIMENSIONI

di CARMELO LONGO (Roma)

1. — *Scopo della nota.*

Nella presente Nota mi occupo delle varietà $W(k, h)$ luogo degli S_k osculatori alle curve di una superficie F passanti per un dato E_h , ossia alle curve di F aventi un contatto d'ordine h ($h \leq k$) con una di esse (e quindi tra loro). In particolare determino gli ordini delle varietà $W(6, 1)$ e $W(6, 0)$.

Il primo ad occuparsi di questo problema è stato P. DEL PEZZO⁽¹⁾, il quale ha determinato, con considerazioni sintetiche, l'ordine della varietà $W(2, 0)$ sia nel caso di una superficie, sia nel caso di una varietà V_m .

C. SEGRE⁽²⁾, con considerazioni analitiche, ha ritrovato il risultato di DEL PEZZO ed ha determinato l'ordine della $W(3, 0)$ nel caso di una superficie.

E. BOMPIANI⁽³⁾ poi determina l'ordine della $W(3, 0)$ nel caso di una varietà V_m e, sempre in tal caso, determina gli ordini delle varietà $W(4, 1)$

(1) P. DEL PEZZO, *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni* Rend. Acc. delle Scienze di Napoli 1886.

(2) C. SEGRE, *Su una classe di superficie degli iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*, Acc. Scienze di Torino, 1906-1907.

Si veda anche: *Preliminari di una teoria della varietà luoghi di spazi*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, 1910, nn. 18, 19.

(3) E. BOMPIANI, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier*, ecc. Acc. Scienze di Torino, 1912-1913. In questa Nota il BOMPIANI dà per la prima volta il concetto di *elemento d'ordine h* , o E_h di una curva, e di *spazio k -osculatore ad una V_m in suo punto secondo un E_h fissato*, cioè lo spazio contenente gli S_k osculatori alle curve della V_m passanti per il dato E_h . Questo spazio, che il BOMPIANI denota con il simbolo $S(k, h)$ è lo spazio di appartenenza della varietà $W(k, h)$. In particolare per $h = 0$ si ha lo spazio k -osculatore in un punto della V_m : per questo spazio il BOMPIANI ha introdotto il simbolo $S(k)$: quindi $S(k, 0) \equiv S(k)$. Lo spazio $S(k)$ coincide con lo spazio $(k + 1)$ -tangente di DEL PEZZO (cfr. n. 7 della Nota citata in (1)).

e $W(k, k-3)$ per $k > 3$. Inoltre il BOMPIANI, sempre nello stesso lavoro, dà il modo di procedere per la determinazione degli ordini delle varietà $W(k, h)$.

Recentemente il SEVERI⁽⁴⁾ ha fatto la presunzione che, nel caso di una superficie, l'ordine della varietà $W(k, 0)$, di dimensione $2k$, sia $\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}$, in quanto Egli presume che una sezione iperpiana della $W(k, 0)$ sia omograficamente equivalente ad una sezione iperpiana della grassmanniana delle rette di S_{k+1} .

Incoraggiato dalla precedente presunzione del SEVERI, avevo iniziato la ricerca degli ordini delle varietà $W(k, h)$ e già avevo completato la ricerca per $k=4,5$ (confermando in questi casi la previsione del SEVERI) quando il BOMPIANI mi informò che Gli risultava che già B. LEVI⁽⁵⁾ si era interessato dello stesso problema. Il LEVI, seguendo la via indicata dal BOMPIANI (ciò che del resto avevo fatto anch'io) ha risolto il problema per $k \leq 6$ ed ha determinato inoltre gli ordini delle varietà $W(2k, k-1)$, $W(2k, k-2)$ e $W(2k+1, k-1)$.

La determinazione però degli ordini delle varietà $W(6,1)$ e $W(6,0)$ è errata⁽⁶⁾.

