

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ROBERTO CONTI

Sul problema di Cauchy per le equazioni di tipo misto

$$y^k z_{xx} - x^k z_{yy} = 0; \text{II}$$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 4,
n° 1-2 (1950), p. 1-25

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_1-2_1_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUL PROBLEMA DI CAUCHY PER LE
EQUAZIONI DI TIPO MISTO $y^k z_{xx} - x^k z_{yy} = 0$; II (*)**

di ROBERTO CONTI (Firenze)

INTRODUZIONE

Proseguendo nello studio della soluzione di un'equazione di tipo misto della forma

$$(A) \quad y^k z_{xx} - x^k z_{yy} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

corrispondente a dati del tipo di CAUCHY assegnati su di un tratto di linea parabolica, si stabiliscono (n. 12, teorema IV) delle condizioni sufficienti affinché tale soluzione sia regolare nella regione

$$\Omega_1: 0 \leq y \leq x$$

cioè dotata di derivate z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} continue in tutto Ω_1 . A ciò si giunge attraverso un esame alquanto particolareggiato del comportamento delle z_x, z_y (n. 11) e delle z_{xx}, z_{yy} (n. 12) nei punti $0 \leq y = x$, ciò che è reso possibile dalla dimostrazione preliminare di certe identità (n. 10).

La parte conclusiva dell'intera ricerca è costituita dal teorema VII (n. 14) col quale si afferma l'esistenza, per k pari, di una soluzione $z(x, y)$ della (A) nell'intero piano x, y , soddisfacente a condizioni di CAUCHY

$$z(x, 0) = \theta(x), \quad z_y(x, 0) = \zeta(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

θ, ζ essendo due funzioni assegnate. Il risultato non sembra privo di interesse poichè stabilisce la possibilità di individuare una soluzione (ed una

(*) La prima parte di questo studio è apparsa, sotto lo stesso titolo, nel vol. 2^o, serie 3^a, (1948) di questi Annali. Dato il carattere di continuazione, oltre a mantenere tutte le notazioni e la nomenclatura ivi adottate, inizieremo la numerazione degli articoli dal n. 10 e quella delle formule dalla (55). Pertanto eventuali citazioni di articoli dal n. 1 al n. 9, o di formule dalla (1) alla (54) si intendono senz'altro riferite alla prima parte.

sola) in tutto il piano, assegnando in modo opportuno, ma del resto arbitrario, i valori della z e della derivata normale su una sola delle due rette di cui si compone la linea parabolica.

A tale conclusione si giunge valendosi oltre che del teorema IV, anche dei teoremi V e VI (n. 14) riguardanti l'esistenza e la regolarità nella regione

$$\Omega_1 + \Omega_8: \quad 0 \leq |y| \leq x$$

della soluzione relativa a dati « al contorno »

$$z(x, x) = f(x), \quad z(x, -x) = g(x); \quad 0 \leq x$$

f e g essendo assegnate.

Termina il lavoro un accenno ad altri problemi ai limiti.

10. — *Alcune identità.*

Qui di seguito scriviamo alcune identità, valide al variare di (x, y) in $\Omega'_1 - O$, le quali forniscono espressioni di integrali del tipo

$$(55) \quad \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^\alpha dt; \quad xy \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X^{\alpha-2} dt; \quad \alpha \text{ reale}$$

utili per quanto diremo nel seguito.

$$(56_1) \quad \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^{2-4e} dt = (ab)^{1/e-3} (x^{2e} + y^{2e}); \quad [ab = x^{2e} - y^{2e}]$$

$$(56_2) \quad \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^{-2e} dt = (ab)^{-1} + 2xy(ab)^{-1/e-1} \int_0^{y/x} u^{2e-2} (1 - u^{2e})^{1/e-1} du$$

$$(56_3) \quad \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^{1-2e} dt = (ab)^{-1} x$$

$$(56_4) \quad \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^{2-2e} dt = (ab)^{1/e-1}$$

$$(56_5) \quad \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X dt = x$$

$$(56_6) \quad \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^2 dt = (ab)^{1/e} + 2xy \int_0^{y/x} u^{2e-2} (1 - u^{2e})^{1/e-1} du$$

$$(57_1) \quad xy \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X^{-4e} dt = (ab)^{1/e-3} (x^{2e} + y^{2e}) \int_0^{y/x} (1 - u^{2e})^{2-1/e} (1 + u^{2e})^{-2} du$$

$$(57_2) \quad xy \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X^{-2e-2} dt = (ab)^{-1-1/e} xy$$

$$(57_2) \quad x y \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X^{-2e-1} dt = (a b)^{-1} y$$

$$(57_4) \quad x y \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X^{-2e} dt = (a b)^{1/e-1} \int_0^{y/x} (1 - u^{2e})^{-1/e} du$$

$$(57_5) \quad x y \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X^{-2} dt = \int_0^{y/x} (1 - u^{2e})^{-1/e} du$$

$$(58_1) \quad \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X_x dt = 1; \quad \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X_y dt = 0$$

$$(58_2) \quad \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X_{xx} dt = 0.$$

Le relazioni ora scritte si possono ricavare in vari modi, ad es. come segue. Si osservi che, posto $y/x = \chi$ ed essendo per la (23)

$$X = x [(1 - \chi^e)^2 + 4 \chi^e t]^{1/2e}$$

gli integrali (55) (ognuno dei quali è soluzione in $\Omega'_1 - O$ della (A)) risultano tutti delle funzioni della forma

$$(59) \quad z(x, y) = x^\alpha Z(\chi), \quad 0 \leq \chi < 1, \alpha \text{ reale.}$$

Viceversa affinché una tale funzione soddisfi in $\Omega'_1 - O$ la (A) è necessario e sufficiente che $Z(\chi)$ verifichi l'equazione differenziale ordinaria

$$(60) \quad Z''(\chi) - 2(\alpha - 1) \frac{\chi^{2e-1}}{\chi^{2e} - 1} Z'(\chi) + \alpha(\alpha - 1) \frac{\chi^{2e-2}}{\chi^{2e} - 1} Z(\chi) = 0$$

le cui soluzioni (nel campo complesso) sono evidentemente tutte funzioni olomorfe nell'interno del cerchio $|\chi| < 1$. Per ogni valore di α la soluzione $Z_1(\chi)$ della (60) corrispondente ai dati iniziali $Z(0) = 1, Z'(0) = 0$, fornisce, sostituita nella (59), la soluzione in $\Omega'_1 - O$ della (A) corrispondente ai dati $\theta(\xi) = \xi^\alpha, \zeta(\xi) = 0$ e dà quindi una rappresentazione analitica per il primo degli integrali (55). La $Z_2(\chi)$, relativa ai dati iniziali $Z(0) = 0,$

$Z'(0) = 1$, fornisce la soluzione della (A) relativa ai dati $\theta(\xi) = 0$, $\zeta(\xi) = \xi^{\alpha-1}$ e dà quindi un'espressione per il secondo degli integrali (55).

Sfortunatamente la determinazione di Z_1 e Z_2 non è semplice, in generale; lo è tuttavia per certi valori di α . Così se $\alpha = 0$ si ha $Z_1(\chi) = 1$, che è ovvia, mentre $Z_2(\chi)$ dà luogo alla (57₅). Se $\alpha = 1$ si ha $Z_1(\chi) = 1$ e quindi la (56₅) (e $Z_2(\chi) = \chi$, da cui la (49), già provata per altra via).

È noto inoltre che quando si conosce una soluzione \bar{Z} di un'equazione lineare del secondo ordine, come è la (60), questa si può ridurre, ponendo $Z = \bar{Z}\Theta$, ad un'equazione lineare del primo ordine in Θ . Così, se $\alpha = 2$, avendosi ovviamente $Z_2(\chi) = \chi$, si può ricavare $Z_1(\chi)$ e da essa la (56₆); se $\alpha = 2 - 2\varrho$ ricaveremo la (57₄) dalla (56₄).

