ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ENRICO MAGENES

Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli : II - teoremi di esistenza dell'estremo

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 3, nº 1-4 (1950), p. 95-131

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_3_1-4_95_0>

INTORNO AGLI INTEGRALI DI FUBINI-TONELLI: II - TEOREMI DI ESISTENZA DELL'ESTREMO

di ENRICO MAGENES (Padova)

INTRODUZIONE

In una memoria dal titolo: « *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli: I - Condizioni sufficienti per la semicontinuità* », apparsa in questi Annali [1], riprendendo e continuando le ricerche di S. FAEDO [2], io ho studiato, se-

---

[1] v. serie 3, vol II; essa sarà indicata nel seguito con M. I.

[2] S. FAEDO - 1) *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionale* (Ann. di mat. pura e appl. (4) - XXIII - 1944 - pp. 69-121); 2) *Un nuovo tipo di funzionali continui* (Rend. di mat. e delle sue appl -5 IV-fasc. III-IV-1943); 3) *Sulle condizioni di Legendre e di Weierstrass per gli integrali di Fubini Tonelli* (Litografia Tacchi Pisa 1946, in corso di stampa nel vol. XV, serie 2 di questi *Annali*). Per studi particolari precedenti si veda: G. FUBINI - *Alcuni nuovi Problemi di Calcolo delle Variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali* (Ann. di Mat. pura e appl. (3) XX - 1913 - pp. 217-244); L. TONELLI - *Su alcuni funzionali* (Ann. di Mat. pura e appl. (4) XVIII - 1939 - pp. 1-21); H. H. GOLDSTINE - *Conditions for a minimum of a functional* (Contributions to the Calculus of Variations - 1933-37; Chicago; pp. 316 357; in particolare pp. 353-357); M. PICONE - *Sopra un problema di Calcolo Funzionale* (Rend. Acc Lincei (6) - XXIX - 1939 - pg. 155-159); G. FICHERA - 1) *Sulla ubicazione e l'unicità delle estremanti del polinomiale quadratico nella sfera di Hilbert* (Pubb. dell'I.N.A-C n 160), 2) *Sui funzionali continui con la metrica di Frechet* (Rend. Acc. Lincei (8) - II - 1947 - pp. 174 177).

Ritengo anche utile e interessante osservare che *in alcuni casi* gli integrali di FUBINI-TONELLI possono considerarsi come particolari *problemi di Bolza*. Così per es. se risulta $f = \sum_{i=1}^{n} g_i(x, y_1, y_1') \, h_i(x, y_2, y_2')$ il problema di render minimo $I(y)$ in una certa classe di curve $y(x)$ a *punti terminali fissi* si riduce a quello di render minimo il funzionale

$$\sum_{i=1}^{n} y_{1,i}(b) \, y_{2,i}(b)$$

in una classe di $2n + 1$ curve, $y(x), y_{1,i}(x), y_{2,i}(x)$ $(i = 1 \ldots n)$ soddisfacenti alle equazioni differenziali

$$y'_{1,i} - g_i(x, y, y') = 0, \quad y'_{2,i} - h_i(x, y, y') = 0 \quad (i = 1 \ldots n)$$

condo il *metodo diretto del Tonelli,* gli integrali di FUBINI-TONELLI :

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dx\, dz$$

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dx\, dz$$

dando delle condizioni sufficienti per la semicontinuità.

In questa memoria ne proseguo lo studio, dimostrando un gruppo di teoremi che assicurano l'esistenza dell'estremo assoluto.

Nel § 1, Cap. I, attraverso alcuni esempi, chiarisco i termini nei quali può essere impostato il problema dell'estremo per $I(y_1, y_2)$ e introduco alcune utili definizioni. Nel § 2 dò una serie di teoremi sull'esistenza dell'estremo di $I(y_1, y_2)$ in campi limitati, estendendo i più noti risultati relativi all'integrale semplice di linea dovuti a NAGUMO, MC SHANE, TONELLI, e nel § 3 accenno al passaggio ai campi illimitati.

Nel cap. II sviluppo la teoria dell'estremo per $I(y)$, mettendo in rilievo come si possano per esso ottenere risultati più ampi attraverso due diversi tipi di teoremi, che vengono dimostrati prima per i campi limitati (§ 2) e poi trasportati ai campi illimitati (§ 3).

In un lavoro successivo mi occuperò delle equazioni di EULERO relative a $I(y_1, y_2)$ e a $I(y)$, considerandone, tra l'altro, le applicazioni ai problemi ai limiti per le equazioni integro-differenziali ordinarie.

Credo opportuno richiamare alcune definizioni e i risultati più importanti della M. I che ci saranno necessari nella presente.

1. — *Proposizioni relative ad* $I(y_1, y_2)$. - La funzione $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ (3) si suppone definita per tutti gli (x, z, y_1, y_2) di un *campo* A dello spazio (x, z, y_1, y_2), che sia il prodotto topologico $A_1 \times A_2$ di 2 campi A_1 del

---

e alle condizioni ai limiti

$$y_{1,i}(a) = 0\,, \quad y_{2,i}(a) = 0\,, \quad y(a) = \alpha\,, \quad y(b) = \beta \qquad (i = 1, \dots n)$$

e questo problema è appunto un ordinario *problema di Mayer*. Va da sè che *viceversa* questo problema di MAYER può essere studiato anche come integrale di FUBINI TONELLI, sicchè i teoremi di esistenza del minimo che otterremo nella presente memoria ci daranno altrettanti risultati relativi a questo problema di MAYER Ciò, mi sembra, mette in rilievo un altro motivo di interesse dello studio degli integrali di FUBINI-TONELLI.

(3) Intenderemo sempre di parlare di funzioni reali di variabili reali.

piano (x, y_1) e A_2 del piano (z, y_2), contenenti ciascuno i propri punti di accumulazione posti al finito, e per ogni valore di y_1' e di y_2' e continua insieme alle sue derivate parziali $f_{y_1'}, f_{y_2'}, f_{y_1'y_1'}, f_{y_2'y_2'}$ in ogni $(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$, in cui è definita.

Dicesi «curva C» ogni coppia di funzioni $y_1 = y_1(x)$ $a \leq x \leq b$, $y_2 = y_2(z)$ $c \leq z < d$, assolutamente continue rispettivamente in (a, b) ed in (c, d) ed appartenenti rispettivamente ad A_1 e A_2; la «curva C» dicesi poi *ordinaria* se esiste finito l'integrale secondo *Lebesgue*

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, d\,x\, d\,z\,.$$

Valgono allora le seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE I ([4]). — Se sono verificate le ipotesi:

1) *in tutti i punti di* A *e per ogni* y_1' *e* y_2' *è:*

$$(\alpha) \qquad f_{y_1'y_1'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') > 0\,; \qquad f_{y_2'y_2'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq 0\,;$$

2) *esistono due campi* A_1' *e* A_2', *aventi rispettivamente tutti i punti di* A_1 *e* A_2 *come punti interni, tali che, posto* $\mathrm{A}' = \mathrm{A}_1' \times \mathrm{A}_2'$, *in* $\mathrm{A}' - \mathrm{A}$ *possa definirsi la* $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ *per ogni valore di* y_1' *e* y_2' *in modo che, in ogni punto* $(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ *con* (x, z, y_1, y_2) *appartenente ad* A' *e* y_1' *e* y_2' *qualunque, la* f *e le sue derivate* $f_{y_1'}, f_{y_2'}, f_{y_1'y_1'}, f_{y_2'y_2'}$ *siano continue e negli stessi punti esistano anche e siano continue le derivate* $f_{y_1'x}, f_{y_2'z}$;

3) *per ogni parte limitata* $\overline{\mathrm{A}}'$ *di* A' *si possono trovare due numeri* $\nu > 0$ *e* $\mathrm{Y}' \geq 1$, *e quattro funzioni* $P(x, z, y_1, y_2)$, $Q(x, z, y_1, y_2)$ $R(x, z, y_1, y_2)$, $S(x, z, y_1, y_2)$, *definite e continue in* $\overline{\mathrm{A}}'$ *con le derivate* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial z}, \dfrac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y_1}, \dfrac{\partial Q}{\partial y_1}, \dfrac{\partial R}{\partial y_1}, \dfrac{\partial S}{\partial y_1}$, *tali che, detta* $\overline{\mathrm{A}}$ *la parte di* A *contenuta in* $\overline{\mathrm{A}}'$:

a) *in tutto* $\overline{\mathrm{A}}$ *e per ogni valore finito di* y_1' *e* y_2' *sia:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') > P + Q\, y_1' + R\, y_2' + S\, y_1'\, y_2'$$

b) *in tutto* $\overline{\mathrm{A}}$, *per ogni* y_1' *e per* $|y_2'| > \mathrm{Y}'$, *sia:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - (P + Q\, y_1' + R\, y_2' + S\, y_1'\, y_2') \geq \nu\, |\, y_2'\, |\,;$$

([4]) v. M I: cap. I, § 3, n. 1.

4) *in ogni punto* $(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ *con* (x, z, y_1, y_2) *appartenente ad* A′ *e* y_1' *e* y_2' *qualunque esistono e sono continue le* f_{y_1} *e* $f_{y_1' y_1}$ (5); *allora* $I(y_1, y_2)$ è *semicontinuo inferiormente* (6).

PROPOSIZIONE II (7). — Se sono verificate le ipotesi 1), 2), 4) (5) e $\overline{3}$) *per ogni punto* $(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2)$ *di* A *si possono determinare 7 numeri* p, q, r, s, ν, Y′ *e* ϱ *con* ν *e* ϱ *positivi e* $Y' \geq 1$, *tali che in tutti i punti* (x, z, y_1, y_2) *di* A *per i quali* (x, y_1) *dista in* A_1 *da* $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ *per non più di* ϱ *e* (z, y_2) *dista in* A_2 *da* $(\overline{z}, \overline{y}_2)$ *per non più di* ϱ, *sia:*

a) $$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') > p + q y_1' + r y_2' + s y_1' y_2'$$

per ogni valore di y_1' *e* y_2' *e:*

b) $$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - (p + q y_1' + r y_2' + s y_1' y_2') \geq \nu \mid y_2' \mid$$

per ogni y_1' *e per* $\mid y_2' \mid \geq Y'$; *allora* $I(y_1, y_2)$ *è semicontinuo inferiormente.*

OSSERVAZIONE I: Se ci si limita alla semicontinuità inferiore in ogni classe di curve $C\,[y_1(x), y_2(z)]$ ordinarie tali che le curve rappresentative delle funzioni $y_2(z)$ abbiano lunghezze minori di uno stesso numero, allora le *Proposizioni I e II* valgono indipendentemente rispettivamente dalle ipotesi 3) b) e $\overline{3}$) b) (8).