Mentre L.S.D.⁽⁶⁾ determinano come ordini delle varietà $W(6,1)$ e $W(6,0)$ rispettivamente 12 e 124, io dimostro che gli ordini di queste varietà sono rispettivamente 10 e 132, confermando così anche in questo caso la previsione del SEVERI. Nella determinazione di questi ordini non faccio uso del teorema enunciato a pag. 23 della memoria di L. S. D.: non ho quindi bisogno, a differenza di L. S. D., di determinare molteplicità d'intersezione.

Per facilitare il lettore che voglia confrontare la memoria di L. S. D. adottata nella presente Nota, che porta lo stesso titolo della precedente memoria, gli stessi simboli e denominazioni adoperata dagli autori predetti.

2. — Notazioni e posizione del problema.

Siano

$$2.1 \quad x^i = x^i(u, v) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(4) Si veda: Problema n. 118 a pag. 64, vol. 3^o (1942) dei « Rend. di Mat e delle sue applic. » dell'Università di Roma.

(5) B. LEVI - I. A. SANTALÒ - C. DE MARIA. *Estudios numerativos sobre las variedades de contacto de las superficies en un espacio de n dimensiones*, Instituto de Mat. de la Univ. Nat del Litoral, 1946. Nel seguito indicherò questo lavoro con: L. S. D

(6) L. S. D. incorrono in inesattezze dei due tipi seguenti: 1^o) errata valutazione della molteplicità d'intersezione di due varietà in un loro punto comune; 2^o) non aver tenuto conto che l'ordine di una sezione iperpiana di una varietà coincide con l'ordine della varietà stessa.

o brevemente

$$2.1' \quad x = x(u, v)$$

le equazioni di una superficie F , e sia $P \equiv x$, corrispondente ai valori u_0 e v_0 , un suo punto regolare, ossia tale che l' $S(r)$ osculatore ⁽⁷⁾ ivi abbia dimensione massima, cioè $\frac{r(r+3)}{2}$.

Le curve di F per P si ottengono ponendo

$$2.2 \quad v = v(u)$$

ove $v(u)$ è una funzione (regolare) arbitraria, tale che $v(u_0) = v_0$.

Facciamo le seguenti posizioni:

$$2.3 \quad v_\lambda = \frac{d^\lambda v}{d u^\lambda}$$

$$2.4 \quad F_r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \frac{\partial^r x}{\partial u^{r-k} \partial v^k} v_1^k$$

$$2.5' \quad F_r^i = \sum_{k=0}^{r-i} \binom{r-i}{k} \frac{\partial^r x}{\partial u^{r-k-i} \partial v^{k+i}} v_1^k.$$

Ciò posto si ha:

$$1) \quad \frac{d x}{d u} = F_1; \quad 2) \quad \frac{d^2 x}{d u^2} = F_2 + F_1^1 v_2; \quad 3) \quad \frac{d^3 x}{d u^3} = F_3 + 3 F_2^1 v_2 + F_1^1 v_3;$$

$$4) \quad \frac{d^4 x}{d u^4} = F_4 + 6 F_3^1 v_2 + 3 F_2^2 v_2^2 + 4 F_2^1 v_3 + F_1^1 v_4;$$

(2.6)

$$5) \quad \frac{d^5 x}{d u^5} = F_5 + 10 F_4^1 v_2 + 15 F_3^2 v_2^2 + 10 (F_3^1 + F_2^2 v_2) v_3 + 5 F_2^1 v_4 + F_1^1 v_5;$$

$$6) \quad \frac{d^6 x}{d u^6} = F_6 + 15 F_5^1 v_2 + 45 F_4^2 v_2^2 + 15 F_3^3 v_2^3 + 20 (2 F_4^1 + 6 F_3^2 v_2 + F_2^2 v_3) v_3 + \\ + 15 (F_3^1 + F_2^2 v_2) v_4 + 6 F_2^1 v_5 + F_1^1 v_6.$$

⁽⁷⁾ Cfr. nota ⁽⁸⁾.

Nelle 2.4, 2.5 e quindi 2.6 le

$$2.7 \quad \frac{\partial^s x}{\partial u^{s-k} \partial v^k} \quad (s = 1, 2, \dots, r; k = 0, 1, \dots, s)$$

s'intendono calcolate nel punto P : i punti 2.7, insieme al punto P , determinano l' $S(r)$ osculatore in P alla superficie 2.1, e, quindi, per l'ipotesi ammessa essi sono linearmente indipendenti.