Quest'ultima si ha direttamente in base ad una nota formula di EULERO⁽⁴⁾ per cui è

$$\begin{aligned} \gamma_1 \int_0^1 (t-t^2)^{-(1-\beta)} X^\alpha dt &= \gamma_1 a^{\alpha/\varrho} \int_0^1 (t-t^2)^{-(1-\beta)} \left(1 - t \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)^{\alpha/2\varrho} dt = \\ &= a^{\alpha/\varrho} F\left(-\frac{\alpha}{2\varrho}, \beta, 2\beta; \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \end{aligned}$$

ed in virtù di una altrettanto nota proprietà della funzione ipergeometrica F espressa dalla

$$F\left(2\beta, \beta, 2\beta; \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)^{-\beta}.$$

Altre identità si ottengono come segue. Moltiplicando ambo i membri della (30) per $2y$ [ambo i membri della (35) per $2x$] ed avendo presente la (23) si hanno le

$$(61) \quad X_y = \frac{1}{2y} [X - ab X^{1-2\varrho}]; \quad X_x = \frac{1}{2x} [X + ab X^{1-2\varrho}]$$

Moltiplicando ambo i membri di una di queste, ad es. della seconda, per $\gamma_1 (t-t^2)^{-(1-\beta)} \alpha X^{\alpha-1}$, con α reale qualsiasi, ed integrando da 0 ad 1

(4) cfr ad es: G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte 1^a, pag. 140, (Bologna, 1941) Va rilevato, per la precisione, che nel modo suddetto la (56₄) resta provata sotto la condizione che F converga, cioè che sia $|a^2 - b^2| < a^2$ o infine, che sia, in $\Omega'_1, y < (3 - 2\sqrt{2})^{1/\varrho}$, tuttavia la validità della (56₄) si estende ad $\Omega'_1 - 0$ in virtù del teorema di unicità relativo al problema di CAUCHY nella regione iperbolica.

rispetto a t , si ottiene la

$$(62) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^\alpha d t \right] = \frac{\alpha}{2x} \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^\alpha d t + \\ + \frac{\alpha}{2} \frac{a b}{x} \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^{\alpha-2e} d t$$

che è di notevole utilità in quanto permette di dedurre uno dei due integrali che compaiono nel secondo membro dalla conoscenza dell'altro. In particolare se $\alpha = 1$, dalla (56₅) si ha la (56₃); se $\alpha = 2 - 2e$ dalla (56₄) segue la (56₁).

Aver dimostrato la (56₃) equivale a conoscere la soluzione Z_1 della (60) per $\alpha = 1 - 2e$ ed allora si ricava nel modo detto la Z_2 e quindi la (57₃); analogamente dalla (56₁) segue la (57₁).

Proveremo infine la (57₂) [e con essa la (56₂)] ricorrendo ad una relazione analoga alla (62). Scritta la seconda delle (61) nella forma

$$x y (\alpha - 2) x^{\alpha-3} X_x + y X^{\alpha-2} = \frac{\alpha}{2} \frac{1}{x} x y X^{\alpha-2} + \frac{\alpha-2}{2} \frac{a b}{x} x y X^{\alpha-2-2e}, \alpha \text{ reale,}$$

si moltiplichino ambo i membri per $\gamma_2 (t - t^2)^{-\beta}$ e si integrino rispetto a t da 0 ad 1. Avremo allora la

$$(62') \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[x y \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X^{\alpha-2} d t \right] = \frac{\alpha}{2x} x y \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X^{\alpha-2} d t + \\ + \frac{\alpha-2}{2} \frac{a b}{x} x y \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X^{\alpha-2-2e} d t$$

che, come la (62), potrebbe essere utilmente applicata per ottenere espressioni degli integrali (55) anche per valori di α diversi da quelli qui considerati. Per i nostri scopi basta osservare che facendo $\alpha = 0$ dalla (57₅) si ha la (57₂); la (56₂) ne segue nel solito modo.

Le (58₁) e (58₂) sono poi una conseguenza evidente della (56₅) e dei teoremi di derivazione sotto il segno di integrale espressi dalle (37), (33) e (42).

Infine è opportuno mettere in evidenza anche le identità

$$(63') \quad x y \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} [X^{-1} + a b X^{-2\varrho-1}] dt = 2 y$$

$$(63'') \quad x y \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} [X^{-1} - a b X^{-2\varrho-1}] dt = 0$$

(conseguenze entrambe della (49) unita alla (57₃)) e le identità

$$(64) \quad X_x^2 = \frac{1}{4 x^2} [X^2 + 2 a b X^{2-2\varrho} + (a b)^2 X^{2-4\varrho}]$$

$$(65) \quad X_{xx} = \frac{1}{4 x^2} [-X + 2 \varrho (x^{2\varrho} + y^{2\varrho}) X^{1-2\varrho} - (2 \varrho - 1) (a b)^2 X^{1-4\varrho}]$$

che si deducono subito dalla seconda delle (61).

11. — *Regolarità della soluzione: le derivate prime.*

Sia dapprima $\zeta \equiv 0$. Anzitutto, avendosi $z_x(\theta; x, 0) = \theta'(x)$ per $x > 0$, è necessario supporre che esista finito il limite

$$\theta'_0 = \lim_{\xi \rightarrow +0} \theta'(\xi)$$

Mostriamo che ciò basta perchè in O esista finito il limite delle $z_x(\theta; x, y)$ e $z_y(\theta; x, y)$. Intanto dalla prima delle (58₁), essendo $\lambda_x > 0$, $a^{1/e} \leq X \leq b^{1/e}$, segue

$$\begin{aligned} |z_x(\theta; x, y) - \theta'_0| &= \gamma_1 \left| \int_0^1 (t - t^2)^{-1-\beta} [\theta'(X) - \theta'_0] X_x dt \right| \leq \\ &\leq \max_{a^{1/e}, b^{1/e}} |\theta'(\xi) - \theta'_0| \end{aligned}$$

dove $\max_{a^{1/e}, b^{1/e}} f(\xi)$ sta ad indicare, anche nel seguito, il massimo assoluto della funzione continua $f(\xi)$ nell'intervallo $a^{1/e} \leq \xi \leq b^{1/e}$.

Avendosi poi, dalle (30) e (35)

$$|X_y| = y^{e-1} |2 t x^e - a| X^{1-2\varrho} \leq y^{e-1} (2 t y^e + a) X^{1-2\varrho} = (y|x)^{e-1} X_x$$

segue, per le (58₁)

$$\begin{aligned} |z_y(\theta; x, y)| &= \gamma_1 \left| \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} [\theta'(X) - \theta'_0] X_y dt \right| \leq \\ &\leq \max_{a^{1/e}, b^{1/e}} |\theta'(\xi) - \theta'_0| \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} |X_y| dt \leq \max_{a^{1/e}, b^{1/e}} |\theta'(\xi) - \theta'_0| (y|x)^{e-1} \end{aligned}$$

Sia ora \bar{x} un qualunque numero positivo e cerchiamo il limite delle derivate $z_x(\theta; x, y)$, $z_y(\theta; x, y)$ nel punto (\bar{x}, \bar{x}) supponendo che esista

$$(66) \quad \theta''_0 = \lim_{\xi \rightarrow +0} \theta''(\xi)$$

(o, più in generale, che il rapporto incrementale $[\theta'(\xi) - \theta'_0]/\xi$ resti limitato in ogni intorno dello zero).

Poichè in virtù della prima delle (61) e della (56₃), ponendo per brevità $\bar{X} = X(\bar{x}, \bar{x}, t)$ e, conformemente alle posizioni fatte nel n. 6

$$\begin{aligned} I_1(\theta; \bar{x}, \bar{x}) &= \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \theta'(\bar{X}) X_y(\bar{x}, \bar{x}, t) dt = \\ &= \frac{\gamma_1}{2\bar{x}} \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \theta'(\bar{X}) \bar{X} dt \end{aligned}$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} z_y(\theta; x, y) - \left[I_1(\theta; \bar{x}, \bar{x}) - \frac{\theta'_0}{2} \right] &= \frac{\gamma_1}{2} \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \left[\frac{\theta'(X)X}{y} - \frac{\theta'(\bar{X})\bar{X}}{x} \right] dt - \\ &- \frac{ab}{y} \frac{\gamma_1}{2} \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \frac{\theta'(X) - \theta'_0}{X} X^{2-2e} dt - \frac{\theta'_0}{2} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \bar{x} \end{aligned}$$

se si ha presente la (56₄) si conclude che $I_1(\theta; \bar{x}, \bar{x}) - \theta'_0/2$ è il limite in (\bar{x}, \bar{x}) di $z_y(\theta; x, y)$. In modo analogo, mediante la seconda delle (61) e la (56₃) si trova che il limite in (\bar{x}, \bar{x}) di $z_x(\theta; x, y)$ è $I_2(\theta; \bar{x}, \bar{x}) + \theta'_0/2$, 0, ciò che è lo stesso, $I_1(\theta; \bar{x}, \bar{x}) + \theta'_0/2$.