Valgono inoltre le seguenti proposizioni « simmetriche » delle precedenti

PROPOSIZIONE I′ (9). Se sono verificate le ipotesi 1), 2) e

3′) *per ogni parte limitata* $\overline{A}$ *di* A′ *si possono trovare due numeri* $\nu > 0$ *e* $Y' \geq 1$ *e quattro funzioni* $P(x, z, y_1, y_2)$, $Q(x, y, y_1, y_2)$, $R(y, z, y_1, y_2)$, $S(x, z, y_1, y_2)$, *definite e continue in* $\overline{A}'$ *con le derivate* $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial z}, \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z}, \frac{\partial P}{\partial y_2}, \frac{\partial Q}{\partial y_2}, \frac{\partial R}{\partial y_2}, \frac{\partial S}{\partial y_2}$, *tali che, detta* $\overline{A}$ *la parte di* A *contenuta in* $\overline{A}'$:

---

(5) L'ipotesi 4) può veramente essere sostituita con una più ampia, che è indicata nell'*Osservazione* finale del n 1 § 3, cap. I. M. I con 4*).

(6) Cioè: per ogni curva ordinaria $\overline{C}\,[\,y_1(x),\ \overline{a} \leq x \leq \overline{b};\ \overline{y}_2(z),\ \overline{c} \leq z \leq \overline{d}\,]$ preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio è possibile determinare un $\varrho < 0$ in modo che per tutte le curve ordinarie $C\,[\,y_1(x),\ a \leq x \leq b;\ y_2(z),\ c \leq z \leq d\,]$ appartenenti *propriamente* all'intorno (ϱ) di $\overline{C}$, cioè tali che $y_1(x)$ e $y_2(z)$ appartengano *propriamente* all'intorno (ϱ) rispettivamente di $\overline{y}_1(x)$ e $\overline{y}_2(z)$, valga la:

$$I(y_1, y_2) > I(\overline{y}_1, \overline{y}_2) \quad \varepsilon .$$

(7) v. M. I, cap I, § 3, n. 3.

(8) v. M. I. cap. 1, § 3, n. 1.

(9) v. M. I, cap § 3, n. 2.

a) *in tutto* $\bar{A}$ *e per ogni valore finito di* y'_1 *e* y'_2 *sia*:

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq P + Q y'_1 + R y'_2 + S y'_1 y'_2;$$

b) *in tutto* $\bar{A}$, *per ogni* y'_2 *e per* $| y'_1 | \geq Y'^{*}$, *sia*:

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (P + Q y'_1 + R y'_2 + S y'_1 y'_2) \geq \nu \quad y'_1 | ;$$

4') *in ogni punto* $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ *con* (x, z, y_1, y_2) *appartenente ad* A' *e* y'_1 *e* y'_2 *qualunque esistono e sono continue le* f_{y_2} e $f_{y'_2 y_2}$ (10); *allora* $I(y_1, y_2)$ *è semicontinuo inferiormente.*

Proposizione II' (11). — Se sono verificate le ipotesi 1), 2), 4') (10), $\bar{3}$) *a*) e $\bar{3}$) *b'*)

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (p + q y'_1 + r y'_2 + s y'_1 y'_2) \geq \nu \mid y'_1 \mid$$

per ogni y'_2 *e per* $| y'_1 | \geq Y'$;
allora $I(y_1, y_2)$ *è semicontinuo inferiormente*

Osservazione I': Se ci si limita alla semicontinuità inferiore in ogni classe di curve $C[y_1(x), y_2(z)]$ ordinarie tali che le curve rappresentative delle funzioni $y_1(x)$ abbiano lunghezze minori di uno stesso numero, allora le *Proposizioni I' e II'* valgono indipendentemente rispettivamente dalle ipotesi 3') *b*) e $\bar{3}$) *b'*) (12)

Osservazione II: È possibile un'estensione della semicontinuità anche alle « curve C » *non ordinarie*, cioè tali che non esista su di esse l'integrale $I(y_1, y_2)$. Precisamente se è soddisfatto uno qualunque dei gruppi di ipotesi che compaiono nelle *Proposizioni* I, II, I', II' e se $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)]$ è una « curva C » *non ordinaria*, preso ad arbitrio un K si può determinare un $\varrho > 0$ tale che ogni « curva C » *ordinaria* appartenente propriamente all'intorno (ϱ) di $\bar{C}$ soddisfi alla $I(y_1, y_2) > K$ (13). Questa estensione della semicontinuità vale poi anche per le classi di curve considerate nelle precedenti *Osservazioni* I e I', rispettivamente nelle ipotesi sulla f ivi ricordate (14).

---

(10) L'ipotesi 4') può essere sostituita con una più ampia che è indicata nel n. 2, § 3, cap. I, M. I.

(11) v. M. I, cap. I, § 3, n. 3, osservazione.

(12) v. M. I, cap. I, § 3, n. 4.

(13) v. M. I. cap. I, § 4, n. 1

(14) v. M. I. cap I, § 4, n. 2

2. — *Proposizioni relative ad* $I(y)$. — La funzione $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ si suppone definita per ogni coppia di punti (x, y_1) e (z, y_2) di un *campo piano A* contenente tutti i propri punti di accumulazione posti al finito, e per ogni valore di y'_1 e y'_2 e continua in ogni punto $(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ in cui è definita insieme alle sue derivate parziali $f_{y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_2 y'_2}$.

Ciò equivale anche a dire che la $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ è definita (e continua insieme a $f_{y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_2 y'_2}$) per ogni valore di y'_1 e y'_2 e ogni punto (x, z, y_1, y_2) del campo $A^2 = A \times A$ dello spazio (x, z, y_1, y_2), prodotto di 2 campi uno nel piano (x, y_1) e l'altro nel piano (z, y_2) entrambi coincidenti col campo A [15]; questa seconda nomenclatura, che noi useremo, ha il vantaggio di essere del tutto analoga a quella relativa ad $I(y_1, y_2)$, quando si ponga in essa $A_1 = A$, $A_2 = A$, $A = A^2$.

Dicesi « curva C » ogni funzione assolutamente continua $y = y(x)$ $(a \leq x \leq b)$ appartenente al campo A; la « curva C » dicesi poi *ordinaria* se esiste finito l'integrale secondo *Lebesgue*:

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, d\, x\, d\, z\,.$$

È anzitutto chiaro che, essendo $I(y)$ un particolare $I(y_1, y_2)$, tutte le condizioni sufficienti per la semicontinuità inferiore espresse nelle *Proposizioni* relative ad $I(y_1, y_2)$ si traducono in altrettante condizioni sufficienti per la semicontinuità inferiore di $I(y)$, quando la f soddisfi ai gruppi di ipotesi ivi enunciate [16]. Ho chiamato queste condizioni: *condizioni del I tipo* [17].

Ma accanto ad esse si possono dare altre condizioni sufficienti (*condizioni del II tipo*) per la semicontinuità inferiore di $I(y)$, che non si presentano per $I(y_1, y_2)$ e che sono pure utili; precisamente valgono le seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE I* [18]. — Se sono verificate le ipotesi [16]: 1), 2), 4), 3) *a*) oppure 1), 2), 4'), 3') *a*)] [19] e

---

[15] Nel senso che coincidono con A quando si portino a sovrapporsi i piani (x, y_1) e (z, y_2) col piano in cui giace A in modo che l'origine e gli assi dei 3 piani si sovrappongano esattamente.

[16] Naturalmente si deve tener presente la convenzione sulla nomenclatura da usare nei due casi, messa in rilievo più sopra, per cui $A_1, A_2, A, A'_1, A'_2, A', \bar{A}', \bar{A}$ sono da sostituirsi rispettivamente con $A, A, A^2, A', A', A'^2, \bar{A}'^2, \bar{A}^2$.

[17] v. M. I, cap. II, § 1, n. 1.

[18] v. M. I, cap. II, § 1, n. 2

[19] Anche qui la 4) e la 4') possono essere generalizzate come si è osservato nelle note [5] e [10].

3) b*) *in tutto* $\bar{A}^2$ *e per* $|y'_1| \geq Y'$, $|y'_2| \geq Y'$ *sia*:

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (P + Q\, y'_1 + R\, y'_2 + S\, y'_1 y'_2) \geq \nu\, |y'_1|\; |y'_2|,$$

allora $I(y)$ *è semicontinuo inferiormente.*

PROPOSIZIONE II* [20]. — Se sono verificate le ipotesi [16]: 1), 2), 4) [oppure 4')] [19], $\bar{3}$) *a*) e

$\bar{3}$) b*) *inoltre per i punti di* A^2 *tali che* $\bar{x} = \bar{z}$, $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ *sia anche*:

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (p + q\, y'_1 + r\, y'_2 + s\, y'_1 y'_2) \geq \nu\, |y'_1|\; |y'_2|$$

per $|y'_1| \geq Y'$, (x, y_1) *e* (z, y_2) *distanti rispettivamente da* $(\bar{x}, \bar{y}_1)$ *e* $(\bar{z}, \bar{y}_2)$ *per non più di* ϱ;
allora $I(y)$ *è semicontinuo inferiormente.*

OSSERVAZIONE I*: Se ci si limita alla semicontinuità inferiore in ogni classe di curve C ordinarie tutte di lunghezze minori di uno stesso numero, allora le Proposizioni I* e II* valgono indipendentemente rispettivamente dalle ipotesi 3) *b** e $\bar{3}$) *b**) [21].

OSSERVAZIONE II*: Anche per le *condizioni del II tipo* (*Proposizioni I* e II*, Osservazione I**) è possibile un'estensione della semicontinuità nel senso della precedente *Osservazione II* [22].

---

(20) v. M. I, cap. II, § 1, n. 3;
(21) v. M. I, cap. II, § 1, n. 2 e 3
(22) v. M. I, cap. II, § 1, n. 4

CAPITOLO I.

Il minimo di $I(y_1, y_2)$.

§ 1. — Preliminari

1\. — *Definizioni.* - Mantenendo le definizioni e la nomenclatura del n. 1 *dell'Introduzione* aggiungeremo ora qualche altra definizione.

Diremo che una « curva C », che indicheremo con $\overline{C}$, è una *curva di accumulazione* di un dato insieme di « curve C » se ad ogni intorno (ϱ) della $\overline{C}$ appartengono propriamente sempre infinite « curve C » dell'insieme dato.

Un insieme K di curve C ordinarie costituisce una *classe completa* quando ogni sua curva di accumulazione, che sia anche ordinaria, appartiene all'insieme stesso.

