

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ALDO GHIZZETTI

**Sui coefficienti di Fourier di una funzione limitata,
compresa fra limiti assegnati**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 4,
n° 1-2 (1950), p. 131-156*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_4_1-2_131_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI COEFFICIENTI DI FOURIER DI UNA FUNZIONE LIMITATA, COMPRESA FRA LIMITI ASSEGNATI (*)

di ALDO GHIZZETTI (Roma)

§ 1. - Introduzione

In questo lavoro viene risolto il problema di dare le condizioni necessarie e sufficienti affinché un'assegnata successione di numeri $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ sia la successione dei coefficienti di FOURIER di una funzione reale $f(x)$ i cui valori siano compresi fra due numeri assegnati α, β (con $\alpha < \beta$)⁽¹⁾. Nel seguito sarà supposto $\alpha = 0, \beta = 1$, caso a cui ci si può ovviamente ridurre; saranno inoltre riguardati come coefficienti di FOURIER della $f(x)$ i numeri $c_k = (a_k + i b_k)/2, (k = 0, 1, 2, \dots)$.

Cominciamo con l'esporre alcuni preliminari necessari per poter enunciare le predette condizioni necessarie e sufficienti.

Sia $f(x)$ una funzione reale, periodica di periodo 2π , sommabile in $(0, 2\pi)$. Considerati i suoi coefficienti di FOURIER

$$(1, 1) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(1) Questo problema e quello analogo per i momenti hanno già dato luogo ai seguenti lavori: ACHYÈSER e KREIN [1], [2], [3], [4], [5], [6], FRIEDMAN [1], GHIZZETTI [1], [2], [3], [4], [5], [6], VERBLUNSKY [1], [2], [3] (i numeri fra [] si riferiscono alla Bibliografia posta in fine)

In ACHYÈSER e KREIN, VERBLUNSKY sono date le condizioni necessarie e sufficienti perchè n numeri assegnati siano i primi n coefficienti di Fourier di una $f(x)$ verificante la $|f(x)| \leq L$. Tali condizioni sono poste sotto una forma simile al nostro teor. B, senza però mettere in evidenza l'uffic o delle funzioni rettangolari. Inoltre tali Autori si valgono di metodi del tutto diversi da quello qui usato. Essi si servono di precedenti risultati di analisi funzionale; invece in questo lavoro è applicato il metodo del tutto elementare usato per la prima volta in GHIZZETTI [1] (1940) (in casi particolari del problema relativo ai coefficienti di Fourier) e successivamente in GHIZZETTI [2], [3], [4] (in generale per il problema relativo ai momenti). Tale metodo fu poi ritrovato dal FRIEDMAN [1] (1941) che ha dato, con tutt'altro procedimento, un teorema simile al nostro teor. A. Per la dimostrazione della sufficienza delle condizioni trovate per tutti i coefficienti di Fourier è qui usato lo stesso metodo dato in GHIZZETTI [5].

chiameremo *funzione analitica associata alla $f(x)$* la funzione

$$(1,2) \quad F(z) = e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k}$$

che per $|z| < 1$ risulta evidentemente olomorfa e quindi dotata di uno sviluppo in serie di potenze di z , che scriveremo nel modo seguente

$$(1,3) \quad F(z) = 1 - i e^{\pi i c_0} \sum_{k=1}^{\infty} s_k z^k.$$

Aggregando ai numeri s_1, s_2, s_3, \dots , così definiti, il numero reale $s_0 = 2 \operatorname{sen} \pi c_0$, otteniamo una successione $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ i cui elementi saranno chiamati i *coefficienti esponenziali* della $f(x)$. Possiamo dire che essi sono definiti dalle

$$(1,4) \quad s_0 = 2 \operatorname{sen} \pi c_0,$$

$$(1,5) \quad e^{-2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k} = 1 - i e^{\pi i c_0} \sum_{k=1}^{\infty} s_k z^k;$$

è inoltre opportuno considerare anche dei coefficienti di FOURIER e dei coefficienti esponenziali con indice negativo, ponendo per definizione

$$(1,6) \quad c_{-k} = \bar{c}_k, \quad s_{-k} = \bar{s}_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)^{(1)}.$$

I coefficienti esponenziali s_1, s_2, s_3, \dots si possono calcolare per ricorrenza valendosi delle formule seguenti:

$$(1,7) \quad s_1 = 2\pi e^{-\pi i c_0} c_1,$$

$$s_k = 2\pi \left[e^{-\pi i c_0} c_k - i \sum_{r=1}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{k} \right) c_{k-r} s_r \right], \quad (k = 2, 3, \dots),$$

che seguono facilmente dalla (1,5) prendendo le derivate logaritmiche di ambo i membri. Viceversa, dati i coefficienti esponenziali s_0, s_1, s_2, \dots (con s_0 reale, $|s_0| \leq 2$) e fissato il valore di c_0 che si vuol assumere per soddisfare la (1,4), restano completamente determinati gli altri coefficienti di FOURIER c_1, c_2, c_3, \dots per mezzo delle

$$(1,8) \quad c_1 = \frac{1}{2\pi} e^{\pi i c_0} s_1,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} e^{\pi i c_0} \left[s_k + 2\pi i \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} s_{k-r} c_r \right], \quad (k = 2, 3, \dots).$$

(¹) Qui, e sempre nel seguito, indichiamo con \bar{z} il coniugato di un numero complesso z .

Introdotti così i coefficienti esponenziali, prendiamo ora in considerazione i seguenti determinanti

$$(1,9) \quad D_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ s_{-1} & s_0 & s_1 & \dots & s_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{-k} & s_{-k+1} & s_{-k+2} & \dots & s_0 \end{vmatrix}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(1,10) \quad F_k = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_k \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{-k+2} & s_{-k+3} & s_{-k+4} & \dots & s_1 \end{vmatrix}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

osservando che, per la (1,6), D_k è un determinante hermitiano (e quindi con valore reale) di ordine $k+1$, mentre F_k è di ordine k ed ha in generale un valore complesso. Notiamo anche che *ciascuno dei determinanti D_k, F_k è una ben determinata funzione dei primi $k+1$ coefficienti di FOURIER $c_0, c_1, c_2, \dots, c_k$ della $f(x)$.*

Introduciamo un'ultima locuzione. Dati, sull'asse x , $2n$ punti (con $n \geq 1$) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ in modo che sia

$$(1,11) \quad \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_n < \eta_n < \xi_1 + 2\pi,$$

chiameremo *funzione rettangolare di ordine n* , con gli estremi sinistri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ e con gli estremi destri $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, la funzione $\varphi(x)$ che vale 1 negli intervalli $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$, che vale 0 negli intervalli $(\eta_1, \xi_2), (\eta_2, \xi_3), \dots, (\eta_n, \xi_1 + 2\pi)$ e che fuori di $(\xi_1, \xi_1 + 2\pi)$ è definita in modo da risultare periodica di periodo 2π .

Ciò premesso, fonderemo il nostro studio sul seguente:

TEOREMA A. — *Dati $n \geq 1$ numeri c_0, c_1, \dots, c_{n-1} (c_0 reale; c_1, \dots, c_{n-1} reali o complessi), in modo che sia $0 < c_0 < 1$ (e quindi $D_0 > 0$) ed inoltre $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_{n-1} > 0$ (se $n > 1$), e prefissato ad arbitrio un numero reale λ , esiste una ed una sola funzione $\varphi(x)$, rettangolare di ordine n , la quale abbia come primi n coefficienti di FOURIER i numeri assegnati c_0, c_1, \dots, c_{n-1} ed i cui estremi sinistri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ abbiano come somma il dato numero λ .*

Dopo ciò, potremo agevolmente dimostrare il seguente altro teorema, conclusivo della nostra ricerca:

TEOREMA B. — Data una successione di numeri c_0, c_1, c_2, \dots (c_0 reale; c_1, c_2, \dots reali o complessi), condizione necessaria e sufficiente affinché essi siano i coefficienti di FOURIER di una funzione $f(x)$ verificante quasi ovunque la limitazione $0 \leq f(x) \leq 1$, è che, costruiti i corrispondenti determinanti $D_k, (k = 0, 1, 2, \dots)$, si verifichi uno di questi tre casi:

1°) sia $c_0 = 0$ oppure $c_0 = 1$ (quindi $D_0 = 0$) ed i determinanti D_1, D_2, D_3, \dots tutti nulli ⁽¹⁾;

2°) sia $0 < c_0 < 1$ (quindi $D_0 > 0$) ed esista un intero $n \geq 1$ in modo che i determinanti D_1, D_2, \dots, D_{n-1} siano positivi ed i successivi $D_n, D_{n+1}, D_{n+2}, \dots$ tutti nulli ⁽²⁾;

3°) sia $0 < c_0 < 1$ (quindi $D_0 > 0$) ed i determinanti D_1, D_2, D_3, \dots tutti positivi.