Ne segue che i punti 2.4 e 2.5, al variare di v_1 descrivono rispettivamente una C^r e una C^{r-1} razionali normali. Inoltre si osservi che lo spazio congiungente un punto Q di C^r con i punti di C^{r-1}, \dots, C^1 , corrispondenti allo stesso valore di v_1 cui corrisponde Q , è lo spazio S_i osculatore in Q alla C^r .

Infine due punti rispettivamente di C^r e di C^s li chiameremo corrispondenti, se essi corrispondono allo stesso valore di v_1 .

3. — Ordine della varietà $W(6,1)$.

La varietà $W(6, h)$ è il luogo dei punti 2.6 al variare di v_{h+1}, \dots, v_6 .

Poichè le 2.6 sono lineari rispetto a v_4, v_5 e v_6 è chiaro che le varietà $W(6,5)$, $W(6,4)$ e $W(6,3)$ sono spazi lineari.

In particolare la $W(6,3)$ è lo spazio lineare S_9 determinato dai punti:

$$1) \quad x; \quad 2) \quad x_u; \quad 3) \quad x_v; \quad 4) \quad F_2; \quad 5) \quad F_2^1; \quad 6) \quad F_3$$

$$3.1 \quad 7) \quad F_3^1 + F_2^2 v_2; \quad 8) \quad F_4 + 3 F_2^1 v_2; \quad 9) \quad F_5 + 10 F_4^1 v_2 + 15 F_3^2 v_2^2;$$

$$10) \quad F_6 + 15 F_5^1 v_2 + 45 F_4^2 v_2^2 + 15 F_3^3 v_2^3 + 20 (F_4^1 + 3 F_3^3 v_2) v_3 + 10 F_2^2 v_3^2.$$

La varietà $W(6,2)$ è il luogo degli $\infty^1 S_9$ precedenti al variare di v_3 (con v_1 e v_2 fissati): poichè in tal caso dei punti 3.1 i primi nove punti restano fissi ed il decimo descrive una conica, si ha che la $W(6,2)$ è un cono quadrico \bar{V}_{10}^2 .

Supponiamo ora fissato v_1 e variabili v_2 e v_3 : in tal caso il luogo dei punti 3.1 è, per definizione, la varietà $W(6,1)$.

Posto:

$$1) \quad P_2(v_2) \equiv F_5 + 10 F_4^1 v_2 + 15 F_3^2 v_2^2; \quad 2) \quad P_2^1 \equiv 10 (F_4^1 + 3 F_3^2 v_2);$$

3.2

$$3) \quad P_3(v_2) \equiv F_6 + 15 F_5^1 v_2 + 45 F_4^2 v_2^2 + 15 F_3^3 v_2^3,$$

gli ultimi due punti 3.1 si possono scrivere nel modo seguente :

$$3.3 \quad 1) P_2; \quad 2) P_3 + 2 P_2^1 v_3 + 10 F_2^2 v_3^2 \text{ (8)}.$$

La varietà $W(6,1) \equiv V_{11}^e$ è anche il luogo delle $\infty^1 W(6,2) \equiv V_{10}^2$ al variare di v_2 .

Per determinare l'ordine ρ della varietà $W(6,1)$ seghiamola con un iperpiano Σ (del suo spazio ambiente) passante per l' S_{11} congiungente i primi sei punti 3.1, i punti F_2^2, F_3^1, F_4 ed il piano della conica descritta dal punto $P_2(v_2)$. L'iperpiano Σ intersecherà V_{11}^e in una V_{10}^e che sarà spezzata nella varietà luogo dell'intersezione di Σ con una generica V_{10}^2 , al variare di v_2 , ed in un certo numero di V_{10}^2 eventualmente contenute in Σ . Poichè Σ contiene i punti F_2^2 e P_2^1 , esso sega il piano della conica descritta dal secondo punto 3.3 (al variare di v_3) nella tangente ad essa nel suo punto F_2^2 ; quindi Σ interseca una generica V_{10}^2 nell' S_9 generatore (contato due volte) corrispondente al punto F_2^2 .