Il funzionale $I(y_1, y_2)$ si dirà *quasi-regolare positivo se in tutto* A *e per* y'_1 *e* y'_2 *qualunque valgono le*

$$(\alpha) \qquad f_{y'_1 y'_1}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq 0 ; \qquad f_{y'_2 y'_2}(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq 0 ;$$

e se inoltre esistono 4 funzioni $P(x, z, y_1, y_2)$, $Q(x, z, y_1, y_2)$, $R(x, z, y_1, y_2)$, $S(x, z, y_1, y_2)$ *definite e continue in* A, *tali che in tutto* A *e per* y'_1 *e* y'_2 *qualunque sia verificata la*:

$$(\beta) \qquad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq P + Q\, y'_1 + R\, y'_2 + S\, y'_1\, y'_2$$

Sarà opportuno osservare che la (β) non è conseguenza delle (α), come l'analogia tra $I(y_1, y_2)$ e l'integrale semplice del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria: $\int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx$ potrebbe far credere (è noto infatti che dalla $F_{y'y'} \geq 0$ segue immediatamente, per la formula del *Taylor* arrestata al secondo termine, $F(x, y, y') \geq F(x, y, 0) + F_{y'}(x, y, 0)\, y'$). Basta all'uopo ricordare l'esempio portato nel n. 2, § 1, cap. I, M, I: la funzione

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = e^{2(y'_1 - y'_2)^2} + \frac{1}{2} y_1'^4 + \frac{1}{3} y_1'^3\, y'_2 -$$
$$- 2\, y_1'^2\, y_2'^2 + \frac{1}{3} y'_1\, y_2'^3 + \frac{1}{2} y_2'^4 - 1$$

soddisfa alle (α) come si è ivi visto, ma non alla (β), qualunque siano le P, Q, R, S, poichè per $y_1' = y_2'$ risulta $f = \frac{1}{3} y_1'^4$ e quindi, per $y_1' \to \infty$, $f \to -\infty$ del quarto ordine rispetto a y_1', in contraddizione con la (β).

La (β) è conseguenza delle (α) solo in casi particolari: per esempio se si suppone che per ogni punto (x, z, y_1, y_2) di A esista almeno un $\overline{y}_1'$ (o un $\overline{y}_2'$) tale che $f(x, z, y_1, y_2, \overline{y}_1', y_2')$ [o $f(x, z, y_1, y_2, y_1', \overline{y}_2')$] si riduca ad una funzione lineare di y_2' (o di y_1') in $(-\infty, +\infty)$ (tralasciamo la dimostrazione di questa affermazione, anche se non del tutto immediata, perchè ciò non interessa per il seguito).

Introduciamo ora un'ultima definizione. Diciamo che $I(y_1, y_2)$ è *quasi-regolare positivo seminormale rispetto a* y_1' (*o a* y_2') *se è quasi regolare positivo ed inoltre se per ogni punto* $(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2)$ *di* A *si possono determinare 7 numeri* p, q, r, s, ν, ϱ *e* Y' *con* ν *e* ϱ *positivi e* $Y' \geq 1$, *tali che in tutti i punti* (x, z, y_1, y_2) *di* A, *per i quali* (x, y_1) *dista nel campo* A_1, *da* $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ *per non più di* ϱ *e* (z, y_2) *dista, nel campo* A_2, *da* $(\overline{z}, \overline{y}_2)$ *per non più di* ϱ, *sia*:

$$(\gamma) \qquad f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq p + q\, y_1' + r\, y_2' + s\, y_1' y_2'$$

per ogni valore di y_1' *e* y_2' *e*

$$(\gamma') \qquad f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - (p + q\, y_1' + r\, y_2' + s\, y_1' y_2') \geq \nu\, |y_1'| \quad [\geq \nu\, |y_2'|]$$

per ogni valore di y_2' $[y_1']$ *e* $|y_1'| > Y'$ $[|y_2'| > Y']$

2. Lemmi. Ci saranno utili nel seguito i due Lemmi:

Se $I(y_1, y_2)$ *è quasi regolare positivo seminormale rispetto a* y_1' (*a* y_2') *e se* H_1 (H_2) *è una classe di curve ordinarie* $C[y_1(x), a \leq x \leq b;\ y_2(z), c \leq z \leq d]$ *appartenenti ad un campo* A *limitato e soddisfacenti alle diseguaglianze*

$$d - c \geq \eta \quad [b - a \geq \eta]; \quad I(y_1, y_2) \leq M$$

con η *costante positiva e* M *numero fisso, le variazioni totali delle funzioni* $y_1(x)$ $[y_2(z)]$, *componenti delle curve della classe* H_1 (H_2), *sono tutte inferiori ad uno stesso numero.*

In virtù della definizione data di *seminormalità*, la dimostrazione si ottiene adattando un noto ragionamento di E. Y. Mc Shane [23]; si tenga

---

[23] v. E. Y. Mc Shane *Existence theorems for ordinary problems of the Calculus of Variation* (Annali Scuola Normale Sup. di Pisa (2), vol. III, 1934, pp. 181-211; 287-315) pag. 294.

presente all'uopo che il campo A è il prodotto dei 2 campi piani A_1 e A_2 e si sfrutti la relazione:

$$\int_{E_1} | y_1'(x) | \, d\,x \leq \frac{1}{\eta} \int_c^d \int_{E_1} | y_1'(x) | \, d\,z\,d\,x$$

verificata se E_1 è un qualsiasi insieme misurabile di (a, b), nel caso che $I(y_1, y_2)$ sia seminormale rispetto a y_1', e quella

$$\int_{E_2} | y_2'(z) | \, d\,z \leq \frac{1}{\eta} \int_a^b \int_{E_2} | y_2'(z) | \, d\,x\,d\,z$$

verificata se E_2 è un'insieme misurabile di (c, d), nel caso che $I(y_1, y_2)$ sia seminormale rispetto a y_2'.

OSSERVAZIONE. — La validità dei due *Lemmi* precedenti è indipendente dalle numerose ipotesi fatte sulla funzione f; in realtà il ragionamento che si usa nella dimostrazione sfrutta solamente le relazioni (γ) e (γ') della seminormalità e le disuguaglianze dell'enunciato: $d - c \geq \eta\ (b - a \geq \eta)$; $I(y_1, y_2) \leq M$.

3. — *Posizione del problema.* Nel paragrafo successivo daremo, seguendo il *metodo diretto del Tonelli*, un gruppo di teoremi di esistenza del minimo assoluto di $I(y_1, y_2)$, che esauriscono indubbiamente una assai vasta classe di problemi. Ci gioveremo perciò della analogia, tra $I(y_1, y_2)$ e l'integrale semplice di linea del calcolo delle variazioni $\int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,d\,x$.

È opportuno però mettere subito in rilievo che $I(y_1, y_2)$ presenta alcuni fatti nuovi, che la suddetta analogia non farebbe, ad un esame superficiale, supporre. Alcuni esempi chiariranno la cosa e delimiteranno l'indirizzo delle nostre ricerche.

È noto [24] che l'integrale $\int_a^b (y'^2(x) + h)\,d\,x$, con h numero reale qualunque, ammette il minimo assoluto in ogni classe completa di curve ordinarie

---

[24] v. ed es. L. TONELLI, *Sugli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria* (Annali Scuola Normale Sup. di Pisa (2), vol III, 1934, pp. 400-450).

$y(x)$ (cioè in questo caso assolutamente continue e con derivata a quadrato integrabile) contenute in un campo limitato.

Si considerino ora i seguenti 3 esempi di $I(y_1, y_2)$, che possono ritenersi le generalizzazioni più immediate dell'integrale semplice suddetto.

I) Sia $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = y'^2_1 y'^2_2$, considerata per ogni punto dell'ipercubo $A \equiv 0 \leq x \leq 1$; $0 \leq z \leq 1$; $0 \leq y_1 \leq 1$; $0 \leq y_2 \leq 1$, e per ogni valore di y'_1 e y'_2. Sia poi K la classe delle curve ordinarie C appartenenti ad A, costituita dalla coppie di funzioni:

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b}\, x\ (0 \leq x \leq b)\,;\ y_2(z) = \frac{\sqrt{1-(1-b^2)^2}}{1-b^2}\, z\ (0 \leq z \leq 1-b^2)\,,$$

per ogni b tale che $0 < b < 1$.

È chiaro che K è completa nel senso definito nel n. 1. Risulta poi:

$$I(y_1, y_2) = \int_0^b \int_0^{1-b^2} y'^2_1(x)\, y'^2_2(z)\, dx\, dz = \int_0^b \frac{1-b^2}{b^2}\, dx \int_0^{1-b^2} \frac{1-(1-b^2)^2}{(1-b^2)^2}\, dz = 2b - b^3.$$

$I(y_1, y_2)$ è dunque sempre positivo, ma l'estremo inferiore di $I(y_1, y_2)$ in K è lo zero perchè $2b - b^3 \to 0$ per $b \to 0$. Perciò $I(y_1, y_2)$ non ammette in K il minimo assoluto.

II) Si considerino la stessa funzione f e lo stesso campo A dell'esempio precedente. Sia invece K la successione delle curve ordinarie C_n, appartenenti ad A, costituita dalle coppie di funzioni:

$$y_{1,n}(x) = \frac{1}{n}\, x\,,\ 0 \leq x \leq \cos \operatorname{arctg} \frac{1}{n}\,;\ y_{2,n}(z) = z^n\,,\ 0 \leq z \leq 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Si ha:

$$I(y_{1,n}, y_{2,n}) = \int_0^{\cos \operatorname{arctg}\frac{1}{n}} \int_0^1 \frac{1}{n^2}\, n^2 z^{2n-2}\, dx\, dz = \left(\cos \operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2n-1} > 0.$$

Ma l'estremo inferiore di $I(y_{1,n}, y_{2,n})$ in K è lo zero, poichè $\left(\cos \operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2n-1} \to 0$, per $n \to +\infty$. Si osservi che l'intervallo di definizione di ciascuna $y_{1,n}(x)$ è certo $\geq \frac{1}{2}$ e quello di ciascuna $y_{2,n}(z)$ è $= 1$.

III) Si consideri nel campo A degli esempi precedenti la funzione $f = y'^2_1 + y'^2_2 + h$, con h costante > 2.

Sia K la classe completa delle curve ordinarie C, appartenenti ad A, costituita dalle coppie di funzioni:

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b}\, x\ (0 \leq x \leq b)\,;\ y_2(z) = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b}\, z\ (0 \leq z \leq b)\,,$$

per ogni b tale che $0 < b \leq 1$.