Nel 1° caso la $f(x)$ è quasi ovunque uguale a 0, oppure a 1. Nel 2° caso risulta certamente $F_n \neq 0$ e la $f(x)$ coincide quasi ovunque con quella ben determinata funzione rettangolare di ordine n che ha c_0, c_1, \dots, c_{n-1} come primi n coefficienti di FOURIER ed ha $\arg F_n$ come somma degli estremi sinistri. Nel 3° caso la $f(x)$ non può coincidere quasi ovunque con alcuna funzione rettangolare di qualsiasi ordine.

Nei due teoremi precedenti hanno un ruolo speciale gli estremi sinistri delle funzioni rettangolari. È naturalmente possibile modificare tali teoremi in modo da farvi figurare gli estremi destri; basta definire degli altri coefficienti esponenziali d_k mediante le

$$d_0 = 2 \operatorname{sen} \pi c_0,$$

$$e^{2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k} = 1 + i e^{-\pi i c_0} \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k,$$

ma ciò non introduce sostanzialmente nulla di nuovo perchè è subito visto che equivale a considerare, in luogo della $f(x)$, la funzione $1 - f(x)$.

⁽¹⁾ È facile vedere che dalle $D_0 = D_1 = D_2 = D_3 = \dots = 0$ segue $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = \dots = 0$ e quindi $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = 0$.

⁽²⁾ Dalle $D_0 > 0, D_1 > 0, \dots, D_{n-1} > 0, D_n = D_{n+1} = D_{n+2} = \dots = 0$ segue che i coefficienti $c_{n+1}, c_{n+2}, c_{n+3}, \dots$ sono univocamente determinati non appena siano dati $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n$ (in modo che valgano le $D_0 > 0, D_1 > 0, \dots, D_{n-1} > 0, D_n = 0$). Ed infatti dalle $D_{n-1} > 0, D_n = 0$ segue che esistono $n + 1$ numeri x_0, x_1, \dots, x_n tali da aversi

$$(*) \quad \sum_{k=0}^n x_k s_{k-h} = 0, (h = 0, 1, \dots, n); \quad \bar{x}_k = x_{n-k}; \quad x_0 = 0,$$

ed allora si vede facilmente che dalle $D_{n+1} = D_{n+2} = \dots = 0$ deriva che le (*) valgono per tutti i valori interi (positivi e negativi) dell'indice h . Ciò permette di ricavare per ricorrenza s_{n+1}, s_{n+2}, \dots e quindi c_{n+1}, c_{n+2}, \dots .

§ 2. - Alcuni teoremi di algebra.

In questo § diamo tre teoremi di algebra che ci saranno utili nel seguito.

I. — Data una qualsiasi successione bilatera di numeri reali o complessi

tali da aversi

$$\begin{aligned} & \dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots, \\ & s_{-k} = \overline{s_k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

allora, fatte le posizioni (1,9), (1,10), sussiste l'identità

$$(2,1) \quad D_{k-1}^2 - D_{k-2} D_k = |F_k|^2, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)^{(4)}.$$

DIM. — Per $k = 1$ la (2,1) è evidente. La dimostreremo ora per $k \geq 2$ e, per brevità, ci limiteremo a farlo nell'ipotesi che sia $D_{k-2} \neq 0$, anche perchè la (2,1) sarà applicata soltanto in casi in cui tale ipotesi è verificata. Poichè $D_{k-2} \neq 0$ restano ben determinati $k - 1$ numeri x_0, x_1, \dots, x_{k-2} tali da aversi

$$\begin{aligned} s_0 \quad x_0 + s_1 \quad x_1 + \dots + s_{k-2} x_{k-2} + s_{k-1} &= 0, \\ s_{-1} \quad x_0 + s_0 \quad x_1 + \dots + s_{k-3} x_{k-2} + s_{k-2} &= 0, \\ \dots & \\ s_{-k+2} \quad x_0 + s_{-k+3} \quad x_1 + \dots + s_0 \quad x_{k-2} + s_1 &= 0. \end{aligned}$$

È allora subito visto che, posto

$$\begin{aligned} s_1 x_0 + s_2 x_1 + \dots + s_{k-1} x_{k-2} + s_k &= \alpha, \\ s_{-k+1} x_0 + s_{-k+2} x_1 + \dots + s_{-1} x_{k-2} + s_0 &= \beta, \end{aligned}$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} D_{k-1} &= \beta D_{k-2}, \quad F_k = (-1)^{k+1} \alpha D_{k-2}, \\ D_k &= (-1)^k \alpha \overline{F_k} + \beta D_{k-1} = (-1)^k \alpha \overline{F_k} + \beta^2 D_{k-2}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} D_{k-1}^2 - D_{k-2} D_k &= \beta^2 D_{k-2}^2 - D_{k-2} [(-1)^k \alpha \overline{F_k} + \beta^2 D_{k-2}] = \\ &= (-1)^{k+1} \alpha D_{k-2} \overline{F_k} = F_k \overline{F_k} = |F_k|^2, \quad c. d. d. \end{aligned}$$

(4) Per $k = 1$ la (2,1) sussiste quando si convenga che sia $D_{-1} = 1$.

da queste e dal fatto che $D_n = 0, E_n \neq 0$ segue immediatamente che è pure verificata la

$$s_{-n} A_0 + s_{-n+1} A_1 + \dots + s_0 A_n = 0,$$

cosicchè possiamo dire che valgono le

$$(2,5) \quad \sum_{h=0}^n s_{h-k} A_h = 0, \quad (h = 0, 1, \dots, n).$$

Osserviamo in secondo luogo che dalle ipotesi (2,2) deriva che le due forme hermitiane, rispettivamente in n ed in $n + 1$ variabili,

$$(2,6) \quad H = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} s_{h-k} z_h \bar{z}_k, \quad H_1 = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n s_{h-k} z_h \bar{z}_k$$

sono la prima definita positiva, la seconda semidefinita positiva. La H_1 si annulla quando si pone $z_h = A_h$, giacchè dalle (2,5) segue

$$(2,7) \quad \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n s_{h-k} A_h \bar{A}_k = 0.$$

Ciò premesso, detta α una qualsiasi radice della nostra equazione (2,4), possiamo porre

$$A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n = (\alpha - z)(B_0 + B_1 z + \dots + B_{n-1} z^{n-1}),$$

con che risulta

$$(2,8) \quad A_h = \alpha B_h - B_{h-1}, \quad (h = 0, 1, \dots, n; B_{-1} = B_n = 0).$$