Il luogo di questi S_9 , al variare della V_{10}^2 , ossia di v_2 , è il cono (quadrico) che dall' S_8 congiungente i primi sei punti 3.1 con i punti F_2^2, F_3^1, F_4 proietta i punti della conica descritta da $P_2(v_2)$, cioè dal nono punto 3.1. Questo cono, contato due volte, fa parte dell'intersezione di Σ con la V_{11}^e : per completare tale intersezione si osservi che appartengono a Σ le tre varietà V_{10}^2 corrispondenti alle tre intersezioni di Σ con la cubica descritta dal punto $P_3(v_2)$, ossia dal terzo punto 3.3. Ne segue :

$$\rho = 2 \times 2 + 3 \times 2 = 10.$$

Quindi: La varietà $W(6,1)$ luogo degli S_8 osculatori alle curve di una superficie uscenti da un suo punto ed aventi ivi una stessa tangente è una varietà V_{11}^{10} (9).

4. — Ordine della varietà $W(6,0)$.

Passiamo ora alla determinazione dell'ordine ρ della varietà $W(6,0) \equiv V_{12}^e$ descritta dai punti 3.1 al variare di v_1, v_2, v_3 .

(8) Si osservi che l'ultimo punto scritto, al variare di v_3 , descrive una conica passante per i punti P_3 ed F_2^2 e tale che le tangenti in questi punti si incontrano nel punto F_2^1 .

(9) L. S. D. (pag 49) determinano l'ordine della varietà V_9 luogo degli S_8 determinati dai primi nove punti 3.1 al variare di v_2 , e l'ordine della superficie V_2 luogo delle ∞^1 coniche descritte dal decimo punto 3.1 al variare di v_2 : per determinare quindi l'ordine della $W(6,1)$ luogo degli ∞^1 coni (quadrici) $W(6,2)$ determinati da un S_8 della prima varietà V_9 ed una conica della superficie V_2 , corrispondenti allo stesso valore di v_2 , applicano un teorema (enunciato a pag. 23) Per l'applicazione di questo teorema si deve calcolare la molteplicità d'intersezione i della V_9 e V_2 nel loro punto comune F_2^2 . L.S.D. affermano che si ha $i = 2$, ottenendo così come ordine della $W(6,1)$ 12 invece di 10 (que-

Poichè i primi tre punti 3.1 sono fissi (essi determinano il piano tangente) la V_{12}^e è un cono di vertice il piano tangente e direttrice la varietà V_9^e descritta dai rimanenti punti 3.1.

Questa V_9^e è altresì il luogo delle $\infty^1 V_8^{10}$ che si ottengono al variare di v_1 e che sono descritte dagli stessi ultimi sette punti 3.1 al variare di v_2 e v_3 .

Tale V_9^e appartiene all' S_{24} congiungente gli spazi delle C^2, C^3, \dots, C^6 descritte rispettivamente dai punti F_2, F_3, \dots, F_6 al variare di v_1 (cfr. n. 2).

Un iperpiano Σ per l' S_{17} congiungente gli spazi delle C^2, \dots, C^5 interseca la V_9^e in una V_8^e . Di questa fanno parte:

1^o) le sei V_8^{10} corrispondenti alle sei intersezioni di Σ con la C^6 ;

2^o) la varietà $V_8^{e_1}$ descritta dall'intersezione V_7^{10} di una generica V_8^{10} con Σ al variare della V_8^{10} . Si avrà quindi:

$$4.1 \quad e = 6 \times 10 + e_1.$$

La varietà V_7^{10} si compone;

I) della varietà descritta dal quarto, quinto, ..., nono punto 3.1 al variare di v_2 . Questa varietà appartiene all' S_{17} predetto e coincide con il cono (quadrico) di vertici i punti

$$1) F_2; \quad 2) F_2^1; \quad 3) F_2^2; \quad 4) F_3; \quad 5) F_3^1; \quad 6) F_4$$

e direttrice la conica descritta dal nono punto 3.1, (ossia dal primo punto 3.2).