Risulta:

$$I(y_1, y_2) = \int_0^b \int_0^b \left(\frac{1-b^2}{b^2} + \frac{1-b^2}{b^2} + h \right) d\,x\,d\,z = (h-2)\,b^2 + 2 > 2\,;$$

ma l'estremo inferiore di $I(y_1, y_2)$ in K è 2.

Questi semplici esempi ci suggeriscono queste osservazioni:

a) se non si fanno ipotesi sulla classe K di curve in cui si cerca il minimo, il minimo può non esistere anche nei casi in cui la funzione f è estremamente semplice (esempi I e III). *L'ipotesi che noi porremo sulla classe completa* K *di curve* $C\,[y_1(x), a \leq x \leq b\,; y_2(z), c \leq z \leq d]$ *è che esista una costante* $\eta > 0$, *tale che per ogni curva* C *di* K *sia* $d - c \geq \eta$, $b - a \geq \eta$. *Indicheremo con* K_η *una tale classe.*

b) il funzionale del tipo $\int_a^b \int_c^d y_1'^2\, y_2'^2\, d\,x\,d\,z$ presenta anomalie anche se ci si limita alle classi K_η sopra definite (esempio II); il che ci porterà ad indirizzare le nostre ricerche nel modo che risulterà dal paragrafo seguente.

Le dimostrazioni dei teoremi che daremo risultano dall'adattare opportunamente noti ragionamenti del TONELLI [25]; perciò svilupperemo solo la prima e per le altre daremo un cenno e metteremo in rilievo le modifiche essenziali.

§ 2. — Teoremi sull'esistenza del minimo di $I(y_1, y_2)$ in campi limitati

1. — In tutto questo paragrafo supporremo i campi A_1 e A_2 (e quindi il campo A) limitati.

TEOREMA I. *Supposto che:*

I) *la funzione* f *soddisfi all'ipotesi* 1), 2), 4) [oppure 4')] [26] (v. *Introduzione*);

---

[25] v. luogo citato in [24].

[26] La 4) e la 1)' potrebbero essere generalizzate secondo quanto si è osservato nelle note [5] e [10].

II) *esistano due funzioni* $\Phi_1(u)$ e $\Phi_2(u)$ *definite per* $0 \leq u < +\infty$, *ambedue inferiormente limitate e tali che sia* $\Phi_1(u) : u \to +\infty$, $\Phi_2(u) : u \to +\infty$, *per* $u \to +\infty$, *per le quali sia, in tutto* Λ *e per ogni* y'_1 *e* y'_2:

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq \Phi_1(|y'_1|) \tag{1}$$

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq \Phi_2(|y'_2|); \tag{1'}$$

allora in ogni classe completa K_η *di curve C ordinarie, appartenenti ad* Λ, *esiste il minimo assoluto di* $I(y_1, y_2)$.

L'estremo inferiore i di $I(y_1, y_2)$ in K_η è finito, perchè, detto Φ_0 il più piccolo dei due estremi inferiori di $\Phi_1(u)$ e $\Phi_2(u)$ in $(0, +\infty)$ e detti D_1 e D_2 rispettivamente le massime differenze fra gli x dei punti di A_1 e gli z dei punti di A_2, si ha $I(y_1, y_2) \geq -|\Phi_0| D_1 D_2$ su ogni curva di K_η.

Sia ora $\{C_n[y_{1,n}(x), a_n \leq x \leq b; y_{2,n}(z), c_n \leq z \leq d_n]\}$ una successione di curve minimizzante per $I(y_1, y_2)$ in K_η (27), per le quali è dunque:

$$I(y_{1,n}, y_{2,n}) \leq i + \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Le funzioni $y_{1,n}(x)$ sono equiassolutamente continue. Preso infatti $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia Y' un numero positivo tale che, in virtù dell'ipotesi II), per $|y'_1| \geq Y'$ sia

$$\frac{\Phi_1(|y'_1|)}{|y'_1|} > \frac{2(i + 1 + |\Phi_0| D_1 D_2)}{\varepsilon \eta}.$$

Siano ora (α_r, β_r) $(r = 1, \ldots, m)$ un qualsiasi gruppo di intervalli di (a_n, b_n) non sovrapponentisi; diciamo E_1 l'insieme dei punti degli (α_r, β_r) in cui $y'_{1,n}(x)$ esiste finita ed in modulo $< Y'$, e E_2 l'insieme dei rimanenti punti degli (α_r, β_r). Potremo allora scrivere:

$$\left| \sum_{r=1}^{m} \{y_{1,n}(\beta_r) - y_{1,n}(\alpha_r)\} \right| \leq \sum_{r=1}^{m} \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |y'_{1,n}(x)|\, dx < Y' m(E_1) +$$

$$+ \frac{\varepsilon \eta}{2(i + 1 + |\Phi_0| D_1 D_2)} \int_{E_2} \Phi_1(|y'_{1,n}(x)|)\, dx \leq Y' m(E_1) +$$

---

(27) Per semplicità usiamo le successioni di curve minimizzanti, anzichè le successioni di insiemi di curve minimizzanti.

$$+\frac{\varepsilon\,\eta}{2\,(i+1+|\,\Phi_0\,|\,D_1\,D_2)\,(d_n-c_n)}\int_{c_n}^{d_n}\int_{E_2}\Phi_1\,(\,|\,y'_{1,n}\,(x)\,|\,)\,d\,z\,d\,x\leq Y'm\,(E_1)\,+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2\,(i+1+|\,\Phi_0\,|\,D_1\,D_2)}\int_{c_n}^{d_n}\int_{E_2}f(x,z,y_{1,n}(x),y_{2,n}(z),y'_{1,n}(x),y'_{2,n}(z))\,d\,z\,d\,x\leq Y'm(E_1)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2(i+1+|\,\Phi_0|\,D_1\,D_2)}\{I(y_{1,n},y_{2,n})\;|\;\;\Phi_0\,|(d_n-c_n)(b_n-a_n)\}\leq Y'\sum_{r=1}^{m}(\beta_r-\alpha_r)+\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sicchè, se è $\sum_{r=1}^{m}(\beta_r-\alpha_r)\leq\frac{\varepsilon}{2\,Y'}$, si ottiene: $\left|\sum_{r=1}^{m}\{y_{1\,n}\,(\beta_r)-y_{2,n}\,(\alpha_r)\}\right|\leq\varepsilon$. In modo analogo, sfruttando la (1′), si dimostra l'equiassoluta continuità delle $y_{2,n}\,(z)$. Allora, poichè A è limitato, potremo estrarre dalla $\{\,C_n\,\}$ un'altra successione $\{\,C_{n_k}\}$ per la quale sia

$$I\,(y_{1,n_k}\,,\,y_{2,n_k})\leq i+\frac{1}{n_k} \tag{3}$$

è in modo che per $k\to+\infty$, $y_{1,n_k}(x)$ e $y_{2,n_k}(z)$ convergano uniformemente rispettivamente verso due funzioni $\overline{y}_1\,(x)$ $(\overline{a}\leq x\leq\overline{b}\,;\,\overline{b}-\overline{a}\geq\eta)$ e $\overline{y}_2\,(z)$ $(\overline{c}\leq$ $\leq z\leq\overline{d}\,;\,\overline{d}-\overline{c}\geq\eta)$, assolutamente continue e tali che $\overline{C}\,[\overline{y}_1\,(x)\;\;\overline{y}_2\,(z)]$ appartenga ad A. Ma, in virtù delle ipotesi I) e II), e dai risultati richiamati nell'*Osservazione* II dell'*Introduzione*, dalle (3) segue che $I\,(\overline{y}_1\,,\,\overline{y}_2)$ esiste finito su $\overline{C}$, e quindi $\overline{C}$ appartiene a K_η.

Ne risulta allora immediatamente dalle (3) e dalla semicontinuità di $I\,(y_1\,,\,y_2)$ su $\overline{C}$, verificata in virtù della *Proposizione* I o I′ dell'*Introduzione*, secondo che la f soddisfa alla 4) o alla 4′), che è $I\,(\overline{y}_1\,,\,\overline{y}_2)=i$.

OSSERVAZIONE I. - L'esempio III) del n. 3 del paragrafo precedente mostra come, pur essendo verificate le ipotesi I) e II) del *Teorema* I, se si considera una classe K che non sia una K_η, il minimo di $I\,(y_1\,,\,y_2)$ in K può non esistere.

OSSERVAZIONE II. — L'ipotesi II) nel *teorema* I, può essere sostituita con la seguente:

II′) *esista un numero finito* N *tale che in tutti i punti di* A *e per ogni* y'_1 *e* y'_2 *sia*

$$f\,(x\,,\,z\,,\,y_1\,,\,y_2\,,\,y'_1\,,\,y'_2)\geq N$$

e inoltre sia

$$\lim_{|y_1'| \to \infty} \left| \frac{f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')}{y_1'} \right| = \infty \quad \textit{uniformemente rispetto a } (x, z, y_1, y_2, y_2')$$

$$\lim_{|y_2'| \to \infty} \left| \frac{f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')}{y_2'} \right| = \infty \quad \textit{uniformemente rispetto a } (x, z, y_1, y_2, y_1').$$

Infatti, nelle altre ipotesi sulla f ammesse nel *teorema* I, si dimostra, con considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte dal TONELLI nel n. 11 della Memoria citata in ([24]), che la II) e la II') sono equivalenti.

Il *teorema I* risulta così, nelle due forme equivalenti corrispondenti alla II) e alla II'), l'estensione ad $I(y_1, y_2)$ dei due teoremi equivalenti di NAGUMO e MC SHANE, relativi all'integrale semplice di linea in forma ordinaria (v. ad es. Memoria citata in ([24]) n. 9-11).

2. — TEOREMA II. — *Supposto che:*

I) *la funzione f soddisfi alle ipotesi* 1), 2), 4) [*oppure* 4')] ([28]);

II) *ogni punto $(\bar{x}, \bar{y}_1)$ di A_1 soddisfi o alla condizione* [condizione α_1)] *che esistano un numero $\varrho_1 > 0$ e una funzione $\Phi_1(u)$, definita per $0 \leq u < +\infty$, inferiormente limitata e tale che sia $\Phi_1(u) : u \to +\infty$, per $u \to +\infty$, per la quale si abbia per (x, y_1) distante in A_1 al più di ϱ_1 da $(\bar{x}, \bar{y}_1)$, (z, y_2) appartenente ad A_2 e y_1' e y_2' qualunque:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq \Phi_1(|y_1'|),$$

oppure alla condizione [condizione β_1)] *che ad esso si possano far corrispondere 2 funzioni $\varphi(t)$, $\psi(t)$ e 3 costanti $l > 0$, $\alpha > 0$ e μ, con $\varphi(t)$ definita in $(0, l)$, non negativa, tendente a $+\infty$ per $t \to +0$, e integrabile in $(0, l)$, e $\psi(t)$ definita in $(0, +\infty)$, non negativa, non decrescente, tali che per $t \to +0$, sia*

$$t\,\varphi(t)\,\psi(\varphi(t)) \to \infty,$$

ed in modo che, in tutti gli (x, y_1) di A_1 appartenenti ad un opportuno intorno di $(\bar{x}, \bar{y}_1)$, per tutti gli (z, y_2) di A_2 e per y_1' e y_2' qualunque, sia:

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq |x - \bar{x}|^{\alpha} \, |y_1'|^{1+\alpha} \psi^{\alpha}(|y_1'|) + \mu;$$

([28]) v. nota ([26]).