Introduciamo le seguenti quantità

$$(2,9) \quad \begin{cases} p_0 = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} s_{h-k} B_h \bar{B}_k, \\ p_1 = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} s_{h-k+1} B_h \bar{B}_k, \\ p_{-1} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} s_{h-k-1} B_h \bar{B}_k, \end{cases}$$

notando che risulta $p_0 > 0$ (essendo la H definita positiva) e $p_{-1} = \bar{p}_1$, e consideriamo quest'altra forma hermitiana in due variabili

$$K(u, v) = p_0 u \bar{u} + p_{-1} u \bar{v} + p_1 v \bar{u} + p_0 v \bar{v}.$$

Per le (2,9) è subito visto che si può anche scrivere

$$K(u, v) = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n s_{n-k} (u B_h + v B_{h-1}) (\bar{u} \bar{B}_k + \bar{v} \bar{B}_{k-1}),$$

onde, ricordando che la forma H_1 è semidefinita positiva, si deduce che

$$K(u, v) \geq 0.$$

Possiamo dunque dire che la $K(u, v)$ è definita o semidefinita positiva, ma possiamo aggiungere che si verifica certamente la seconda eventualità perchè

$$K(\alpha, -1) = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n s_{n-k} (\alpha B_h - B_{h-1}) (\bar{\alpha} \bar{B}_k - \bar{B}_{k-1}) = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n s_{n-k} A_h \bar{A}_k = 0,$$

avendo tenuto conto successivamente di (2,8) e di (2,7). Ne segue $p_0^2 - p_1 p_{-1} = 0$ ossia

$$(2,10) \quad |p_1| = p_0 > 0.$$

Ciò posto, osserviamo che dalle (2,5), (2,8) segue

$$\sum_{h=0}^n s_{n-k} (\alpha B_h - B_{h-1}) = 0 \quad , \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

ossia

$$\sum_{h=0}^{n-1} (\alpha s_{n-k} - s_{n-k+1}) B_h = 0 \quad , \quad (k = 0, 1, \dots, n-1);$$

si ha perciò

$$\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha s_{n-k} - s_{n-k+1}) B_h \bar{B}_k = 0,$$

ovvero, ricordando le (2,9), (2,10):

$$\alpha p_0 - p_1 = 0 \quad , \quad \alpha = \frac{p_1}{p_0} \quad , \quad |\alpha| = \frac{|p_1|}{p_0} = 1.$$

Resta così provato che una qualsiasi radice della (2,4) ha necessariamente modulo 1.

Dimostriamo ora (supponendo $n \geq 2$) che le radici della (2,4) sono tutte semplici. Infatti, se la radice α di cui sopra fosse multipla, si potrebbe porre

$$B_0 + B_1 z + \dots + B_{n-1} z^{n-1} = (\alpha - z)(C_0 + C_1 z + \dots + C_{n-2} z^{n-2}),$$

risultando quindi

$$(2,11) \quad B_h = \alpha C_h - C_{h-1}, \quad (h = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(2,12) \quad A_h = \alpha^2 C_h - 2\alpha C_{h-1} + C_{h-2}, \quad (h = 0, 1, \dots, n),$$

con la convenzione di ritenere che sia $C_{-2} = C_{-1} = C_{n-1} = C_n = 0$. Introducendo le quantità

$$(2,13) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0 = \sum_{h=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} s_{h-k} C_h \bar{C}_k, \\ q_1 = \sum_{h=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} s_{h-k+1} C_h \bar{C}_k, \\ q_2 = \sum_{h=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} s_{h-k+2} C_h \bar{C}_k, \end{array} \right.$$

per il numero p_1 definito dalla seconda delle (2,9) risulterebbe, in virtù delle (2,11) e del fatto che $|\alpha| = 1$:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} s_{h-k+1} (\alpha C_h - C_{h-1}) (\bar{\alpha} \bar{C}_k - \bar{C}_{k-1}) \\ &= \sum_{h=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} s_{h-k+1} C_h \bar{C}_k - \alpha \sum_{h=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} s_{h-k} C_h \bar{C}_k - \bar{\alpha} \sum_{h=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} s_{h-k+2} C_h \bar{C}_k + \\ &\quad + \sum_{h=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} s_{h-k+1} C_h \bar{C}_k = -\alpha q_0 + 2q_1 - \bar{\alpha} q_2, \end{aligned}$$

cosicchè si potrebbe concludere che

$$(2,14) \quad \alpha q_0 - 2q_1 + \bar{\alpha} q_2 \neq 0.$$

D'altra parte per le (2,5), (2,12) si avrebbe anche

$$\sum_{h=0}^n s_{h-k} (\alpha^2 C_h - 2\alpha C_{h-1} + C_{h-2}) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-2),$$

ossia

$$\sum_{h=0}^{n-2} (\alpha^2 s_{h-k} - 2\alpha s_{h-k+1} + s_{h-k+2}) C_h = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-2);$$

ne seguirebbe

$$\sum_{h=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} (\alpha^2 s_{h-k} - 2\alpha s_{h-k+1} + s_{h-k+2}) C_h \bar{C}_k = 0$$

vale a dire

$$\alpha^2 q_0 - 2 \alpha q_1 + q_2 = 0$$

la quale contraddice la (2,14). Perciò è assurdo supporre che la (2,4) abbia una radice multipla e il teorema è dimostrato.

III. — *Nelle stesse condizioni del teor. II, dette $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ le radici dell'equazione (2,3), il seguente sistema di $2n - 1$ equazioni lineari nelle n incognite $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$:*

$$(2,15) \quad \sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r^k = s_k, \quad (k = -n + 1, -n + 2, \dots, -1, 0, 1, \dots, n - 2, n - 1),$$

è compatibile ed ammette una e una sola soluzione costituita da numeri reali e positivi.

DIM. — Se delle (2,15) consideriamo soltanto quelle corrispondenti a $k = 0, 1, \dots, n - 1$ otteniamo un sistema di n equazioni lineari in n incognite avente come determinante dei coefficienti il determinante di Vandermonde delle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; esiste perciò uno ed un solo sistema di numeri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ che verifichino tali equazioni. Facciamo vedere che questi numeri soddisfano anche alle rimanenti, tenendo presente che $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono radici della (2,4) i cui coefficienti A_0, A_1, \dots, A_n verificano le (2,5).

. Dalle

$$\sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r^k = s_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1),$$

segue

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1} \sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r^k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k A_{k+1}$$

ossia

$$- \sum_{r=1}^n \mu_r A_0 \alpha_r^{-1} = - s_{-1} A_0$$

da cui, essendo $A_0 \neq 0$, la (2,15) per $k = -1$.

Dopo ciò, dalle

$$\sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r^k = s_k, \quad (k = -1, 0, 1, 2, \dots, n - 2),$$

segue

$$\sum_{k=-1}^{n-2} A_{k+2} \sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r^k = \sum_{k=-1}^{n-2} s_k A_{k+2}$$

ossia

$$- \sum_{r=1}^n \mu_r A_0 \alpha_r^{-2} = - s_{-2} A_0,$$

da cui la (2,15) per $k = -2$.

E così di seguito. Dunque il sistema (2,15) ammette una ed una sola soluzione $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$.

Dimostriamo che $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sono reali e positivi. Indichiamo con α una qualsiasi delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e con μ quella fra le $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ che le corrisponde. Poniamo, come nella dimostrazione del teor. II:

$$A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n = (\alpha - z) \psi(z)$$

con

$$\psi(z) = B_0 + B_1 z + \dots + B_{n-1} z^{n-1}, \quad \psi(\alpha) \neq 0.$$

Dalle (2,15) si ricava la

$$\sum_{h=0}^{n-1} B_h \sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r^{h-k} = \sum_{h=0}^{n-1} s_{h-k} B_h, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

che si trasforma successivamente come segue

$$\sum_{r=1}^n \mu_r \alpha_r^{-k} \sum_{h=0}^{n-1} B_h \alpha_r^h = \sum_{h=0}^{n-1} s_{h-k} B_h, \quad \mu \alpha^{-k} \psi(\alpha) = \sum_{h=0}^{n-1} s_{h-k} B_h;$$

ne deriva

$$\mu \psi(\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \overline{B_k} \alpha^{-k} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} s_{h-k} B_h \overline{B_k},$$

ovvero, dato che $\alpha^{-1} = \overline{\alpha}$ e ricordando la prima delle (2, 9),

$$\mu |\psi(\alpha)|^2 = p_0 > 0, \quad \mu = \frac{p_0}{|\psi(\alpha)|^2},$$

il che prova la tesi.

§ 3. - Proprietà delle funzioni rettangolari.