Sia ora $\theta = 0$. Avendosi $z_y(\zeta; x, 0) = \zeta(x)$, $x > 0$, è necessario che esista

$$(67) \quad \zeta_0 = \lim_{\xi \rightarrow +0} \zeta(\xi)$$

Per la prima delle (61) ed avendo presente la (63') si ha

$$z_y(\zeta; x, y) - \zeta_0 = \frac{x}{2} \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} [\zeta(X) - \zeta_0] [X^{-1} + a b X^{-2e-1}] dt - \\ - \frac{x}{2} \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X \zeta'(X) [X^{-1} - a b X^{-2e-1}] dt.$$

e quindi per le (49) e (57₃)

$$(68') \quad |z_y(\zeta; x, y) - \zeta_0| \leq \max_{a^{1/e}, b^{1/e}} |\zeta(\xi) - \zeta_0| + \max_{a^{1/e}, b^{1/e}} \xi |\zeta'(\xi)|$$

Analogamente per la seconda delle (61) e per la (63'') si può scrivere

$$z_x(\zeta; x, y) = \frac{y}{2} \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} [\zeta(X) - \zeta_0] [X^{-1} - a b X^{-2e-1}] dt + \\ + \frac{y}{2} \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} X \zeta'(X) [X^{-1} + a b X^{-2e-1}] dt$$

e quindi, ancora per le (49) e (57₃)

$$(68'') \quad |z_x(\zeta; x, y)| \leq \frac{y}{x} \left[\max_{a^{1/e}, b^{1/e}} |\zeta(\xi) - \zeta_0| + \max_{a^{1/e}, b^{1/e}} \xi |\zeta'(\xi)| \right]$$

Si noti ora che, ammessa la (67), la quantità $\xi \zeta'(\xi)$ non ha limite per $\xi \rightarrow +0$ oppure tale limite è nullo ⁽²⁾.

$$(67') \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} \xi \zeta'(\xi) = 0$$

⁽²⁾ cfr. ad es.: U. DINI, *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*. (Pisa, 1878), pag. 79.

Se si verifica questa eventualità le (68') e (68'') mostrano che $z_y(\zeta; x, y)$ e $z_x(\zeta; x, y)$ hanno in O limite eguale a ζ_0 ed a zero rispettivamente.

Cerchiamo ora i limiti in (\bar{x}, \bar{x}) con $\bar{x} > 0$. Per la (64) ponendo, conformemente al n. 7:

$$J_1(\zeta; \bar{x}, \bar{x}) = \frac{z(\zeta; \bar{x}, \bar{x})}{2\bar{x}} + \frac{\bar{x}}{2} \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \zeta'(X) dt$$

si ha

$$(69) \quad z_y(\zeta; x, y) - \left[J_1(\zeta; \bar{x}, \bar{x}) + \frac{\zeta_0}{2} \right] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{z(\zeta; x, y)}{y} - \frac{z(\zeta; \bar{x}, \bar{x})}{\bar{x}} + \right. \\ \left. + \frac{ab}{y} xy \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \left[\frac{\zeta(X) - \zeta_0}{X} - \zeta'(X) \right] X^{-2e} dt + \right. \\ \left. + \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} [x \zeta'(X) - \bar{x} \zeta'(\bar{X})] dt \right\}$$

essendo, al solito, $\bar{X} = X(\bar{x}, \bar{x}, t)$. Ora la $(z(\zeta; x, y))$ e quindi la $z(\zeta; x, y)/y$ è continua in (\bar{x}, \bar{x}) , come si è visto nel n. 7 in ipotesi anche più generali di quelle ammesse qui; per rendere minori di una quantità prefissata gli altri due termini della somma ora scritta è sufficiente supporre che esista

$$(70) \quad \zeta'_0 = \lim_{\xi \rightarrow +0} \zeta'(\xi)$$

In tal modo infatti la quantità in [] nel primo dei due integrali della (69) resta inferiore in valore assoluto ad un certo numero ed interviene allora la (57₄); inoltre $x \zeta'(X)$ risulta uniformemente continua in ogni sottinsieme chiuso di C ed anche il secondo integrale della (69) può rendersi piccolo ad arbitrio. Dunque, se vale la (70), $J_1(\zeta; \bar{x}, \bar{x}) + \zeta_0/2$ è il limite di $z_y(\zeta; x, y)$ in (\bar{x}, \bar{x}) ; analogamente si vede che $J_2(\zeta; x, \bar{x}) - \zeta_0/2 = J_1(\zeta; \bar{x}, \bar{x}) - \zeta_0/2$ è il limite di $z_x(\zeta; x, y)$.

Riassumendo: *nelle ipotesi del teorema III affinché le derivate prime della soluzione in Ω_1 del problema di CAUCHY (28) ammettano limite finito in tutti i punti (a distanza finita) della frontiera di Ω_1 è sufficiente che esistano finiti θ_0'' (e quindi θ_0') e ζ'_0 .*

Si osservi che se $z_x(\bar{x}, \bar{x})$ e $z_y(\bar{x}, \bar{x})$ indicano i limiti di z_x e z_y nel punto (\bar{x}, \bar{x}) sussiste la relazione

$$(71) \quad z_x(\bar{x}, \bar{x}) - z_y(\bar{x}, \bar{x}) = \theta_0' - \zeta_0$$

per ogni $\bar{x} \geq 0$.

12. — *Regolarità della soluzione: conclusione.*

Studiamo ora il comportamento delle derivate seconde nei punti $0 \leq y = x$ e sia dapprima $\zeta = 0$. La $z_{xx}(\theta; x, y)$ può scriversi, per la prima delle (42), la (64) e la (65), nella forma

$$z_{xx}(\theta; x, y) = \frac{\gamma_1}{4x^2} \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \theta''(X) [X^2 + 2abX^{2-2e} + (ab)^2 X^{2-4e}] dt -$$

$$- \frac{\gamma_1}{4x^2} \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \frac{\theta'(X) - \theta'_0}{X} [X^2 - 2e(x^{2e} + y^{2e})X^{2-2e} + (2e-1)(ab)^2 X^{2-4e}] dt$$

e da questa segue

$$|z_{xx}(\theta; x, y)| \leq \max_{a^{1/e}, b^{1/e}} |\theta''(\xi)| \frac{1}{2x^2} \left\{ \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^2 dt + \right.$$

$$\left. + [ab + e(x^{2e} + y^{2e})] \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^{2-2e} dt + e(ab)^2 \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} X^{2-4e} dt \right\}.$$

Perciò se $\theta''_0 = 0$, dalle (56₆), (56₄) e (56₁) segue che $z_{xx}(\theta; x, y)$ ha limite zero in O (variando (x, y) in $\Omega'_1 - O$) e lo stesso sarà della $z_{yy}(\theta; x, y) = (yx)^k z_{xx}(\theta; x, y)$.

Più in particolare supponiamo che esista un $L_1 > 0$ tale che in un intorno destro dello zero sia

$$(72)_* \quad |\theta''(\xi)| \xi^{2-2e} < L_1.$$

In tal caso, posto ancora $\bar{X} = X(\bar{x}, \bar{x}, t)$, ha senso l'integrale

$$\int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} [\theta'(\bar{X}) - \theta'_0] \bar{X}^{1-2e} dt$$

e quindi la differenza

$$z_{xx}(\theta; x, y) - \frac{1}{4x^2} \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \{\theta''(\bar{X}) \bar{X}^2 - [\theta'(\bar{X}) - \theta'_0] \bar{X} +$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \varrho \bar{x}^{2\varrho} [\theta'(\bar{X}) - \theta'_0] \bar{X}^{1-2\varrho} \} dt = \\
= & \frac{\gamma_1}{4} \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \left\{ \left[\theta''(X) - \frac{\theta'(X) - \theta'_0}{X} \right] \frac{X^2}{x^2} - \left[\theta''(\bar{X}) - \frac{\theta'(\bar{X}) - \theta'_0}{\bar{X}} \right] \frac{\bar{X}^2}{x^2} \right\} dt + \\
& + \frac{\varrho \gamma_1}{2} \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \left\{ \frac{x^{2\varrho} + y^{2\varrho}}{x^2} \frac{\theta'(X) - \theta'_0}{X} X^{2-2\varrho} - \frac{2 \bar{x}^{2\varrho}}{x^2} \frac{\theta'(\bar{X}) - \theta'_0}{\bar{X}} \bar{X}^{2-2\varrho} \right\} dt + \\
& + ab \frac{\gamma_1}{4 x^2} \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \theta''(X) X^{2-2\varrho} dt + \\
& + (ab)^2 \frac{\gamma_1}{4 x^2} \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \left\{ \theta''(X) X^{2-2\varrho} - (2\varrho - 1) \frac{\theta'(X) - \theta'_0}{X} X^{2-2\varrho} \right\} X^{-2\varrho} dt
\end{aligned}$$

Considerando che le quantità in { } nel primo e secondo integrale del secondo membro rappresentano l'incremento di funzioni uniformemente continue in ogni sottinsieme chiuso di C ed avendo presente la (56₂), la differenza scritta tende a zero quando (x, y) tende ad (\bar{x}, \bar{x}) , $\bar{x} > 0$. La $z_{yy}(\theta; x, y) = (y/x)^k z_{xx}(\theta; x, y)$ tenderà necessariamente allo stesso limite della $z_{xx}(\theta; x, y)$.