Poichè Σ passa per l' S_{17} esso è tangente alla V_8^{10} lungo il cono precedente: questo quindi va contato doppiamente nell'intersezione di Σ con una V_8^{10} . Quindi esso porta un contributo di 4 all'ordine 10 della V_7^{10} .

II) Σ interseca la superficie V_2^6 descritta dal decimo punto 3.1 al variare di v_2 e v_3 ⁽¹⁰⁾ in una curva F^6 : quindi della V_7^{10} fa parte anche il cono che dall' S_5 congiungente il quarto, ..., nono punto 3.1 proietta la F^6 .

La varietà $V_8^{e_1}$ sarà quindi spezzata nelle varietà $V_8^{e_1}$ (contata due volte) e $V_8^{e_2}$ rispettivamente luogo delle varietà definite in I e II, al variare di v_1 ;

sto valore corrisponde a prendere $i=4$) E' doveroso osservare però che a pag. 37 nel calcolo dell'ordine della varietà $W(4,0)$, si presenta un caso del tutto simile ed ivi, giustamente, L. S. D. prendono $i=4$.

⁽¹⁰⁾ Questa V_2^6 è luogo di ∞^1 coniche: per determinarne l'ordine basta segarla con un iperpiano $\bar{\Sigma}$ per il piano dei tre punti F_2^2, F_3^2, F_4^1 ed osservare che $\bar{\Sigma}$ sega la cubica descritta dal terzo punto 3.2 in tre punti, e quindi contiene tre coniche generatrici che esauriscono l'intersezione di $\bar{\Sigma}$ con la V_2 (cfr. L. S. D. pag. 50).

e si avrà quindi:

$$4.2 \quad \varrho_1 = 2\sigma_1 + \sigma_2.$$

Determinazione dell'ordine σ_1 della $V_8^{\sigma_1}$.

Intersechiamo questa varietà con un iperpiano Σ' per lo spazio S_{11} congiungente gli spazi delle curve C^2, C^3, C^4 descritte rispettivamente dai punti F_2, F_3 e F_4 . Σ' interseca uno generico dei coni definiti in I, nell' S_6 generatore $[F_2, F_2^2, F_3, F_3^1, F_3^2, F_4]$ contato due volte.

Il luogo di questi S_6 , al variare di v_1 è la varietà luogo degli S_6 congiungenti il piano della conica C^2 con il piano osculatore in un punto P della C^3 ed il punto Q corrispondente a P , della C^4 . Questa varietà ha quindi ordine 7⁽¹¹⁾. Inoltre poichè Σ' interseca la C^5 , descritta da F_5 , in cinque punti, Σ' contiene cinque dei coni definiti in I. Si ha quindi

$$4.3 \quad \sigma_1 = 2 \times 7 + 5 \times 2 = 24 \text{ (12)}.$$

Determinazione dell'ordine σ_2 della $V_8^{\sigma_2}$.

Poichè l'iperpiano Σ contiene il piano osculatore $[F_3^3, F_4^2, F_5^1]$ alla cubica descritta dal punto $P_3(v_2)$ (ossia dal terzo punto 3.2) nel suo punto F_3^3 (corrispondente a $v_2 = \infty$),⁽¹³⁾ Σ interseca la stessa cubica in tre punti coincidenti e, di conseguenza la Γ^6 , di cui si è parlato in II, è composta della conica generatrice della V_2^6 , corrispondente a $v_2 = \infty$, contacta tre volte. Quindi il cono di cui si è fatto cenno in II, coincide con il cono quadrico $W(6,2)$ corrispondente a $v_2 = \infty$ (contato tre volte).

Tale cono si spezza nell' S_7 ⁽¹⁴⁾ (contato due volte) determinato dai punti

- 1) F_2 ; 2) F_2^1 ; 3) F_2^2 ; 4) F_3 ; 5) F_3^1 ; 6) F_3^2 ; 7) F_3^3 ; 8) F_4 .