Sia $\varphi(x)$ una funzione rettangolare di ordine n , con gli estremi sinistri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ e con gli estremi destri $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ verificanti la (1,11). Indichiamo con γ_k i suoi coefficienti di FOURIER, con $\Phi(z)$ la funzione analitica associata, con σ_k i coefficienti esponenziali ed infine con A_k, Φ_k i determinanti analoghi a quelli definiti dalle (1,9), (1,10).

Si ha

$$(3,1) \quad \gamma_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=1}^n (\eta_r - \xi_r); \quad \gamma_k = \frac{1}{2\pi i k} \sum_{r=1}^n (e^{ik\eta_r} - e^{ik\xi_r}), \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

risultando

$$(3,2) \quad 0 < \gamma_0 < 1.$$

Applicando la (1.2) è ben facile riconoscere che la funzione analitica associata $\Phi(z)$ è una funzione razionale espressa dalla

$$(3,3) \quad \Phi(z) = \prod_{r=1}^n \frac{1 - z e^{i\eta_r}}{1 - z e^{i\xi_r}};$$

da ciò segue che i coefficienti esponenziali $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ sono definiti dalle

$$(3,4) \quad \sigma_0 = 2 \operatorname{sen} \pi \gamma_0; \quad \prod_{r=1}^n \frac{1 - z e^{i\eta_r}}{1 - z e^{i\xi_r}} = 1 - i e^{\pi i \gamma_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k z^k, \quad (\text{per } |z| < 1),$$

risultando

$$(3,5) \quad 0 < \sigma_0 < 2.$$

Ciò premesso, dimostriamo il seguente teorema:

I. — *Agli estremi sinistri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ della funzione rettangolare $\varphi(x)$ si possono far corrispondere, in uno ed un solo modo, n numeri reali e positivi $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ in guisa che, concentrando le masse $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ rispettivamente nei punti $e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}, \dots, e^{i\xi_n}$ della circonferenza $|z| = 1$, si ottenga un sistema di masse avente come momenti i coefficienti esponenziali della $\varphi(x)$; in modo cioè che si abbia*

$$(3,6) \quad \sum_{r=1}^n \mu_r e^{ik\xi_r} = \sigma_k, \quad (k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Dim. — Infatti, ammesso che esistano dei numeri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ per i quali valgano le (3,6), in virtù della seconda delle (3,4), essi devono necessariamente essere tali da far sussistere l'identità

$$(3,7) \quad \prod_{r=1}^n \frac{1 - z e^{i\eta_r}}{1 - z e^{i\xi_r}} = 1 - i e^{\pi i \gamma_0} \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{r=1}^n \mu_r e^{ik\xi_r}, \quad (\text{per } |z| < 1),$$

che equivale a quest'altra

$$(3,8) \quad \prod_{r=1}^n \frac{1 - z e^{i\eta_r}}{1 - z e^{i\xi_r}} = 1 - i e^{\pi i \gamma_0} \sum_{r=1}^n \mu_r \frac{z e^{i\xi_r}}{1 - z e^{i\xi_r}}, \quad (\text{per ogni } z).$$

Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima per $1 - z e^{i\xi_s}$, ($s = 1, 2, \dots, n$), e ponendo successivamente $z = e^{-i\xi_s}$, si deduce che tali numeri $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$

non possono essere che quelli forniti dalle

$$(3, 9) \quad \mu_s = -i e^{i(\pi\gamma_0 + \xi_s)} (e^{i\eta_s} - e^{i\xi_s}) \prod_{r=1}^{s-1} \frac{e^{i\xi_s} - e^{\eta_r}}{e^{i\xi_s} - e^{i\xi_r}} \prod_{r=s+1}^n \frac{e^{i\eta_r} - e^{i\xi_s}}{e^{i\xi_r} - e^{i\xi_s}},$$

$$(s = 1, 2, \dots, n);$$

viceversa con questi numeri sussiste la (3, 8), quindi la (3, 7) e di conseguenza anche la (3, 6) con $k = 1, 2, 3, \dots$.

Rimane da far vedere che i numeri (3, 9) sono reali e positivi e che con essi la (3, 6) sussiste anche per k intero negativo o nullo.

Notiamo intanto che nella (3, 9) compaiono espressioni del tipo $e^{i\beta} - e^{i\alpha}$ con $\alpha < \beta < \alpha + 2\pi$. Essendo

$$e^{i\beta} - e^{i\alpha} = 2 \operatorname{sen} \frac{\beta - \alpha}{2} \left(\cos \frac{\pi + \alpha + \beta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + \alpha + \beta}{2} \right), \quad \operatorname{sen} \frac{\beta - \alpha}{2} > 0,$$

si deduce che è $\arg(e^{i\beta} - e^{i\alpha}) = \frac{1}{2}(\pi + \alpha + \beta)$. Tenuto conto di ciò, dalla (3, 9) segue

$$\arg \mu_s = -\frac{\pi}{2} - \pi\gamma_0 - \xi_s + \frac{1}{2}(\pi + \xi_s + \eta_s) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{s-1} (\eta_r - \xi_r) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{r=s+1}^n (\eta_r - \xi_r) = -\pi\gamma_0 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n (\eta_r - \xi_r),$$

onde, ricordando la prima delle (3, 1), si conclude $\arg \mu_s = 0$, il che prova che μ_s è reale e positivo.

Dopo ciò, dalla (3, 8) passando al limite per $z \rightarrow \infty$ si ricava

$$\prod_{r=1}^n e^{i(\eta_r - \xi_r)} = 1 + i e^{\pi i \gamma_0} \sum_{r=1}^n \mu_r$$

e quindi, per la prima delle (3,1) e la prima delle (3,4)

$$\sum_{r=1}^n \mu_r = \frac{e^{2\pi i \gamma_0} - 1}{i e^{\pi i \gamma_0}} = 2 \operatorname{sen} \pi \gamma_0 = \sigma_0$$

che è la (3, 6) per $k = 0$. Infine, poichè le μ_r sono reali, la (3, 6) per $k < 0$ segue immediatamente da quella per $k > 0$ prendendo i coniugati di ambo i membri, c. d. d.

Invertiamo ora il teor. I col seguente enunciato:

II. — Sia dato, sulla circonferenza $|z| = 1$, un sistema di masse positive $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, rispettivamente concentrate nei punti $e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}, \dots, e^{i\xi_n}$,

essendo $\sum_{r=1}^n \mu_r < 2$, $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_1 + 2\pi$. Allora, fissato il numero γ_0 in modo che sia $2 \sin \pi \gamma_0 = \sum_{r=1}^n \mu_r$, $0 < \gamma_0 < 1$, esiste una ed una sola funzione rettangolare $\varphi(x)$ di ordine n che abbia gli estremi sinistri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, il valor medio γ_0 , ed i coefficienti esponenziali σ_k uguali ai momenti del dato sistema di masse:

$$(3,10) \quad \sigma_k = \sum_{r=1}^n \mu_r e^{ik\xi_r}, \quad (k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

DIM. — Infatti, se una tale $\varphi(x)$ esiste, i suoi estremi destri $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ devono essere tali da far sussistere, con le μ_r assegnate, l'identità (3,8) che qui riscriviamo cambiando z in $\frac{1}{z}$:

$$\prod_{r=1}^n \frac{z - e^{i\eta_r}}{z - e^{i\xi_r}} = 1 - i e^{\pi i \gamma_0} \sum_{r=1}^n \mu_r \frac{e^{i\xi_r}}{z - e^{i\xi_r}},$$

cosicchè i numeri $e^{i\eta_1}, e^{i\eta_2}, \dots, e^{i\eta_n}$ non possono essere altro che le radici della seguente equazione algebrica di grado n :

$$(3,11) \quad \prod_{s=1}^n (z - e^{i\xi_s}) - i e^{\pi i \gamma_0} \sum_{r=1}^n \mu_r e^{i\xi_r} \prod_{s=1}^{n(r)} (z - e^{i\xi_s}) = 0 \quad (1).$$

Proviamo che quest'equazione ha effettivamente n radici distinte, tutte di modulo 1 e tali che le loro immagini sulla circonferenza $|z| = 1$ separano gli n punti dati $e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}, \dots, e^{i\xi_n}$.