Sia ora $\theta = 0$. In virtù delle (64) e (65) si ha

$$\begin{aligned}
& \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \left[2y \frac{X_x}{X^2} - 2xy \frac{X_x^2}{X^3} + xy \frac{X_{xx}}{X^2} \right] dt = \\
= & \frac{xy}{4x^2} \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} [1 + 2\varrho(x^{2\varrho} + y^{2\varrho}) X^{-2\varrho} - (2\varrho + 1)(ab)^2 X^{-4\varrho}] X^{-1} dt.
\end{aligned}$$

D'altronde il primo membro di questa uguaglianza non è altro che la derivata z_{xx} , cambiata di segno, della soluzione z corrispondente ai dati

$\theta = 0$, $\zeta = 1$ e quindi è nullo; si può dunque scrivere

$$z_{xx}(\zeta; x, y) = \frac{xy}{4x^2} \gamma_2 \int_0^1 (t-t^2)^{-\beta} [1 + 2abX^{-2e} + (ab)^2 X^{-4e}] X \zeta''(X) dt +$$

$$+ \frac{xy}{4x^2} \gamma_2 \int_0^1 (t-t^2)^{-\beta} [1 + 2\varrho(x^{2e} + y^{2e}) X^{-2e} -$$

$$- (2\varrho + 1)(ab)^2 X^{-4e}] \left[\zeta'(X) - \frac{\zeta(X) - \zeta_0}{X} \right] dt.$$

Se esiste (finito e quindi (3)) nullo il limite per $\xi \rightarrow +0$ di $\xi \zeta''(\xi)$ (e quindi quello di $\zeta'(\xi) - \frac{\zeta(\xi) - \zeta_0}{\xi}$) segue dalle (57₄) e (57₁) che $z_{xx}(\zeta; x, y)$ tende a zero in O e lo stesso sarà di $z_{yy}(\zeta; x, y)$.

Precisiamo infine la condizione ora posta supponendo che esista un $L_2 > 0$ tale che in un intorno destro dello zero sia

$$(73) \quad |\zeta''(\xi)| \xi^{3-2e} < L_2$$

e, col solito significato di \bar{X} , consideriamo la differenza

$$(74) \quad z_{xx}(\zeta; xy) - \frac{\gamma_2}{4} \int_0^1 (t-t^2)^{-\beta} \left\{ \bar{X} \zeta''(\bar{X}) + [1 + 4\varrho \bar{x}^{2e} \bar{X}^{-2e}] \left[\zeta'(\bar{X}) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\zeta(\bar{X}) - \zeta_0}{\bar{X}} \right] \right\} dt = \frac{\gamma_2}{4} \int_0^1 (t-t^2)^{-\beta} \left\{ \frac{y}{x} \left[X \zeta''(X) + \zeta'(X) - \frac{\zeta(X) - \zeta_0}{X} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\bar{X} \zeta''(\bar{X}) + \zeta'(\bar{X}) - \frac{\zeta(\bar{X}) - \zeta_0}{\bar{X}} \right] \right\} dt + \frac{\varrho \gamma_2}{2} \int_0^1 (t-t^2)^{-\beta} \left\{ \frac{y}{x} \frac{x^{2e} + y^{2e}}{X^{2e}} \left[\zeta'(X) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\zeta(X) - \zeta_0}{X} \right] X^{2-2e} - \frac{2 \bar{x}^{2e}}{\bar{X}^2} \left[\zeta'(\bar{X}) - \frac{\zeta(\bar{X}) - \zeta_0}{\bar{X}} \right] \bar{X}^{2-2e} \right\} dt +$$

$$+ \frac{ab}{2x^2} xy \gamma_2 \int_0^1 (t-t^2)^{-\beta} X^{-2} \zeta''(X) X^{3-2e} dt +$$

$$+ \frac{(ab)^2}{4x^2} xy \gamma_2 \int_0^1 (t-t^2)^{-\beta} X^{-2e-2} \left\{ \zeta''(X) X^{3-2e} - (2\varrho + 1) \left[\zeta'(X) - \frac{\zeta(X) - \zeta_0}{X} \right] X^{2-2e} \right\} dt$$

(3) Cfr. loc. cit in (2).

ed esaminiamo il comportamento dei quattro termini che formano il secondo membro di questa uguaglianza, per (x, y) tendente ad (\bar{x}, \bar{x}) , $\bar{x} > 0$. Intanto la (73) porta di conseguenza l'esistenza di un $L_3 > 0$ tale che nell'intorno di zero in cui la (73) stessa è verificata è anche

$$(73') \quad \left| \zeta'(\xi) - \frac{\zeta(\xi) - \zeta_0}{\xi} \right| \xi^{2-2\varrho} < L_3$$

e pertanto avendo presenti le (57₅) e (57₂) gli ultimi due termini della (74) risultano infinitesimi con a, b . Anche il primo termine del secondo membro della (74) tende a zero, come è evidente per l'uniforme continuità della funzione in $\{ \}$. Infine il secondo termine può scriversi

$$\begin{aligned} & \frac{\varrho \gamma_2}{2} \left[\frac{y}{x} (x^{2\varrho} + y^{2\varrho}) - 2\bar{x}^{2\varrho} \right] \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \frac{\left[\zeta'(X) - \frac{\zeta(X) - \zeta_0}{X} \right] X^{2-2\varrho}}{X^2} dt + \\ & + \varrho \gamma_2 \bar{x}^{2\varrho} \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \left\{ \frac{\left[\zeta'(X) - \frac{\zeta(X) - \zeta_0}{X} \right] X^{2-2\varrho}}{X^2} - \frac{\left[\zeta'(\bar{X}) - \frac{\zeta(\bar{X}) - \zeta_0}{\bar{X}} \right] \bar{X}^{2-2\varrho}}{\bar{X}} \right\} dt \end{aligned}$$

ed avendo presente la (73') e la (57₅) si prova, con ragionamento simile a quello fatto al n. 7 per dimostrare la continuità di $z(\zeta; x, y)$ nei punti (\bar{x}, \bar{x}) , $\bar{x} > 0$, che anche tale termine tende a zero. Di qui l'esistenza del limite in (\bar{x}, \bar{x}) di $z_{xx}(\zeta; x, y)$ e quindi anche di $z_{yy}(\zeta; x, y)$. Riunendo i risultati di questo n. e del precedente si ha il

TEOR. IV. — *Affinchè la soluzione in Ω_1 della (A) corrispondente ai dati di CAUCHY (28) sia regolare in Ω_1 è sufficiente che oltre le ipotesi del teorema III siano verificate le (72) e (73), cioè che $\theta''(\xi)$ e $\zeta''(\xi)$ siano infinitesime con ξ almeno di ordine $2\varrho - 2 = k$ e $2\varrho - 3 = k - 1$ rispettivamente.*

13. — Due osservazioni.