II') *ogni punto* $(\bar{z}, \bar{y}_2)$ *di* A_2 *soddisfi o alla condizione* [condizione α_2)] *che esistano un numero* $\varrho_2 > 0$ *e una funzione* $\Phi_2(u)$, *definita per* $0 \leq u < +\infty$, *inferiormente limitata e tale che sia* $\Phi_2(u) : u \to +\infty$, *per* $u \to +\infty$, *per la quale si abbia per* (z, y_2) *distante in* A_2 *al più di* ϱ_2 *da* $(\bar{z}, \bar{y}_2)$, (x, y_1) *appartenente ad* A_1 *e* y_1' *e* y_2' *qualunque:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq \Phi_2(|y_2'|);$$

oppure alla condizione [condizione β_2)] *che ad esso possano farsi corrispondere due funzioni* $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ *e* 3 *costanti* $l > 0$, $\alpha > 0$, *e* μ, *soddisfacenti alle stesse ipotesi delle analoghe funzioni e costanti della* condizione β_1), *in modo che, in tutti gli* (z, y_2) *di* A_2 *appartenenti ad un opportuno intorno di* $(\bar{z}, \bar{y}_2)$, *per tutti gli* (x, y_1) *di* A_1 *e per* y_1' *e* y_2' *qualunque, sia:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq |z - \bar{z}|^{\alpha} |y_2'|^{1+\alpha} \psi^{\alpha}(|y_2'|) + \mu;$$

allora in ogni classe completa K_η *di curve ordinarie* C, *appartenenti ad* A, *esiste il minimo assoluto di* $I(y_1, y_2)$.

Questo teorema estende a $I(y_1, y_2)$ il teorema di L. TONELLI del n. 12 pag. 417 della Memoria citata in (24) relativo all'integrale $\int_a^b F(x, y, y')\,dx$: la dimostrazione si ottiene con gli stessi ragionamenti del TONELLI, tenendo presenti alcune osservazioni. Anzitutto dalle ipotesi II) e II') segue che esiste un $\bar{\mu}$ tale che sia sempre $f \geq \bar{\mu}$ e quindi che l'estremo inferiore i di $I(y_1, y_2)$ in K_η è finito. Si dimostra poi che, considerata in K_η una successione minimizzante $\{C_n[y_{1,n}(x), a_n \leq x \leq b_n; y_{2,n}(z), c_n \leq z \leq d_n]\}$ sia le $y_{1,n}(x)$ che le $y_{2,n}(z)$ sono equiassolutamente continue: per le prime si sfrutta l'ipotesi II) e per le seconde la II'), tenendo presente l'accorgimento, già usato nel numero precedente e accennato nel n. 2, § 1, della disuguaglianza:

$$\int_E |y_{1,n}'(x)|\,dx \leq \frac{1}{\eta} \int_{c_n}^{d_n} \int_E |y_{1,n}'(x)|\,dz\,dx$$

(dove η è la costante relativa alla classe K_η), che vale quando E è una qualunque insieme misurabile di (a_n, b_n), e di quella analoga relativa a $y_{2,n}(z)$.

Si ottiene così una curva $\bar{C}[\bar{y}_1(x), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}; \bar{y}_2(z), \bar{c} \leq z \leq \bar{d}]$ di accumulazione delle C_n, con $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(z)$ assolutamente continue.

Per provare l'integrabilità di $f(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z))$ nel rettangolo $R: \bar{a} \leq x \leq \bar{b}, \bar{c} \leq z \leq \bar{d}$, si osservi, come fa il TONELLI, che sono in numero finito $x_r\,(r = 1, \ldots, \nu)$ i punti di $(\bar{a}, \bar{b})$ tali che $[x_r, \bar{y}_1(x_r)]$ soddisfi alla *condizione* β_1) e sono pure in numero finito $z_s\,(s = 1, \ldots, \nu')$ i punti di $(\overline{c}, \overline{d})$ tali che $[z_s, \overline{y}_2(z_s)]$ soddisfi alla *condizione* β_2). Si divida ora R in tanti rettangolini mediante le rette $x = x_r\ (r = 1, \ldots, \nu)$ e $z = z_s$ $(s = 1, \ldots, \nu)$. Dico che la $f(x, z, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z), \overline{y}'_1(x), \overline{y}'_2(z))$ è integrabile su ognuno di questi rettangolini e quindi su tutto R. Infatti sia $R_{r,s}\,[x_r \leq \leq x \leq x_{r+1};\ z_s \leq z \leq z_{s+1}]$ uno di essi. La $f(x, z, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z), \overline{y}'_1(x), \overline{y}'_2(z))$ risulta integrabile in ogni rettangolo $R'\,(\alpha \leq x \leq \beta;\ \gamma \leq z \leq \delta]$ con $x_r < < \alpha < \beta < x_{r+1}$, $z_s < \gamma < \delta < z_{s+1}$: infatti, essendo $f \geq \overline{\mu}$, dalle relazioni $I(y_{1,n}, y_{2,n}) \leq i + \dfrac{1}{n}$, soddisfatte dalla successione minimizzante $\{C_n\}$, risulta che sono superiormente equilimitate anche tutte le parti degli integrali $I(y_{1,n}, y_{2,n})$ relative agli archi delle C_n per cui le $y_{1,n}(x)$ sono definite in tutto (o in parte) (α, β) e le $y_{2,n}(z)$ in tutto (o in parte) (γ, δ), e allora la *condizione* α_2), se la f soddisfa alla 4), e la *condizione* α_1), se la f soddisfa alla 4') (insieme naturalmente all'ipotesi I)) ci assicurano l'integrabilità di $f(x, z, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z), \overline{y}'_1(x), \overline{y}'_2(z))$ su R', in virtù dei risultati contenuti nell'*Osservazione* II dell'*Introduzione.*

Per la semicontinuità inferiore che, in virtù della *condizione* α_2) e della *Proposizione* II dell'*Introduzione,* se la f soddisfa alla 4), o della *condizione* α_1) e della *Proposizione* II' dell'*Introduzione,* se la f soddisfa alla 4'), è ora assicurata sull'arco di $\overline{C}: \overline{y}_1(x), \alpha \leq x \leq \beta, \overline{y}_2(z), \gamma \leq z \leq \delta$, segue allora:

$$\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta [f(x, z, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z), \overline{y}'_1(x), \overline{y}'_2(z)) - \overline{\mu}]\, dx dz < i + 1 + |\overline{\mu}|\, D_1 D_2;$$

e di qui, poichè è $f - \overline{\mu} \geq 0$, ricaviamo l'integrabilità su tutto $R_{r,s}$ di $f(x, z, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z), \overline{y}'_1(x), \overline{y}'_2(z))$.

Si può allora concludere, come nella dimostrazione del TONELLI, che è $I(\overline{y}_1, \overline{y}_2) = i$.

OSSERVAZIONE. — Si osservi che le *condizioni* α_1) e α_2) potrebbero essere enunciate in un'altra forma perfettamente equivalente, in virtù di quanto si è detto nella *Osservazione* II del numero precedente.

3. — TEOREMA III. — *Supposto che:*

I) *La funzione f soddisfi alle ipotesi* 2) *e* 4) [*oppure* 4')] [29];

II) $I(y_1, y_2)$ *sia quasi-regolare positivo seminormale rispetto a* y'_1;

II') $I(y_1, y_2)$ *sia quasi-regolare positivo seminormale rispetto a* y'_2;

III) *i punti* $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ *di* A_1 *in cui non è soddisfatta la* condizione α_1) (*v. n. precedente*) *costituiscano un insieme* G_1 *giacente in parte su un numero*

---

(29) V. n. (26).

finito o un'infinità numerabile di curve $y_1 = \varphi_{1,\nu}(x)$, $a_\nu \leq x \leq b_\nu$ *con* $\varphi_{1,\nu}(x)$ *funzione assolutamente continua, ed in parte su rette* R_1 *parallele all'asse delle* x *e intersecanti l'asse delle* y_1 *in un insieme di punti di misura nulla;*

III') *i punti* $(\overline{z}, \overline{y}_2)$ *di* A_2 *in cui non è soddisfatta la* condizione α_2) (*v. n. precedente*) *costituiscano un insieme* G_2 *giacente in parte su un numero finito o un'infinità numerabile di curve* $y_2 = \varphi_{2,\nu}(z)$, $c_\nu \leq z \leq d_\nu$, *con* $\varphi_{2,\nu}(z)$ *funzione assolutamente continua, ed in parte su rette* R_2 *parallele all'asse delle* z *ed intersecanti l'asse delle* y_2 *in un insieme di misura nulla:*

allora in ogni classe completa K_η *di curve ordinarie* C, *appartenenti ad* A, *esiste il minimo assoluto di* $I(y_1, y_2)$.

La dimostrazione si ottiene in modo del tutto analogo a quella data dal TONELLI per il teorema del numero n. 16, pag. 422-423 della Memoria citata in ([24]); si dimostra anzitutto che per le curve $C[y_1(x), a \leq x \leq b, y_2(z), c \leq z \leq d]$ di K_η soddisfacenti alla $I(y_1, y_2] \leq M$, con M numero fisso, sia le funzioni $y_1(x)$ che quelle $y_2(z)$ sono ugualmente continue, sfruttando rispettivamente le ipotesi III) e III'); sarà utile ricordare perciò i *lemmi* del n. 2, § 1, l'accorgimento della disuguaglianza:

$$\int_E | y_1'(x) | \, dx \leq \frac{1}{\eta} \int_c^d \int_E | y_1'(x) | \, dz \, dx$$

che vale quando E è un qualunque insieme misurabile di (a, b), e di quella analoga relativa a $y_2(z)$, ed il fatto che la quasi-regolarità positiva di $I(y_1, y_2)$ permette di considerare anche l'integrale

$$\int_a^b \int_c^d [f \quad (P + Q y_1' + R y_2' + S y_1' y_2'] \, dx \, dz$$

in cui la funzione integranda è sempre ≥ 0.