A tale scopo poniamo nella (3,11) $z = e^{i\theta}$ e poi moltiplichiamo i due membri dell'equazione stessa per

$$(-i)^n e^{-i\left(\pi\gamma_0 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \xi_s\right) - \frac{1}{2} i n \theta};$$

otteniamo così la seguente equazione nell'incognita θ

$$(3,12) \quad (-i)^n e^{-i\left(\pi\gamma_0 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \xi_s\right) - \frac{1}{2} i n \theta} \left\{ \prod_{s=1}^n (e^{i\theta} - e^{i\xi_s}) - i e^{\pi i \gamma_0} \sum_{r=1}^n \mu_r e^{i\xi_r} \prod_{s=1}^{n(r)} (e^{i\theta} - e^{i\xi_s}) \right\} = 0,$$

(1) Il simbolo $\prod_{s=1}^{n(r)}$ sta ad indicare che si deve omettere il fattore corrispondente a $s=r$.

e si tratta di dimostrare che esistono n valori reali di θ , rispettivamente interni agli intervalli $(\xi_1, \xi_2), (\xi_2, \xi_3), \dots, (\xi_n, \xi_1 + 2\pi)$, che la verificano.

Osserviamo intanto che la (3,12) si trasforma immediatamente nella

$$(3,13) \quad G(\theta) \equiv 2 e^{-i\pi\gamma_0} \prod_{s=1}^n \operatorname{sen} \frac{\theta - \xi_s}{2} - \sum_{r=1}^n \mu_r e^{-\frac{1}{2}i(\theta - \xi_r)} \prod_{s=1}^{(r)} \operatorname{sen} \frac{\theta - \xi_s}{2} = 0$$

il cui primo membro $G(\theta)$ assume valori reali quando θ è reale; si ha infatti

$$\begin{aligned} G(\theta) - \bar{G}(\theta) &= -4i \operatorname{sen} \pi \gamma_0 \prod_{s=1}^n \operatorname{sen} \frac{\theta - \xi_s}{2} + \\ &\quad + 2i \sum_{r=1}^n \mu_r \operatorname{sen} \frac{\theta - \xi_r}{2} \prod_{s=1}^{(r)} \operatorname{sen} \frac{\theta - \xi_s}{2} = \\ &= 2i \left(\sum_{r=1}^n \mu_r - 2 \operatorname{sen} \pi \gamma_0 \right) \prod_{s=1}^n \operatorname{sen} \frac{\theta - \xi_s}{2} = 0. \end{aligned}$$

Si ha inoltre $G(\theta + 2\pi) = \pm G(\theta)$ a seconda che n è pari o dispari, mentre sussistono le formule

$$\begin{aligned} G(\xi_j) &= -\mu_j \prod_{s=1}^{(j)} \operatorname{sen} \frac{\xi_j - \xi_s}{2}, \quad (j = 1, 2, \dots, n); \\ G(\xi_1 + 2\pi) &= (-1)^{n-1} \mu_1 \prod_{s=2}^n \operatorname{sen} \frac{\xi_1 - \xi_s}{2} \end{aligned}$$

dalle quali segue

$$\operatorname{sgn} G(\xi_j) = (-1)^{n-j+1}, \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad \operatorname{sgn} G(\xi_1 + 2\pi) = 1.$$

Perciò se n è pari risulta

$$G(\xi_1) > 0, \quad G(\xi_2) < 0, \quad G(\xi_3) > 0, \dots, G(\xi_n) < 0, \quad G(\xi_1 + 2\pi) > 0,$$

e se n è dispari

$$G(\xi_1) < 0, \quad G(\xi_2) > 0, \quad G(\xi_3) < 0, \dots, G(\xi_n) < 0, \quad G(\xi_1 + 2\pi) > 0,$$

onde, al variare di θ in $(\xi_1, \xi_1 + 2\pi)$, la $G(\theta)$ si annulla precisamente in n punti $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ rispettivamente situati all'interno degli intervalli $(\xi_1, \xi_2), (\xi_2, \xi_3), \dots, (\xi_n, \xi_1 + 2\pi)$.

Dunque, se esiste una funzione rettangolare $\varphi(x)$ di ordine n nelle condizioni volute, essa deve necessariamente coincidere con quella che ha gli estremi sinistri assegnati $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ e che ha gli estremi destri $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ calcolati nel modo ora detto. Rimane da verificare che questa funzione rettangolare ha effettivamente il valor medio γ_0 ed i coefficienti esponenziali dati dalla (3,10).

Poichè i numeri $e^{i\eta_1}, e^{i\eta_2}, \dots, e^{i\eta_n}$ sono radici della (3,11) il cui termine noto vale

$$\begin{aligned} & (-1)^n e^{i \sum_{s=1}^n \xi_s} - i e^{\pi i \gamma_0} \sum_{r=1}^n \mu_r e^{i \xi_r} (-1)^{n-1} e^{i \sum_{s=1}^{n(r)} \xi_s} = \\ & = (-1)^n e^{i \sum_{s=1}^n \xi_s} + (-1)^n i e^{\pi i \gamma_0} e^{i \sum_{s=1}^n \xi_s} \sum_{r=1}^n \mu_r = \\ & = (-1)^n e^{i \sum_{s=1}^n \xi_s} (1 + 2 i e^{\pi i \gamma_0} \operatorname{sen} \pi \gamma_0) = (-1)^n e^{i \left(2\pi \gamma_0 + \sum_{s=1}^n \xi_s \right)} \end{aligned}$$

il loro prodotto risulta uguale a $e^{i \left(2\pi \gamma_0 + \sum_{s=1}^n \xi_s \right)}$; si ha cioè $e^{i \sum_{s=1}^n (\eta_s - \xi_s)} = e^{2\pi i \gamma_0}$.

Tenuto conto che $0 < \sum_{s=1}^n (\eta_s - \xi_s) < 2\pi$, $0 < \gamma_0 < 1$, si deduce $\sum_{s=1}^n (\eta_s - \xi_s) = 2\pi \gamma_0$, ossia che la $\varphi(x)$ ha proprio il valor medio γ_0 .

Ne deriva $\sigma_0 = 2 \operatorname{sen} \pi \gamma_0 = \sum_{r=1}^n \mu_r$ ossia che sussiste la (3,10) per $k = 0$

Inoltre, poichè per costruzione vale l'identità (3,8), varrà pure la (3,7) che, confrontata con la seconda delle (3,4), mostra che i coefficienti esponenziali σ_k con $k > 0$ sono espressi dalla (3,10). Quest'ultima sussiste poi ovviamente anche per $k < 0$, c. d. d.

OSSERVAZIONE. — Dai teor. I, II risulta che una funzione rettangolare $\varphi(x)$ di ordine n si può individuare con due metodi diversi:

1^o) dando gli estremi sinistri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ e gli estremi destri $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ in modo che sia

$$\xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_n < \eta_n < \xi_1 + 2\pi;$$

2^o) dando gli estremi sinistri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, le masse $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, il valor medio γ_0 in modo che sia

$$(3,14) \quad \left. \begin{aligned} & \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_1 + 2\pi, \\ & \mu_r > 0, \quad \sum_{r=1}^n \mu_r < 2, \\ & 2 \operatorname{sen} \pi \gamma_0 = \sum_{r=1}^n \mu_r, \quad 0 < \gamma_0 < 1. \end{aligned} \right\}$$

La relazione fra i due metodi è la seguente: i momenti delle masse μ_1, \dots, μ_n collocate nei punti $e^{i\xi_1}, \dots, e^{i\xi_n}$ coincidono con i coefficienti esponenziali della $\varphi(x)$.