Oss. I^a — Poichè può sembrare a prima vista che le (72) e (73) siano condizioni troppo restrittive sarà utile notare quanto segue. Se \bar{Z} è l'integrale generale della (60) la $z = x^\alpha \bar{Z}(\chi)$ è, come si è detto prima, una soluzione in $\Omega'_0 - O$ (almeno) della (A) e precisamente quella corrispondente ai dati

$$\theta(\xi) = \bar{Z}(0) \xi^\alpha, \quad \zeta(\xi) = \bar{Z}'(0) \xi^{\alpha-1}, \quad \xi > 0.$$

Ora se $\alpha = 2\rho - 1$ tali dati soddisfano tutte le condizioni del n. 11 ed inoltre è $\theta''_0 = 0, \zeta''_0 = 0$, ma non sono soddisfatte le (72) e (73). Applicando la teoria generale delle equazioni lineari nel campo complesso⁽⁴⁾ si trova che l'integrale generale \bar{Z} della (60), in un intorno sufficientemente ristretto del punto $\chi = 1$, può mettersi nella forma

$$\bar{Z}(\chi) = A \sum_0^{\infty} a_n (\chi - 1)^n + B (\chi - 1)^{4\beta-1} \sum_0^{\infty} b_n (\chi - 1)^n$$

essendo A, B costanti arbitrarie ed a_n, b_n costanti determinate dai coefficienti della (60) mediante una formula ricorrente. L'espressione scritta mostra che il punto $\chi = 1$ è singolare per la derivata seconda \bar{Z}'' o, ciò che è lo stesso, che le derivate seconde della $z = x^{2\rho-1} \bar{Z}(\chi)$ tendono all'infinito nei punti $0 < y = x$.

Oss. II* — Le ipotesi del teorema IV bastano ad assicurare l'esistenza e la continuità in Ω_1 anche della $z_{xy}(x, y)$; calcolando il limite $z_{xy}(\bar{x}, \bar{x})$ di questa nel punto (x, x) con ragionamenti analoghi a quelli fatti per $z_{xx}(\bar{x}, \bar{x})$ ed avendo presenti le

$$(75) \quad \begin{aligned} x z_x(x, y) + y z_y(x, y) &= \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \theta'(X) X dt + \\ &+ x y \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \frac{(\zeta(X) X)'}{X} dt \\ &= \frac{x z_x(c, y) - y z_y(x, y)}{a b} = \\ &= \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \theta'(X) X^{1-2\rho} dt + x y \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \left(\frac{\zeta(X)}{X} \right)' X^{1-2\rho} dt \end{aligned}$$

e le (56₃) e (57₃) si trova la

$$(76) \quad \begin{aligned} 2 z_{xy}(\bar{x}, \bar{x}) - 2 z_{xx}(\bar{x}, \bar{x}) &= \frac{1}{x} [z_x(\bar{x}, \bar{x}) + z_y(\bar{x}, \bar{x}) - (\theta'_0 + \zeta_0)] - \\ &- 4\rho \bar{x}^{2\rho-2} \lim_{(x,y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{x})} \frac{x [z_x(x,y) - \theta'_0] - y [z_y(x,y) - \zeta_0]}{a b}. \end{aligned}$$

(4) cfr. loc. cit. in (1), cap. III, § 3;

14. — *Un problema ai limiti per k pari.*

Supposto k pari vogliamo trovare la soluzione in $\Omega_1 + \Omega_8$ della (A) che verifica le condizioni.

$$(77) \quad z(x, x) = f(x), \quad z(x, -x) = g(x); \quad x \geq 0$$

essendo $f(x)$ e $g(x)$ funzioni assegnate.

Se una tale soluzione esiste si potrà porre nella forma (C) e, in particolare, posto $z(\xi, 0) = \theta(\xi)$, $z_{\eta}(\xi, 0) = \zeta(\xi)$ sarà

$$f(x) = \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \theta((4x^{2e}t)^{1/2e}) dt + x^2 \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \frac{\zeta((4x^{2e}t)^{1/2e})}{(4x^{2e}t)^{1/2e}} dt$$

$$g(x) = \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \theta((4x^{2e}t)^{1/2e}) dt - x^2 \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \frac{\zeta((4x^{2e}t)^{1/2e})}{(4x^{2e}t)^{1/2e}} dt$$

Se introduciamo una nuova variabile non negativa λ e facciamo le posizioni

$$(78) \quad x(\lambda) = 2^{-1/e} \lambda^{1/2e}$$

$$(79) \quad \bar{f}(\lambda) = f(x(\lambda)), \quad \bar{g}(\lambda) = g(x(\lambda))$$

$$(80) \quad \bar{\theta}(\xi) = \theta(\xi^{1/2e}), \quad \bar{\zeta}(\xi) = \zeta(\xi^{1/2e})$$

con la sostituzione $\lambda t = u$ le due uguaglianze precedenti diventano

$$\bar{f}(\lambda) = \lambda^{1/e} \gamma_1 \int_0^\lambda \frac{\bar{\theta}(u)}{u^{1-\beta}} (\lambda - u)^{\beta-1} du + 2^{-2/e} \gamma_2 \int_0^\lambda \frac{\bar{\theta}(u)}{u^{1/2}} (\lambda - u)^{-\beta} du$$

$$\bar{g}(\lambda) = \lambda^{1/e} \gamma_1 \int_0^\lambda \frac{\bar{\theta}(u)}{u^{1-\beta}} (\lambda - u)^{\beta-1} du - 2^{-2/e} \gamma_2 \int_0^\lambda \frac{\bar{\zeta}(u)}{u^{1/2}} (\lambda - u)^{-\beta} du$$

e da questo, posto ancora

$$\bar{f}(\lambda) + \bar{g}(\lambda) = s(\lambda) \quad ; \quad \bar{f}(\lambda) - \bar{g}(\lambda) = d(\lambda)$$

per somma e sottrazione seguono infine le

$$(D_1) \quad \int_0^\lambda \frac{\bar{\theta}(u)}{u^{1-\beta}} (\lambda - u)^{\beta-1} du = \frac{1}{2\gamma_1} \frac{s(\lambda)}{\lambda^{1/e}}$$

$$(D_2) \quad \int_0^\lambda \frac{\bar{\zeta}(u)}{u^{1/2}} (\lambda - u)^{-\beta} du = \frac{1}{2^{1-2/e} \gamma_2} d(\lambda).$$

Seguendo un procedimento classico per la risoluzione delle equazioni integrali di ABEL VOLTERRA ⁽⁵⁾ si moltiplichino ambo i membri della (D_1) per $(\mu - \lambda)^{-\beta}$, si integrino da 0 a μ rispetto a λ e si inverta l'ordine delle integrazioni nel primo membro; posto

$$c_1 = \frac{B(\beta, \beta)}{2 B(\beta, 1 - \beta)} \quad [B \text{ euleriana}]$$

la (D_1) diventa in tal modo la

$$\int_0^\mu \frac{\bar{\theta}(u)}{u^{1-\beta}} d u = c_1 \int_0^\mu s(\lambda) \lambda^{2\beta-1} (\mu - \lambda)^{-\beta} d \lambda$$

e da questa, derivando per $0 < \mu$, si ricava la

$$(E_1) \quad \bar{\theta}(\mu) = c_1 \mu^{1-\beta} \frac{d}{d \mu} \int_0^\mu s(\lambda) \lambda^{2\beta-1} (\mu - \lambda)^{-\beta} d \lambda$$

In modo analogo dalla (D_2) segue la

$$(E_2) \quad \bar{\zeta}(\mu) = c_2 \mu^{1/2} \frac{d}{d \mu} \int_0^\mu d(\lambda) (\mu - \lambda)^{\beta-1} d \lambda$$

con

$$c_2 = \frac{B(1 - \beta, 1 - \beta)}{2^{1-2\beta} B(\beta, 1 - \beta)}.$$

La (E_1) e la (E_2) , insieme, provano evidentemente l'unicità della soluzione cercata. Affinchè tale soluzione esista effettivamente faremo in modo che la θ e la ζ verifichino le ipotesi del teorema III.