Si può allora considerare in K_η una successione minimizzante che converga uniformemente ad una curva $[\overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z)]$, che, in modo analogo alla dimostrazione del TONELLI, si dimostra essere una «curva C». In virtù delle ipotesi I) e II'), se la f soddisfa alla 4), e I) e II), se la f soddisfa alla 4'), è possibile allora applicare i risultati dell'*Osservazione* II e delle *Proposizioni* II e II' dell'*Introduzione*, così da assicurare che la «curva C» ottenuta è anche ordinaria e che su di essa $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferiormente, onde concludere col teorema.

Un esempio in cui è applicabile il *teorema III*, ma non il *teorema I* è dato dalla funzione $f = (y_1^2 + y_2^2)(y_1'^2 + y_2'^2) + \sqrt{1 + y_1'^2} + \sqrt{1 + y'^2}$, considerata in un campo A che contenga punti le cui coordinate y_1 e y_2 siano ambedue nulle.

4. — TEOREMA IV. — *Supposto che:*

I) *la funzione f soddisfi alle ipotesi* 2) *e* 4) [*oppure* 4')] [30];

II) $I(y_1, y_2)$ *sia quasi regolare positivo;*

III) *i punti* $(\bar{x}, \bar{y}_1)$ *di* A_1 *in cui non è soddisfatta nè la* condizione α_1) *nè quella* β_1) (*v. n.* 2 *di questo paragrafo*) *costituiscano un insieme* G_1 *soddisfacente alle condizioni espresse nella* III) *del n. precedente;*

IV) *per ogni punto* $(\bar{x}, \bar{y}_1)$ *di* G_1 *e ogni punto* $(\bar{z}, \bar{y}_2)$ *di* A_2 *si possano determinare* 7 *numeri* p, q, r, s, ν, ϱ *e* Y' *con* ν *e* ϱ *positivi e* $Y' \geq 1$, *tali che in tutti i punti* (x, z, y_1, y_2) *di* A *per i quali* (x, y_1) *dista, nel campo* A_1, *da* $(\bar{x}, \bar{y}_1)$ *per non più di* ϱ *e* (z, y_2) *dista, nel campo* A_2, *da* $(\bar{z}, \bar{y}_2)$ *per non più di* ϱ, *sia:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) > p + q\, y'_1 + r\, y'_2 + s\, y'_1\, y'_2$$

per ogni valore di y'_1 *e* y'_2 *e:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (p + q\, y'_1 + r\, y'_2 + s\, y'_1\, y'_2) > \nu \mid y'_1 \mid$$

per ogni valore di y'_2 *e per* $\mid y'_1 \mid \geq Y'$.

III') *i punti* $(\bar{z}, \bar{y}_2)$ *di* A_2 *in cui non è soddisfatta nè la* condizione α_2) *nè quella* β_2) (*v. n.* 2 *di questo paragrafo*) *costituiscano un insieme* G_2 *soddisfacente alle condizioni espresse nella* III') *del n. precedente;*

IV') *per ogni punto* $(\bar{z}, \bar{y}_2)$ *di* G_2 *e ogni punto* (x, y_1) *di* A_1 *si possano determinare* 7 *numeri* p, q, r, s, ν, ϱ *e* Y' *con* ν *e* ϱ *positivi e* $Y' \geq 1$, *tali che in tutti i punti* (x, z, y_1, y_2) *di* A *per i quali* (x, y_1) *dista, nel campo* A_1, *da* $(\bar{x}, \bar{y}_1)$ *per non più di* ϱ *e* (z, y_2) *dista, nel campo* A_2, *da* $(\bar{z}, \bar{y}_2)$ *per non più di* ϱ, *sia:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq p + q\, y'_1 + r\, y'_2 + s\, y'_1\, y'_2$$

per ogni valore di y'_1 *e* y'_2 *e:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (p + q\, y'_1 + r\, y'_2 + s\, y'_1\, y'_2) > \nu \mid y'_2 \mid$$

per ogni valore di y'_1 *e per* $\mid y'_2 \mid > Y'$;
allora in ogni classe completa K_η *di curve ordinarie* C, *appartenenti ad* A, *esiste il minimo assoluto di* $I(y_1, y_2)$.

---

[30] v. nota [26].

La dimostrazione si ottiene adattando opportunamente quella del corrispondente teorema del n. 17 pag. 426-427 della Memoria citata in ([24] del TONELLI, secondo le osservazioni già fatte nel n. 2 e 3 precedenti; è opportuno inoltre ricordare le *Osservazioni* I e I' dell'*Introduzione.*

Osserviamo che il *teorema* IV comprende i precedenti *teoremi* I, II, III

§ 3. — L'esistenza del minimo di $I(y_1, y_2)$ in campi illimitati

1. — TEOREMA GENERALE: *In ogni classe completa* K_η *di curve ordinarie* $C[y_1(x), y_2(z)]$ *aventi almeno un punto* $[\bar{x}, \bar{z}, y_1(\bar{x}), y_2(\bar{z})]$ *in un dato insieme chiuso e limitato del campo* A, *esiste il minimo assoluto di* $I(y_1, y_2)$, *se:*

a) *il valore di* $I(y_1, y_2)$ *relativo ad una qualunque curva* C *di* K_η *tende a* $+\infty$ *col tendere a* $+\infty$ *del massimo della somma* $x^2 + y_1^2(x) + z^2 + y_2^2(z)$;

b) *in ogni campo limitato e chiuso appartenente ad* A *sono verificate le condizioni di uno qualunque dei teoremi del paragrafo precedente.*

La dimostrazione è la stessa data da TONELLI per l'integrale semplice di linea nel vol. II, n. 90 *a*), pag. 307 dei suoi « Fondamenti di Calcolo delle Variazioni » (Bologna 1921-23).

2. — Si possono ora dare dei criteri che assicurino che la condizione a) del teorema precedente sia soddisfatta, del tutto analoghi a quelli noti per l'integrale semplice di linea ([31]).

Mi limito ad enunciare i due seguenti:

I) La condizione a) del teorema del n. precedente è verificata per ogni classe completa K_η di curve ordinarie C aventi almeno un punto in un insieme limitato e chiuso di A, se: 1) *esiste un numero* $c > 0$ *per cui in tutti i punti di* A *sia* $-c \leq x \leq c$, $-c \leq z \leq c$; 2) *esiste un numero* N *per cui si abbia* $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') > N$ *per ogni valore di* y_1' *e* y_2' *e ogni punto* (x, z, y_1, y_2) *di* A; 3) *esistono 2 numeri positivi* λ_1 *e* λ_2 *e 2 funzioni*

([31]) Si veda: L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. II, n. 90 *b*), *c*), *d*), pag. 308-312; E. J. MC SHANE, luogo citato in ([23]) pag. 302-304; S. CINQUINI: 1) *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine* n (Annali Scuola Normale Sup. di Pisa (2) vol. V - 1936, pp. 169-190) § 3, pp. 184-190; 2) *Nuovi teoremi di esistenza dell'estremo in campi illimitati per i problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine* n (Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa (2), vol. VI, 1937, pp. 191-209); 3) *Sopra l'esistenza dell'estremo in campi illimitati* (Rend. Acc. dei Lincei, (8), vol. IV, (1948), pp. 675-687); S. FAEDO, *Su un teorema di esistenza del Calcolo delle Variazioni e una proposizione generale del Calcolo Funzionale* (Ann. Scuola Normale Sup. di Pisa (2), vol. XII, (1943), pp. 119-134).

$\varphi_1(u)$ *e* $\varphi_2(u)$, *definite rispettivamente per* $|u| \geq \lambda_1$ *e* $|u| \geq \lambda_2$, *continue, non negative e tali che*:

$$\int_{\lambda_1}^{+\infty} \varphi_1(u)\,du = \int_{-\infty}^{\lambda_1} \varphi_1(u)\,du = \int_{\lambda_2}^{+\infty} \varphi_2(u)\,du = \int_{-\infty}^{-\lambda_2} \varphi_2(u)\,du = +\infty,$$

in modo che si abbia in tutti i punti (x, z, y_1, y_2) *di* A *con* $|y_1| \geq \lambda_1$:

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') > |y_1'|\,\varphi_1(y_1) \tag{4}$$

per ogni y_2' *e per* $|y_1'| \geq \dfrac{1}{\varphi_1(y_1)}$;

e in tutti i punti di A *con* $|y_2| \geq \lambda_2$:

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') > |y_2'|\,\varphi_2(y_2) \tag{5}$$

per ogni y_1' *e per* $|y_2'| > \dfrac{1}{\varphi_2(y_2)}$.

Si osservi che se A è illimitato uno almeno dei 2 campi A_1 e A_2 deve essere illimitato; possiamo allora aggiungere che nel criterio I l'esistenza della $\varphi_1(u)$ $[\varphi_2(u)]$ e la (4) [(5)] sono richieste solo se A_1 $[A_2]$ è illimitato.

Per la dimostrazione si adattano immediatamente i ragionamenti di S. CINQUINI [32], tenendo presente che ogni curva C appartiene alla classe K_η considerata e che il tendere a $+\infty$ del massimo della somma $x^2 + z^2 + y_1^2(x) + y_2^2(z)$ comporta il tendere a $+\infty$ di uno almeno dei massimi delle somme $x^2 + y_1^2(x)$ e $z^2 + y_2^2(z)$.