Passiamo a dimostrare quest'altro teorema:

III. — Per ogni funzione rettangolare di ordine n si ha, con le notazioni introdotte al principio di questo § 3:

$$(3,15) \quad \Delta_0 > 0, \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n = \Delta_{n+1} = \Delta_{n+2} = \dots = 0;$$

$$(3,16) \quad \Phi_n = \Delta_{n-1} e^{i \sum_{r=1}^n \xi_r}.$$

Inoltre i numeri $e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}, \dots, e^{i\xi_n}$ sono radici della seguente equazione algebrica di grado n :

$$(3,17) \quad \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^n \\ \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ \sigma_{-1} & \sigma_0 & \sigma_1 & \dots & \sigma_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{-n+1} & \sigma_{-n+2} & \sigma_{-n+3} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix} = 0.$$

DIM. — Il determinante Δ_m , ($m = 0, 1, 2, \dots$), è il discriminante della forma hermitiana

$$H = \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^m \sigma_{h-k} z_h \bar{z}_k$$

che per le (3,6) può anche scriversi

$$H = \sum_{h=0}^m \sum_{k=0}^m z_h \bar{z}_k \sum_{r=1}^n \mu_r e^{i(h-k)\xi_r} = \sum_{r=1}^n \mu_r \sum_{h=0}^m e^{ih\xi_r} z_h \sum_{k=0}^m e^{-ik\xi_r} \bar{z}_k = \sum_{r=1}^n \mu_r |H_r|^2,$$

avendo posto $H_r = \sum_{h=0}^m e^{ih\xi_r} z_h$. Si ha perciò $H \geq 0$, col segno = solo se le z_h verificano il sistema di equazioni lineari omogenee

$$(3,18) \quad \sum_{h=0}^m e^{ih\xi_r} z_h = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Si vede subito che la matrice dei coefficienti delle (3,18) ha caratteristica uguale al più piccolo fra i due numeri $n, m + 1$. Perciò se $m + 1 \leq n$ il sistema (3,18) non ha autosoluzioni, la H è definita positiva e si ha quindi $\Delta_m > 0$; se $m + 1 > n$, tale sistema ha delle autosoluzioni, la H è semidefinita positiva e quindi risulta $\Delta_m = 0$. Sono così provate le (3,15).

Si ha poi, sempre in conseguenza delle (3,6)

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{i\xi_r} & e^{2i\xi_r} & \dots & e^{ni\xi_r} \\ \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ \sigma_{-1} & \sigma_0 & \sigma_1 & \dots & \sigma_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{-n+1} & \sigma_{-n+2} & \sigma_{-n+3} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{r_1=1}^n \sum_{r_2=1}^n \dots \sum_{r_n=1}^n p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_n} e^{-i\xi_{r_2}} \dots e^{-(n-1)i\xi_{r_n}} V(e^{i\xi_r}, e^{i\xi_{r_1}}, e^{i\xi_{r_2}}, \dots, e^{i\xi_{r_n}}) = 0, \quad (1)$$

($r = 1, 2, \dots, n$)

e ciò prova che $e^{i\xi_1}, \dots, e^{i\xi_n}$ sono radici della (3,17).

Infine, per dimostrare la (3,16), basta osservare che la (3,17) si scrive

$$\Phi_n + \dots + (-1)^n A_{n-1} z^n = 0 \quad \text{onde risulta } e^{i \sum_{r=1}^n \xi_r} = \frac{\Phi_n}{A_{n-1}}, \quad \text{c. d. d. } (2)$$

§ 4. - Dimostrazione del teorema A.

Osserviamo anzitutto che, se esiste una funzione $\varphi(x)$ rettangolare di ordine n che abbia i primi n coefficienti di FOURIER $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ rispettivamente uguali ai numeri assegnati c_0, c_1, \dots, c_{n-1} e che abbia inoltre gli estremi sinistri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ con somma uguale a λ , di essa sono anche immediatamente noti i seguenti altri elementi:

1°) i coefficienti esponenziali $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ rispettivamente uguali ai numeri s_0, s_1, \dots, s_{n-1} dedotti da c_0, c_1, \dots, c_{n-1} mediante le (1,4), (1,7);

2°) i determinanti A_0, A_1, \dots, A_{n-1} rispettivamente uguali ai determinanti D_0, D_1, \dots, D_{n-1} dedotti da s_0, s_1, \dots, s_{n-1} mediante la (1,9) e che sono tutti positivi per ipotesi;

3°) il determinante Φ_n che, in virtù della (3,16), deve essere uguale a $A_{n-1} e^{i\lambda}$;

(1) Con $V(e^{i\xi_r}, e^{i\xi_{r_1}}, e^{i\xi_{r_2}}, \dots, e^{i\xi_{r_n}})$ abbiamo indicato il determinante di Vandermonde degli $n+1$ numeri $e^{i\xi_r}, e^{i\xi_{r_1}}, e^{i\xi_{r_2}}, \dots, e^{i\xi_{r_n}}$ di cui due almeno sono uguali fra loro.

(2) Che sia $|\Phi_n| = A_{n-1}$ segue anche dal fatto che per la (2,1) sussiste l'identità $A_{n-1}^2 - A_{n-2} A_n = |\Phi_n|^2$ e che si ha $A_n = 0$. Qui si è provato in più che $\arg \Phi_n = \sum_{r=1}^n \xi_r$.

4^o) il coefficiente esponenziale σ_n che si può ricavare dalla $\Phi_n = \Delta_{n-1} e^{i\lambda}$ ossia dalla

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_{n-1} & \sigma_n \\ & & & \sigma_{n-1} & \\ & & & \sigma_{n-2} & \\ \Delta_{n-2} & & & \vdots & \\ & & & \sigma_1 & \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} e^{i\lambda}$$

in quanto è $\Delta_{n-2} > 0$;

5^o) il determinante $\Delta_n \doteq \begin{vmatrix} \sigma_0 & \dots & \sigma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_n & \dots & \sigma_0 \end{vmatrix}$ che risulta uguale a zero, in conseguenza dell'identità $\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \Delta_n = |\Phi_n|^2$ e delle $|\Phi_n| = \Delta_{n-1}, \Delta_{n-2} > 0$.

Allora, per il teor. III di § 3, i numeri $e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}, \dots, e^{i\xi_n}$ devono necessariamente essere radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} 1 & z & \dots & z^n \\ \sigma_0 & \sigma_1 & \dots & \sigma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{-n+1} & \sigma_{-n+2} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix} \equiv \Phi_n + \dots + (-1)^n \Delta_{n-1} z^n = 0,$$

la quale, in virtù delle $\Delta_0 > 0, \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n = 0$ e del teor. II di § 2 ha n radici distinte, tutte di modulo 1, il cui prodotto è evidentemente uguale a $e^{i\lambda}$. Posto $\arg \alpha_r = \xi_r, (r = 1, 2, \dots, n)$, possiamo scegliere $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, in modo che sia $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \xi_1 + 2\pi, \sum_{r=1}^n \xi_r = \lambda$.

I numeri così ottenuti sono necessariamente gli estremi sinistri della $\varphi(x)$.

Le masse $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ relative alla $\varphi(x)$ stessa devono poi verificare il sistema

$$\sum_{r=1}^n \mu_r e^{ik\xi_r} = \sigma_k, (k = -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-2, n-1);$$

sappiamo (teor. III di § 2) che esso ha una e una sola soluzione $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ formata di numeri reali e positivi. Per tali numeri risulta $\sum_{r=1}^n \mu_r = \sigma_0$

cioè $\sum_{r=1}^n \mu_r = 2 \sin \pi \gamma_0$ (con $0 < \gamma_0 < 1$ per ipotesi).

Possiamo dunque concludere che della $\varphi(x)$, supposta esistente, risultano individuati tutti gli elementi prescritti dalla (3, 14), onde la $\varphi(x)$ è perfettamente determinata (vedi § 2, osservazione). Ed è immediato verificare che la $\varphi(x)$ così definita gode effettivamente delle proprietà volute.

§ 5. - Dimostrazione del teorema B.

LA CONDIZIONE È NECESSARIA. — Sia $f(x)$ una funzione verificante quasi ovunque la

$$(5,1) \quad 0 \leq f(x) \leq 1;$$

dobbiamo far vedere che per i suoi coefficienti di FOURIER c_0, c_1, c_2, \dots si verifica uno dei tre casi menzionati nell'enunciato.