Intanto mediante la sostituzione $\lambda = \mu v$ si ha

$$\int_0^\mu s(\lambda) \lambda^{2\beta-1} (\mu - \lambda)^{-\beta} d \lambda = \mu^\beta \int_0^1 s(\mu v) v^{2\beta-1} (1 - v)^{-\beta} d v.$$

Se esistono, continue, per $x > 0$ le derivate $f'(x)$, $g'(x)$ lo stesso sarà, per $\lambda > 0$, delle $f'(\lambda)$, $g'(\lambda)$, $s'(\lambda)$, $d'(\lambda)$ e sarà possibile derivare sotto il

⁽⁵⁾ cfr. per questo e per quanto segue: L. TONELLI, *Su un problema di ABEL*, Math. Ann., Bd. 99, pp. 183-199, (1928);

segno l'ultimo integrale scritto. In tal caso la (E_1) diventa

$$\bar{\theta}(\mu) = c_1 \beta \int_0^1 s(\mu \nu) \nu^{2\beta-1} (1-\nu)^{-\beta} d\nu + c_1 \mu \int_0^1 s'(\mu \nu) \nu^{2\beta} (1-\nu)^{-\beta} d\nu$$

ovvero, essendo $\bar{\theta}(\mu) = \theta(\mu^{1/2e})$:

$$(81) \quad \theta(\mu) = c_1 \beta \int_0^1 s(\mu^{2e} \nu) \nu^{2\beta-1} (1-\nu)^{-\beta} d\nu + c_1 \mu^{2e} \int_0^1 s'(\mu^{2e} \nu) \nu^{2\beta} (1-\nu)^{-\beta} d\nu.$$

Ne segue la continuità di $\theta(\mu)$ per $\mu \geq 0$. Ciò è evidente dalla (81) stessa per $\mu > 0$; avendosi poi $c, B(2\beta, 1-\beta) = 1/2\beta, f'(0) = g(0) = s(0)/2$ è anche

$$\begin{aligned} \theta(\mu) - f(0) &= c_1 \beta \int_0^1 [s(\mu^{2e} \nu) - s(0)] \nu^{2\beta-1} (1-\nu)^{-\beta} d\nu + \\ &+ c_1 \int_0^1 s'(\mu^{2e} \nu) (\mu^{2e} \nu) \nu^{2\beta-1} (1-\nu)^{-\beta} d\nu \end{aligned}$$

e poichè le ipotesi fatte implicano che $s'(\xi)$ tenda a zero con ξ segue che $\theta(\mu)$ ha limite ($=f(0) = g(0)$) nel punto zero.

Nelle stesse ipotesi dalla $-E_2$ si ha

$$\zeta(\mu) = c_2 \beta \mu^{-1} \int_0^1 d(\mu^{2e} \nu) (1-\nu)^{\beta-1} d\nu + c_2 \mu^{2e-1} \int_0^1 d'(\mu^{2e} \nu) \nu (1-\nu)^{\beta-1} d\nu$$

dalla quale risulta la continuità di $\zeta(\mu)$ per $\mu > 0$. Integrando per parti si ha la

$$(81') \quad \zeta(\mu) = c_2 \mu^{2e-1} \int_0^1 d'(\mu^{2e} \nu) (1-\nu)^{\beta-1} d\nu$$

che si può scrivere anche

$$\zeta(\mu) = c_2 \int_0^1 d'(\mu^{2e} \nu) (\mu^{2e} \nu)^{\beta+1/2} \nu^{-\beta-1/2} (1-\nu)^{\beta-1} d\nu$$

e poichè per le (78) e (79) è $f'(x) - g'(x) = 2^{1/e+1} \varrho d'(\lambda) \lambda^{\beta+1/2}$ ne segue che se $f'(x) - g'(x)$ è limitata in ogni intorno destro dello zero, lo stesso accade di $\zeta(\mu)$.

Se $f''(x), g''(x)$ sono continue per $x > 0$, avendosi per derivazione dalle (81) e (81')

$$(82) \quad \theta'(\mu) = (3\varrho - 1)c_1 \mu^{2\varrho-1} \int_0^1 s'(\mu^{2\varrho} \nu) \nu^{2\beta} (1-\nu)^{-\beta} d\nu + \\ + 2\varrho c_1 \mu^{4\varrho-1} \int_0^1 s''(\mu^{2\varrho} \nu) \nu^{2\beta+1} (1-\nu)^{-\beta} d\nu$$

$$(82') \quad \zeta'(\mu) = (2\varrho - 1)c_2 \mu^{2\varrho-2} \int_0^1 d'(\mu^{2\varrho} \nu) (1-\nu)^{\beta-1} d\nu + \\ + 2\varrho c_2 \mu^{4\varrho-2} \int_0^1 d''(\mu^{2\varrho} \nu) \nu (1-\nu)^{\beta-1} d\nu$$

risulta che $\theta'(\mu), \zeta'(\mu)$ sono entrambe continue per $\mu > 0$. Infine se esistono continue per $x > 0$ anche le derivate $f'''(x), g'''(x)$, per derivazione dalle (82) e (82') si hanno rispettivamente le

$$(83) \quad \theta''(\mu) = (2\varrho - 1)(3\varrho - 1)c_1 \mu^{2\varrho-2} \int_0^1 s'(\mu^{2\varrho} \nu) \nu^{2\beta} (1-\nu)^{\beta} d\nu + \\ + 2\varrho(7\varrho-2)c_1 \mu^{4\varrho-2} \int_0^1 s''(\mu^{2\varrho} \nu) \nu^{2\beta+1} (1-\nu)^{-\beta} d\nu + 4\varrho^2 c_1 \mu^{6\varrho-2} \int_0^1 s'''(\mu^{2\varrho} \nu) \nu^{2\beta+2} (1-\nu)^{-\beta} d\nu$$

$$(83') \quad \zeta''(\mu) = (2\varrho - 1)(2\varrho - 2)c_2 \mu^{2\varrho-3} \int_0^1 d'(\mu^{2\varrho} \nu) (1-\nu)^{\beta-1} d\nu + \\ + 6\varrho(2\varrho-1)c_2 \mu^{4\varrho-3} \int_0^1 d''(\mu^{2\varrho} \nu) \nu (1-\nu)^{\beta-1} d\nu + 4\varrho^2 c_2 \mu^{6\varrho-3} \int_0^1 d'''(\mu^{2\varrho} \nu) \nu^2 (1-\nu)^{\beta-1} d\nu$$

e possiamo concludere col

TEOR. V. — *Supposto k pari, condizione sufficiente affinché la soluzione in $\Omega_1 + \Omega_8$ della (A) verificante le (77) esista, è che $f(x), g(x)$ siano continue per $x \geq 0$ (con $f(0) = g(0)$) e dotate di derivate terze $f'''(x), g'''(x)$ continue per $x > 0$, potendo le derivate prime (ed a maggior ragione le successive) non essere definite per $x = 0$, purchè, tuttavia, la $f'(x) - g'(x)$ risulti limitata in ogni intorno destro dello zero*

Interessa ora di stabilire sotto quali ipotesi detta soluzione risulta regolare; faremo in modo che la θ'' e la ζ'' ora scritte verifichino le condizioni (72) e (73) rispettivamente. Si osservi anzitutto che dalle (78) e (79) risulta

$$(84') \quad f''(x) + g''(x) = 2^{2/e+1} \varrho [2 \varrho s''(\lambda) \lambda^{2\beta+1} + (2 \varrho - 1) s'(\lambda) \lambda^{2\beta}]$$

$$(84'') \quad \begin{aligned} f'''(x) + g'''(x) = 2^{3/e+1} \varrho [4 \varrho^2 s'''(\lambda) \lambda^{3\beta+3/2} + 6 \varrho (2 \varrho - 1) s''(\lambda) \lambda^{3\beta+1/2} + \\ + (2 \varrho - 1) (2 \varrho - 2) s'(\lambda) \lambda^{\beta-1/2}] \end{aligned}$$

$$(84) \quad \begin{aligned} f'''(x) - g'''(x) = 2^{3/e+1} \varrho [4 \varrho^2 d'''(\lambda) \lambda^{3\beta+3/2} + 6 \varrho (2 \varrho - 1) d''(\lambda) \lambda^{3\beta+1/2} + \\ + (2 \varrho - 1) (2 \varrho - 2) d'(\lambda) \lambda^{\beta-1/2}] \end{aligned}$$

Ammettiamo l'esistenza di un $L_4 > 0$ tale da aversi in un intorno dello zero

$$(85) \quad \begin{aligned} |f''(x) + g''(x)| x^{2-2e} < L_4, |f'''(x) + g'''(x)| x^{3-2e} < L_4, \\ |f'''(x) - g'''(x)| x^{3-2e} < L_4. \end{aligned}$$