II — La condizione a) del teorema del n. precedente è verificata per ogni classe K_η di curve ordinarie C aventi almeno un punto in un insieme chiuso e limitato di A se: 1) *esistono* 4 *numeri* a^*, b^*, c^*, d^* *per cui in tutti i punti di* A *sia* $a^* \leq x \leq b^*$, $c^* \leq z \leq d^*$; 2) *è*:

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \equiv g_1(x, z, y_1', y_2')\; g_2(x, z, y_1, y_2)$$

ed è possibile determinare 2 *numeri* $h_1 > b^* - a^*$, $h_2 > d^* - c^*$ *e* 2 *coppie di funzioni* $\psi_1(u), \psi_2(u)$ e $\varphi_1(u), \varphi_2(u)$ *definite e continue per* $u \geq 0$, *non decrescenti, con* $\psi_1(u)$ e $\varphi_1(u)$ *concave verso l'alto, tali che sia*

$$\psi_1(u) - \psi_2(u) \to +\infty \quad \text{e} \quad \varphi_1(u) - \varphi_2(u) \to +\infty, \quad \text{per } u \to +\infty,$$

---

[32]) v. luogo citato per primo in [31]) n. 12 e 14.

in modo che risulti in tutti i punti di A e per ogni y'_1 e y'_2:

$$g_1(x, z, y'_1, y'_2) \geq \psi_1(h_1 \mid y'_1 \mid), \qquad g_2(x, z, y_1, y_2) \leq \psi_2(\mid y_1 \mid) \tag{6}$$

$$g_1(x, z, y'_1, y'_2) \geq \varphi_1(h_2 \mid y'_2 \mid), \qquad g_2(x, z, y_1, y_2) \leq \varphi_2(\mid y_2 \mid) \tag{7}$$

Anche qui la (6) [(7)] è richiesta solo se A_1 [A_2] è illimitato. Per la dimostrazione si veda: L. TONELLI, luogo citato in ([31]) n. 90 (d) e S. CINQUINI, luogo citato per primo in ([31]) n. 11. Si osservi anche che le (6) e (7) possono essere sostituite con le:

$$g_1(x, z, y'_1, y'_2) \geq \psi_1(h_1 \mid y'_1 \mid) + \varphi_1(h_2 \mid y'_2 \mid)$$

$$g_2(x, z, y_1, y_2) \leq \psi_2(\mid y_1 \mid) + \varphi_2(\mid y_2 \mid)$$

3. — Nel teorema generale del n. 1 si è fatta l'ipotesi che ogni curva della classe K_η, che si considera, abbia almeno un punto in un dato insieme chiuso e limitato del campo A; si potrebbe ora considerare il caso in cui ciò non avvenga; un risultato in proposito, sotto opportune ipotesi sulla funzione f, si potrebbe ottenere immediatamente estendendo ad $I(y_1, y_2)$ i ragionamenti e il teorema di S. CINQUINI sull'esistenza dell'estremo in campi illimitati per l'integrale semplice di linea, contenuti in una Nota del 1938 ([33]). Ma su ciò non mi soffermo oltre.

([33]) S. CINQUINI: *Un teorema di esistenza dell'estremo in campi illimitati* (Rend. Ist Lombardo Scienze e Lett. vol. LXXI, 1938).

CAPITOLO II

Il minimo di $I(y)$

§ 1. - Preliminari.

1. — *Definizioni.* — Manteniamo anche per $I(y)$ le definizioni e la nomenclatura del n. 2 dell'*Introduzione*.

Le definizioni date per $I(y_1, y_2)$ nel n. 1, § 1, cap. I di *curva di accumulazione* e di *classe completa* si trasportano in modo ovvio a $I(y)$.

Così pure si capisce, tenendo presente l'osservazione sulla nomenclatura da usare, fatta nel n. 2 dell'*Introduzione*, come si trasportino le definizioni di integrale *quasi regolare positivo* e *quasi-regolare positivo seminormale rispetto a* y'_1 (*e a* y'_2).

È utile per $I(y)$ introdurre anche la definizione di integrale *quasi-regolare positivo seminormale rispetto a* $y'_1 y'_2$; *tale si dirà* $I(y)$ *se è quasi regolare positivo e se per ogni punto* $(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}_1, \overline{y}_2)$ *di* $A^2 = A \times A$ *si possono determinare 7 numeri* p, q, r, s, ν, ϱ *e* Y' *con* ν *e* ϱ *positivi e* $Y' \geq 1$, *tali che in tutti i punti* (x, z, y_1, y_2) *di* A^2 *per i quali* (x, y_1) *e* (z, y_2) *distano in* A *rispettivamente da* $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ *e* $(\overline{z}, \overline{y}_2)$ *per non più di* ϱ, *sia*:

$$(\gamma^*) \qquad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq p + q y'_1 + r y'_2 + s y'_1 y'_2$$

per ogni valore di y'_1 *e* y'_2; *ed inoltre per i punti di* A^2 *tali che* $\overline{x} = \overline{z}$, $\overline{y}_1 = \overline{y}_2$ *sia anche nei punti* (x, z, y_1, y_2) *di* A^2 *per cui* (x, y_1) *e* (z, y_2) *distano in* A *da* $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ *per non più di* ϱ:

$$(\gamma'^*) \qquad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) - (p + q y'_1 + r y'_2 + s y'_1 y'_2) \geq \nu \, | y'_1 | \, | y'_2 |$$

per $| y'_1 | \geq Y'$ *e* $| y'_2 | \geq Y'$.

Considereremo in questo capitolo classi complete di curve ordinarie $C[y(x), a \leq x \leq b]$, che soddisfano alla condizione che esista una costante $\eta > 0$ tale che per ogni curva C della classe sia $b - a \geq \eta$. Indicheremo tali classi con K_η. Le classi complete cui non si imponga questa condizione, le indicheremo semplicemente con K.

2. LEMMI. — Come per $I(y_1, y_2)$ (v. n. 2, § 1, cap. I) è possibile dimostrare il seguente *lemma* I:

Se $I(y)$ è quasi-regolare positivo seminormale rispetto a y'_1 o a y'_2 e se H *è una classe di curve ordinarie $C[y(x), a \leq x \leq b]$ appartenenti ad un campo* A *limitato e soddisfacenti alle:*

$$b \quad a \geq \eta \qquad I(y) \leq M$$

con η costante positiva e M *numero fisso, le variazioni totali delle funzioni $y(x)$ sono tutte inferiori ad uno stesso numero.*

Per $I(y)$ vale anche il seguente *lemma* II:

Se $I(y)$ è quasi-regolare positivo seminormale rispetto a $y'_1 y'_2$ e se H *è una classe di curve ordinarie $C[y(x), a \leq x \leq b]$ appartenenti ad un campo* A *limitato e soddisfacenti alla:*

$$I(y) \leq M$$

con M *numero fisso, le variazioni totali delle funzioni $y(x)$ sono tutte inferiori ad uno stesso numero.*

Anche questo lemma si dimostra adattando un ragionamento di E. J. Mc. SHANE, citato nel n. 2, § 1, cap. I, mediante gli artifici già da me usati nel dimostrare la (28) del n. 3, § 1, cap. II, M. I.

Vale anche per questi 2 lemmi un'osservazione analoga a quella fatta nel n. 2, § 1, cap. I.

§ 2. - Teoremi sull'esistenza del minimo di $I(y)$ in campi limitati

1. — In tutto questo paragrafo supporremo il campo A limitato.

La ricerca di criteri di esistenza per il minimo di $I(y)$ offre maggiori possibilità di quella per $I(y_1, y_2)$, poiche dipendendo $I(y)$ da una sola funzione $y(x)$, non si presentano certe particolarità che compaiono invece per $I(y_1, y_2)$.

Anzitutto è chiaro che *tutti i teoremi ottenuti nel cap. I sono altrettanti criteri di esistenza anche per $I(y)$, in classi complete K_η di curve ordinarie* C.

Anzi gli stessi teoremi valgono in ipotesi più ampie sulla funzione f, in quanto la curva C dipende ora da una sola funzione $y(x)$. Nelle ipotesi dei suddetti teoremi compaiono infatti coppie di condizioni simmetriche rispetto alle 2 terne di variabili (x, y_1, y'_1) e (z, y_2, y'_2), la validità di una sola qualunque di esse essendo sufficiente per ripetere su $I(y)$ le stesse dimostrazioni. Così il ragionamento che ha servito per il *teorema 1* può servire ancora ad assicurare l'esistenza del minimo di $I(y)$ in ogni classe completa K_η, quando siano soddisfatte le ipotesi 1), 2), 4) e II) (1') [cioè l'esistenza della funzione $\Phi_2(u)$ dell'ipotesi II) soddisfacente alla (1')] oppure le 1), 2), 4') e II) (1) [cioè l'esistenza della funzione $\Phi_1(u)$ dell'ipotesi II) soddisfacente alla (1)] (v. n. 1, § 2, cap. I).

Analogamente valgono ancora per $I(y)$: il *teorema II* se sono soddisfatte le ipotesi 1), 2), 4) e II') oppure le 1), 2), 4') e II) (v. n. 2, § 2, cap. I), il *teorema* III se sono soddisfatte le ipotesi 2), 4), II'), III)', oppure le 2), 4'), II), III) (v. n. 3, § 2, cap. I) ed il *teorema* IV se sono soddisfatte le ipotesi 2), 4), II), III'), IV') oppure le 2), 4') II), III), IV) (v. n. 4, § 2, cap. I).

Indicheremo con *teorema* I', II', III', e IV' questi criteri analoghi ai *teoremi* I, II, III, IV del cap. I.

Sarà anche opportuno osservare che i teoremi I', II', III', IV' valgono solo in classi complete K_u di curve ordinarie; basta ricordare in proposito l'esempio III del n. 3, § 1, cap. I.

Ma accanto a questi risultati si possono ottenere per $I(y)$ anche altri tipi di criteri di esistenza del minimo, che sono validi qualunque sia la classe K completa di curve nella quale si consideri il funzionale; in quest'ordine di idee rientra per esempio lo studio dell'integrale $\int_a^b\int_a^b y'^2(x)y'^2(z)\,dx\,dz$, che ammette, come vedremo, il minimo assoluto in ogni classe completa K, a differenza di quanto si era invece visto per l'integrale $I(y_1, y_2) = \int_a^b\int_c^d y_1'^2(x)\,y_2'^2(z)\,d\,x\,d\,z$.

Daremo nei numeri seguenti alcuni teoremi in proposito.

2. — TEOREMA I''. *Supposto che:*

I) *la funzione* f *soddisfi alle ipotesi* 1), 2), 4) [*oppure* 4')] [34];

II) *la funzione* f *sia inferiormente limitata in tutto* A^2 *e per ogni valore di* y_1' *e* y_2';

III) *esistano un numero positivo* Y' *e una funzione* $\Phi(u, t)$, *definita per tutti gli* u *e* t *ambedue* $> \bar{Y}'$ *e tale che* $\Phi(u, t) : u\,t \to +\infty$ *per* $u\,t \to +\infty$, *per la quale si abbia in tutto* A^2 *e per* $|y_1'| \geq Y'$, $|y_2'| \geq \bar{Y}'$:

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq \Phi(|y_1'|, |y_2'|).$$

allora esiste il minimo assoluto di $I(y)$ *in ogni classe completa* K *di curve C ordinarie, appartenenti ad* A.

---

(34) v. nota (26)

Anche qui la dimostrazione si ottiene adattando opportunamente il ragionamento del n. 9 della Memoria del TONELLI citata in ([24]).