Intanto se $c_0 = 0$ (oppure $c_0 = 1$) deve essere quasi ovunque $f(x) = 0$ (oppure $f(x) = 1$) e di conseguenza $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = 0$; se ne deduce $s_0 = s_1 = s_2 = \dots = 0$ e successivamente $D_0 = D_1 = D_2 = \dots = 0$.

Supponiamo ora che sia

$$(5,2) \quad 0 < c_0 < 1$$

e quindi $D_0 > 0$; dobbiamo dimostrare che si verifica necessariamente il 2° o il 3° caso e ciò sarà fatto se proviamo che, dall'ipotesi che per certo $n \geq 1$ risulti

$$(5,3) \quad D_0 > 0, D_1 > 0, \dots, D_{n-1} > 0$$

segue necessariamente

$$(5,4) \quad D_n \geq 0,$$

col segno = soltanto se la $f(x)$ coincide quasi ovunque con quella funzione rettangolare di ordine n che ha come primi n coefficienti di FOURIER i numeri c_0, c_1, \dots, c_{n-1} ed ha come somma degli estremi sinistri il numero $\arg F_n^{(4)}$.

Fissato ad arbitrio il numero reale λ , in virtù delle ipotesi (5, 2), (5, 3), esiste una ben determinata funzione rettangolare $\varphi(x)$ di ordine n [che indicheremo anche con $\varphi(x, \lambda)$] per la quale sia, con le solite notazioni:

$$(5, 5) \quad \gamma_0 = c_0, \gamma_1 = c_1, \dots, \gamma_{n-1} = c_{n-1}, \sum_{r=1}^n \xi_r = \lambda$$

(4) Numero che ha senso perchè, in forza delle $D_n' - D_{n-2} D_n = |F_n|^2$, $D_n = 0$, $D_{n-1} > 0$, risulta $|F_n| = D_{n-1} > 0$.

e di conseguenza

$$\sum_{r=1}^n (\eta_r - \xi_r) = 2\pi c_0, \quad \sum_{r=1}^n (\eta_r + \xi_r) = 2\pi c_0 + 2\lambda.$$

Consideriamo allora il polinomio trigonometrico di ordine n (1)

$$P(x) = 2^{2n} \prod_{r=1}^n \operatorname{sen} \frac{x - \xi_r}{2} \operatorname{sen} \frac{x - \eta_r}{2} = \sum_{k=-n}^n P_k e^{ikx}, \quad (P_{-k} = \overline{P_k}),$$

notando che risulta

$$P_n = (-1)^n e^{-\frac{1}{2}i \sum_{r=1}^n (\xi_r + \eta_r)} = (-1)^n e^{-i(\pi c_0 + \lambda)},$$

$P(x) < 0$ all'interno degli intervalli $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$,

$P(x) > 0$ » » » » $(\eta_1, \xi_2), (\eta_2, \xi_3), \dots, (\eta_n, \xi_1 + 2\pi)$,

cosicchè per la (5, 1), il prodotto $[f(x) - \varphi(x)] P(x)$ si mantiene quasi ovunque ≥ 0 in $(\xi_1, \xi_1 + 2\pi)$. Si ha pertanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_1 + 2\pi} [f(x) - \varphi(x)] P(x) dx \geq 0,$$

valendo il segno = allora e allora soltanto che $f(x) \equiv \varphi(x, \lambda)$ (quasi ovunque).

La precedente disuguaglianza si trasforma come segue

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_1 + 2\pi} [f(x) - \varphi(x)] \left\{ (-1)^n e^{i(\pi c_0 + \lambda)} e^{-inx} + \sum_{k=-n+1}^{n-1} P_k e^{ikx} + (-1)^n e^{-i(\pi c_0 + \lambda)} e^{inx} \right\} dx \geq 0,$$

$$(-1)^n e^{i(\pi c_0 + \lambda)} (c_{-n} - \gamma_{-n}) + \sum_{k=-n+1}^{n-1} P_k (c_k - \gamma_k) + (-1)^n e^{-i(\pi c_0 + \lambda)} (c_n - \gamma_n) \geq 0,$$

onde per le (5, 5) si ha

$$(5,6) \quad (-1)^n R [e^{-i(\pi c_0 + \lambda)} c_n] \geq (-1)^n R [e^{-i(\pi c_0 + \lambda)} \gamma_n]^{(2)},$$

(col segno = se $f(x) \equiv \varphi(x, \lambda)$).

(1) Per il ragionamento qui usato cfr. GHIZZETTI [1].

(2) Con $R(z)$ indichiamo la parte reale del numero complesso z .

Ricordando poi che per le (1,8) valgono le

$$c_n = \frac{1}{2\pi} e^{\pi i c_0} \left[s_n + 2\pi i \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{n} s_{n-r} c_r \right], \quad \gamma_n = \frac{1}{2\pi} e^{\pi i c_0} \left[\sigma_n + 2\pi i \sum_{r=1}^{n-1} \frac{r}{n} \sigma_{n-r} \gamma_r \right]$$

e che per le (5,5) valgono pure le

$$(5,7) \quad \sigma_0 = s_0, \quad \sigma_1 = s_1, \dots, \sigma_{n-1} = s_{n-1},$$

si vede subito che la (5,6) equivale alla

$$(5,8) \quad (-1)^n R(e^{-i\lambda} s_n) \geq (-1)^n R(e^{-i\lambda} \sigma_n),$$

(col segno = se $f(x) \equiv \varphi(x, \lambda)$).

Si tenga ora conto che per la $\varphi(x)$ vale la (3,16) che si può scrivere

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_{n-1} & \sigma_n \\ & & & \sigma_{n-1} & \\ & \Delta_{n-2} & & & \\ & & & \sigma_1 & \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} e^{i\lambda},$$

$$\sigma_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\Delta_{n-2}} \left(\Delta_{n-1} e^{i\lambda} - \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_{n-1} & 0 \\ & & & & \sigma_{n-1} \\ & \Delta_{n-2} & & & \\ & & & \sigma_1 & \end{vmatrix} \right)$$

cioè in forza delle (5,7)

$$(5,9) \quad \sigma_n = \frac{(-1)^{n-1}}{D_{n-2}} \left(D_{n-1} e^{i\lambda} - \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 0 \\ & & & & s_{n-1} \\ & D_{n-2} & & & \\ & & & s_1 & \end{vmatrix} \right).$$

D'altra parte si ha

$$F_n = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & s_n \\ & & & s_{n-1} & \\ & D_{n-2} & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & s_1 & \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} s_n D_{n-2} + \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 0 \\ & & & & s_{n-1} \\ & D_{n-2} & & & \\ & & & s_1 & \end{vmatrix}$$

e ciò permette di scrivere la (5,9) nella forma

$$\sigma_n = s_n + \frac{(-1)^{n+1}}{D_{n-2}} (D_{n-1} e^{i\lambda} - F_n).$$

La (5,8) diventa perciò, essendo $D_{n-2} > 0$:

$$(5,10) \quad D_{n-1} \geq K (e^{-i\lambda} F_n) \quad (\text{col segno} = \text{se } f(x) \equiv \varphi(x, \lambda)).$$

Osserviamo ora che tanto D_{n-1} quanto F_n sono indipendenti da λ , mentre la (5,10) deve valere qualunque sia λ . Posto $\arg F_n = \omega$, la (5,10) può anche scriversi

$$(5,11) \quad D_{n-1} \geq |F_n| \cos(\omega - \lambda) \quad (\text{col segno} = \text{se } f(x) \equiv \varphi(x, \lambda)),$$

donde, per l'arbitrarietà di λ :

$$(5,12) \quad D_{n-1} \geq |F_n|.$$

Se è $D_{n-1} > |F_n|$, la (5,11) sussiste col segno $>$ qualunque sia λ e quindi non può la $f(x)$ coincidere con alcuna delle $\varphi(x, \lambda)$. Se $D_{n-1} = |F_n|$, la (5,11) può valere col segno $=$ soltanto per $\lambda = \omega$ ed allora la $f(x)$ coincide quasi ovunque con la $\varphi(x, \omega)$.