La prima condizione, per la (84') e la (78) equivale ad ammettere che in un certo intorno dello zero resti limitata la $2 \varrho s''(\lambda) \lambda + (2 \varrho - 1) s'(\lambda)$; la seconda condizione equivale, per la (84'') e la (78), a supporre limitata $4 \varrho^2 s'''(\lambda) \lambda^{\beta+3/2} + 6 \varrho (2 \varrho - 1) s''(\lambda) \lambda^{\beta+1/2} + (2 \varrho - 1) (2 \varrho - 2) s'(\lambda) \lambda^{\beta-1/2}$. Poichè la (83) può scriversi

$$\begin{aligned} \theta''(\mu) \mu^{2-2e} = c_1 \int_0^1 \{4 \varrho^2 s'''(\mu^{2e} \nu) (\mu^{2e} \nu)^{\beta+3/2} + 6 \varrho (2 \varrho - 1) s''(\mu^{2e} \nu) (\mu^{2e} \nu)^{\beta+1/2} + \\ + (2 \varrho - 1) (2 \varrho - 2) s'(\mu^{2e} \nu) (\mu^{2e} \nu)^{\beta-1/2}\} \nu^{\beta+1/2} (1 - \nu)^{-\beta} d\nu + \\ + c_1 (\varrho + 1) \int_0^1 \{2 \varrho s''(\mu^{2e} \nu) (\mu^{2e} \nu) + (2 \varrho - 1) s'(\mu^{2e} \nu)\} \nu^{2\beta} (1 - \nu)^{-\beta} d\nu \end{aligned}$$

risulta verificata la (72). Infine la terza delle (85), per la (84''') e la (78) fa sì che resti limitata la $4 \varrho^2 d'''(\lambda) \lambda^{\beta+3/2} + 6 \varrho (2 \varrho - 1) d''(\lambda) \lambda^{\beta+1/2} + (2 \varrho - 1) (2 \varrho - 2) d'(\lambda) \lambda^{\beta-1/2}$ e quindi per la (83') segue la (73). Si conclude col

TEOR. VI. — *Supposto k pari, condizione sufficiente affinché la soluzione in $\Omega_1 + \Omega_8$ della (A) verificante le (77) risulti regolare è che siano verificate le (85), ossia che $f''(x) + g''(x)$ sia infinitesima con x di ordine $2 \varrho - 2 = k$ almeno e che $f'''(x), g'''(x)$ lo siano di ordine $2 \varrho - 3 = k - 1$, almeno.*

Oss. — Si potrebbero facilmente calcolare i limiti verso cui, nelle ipotesi ammesse, tendono la $\zeta(x)$, la $\zeta'(x)$ e la $\theta'(x)$.

15. — *Il problema di CAUCHY, per k pari, con i dati su di un'intera retta parabolica.*

Sia k pari e indichiamo con $z^{(1)}(x, y)$ la soluzione regolare in $\Omega_1 + \Omega_8$ relativa ai dati $\theta(\xi), \zeta(\xi)$ assegnati per $\xi > 0$. Possiamo, per semplificare, supporre che i limiti di $\theta(\xi), \theta'(\xi), \zeta(\xi), \zeta'(\xi)$ per $\xi \rightarrow 0$ siano tutti nulli, senza con ciò alterare la sostanza, poichè se tali limiti fossero le quantità non nulle $\theta_0, \theta'_0, \zeta_0, \zeta'_0$ si potrebbe sostituire alla $z^{(1)}$ la

$$z^{(1)}(x, y) - (\zeta'_0 x y + \theta'_0 x + \zeta_0 y + \theta_0)$$

Insieme con la $z^{(1)}$ consideriamo la $z^{(2)}$ identicamente nulla in tutto

$$\Omega_4 + \Omega_5: \quad 0 \leq |y| \leq |x|, \quad x \leq 0$$

e cerchiamo se sia possibile, sotto opportune ipotesi riguardanti la θ e la ζ definire in tutto il piano una funzione $\mathfrak{z}^{(1)}(x, y)$, coincidente con $z^{(1)}$ e $z^{(2)}$ nei punti in cui queste sono definite, la quale sia una soluzione della (A) in tutto il piano: se esiste, una tale funzione, che sappiamo essere unica, dovrà considerarsi come la soluzione in tutto il piano, soddisfacente e condizioni di CAUCHY

$$\mathfrak{z}^{(1)}(x, 0) = \theta(x), \quad \mathfrak{z}_y^{(1)}(x, 0) = \xi(x); \quad -\infty < x < +\infty$$

θ e ζ essendo nulle per $x \leq 0$.

Il nostro problema sarà risolto se troveremo delle condizioni per θ e ζ tali che la soluzione $z^{(3)}$ in $\Omega_2 + \Omega_3$ ($0 \leq |x| \leq y$) soddisfacente le

$$z^{(3)}(\bar{x}, \bar{x}) = z^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}), \quad z^{(3)}(\bar{x}, -\bar{x}) = 0; \quad 0 \leq \bar{x}$$

e la soluzione $z^{(4)}$ in $\Omega_6 + \Omega_7$ ($0 \leq |x| \leq |y|, 0 \leq y$) soddisfacente le

$$z^{(4)}(-\bar{x}, \bar{x}) = z^{(1)}(-\bar{x}, \bar{x}), \quad z^{(4)}(-\bar{x}, -\bar{x}) = 0; \quad 0 \leq \bar{x}$$

risultino: a) regolari in $\Omega_2 + \Omega_3, \Omega_6 + \Omega_7$ rispettivamente; b) dotate di derivate prime e seconde che nei punti della frontiera di $\Omega_2 + \Omega_3$ e di $\Omega_6 + \Omega_7$ siano eguali alle derivate omonime di $z^{(1)}$ e di $z^{(2)}$.

Intanto prendiamo a considerare la $z^{(3)}$; per quanto si è visto al n. 14 essa risulterà regolare in $\Omega_2 + \Omega_3$ se esiste ed è continua per $\bar{x} > 0$ la derivata

$$\frac{d^3 z^{(3)}(\bar{x}, \bar{x})}{d \bar{x}^3}$$

e se si può trovare un numero $L_5 > 0$ in modo che in un opportuno intorno dello zero sia

$$(86') \quad \left| \frac{d^2 z^{(3)}(\bar{x}, \bar{x})}{d \bar{x}^2} \right| \bar{x}^{2-2e} < L_5$$

$$(86'') \quad \left| \frac{d^3 z^{(3)}(\bar{x}, \bar{x})}{d \bar{x}^3} \right| \bar{x}^{3-2e} < L_5$$

Avendosi ($\bar{X} = X(\bar{x}, \bar{x}, t) = 2^{1/e} \bar{x} t^{1/2e}$):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z^{(3)}(\bar{x}, \bar{x})}{d \bar{x}^2} &= \frac{d^2 z^{(1)}(\bar{x}, \bar{x})}{d \bar{x}^2} = \bar{x}^{2e-2} \left\{ 2^2 \gamma_1 \int_0^1 (1-t)^{-(1-\beta)} t^\beta \theta(\bar{X}) \bar{X}^{2-2e} dt + \right. \\ &\quad \left. + 2^{3-2/e} \gamma_2 \int_0^1 (1-t)^{-\beta} t^\beta \zeta'(\bar{X}) \bar{X}^{2-2e} dt + 2^{2-2/e} \gamma_2 \int_0^1 (1-t)^{-\beta} t^\beta \zeta''(\bar{X}) \bar{X}^{3-2e} dt \right\} \end{aligned}$$

e, ammessa l'esistenza di θ''' e ζ''' continue per $\bar{x} > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 z^{(3)}(\bar{x}, \bar{x})}{d \bar{x}^3} &= \frac{d^3 z^{(1)}(\bar{x}, \bar{x})}{d \bar{x}^3} = \bar{x}^{2e-3} \left\{ 2^2 \gamma_1 \int_0^1 (1-t)^{-(1-\beta)} t^\beta \theta'''(\bar{X}) \bar{X}^{3-2e} dt + \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot 2^{2-2/e} \gamma_2 \int_0^1 (1-t)^{-\beta} t^\beta \zeta''(\bar{X}) \bar{X}^{3-2e} dt + 2^{2-2/e} \gamma_2 \int_0^1 (1-t)^{-\beta} t^\beta \zeta'''(\bar{X}) \bar{X}^{4-2e} dt \right\} \end{aligned}$$

risulta evidente che le (86') e (86'') saranno soddisfatte se, in aggiunta alle (72) e (73), sufficienti perchè $z^{(1)}$ sia regolare, si può determinare un $L_6 > 0$

ed un intorno dello zero tale da aversi

$$(87) \quad \begin{aligned} & |\zeta'(\xi)| \xi^{2-2e} < L_6 \\ & |\theta'''(\xi)| \xi^{3-2e} < L_6, \quad |\zeta'''(\xi)| \xi^{4-2e} < L_6 \end{aligned}$$

Se $\zeta_0 \neq 0$ si potrà dire che per la regolarità di $z^{(3)}$ (e, come si vede in modo analogo, anche di $z^{(4)}$) è sufficiente che si abbia $\theta_0'' = \zeta_0'' = 0$ e siano verificate le (87).