⁽¹¹⁾ Ricordo che: date r curve razionali normali, appartenenti a spazi a due a due sghembi, di ordini rispettivamente n_1, n_2, \dots, n_r , riferite proiettivamente tra loro, l'ordine ϱ della varietà degli spazi $S_{p_1}, S_{p_2}, \dots, S_{p_r}$ osculatori a C^{n_1}, \dots, C^{n_r} in punti omologhi è dato da: $\varrho = \sum_{i=1}^r (n_i - p_i)(p_i + 1)$ (cfr. L. S. D. pag. 26)

⁽¹²⁾ L. S. D. (pag. 52, 53, 54) calcolano in due modi diversi l'ordine di questa stessa varietà, determinando per esso 26 invece di 24: sia nell'uno che nell'altro caso l'errore consiste sempre nell'errata valutazione della molteplicità d'intersezione in un punto comune a due varietà.

⁽¹³⁾ Si osservi che i punti F_4^2 ed F_5^1 sono rispettivamente i punti derivati primo e secondo di $P_3(v_2)$ per $v_2 = \infty$.

⁽¹⁴⁾ Si prenda: $F_6 \equiv A_1(1, 0, \dots, 0)$; $F_5^1 \equiv A_2$; $F_4^2 \equiv A_3$; $F_3^3 \equiv A_4$; $F_3^2 \equiv A_5$; $F_4^1 \equiv A_6$; $F_5 \equiv A_7$; $F_2^2 \equiv A_8$; $F_3^1 \equiv A_9$, $F_4 \equiv A_{10}$. Le equazioni del cono descritto dal settimo, ottavo, nono e decimo punto 3.1 al variare di v_3 (v_1 e v_2 fissati) sono, indicate con x_i le coord.

Al variare di v_1 gli S_7 precedenti riempiono il cono che dall' S_6 congiungente gli spazi di C^2 e C^3 proietta i punti della C^4 ; quindi la varietà da essi descritta è una V_8^4 .

Si ha quindi

$$4.4 \quad \sigma_2 = 3 \times 2 \times 4 = 24.$$

Dalle 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 segue:

$$\rho = 132.$$

Quindi: la varietà $W(6,0)$ luogo degli S_6 osculatori alle curve di una superficie uscenti da un suo punto (regolare) è una V_{12}^{132} ⁽¹⁵⁾.

di un punto dell' S_9 di appartenenza:

- 1) $x_4 = 15 v_2^3 x_1$; 2) $x_4 = v_2^2 x_2$; 3) $3 x_4 = v_2 x_3$;
- 4) $2 v_2^2 x_5 - 3 v_2^3 x_6 = 4 v_3 x_4$; 5) $3 v_2^3 x_6 - 30 v_2^4 x_7 = 4 v_3 x_4$
- 6) $8 x_4 (3 v_2^3 x_8 - 3 v_2^4 x_9 - 9 v_2^5 x_{10}) = (2 v_2^2 x_5 - 3 v_2^3 x_6)^2$.

Queste per $v_2 \rightarrow \infty$ hanno come limite rispettivamente:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8^2 = 0.$$

Quindi il cono tende all' S_4 $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = x_7 = 0$ contato due volte, ossia all' S_4 determinato dai punti:

$$F_3^3, F_3^2, F_2^2, F_3^1, F_4^1$$

⁽¹⁵⁾ L. S. D. determinano l'ordine della $W(6,0)$ ricorrendo anche essi alla sezione iper-piana con un iperpiano Σ per l' S_{17} delle curve C^2, \dots, C^5 ; per loro però tale sezione è esaurita dalle sei $V_{11}^6 \equiv W(6,1)$ corrispondenti alle sei intersezioni di Σ con la C^6 , e dalla varietà $V_{11}^{\sigma_1}$ (contata due volte) descritta al variare delle varietà definite in I, e non tengono affatto conto della varietà descritta dalle varietà definite in II. Poichè essi (erroneamente) determinano per ρ e σ_1 i valori 12 e 26, per l'ordine delle $W(6,0)$ trovano:

$$6 \times 12 + 2 \times 26 = 124.$$

[Pervenuto alla Redazione il 1-10-1950]