Infine, tenuto conto dell'identità $D_{n-1}^2 - D_{n-2} D_n = |F_n|^2$ e della $D_{n-2} > 0$ si vede che la (5,12) equivale alla $D_n \geq 0$, onde si conclude che è necessariamente $D_n \geq 0$ valendo il segno $=$ allora e allora soltanto che $f(x) \equiv \varphi(x, \omega)$, c. d. d.

LA CONDIZIONE È SUFFICIENTE. — Se si verifica il 1° caso menzionato nell'enunciato si ha $c_0 = 0$ (oppure $c_0 = 1$), $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = 0$ e questi sono i coefficienti di FOURIER della $f(x) \equiv 0$ (oppure della $f(x) \equiv 1$).

Se si verifica il 2° caso, allora c_0, c_1, c_2, \dots sono i coefficienti di FOURIER della funzione rettangolare di ordine n definita dal teor. A, assumendo $\lambda = \arg F_n$, come risulta senz'altro dalla prima parte della dimostrazione.

Supponiamo ora che si verifichi il 3° caso, in cui evidentemente la cercata $f(x)$ non può essere una funzione rettangolare. Per costruire tale $f(x)$ procediamo nel modo seguente⁽¹⁾. Per ogni intero n rimane ben individuata una funzione rettangolare $\varphi_n(x)$ di ordine n in modo che sia

$$(5,13) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) e^{ikx} dx = c_k \quad , \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (2)$$

(1) Per questa costruzione cfr. GHIZZETTI [5].

(2) Per costruire la $\varphi_n(x)$, secondo il teor. A, occorre anche dare il valore $\lambda = \sum_{r=1}^n \xi_r$. Questo valore può essere fissato a piacere; conveniamo per esempio di assumere sempre $\lambda = 0$.

Nasce così una successione di funzioni rettangolari $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots$ che basterà considerare nell'intervallo $(0, 2\pi)$. Posto per $0 \leq x \leq 2\pi$

$$(5,14) \quad \Phi_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

consideriamo in $(0, 2\pi)$ la nuova successione

$$(5,15) \quad \Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x), \dots$$

costituita da funzioni non negative e non decrescenti. Esse sono equilimitate [perchè $0 \leq \Phi_n(x) \leq \Phi_n(2\pi) = \int_0^{2\pi} \varphi_n(t) dt = 2\pi c_0$] ed equiuniformemente continue [anzi equiuniformemente lipschitziane, perchè $|\Phi_n(x'') - \Phi_n(x')| = \left| \int_{x'}^{x''} \varphi_n(t) dt \right| \leq |x'' - x'|$]. Per il teorema di ASCOLI-ARZELÀ si può quindi estrarre dalla (5,15) una successione parziale

$$(5,16) \quad \Phi_{n_1}(x), \Phi_{n_2}(x), \Phi_{n_3}(x), \dots, (n_1 < n_2 < n_3 < \dots),$$

convergente verso una funzione $F(x)$ non negativa, non decrescente e lipschitziana [perchè $|F(x'') - F(x')| \leq |x'' - x'|$]. Tale $F(x)$ ammette quasi ovunque derivata $F'(x) = f(x)$, risultando $0 \leq f(x) \leq 1$.

Dico che la $f(x)$ così costruita ha come coefficienti di FOURIER i numeri assegnati c_0, c_1, c_2, \dots , ossia che si ha

$$(5,17) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} dF(x) = c_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A tale scopo cominciamo coll'osservare che dalle (5,13), (5,14) segue, per ogni fissato n :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\Phi_n(x) = c_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

onde, comunque si prefissi $k \geq 0$, al tendere di n all'infinito l'integrale

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\Phi_n(x)$ assume definitivamente il valore c_k ; ne deriva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\Phi_n(x) = c_k \quad , \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

ovvero, facendo percorrere a n soltanto la successione n_1, n_2, n_3, \dots :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\Phi_{n_h}(x) = c_k \quad , \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Perciò la (5,17) sarà dimostrata se dimostriamo quest'altra

$$(5,18) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d[\Phi_{n_h}(x) - F(x)] = 0 \quad , \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Con un'integrazione per parti si può scrivere

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} d[\Phi_{n_h}(x) - F(x)] = -i k \int_0^{2\pi} e^{ikx} [\Phi_{n_h}(x) - F(x)] dx,$$

in quanto per ogni h si ha $\Phi_{n_h}(0) = 0$, $\Phi_{n_h}(2\pi) = 2\pi c_0$ e quindi anche $F(0) = 0$, $F(2\pi) = 2\pi c_0$. Nell'ultimo integrale scritto si può passare al limite per $h \rightarrow \infty$ sotto il segno di integrale [perchè $|e^{ikx} [\Phi_{n_h}(x) - F(x)]| =$

$= \left| \int_0^x [\varphi_{n_h}(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_0^x dx \leq 2\pi$] ed allora, ricordando che $\Phi_{n_h}(x) \rightarrow F(x)$ (per $h \rightarrow \infty$), si ottiene la (5,18), c. d. d.

[Pervenuto alla Redazione il 10-4-1950]

B I B L I O G R A F I A

ACHYÉSER N. E KREIN M.

- [1] *Ueber Fouriersche Reihen beschränkter summierbarer Funktionen und ein neues Extremumproblem I, II.* [Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan. Univ. Kharkoff, IV s., **9**, 9-28 (1934); **10**, 3-32 (1934)].
- [2] *Ueber eine Transformation der reellen Toeplitzschen Formen und das Momentenproblem in einem endlichen Intervalle.* [ibidem, **11**, 21-26 (1935)].
- [3] *Das Momentenproblem bei der zusätzlichen Bedingung von A. Markoff.* [ibidem, **12**, 13-33 (1935)].
- [4] *Bemerkung zur Arbeit « Über Fouriersche Reihen beschränkter summierbarer Funktionen und ein neues Extremumproblem ».* [ibidem, **12**, 37-40 (1935)].
- [5] *Sur deux questions de minima qui se rattachent aux problème des moments.* [C. R. Acad. Sci. URSS, N. s., **1**, 343-346 (1936)]
- [6] *Some remarks about three papers of M. S. Verblunsky.* [Commun. Soc. Math. Kharkoff..., **16**, 129-134, (1940)].

CARATHÉODORY C.

- [1] *Ueber dem Variabilitätsbereich de Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen.* [Rendiconti Circ. Mat. Palermo, **32**, (1911)].

FRIEDMAN B.

- [1] *Fourier coefficients of bounded functions* [Bull. Amer. Math. Soc., **47**, 84-92 (1941)].

GHIZZETTI A.

- [1] *Sui coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione limitata.* [Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, s. II, **9**, 215-224 (1940)].
- [2] *Sui momenti di una funzione limitata* [Atti Acc. Sci. Torino, **77**, 198-208 (1941-42)].
- [3] *Ricerche sui momenti di una funzione limitata compresa fra limiti assegnati* [Memorie Acc. Italia, s. VII, **13**, 1165-1199 (1942)].
- [4] *Sui momenti di 2° ordine di una legge di probabilità in n dimensioni* [Rendiconti Mat. e sue applic., Roma, s. V, **4**, 94-101 (1943)].
- [5] *Condizioni necessarie e sufficienti per i momenti di una funzione limitata* [Rendiconti Acc. Naz. Lincei, s. VIII, **2**, 533-536, (1947)].
- [6] *Sul problema dei momenti* [Rendiconti Sem. Mat. Università e Politecnico Torino, **8**, 93-107, (1947-48 e 1948-49)].

PÓLYA G. E SZEGÖ G.

- [1] *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Zweiter Band*, Berlin 1925, p. 116 e 320-322.

RIESZ M.

- [1] *Sur le problème des moments* [Arkiv för Mat., Astr. och Fysik, **17**, N° 16 (1923)]

VERBLUNSKY S.

- [1] *Solution of a moment problem for bounded function.* [Proc. Cambridge Philos. Soc., **32**, 30-39 (1936)].
- [2] *On the Fourier constants of a bounded function.* [ibidem, 201-211].
- [3] *On the parametric representation of bounded functions* [ibidem, 521-529].