Passiamo ad esaminare se $z^{(3)}$, $z^{(4)}$ abbiano i requisiti enunciati in b); anzitutto per la (71) è nel caso attuale

$$z_{xx}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) = z_{yy}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}); \quad 0 \leq \bar{x}$$

e quindi anche

$$\frac{d z^{(1)}(\bar{x}, \bar{x})}{d x} = z_x^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) + z_y^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) = 2 z_x^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) = 2 z_y^{(1)}(\bar{x}, \bar{x})$$

e poichè analoghe relazioni si hanno per la $z^{(3)}$ e d'altronde è, necessariamente,

$$\frac{d z^{(1)}(\bar{x}, \bar{x})}{d x} = \frac{d z^{(3)}(\bar{x}, \bar{x})}{d x}; \quad 0 \leq \bar{x}$$

seguono le

$$z_x^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) = z_y^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) = z_x^{(3)}(\bar{x}, \bar{x}) = z_y^{(3)}(\bar{x}, \bar{x}).$$

Uguaglianze analoghe tra le derivate prime si hanno confrontando la $z^{(1)}$ con la $z^{(4)}$ nei punti $(\bar{x}, -\bar{x})$, la $z^{(2)}$ con la $z^{(3)}$ nei punti $(-\bar{x}, \bar{x})$ e la $z^{(2)}$ con la $z^{(4)}$ nei punti $(-\bar{x}, -\bar{x})$.

Per le derivate seconde si ha intanto come già osservato, per la (A):

$$z_{xx}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) = z_{yy}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}), \quad 0 \leq \bar{x}$$

e quindi

$$\frac{d^2 z^{(1)}(\bar{x}, \bar{x})}{d x^2} = 2 z_{xy}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) + 2 z_{xx}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x})$$

Analogamente

$$\frac{d^2 z^{(3)}(\bar{x}, \bar{x})}{d x^2} = 2 z_{xy}^{(3)}(\bar{x}, \bar{x}) + 2 z_{xx}^{(3)}(\bar{x}, \bar{x})$$

e perciò, riunendo:

$$2 z_{xy}^{(3)}(\bar{x}, \bar{x}) + 2 z_{xx}^{(3)}(\bar{x}, \bar{x}) = 2 z_{xy}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) + 2 z_{xx}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}).$$

Avendosi, d'altronde, per le uguaglianze ora viste tra le derivate prime ed in virtù della (76):

$$2 z_{xy}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) - 2 z_{xx}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) = 2 z_{xy}^{(3)}(\bar{x}, \bar{x}) - 2 z_{xx}^{(3)}(\bar{x}, \bar{x})$$

sarà anche

$$z_{xx}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) = z_{xx}^{(3)}(\bar{x}, \bar{x}) = z_{yy}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) = z_{yy}^{(3)}(\bar{x}, \bar{x}); \quad z_{xy}^{(1)}(\bar{x}, \bar{x}) = z_{xy}^{(3)}(\bar{x}, \bar{x}).$$

Dunque, nelle ipotesi ammesse, la $\mathfrak{Z}^{(1)}$ esiste effettivamente. In modo analogo, supponendo $\theta(x)$ e $\zeta(x)$ identicamente nulle per $x \geq 0$ e soddisfacenti opportune ipotesi per $x < 0$, si potrà definire una seconda funzione $\mathfrak{Z}^{(2)}$: la somma $\mathfrak{Z}^{(1)} + \mathfrak{Z}^{(2)}$ rappresenterà la soluzione in tutto il piano relativa a dati θ, ζ in generale non identicamente nulli ed assegnati sull'intero asse delle x . Si conclude pertanto col

TEOR. VII. — *Se k è pari, affinché esista la soluzione della (A) in tutto il piano soddisfacente le condizioni di CAUCHY:*

$$z(x, 0) = \theta(x), \quad z_y(x, 0) = \zeta(x); \quad -\infty < x < +\infty$$

è sufficiente che: θ, ζ ammettano derivate terze continue per tutti i valori reali di x , che tali derivate terze risultino infinitesime con x almeno degli ordini $2q - 3 = k - 1$ e $2q - 4 = k - 2$ rispettivamente, e che si abbia $\theta''(0) = \zeta''(0) = 0$.

16. — *Alcuni complementi.*

I. — Anzichè su di un'intera retta parabolica, qual'è appunto l'asse delle x considerato nel n. precedente, si potrebbero assegnare i dati su di un segmento di linea parabolica che contenga O come punto interno; si può supporre ad es. $\theta(x)$ e $\zeta(x)$ assegnate per $x_0 \leq \xi \leq x_1$, con $x_0 < 0 < x_1$.

Si daranno allora due eventualità: 1) $x_0 = -x_1$; 2) $x_0 \neq -x_1$. Nella prima, sotto le ipotesi del teorema VII, la soluzione sarà definita nel dominio « caratteristico » avente per contorno la linea $ABCD$ della fig. 3. Nel secondo caso, supposto ad es. $-x_1 < x_0 < 0$, la soluzione esiste certamente sempre sotto le ipotesi del teorema VII, nel dominio avente per contorno la linea $ABGFCLHDA$ della fig. 4; tralasciamo, per brevità, di vedere se di tale soluzione si possa affermare l'esistenza, nelle ipotesi dette, addirittura nel dominio avente per contorno la linea $ABEFLIDA$ (fig. 4) come sembrerebbe probabile.

II. — Sempre supponendo k pari, si trovano facilmente in base a quanto si è visto prima le condizioni perchè esista in tutto il piano la soluzione soddisfacente le

$$z(x, x) = f(x) \quad , \quad z(x, -x) = g(x)$$

con $-\infty < x < +\infty$, oppure quelle sufficienti per l'esistenza in un opportuno dominio (eventualmente illimitato) della soluzione soddisfacente le relazioni ora scritte quando f e g siano assegnate in due certi intervalli (finiti

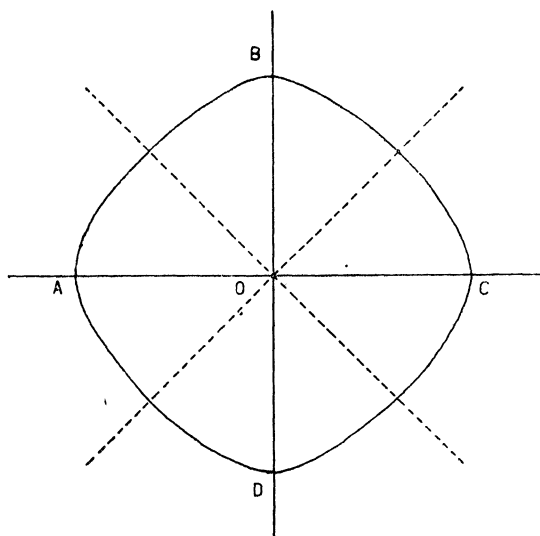


Fig. 3

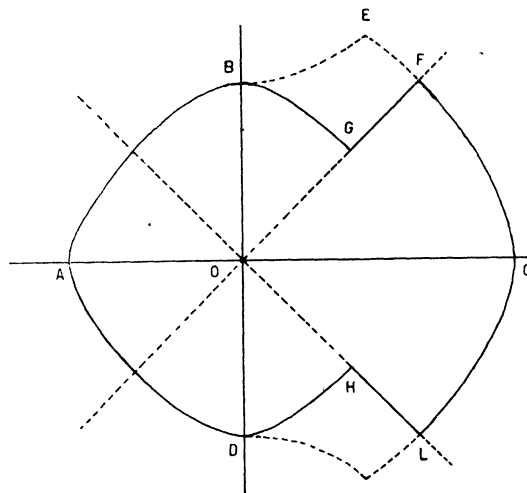


Fig. 4

entrambi, oppure uno finito e l'altro infinito) contenenti lo zero come punto interno od anche soltanto come estremo.

III. — Ci limitiamo infine a rilevare la possibilità, indipendentemente dalla parità di k , di altri problemi ai limiti che si possono porre assegnando parte dei dati su di una bisettrice degli assi e parte su di un asse; per la trattazione di tali problemi, che potranno forse interessare le applicazioni, la strada è già indicata in sostanza in quel che precede, segnatamente in questa seconda parte.

[Pervenuto alla Redazione il 20-1-1950]