Anzitutto si osservi che, detto Φ_0 l'estremo inferiore della f e D la massima delle differenze fra le ascisse dei punti di A, risulta su ogni curva di K: $I(y) \geq - |\Phi_0| D^2$, e quindi l'estremo inferiore i di $I(y)$ in K è finito.

Sia ora $\{C_n [y_n(x), a_n \leq x \leq b_n]$ una successione di curve minimizzante per $I(y)$ in K, per cui dunque è:

$$I(y_n) \leq i + \frac{1}{n} \tag{1}$$

Preso $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia Y' un numero positivo $> \overline{Y}'$ tale che, in virtù dell'ipotesi III), risulti per $|y'_1| \geq Y'$, $|y'_2| \geq Y'$:

$$\frac{\Phi(|y'_1|, |y'_2|)}{|y'_1|\,|y'_2|} > \frac{4(i + 1 + |\Phi_0| D^2)}{\varepsilon^2}$$

Siano (α_r, β_r) $(r = 1, \ldots m)$ un qualsiasi gruppo di intervalli non sovrapponendosi di (a_n, b_n); diciamo E_1 l'insieme dei punti degli (α_r, β_r) $(r = 1, \ldots m)$ in cui $y'_n(x)$ esiste finita ed in modulo minore di Y' e E_2 l'insieme dei rimanenti punti degli (α_r, β_r) $(r = 1 \ldots m)$. Potremo scrivere

$$\left|\sum_{r=1}^{m} \{y_n(\beta_r) - y_n(\alpha_r)\}\right| \leq \sum_{r=1}^{m} \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |y'_n(x)|\, dx < Y'_m(E_1) + \int_{E_2} |y'_n(x)|\, dx =$$

$$= Y'_m(E_1) + \left\{\int_{E_2}\int_{E_2} |y'_n(x)|\,|y'_n(z)|\, dx\, dz\right\}^{1/2} < Y'_m(E_1) +$$

$$+ \left\{\frac{\varepsilon^2}{4(i + 1 + |\Phi_0| D^2)} \int_{E_2}\int_{E_2} \Phi(|y'_n(x)|, |y'_n(z)|)\, dx\, dz\right\}^{1/2} \leq Y'_m(E_1) +$$

$$+ \left\{\frac{\varepsilon^2}{4(i + 1 + |\Phi_0| D^2)} \int_{E_2}\int_{E^2} f(x, z, y_n(x), y'_n(z), y'_n(x) y'_n(z))\, dx\, dz\right\}^{1/2} \leq Y'_m(E_1) +$$

$$+ \left\{\frac{\varepsilon^2}{4(i + 1 + |\Phi_0| D^2)} \left[I(y_n) + |\Phi_0| (b_n - a_n)^2\right]\right\}^{1/2} \leq Y' \sum_{r=1}^{m} (\beta_r - \alpha_r) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sicchè se è

$$\sum_{r=1}^{m} (\beta_r - \alpha_r) \leq \frac{\varepsilon}{2\,Y'}\,,$$

si ottiene:

$$\left|\sum_{r=1}^{m} \{y_n(\beta_r) - y_n(\alpha_r)\}\right| < \varepsilon,$$

il che dimostra l'equi assoluta continuità delle $y_n(x)$.

Dalla $\{y_n(x)\}$ si può dunque estrarre una successione di funzioni convergenti uniformemente verso una funzione $\overline{y}(x)$ $(\overline{a} \leq x \leq \overline{b})$ assolutamente continua, appartenente ad A e sulla quale esiste finito il funzionale $I(y)$, in virtù delle ipotesi I) e III), delle (1) e dei risultati ricordati nell'*Osservazione* II* dell'*Introduzione*. Allora la semicontinuità inferiore di $I(y)$, che ci è assicurata, in virtù delle ipotesi I) e III), dalla *Proposizione* I* dell'*Introduzione*, e le (1) permettono di concludere che $I(\overline{y}) = i$.

OSSERVAZIONE. — In virtù di questo teorema il funzionale

$$\int_a^b \int_a^b y'^2(x)\, y'^2(z)\, d\,x\, d\,z$$

ammette il minimo assoluto in ogni classe completa di curve ordinarie C, appartenente ad un campo A limitato.

3. — TEOREMA II''. — *Supposto che:*

I) *la funzione f soddisfi alle ipotesi* 1), 2), 4) [*oppure* 4')] ([35]);

II) *esista un insieme* $G_{\overline{\beta}}$ *di punti di* A, *ogni punto* $(\overline{x}, \overline{y})$ *del quale soddisfi alla condizione* [condizione $\overline{\beta}$)] *che ad esso si possano far corrispondere 2 funzioni* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *e 3 costanti* $l > 0$, $\alpha > 0$ *e* μ, *con* $\varphi(t)$ *definita in* $(0, 1)$, *non negativa, tendente a* $+\infty$ *per* $t \to +0$ *e integrabile in* $(0, 1)$, *e* $\psi(t)$ *definita in* $(0, +\infty)$, *non negativa, non decrescente, tali che per* $t \to +0$ *sia*

$$t\,\varphi(t)\,\psi(\varphi(t)) \to +\infty,$$

ed in modo che, per tutte le coppie (x, y_1) *e* (z, y_2) *di punti di* A *appartenenti ad un opportuno intorno di* $(\overline{x}, \overline{y})$ *e per* y'_1 *e* y'_2 *qualunque sia:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq |x - \overline{x}|^{\alpha}\, |z - \overline{x}|^{\alpha}\, |y'_1|^{1+\alpha}\, |y'_2|^{1+\alpha}\, \psi^{\alpha}(|y'_1|)\, \psi^{\alpha}(|y'_2|) + \mu$$

III) *l'insieme* $G_{\overline{\alpha}} = A - G_{\overline{\beta}}$ *soddisfi alla condizione* [condizione $\overline{\alpha}$)] *che per ogni suo punto* $(\overline{x}, \overline{y})$ *esistano 2 numeri* ϱ *e* $\overline{Y}'$ *positivi ed una funzione* $\Phi(u, t)$, *definita per tutti gli* u *e* t *ambedue* $> \overline{Y}'$ *e tale che* $\Phi(u, t) : u\,t \to +\infty$

([35]) v. nota ([26]).

per $n \to \infty$, *in modo che per tutte le coppie* (x, y_1) *e* (z, y_2) *di punti di* A *appartenenti all'intorno* (ϱ) *di* $(\bar{x}, \bar{y})$ *e per* $|y'_1| \geq \bar{Y}'$ *e* $|y'_2| \geq \bar{Y}'$, *sia:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq \Phi(|y'_1|, |y'_2|);$$

IV) *la funzione* f *sia inferiormente limitata in* A^2 *e per* y'_1 *e* y'_2 *qualunque; allora in ogni classe completa* K *di curve* C *ordinarie, appartenenti ad* A, *esiste il minimo assoluto di* $I(y)$.

Anche in questo caso la dimostrazione si ottiene seguendo opportunamente quella del n. 12 pag. 417 della memoria del TONELLI citata in ([24]).

Anzitutto dall'ipotesi IV) (f maggiore o uguale di un certo $\bar{\mu}$) segue che l'estremo inferiore i di $I(y)$ in K è finito. Considerato allora in K una successione minimizzante $\{C_n[y_n(x), a_n \leq x \leq b_n]\}$ si dimostra che le $y_n(x)$ sono equiassolutamente continue, facendo vedere che per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ del campo A esiste un intorno rettangolare ω a lati paralleli agli assi x e y, in modo che le $y_n(x)$ risultino equiassolutamente continue sui sottoinsiemi degli (a_n, b_n) nei quali si proiettano gli archi delle C_n appartenenti ad ω; ora se $(\bar{x}, \bar{y})$ appartiene a $G_{\bar{\alpha}}$ la *condizione* $\bar{\alpha}$) ci assicura, mediante i ragionamenti del numero precedente l'esistenza di ω; se invece $(\bar{x}, \bar{y})$ appartiene a $G_{\bar{\beta}}$ basta ripetere il corrispondente ragionamento di TONELLI, sfruttando la *condizione* $\bar{\beta}$) e l'artificio, già usato, della disuguaglianza;

$$\int_E |y'_n(x)|\, dx = \left\{\int_E \int_E |y'_n(x)|\,|y'_n(z)|\, dx\, dz\right\}^{1/2},$$

che vale per ogni insieme misurabile E di (a_n, b_n).

Dalla successione minimizzante $\{C_n\}$ si può dunque estrarre una successione $\{C_m\}$ convergente uniformemente per $m \to +\infty$ ad una curva $\bar{C}[\bar{y}(x), \bar{a} \leq x \leq \bar{b}]$, con $\bar{y}(x)$ assolutamente continua. Per dimostrare che $\bar{C}$ è ordinaria, cioè che $f(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z))$ è integrabile nel quadrato $\bar{R}: \bar{a} \leq x \leq \bar{b}$, $\bar{a} \leq z \leq \bar{b}$, osservato, come fa il TONELLI, che sono in numero finito i punti $x_r (r = 1 \ldots \nu)$ di $(\bar{a}, \bar{b})$ tali che $[x_r, \bar{y}(x_r)]$ soddisfi alla *condizione* $\bar{\beta}$), si divida $\bar{R}$ in tanti rettangolini mediante le rette $x = x_r (r = 1, \ldots \nu)$ e $z = x_s (s = 1, \ldots, \nu)$.

Dimostriamo che la $f(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z))$ è integrabile su ognuno di questi rettangolini.

Infatti sia $R_{r,s}[x_r \leq x \leq x_{r+1}; x_s \leq z \leq x_{s+1}]$ uno di essi e sia R' un qualunque rettangolo $[\alpha \leq x \leq \beta; \gamma \leq z \leq \delta]$ interno a $R_{r,s}: x_r < \alpha < \beta < x_{r+1}$, $x_s < \gamma < \delta < x_{s+1}$. Si osservi che valgono le:

$$I(y_m) < i + \frac{1}{m} \tag{2}$$

essendo la $\{C_m\}$ una successione minimizzante, e allora di qui e dal fatto che è sempre $f \geq \overline{\mu}$, si ricava che detti $\Delta^m_{\alpha\beta}$ e $\Delta^m_{\gamma,\delta}$ i sottointervalli di (a_n, b_n) appartenenti a (α, β) e (γ, δ), sono superiormente equilimitati gli integrali:

$$\int_{\Delta^m_{\alpha,\beta}} \int_{\Delta^m_{\gamma,\delta}} f(x, z, y_m(x), y_m(z), y'_m(x), y'_m(z))\, dx\, dz .$$

D'altra parte si ha pure, per m sufficientemente grande:

$$(3) \qquad \int_{\Delta^m_{\alpha\beta}} | y'_m(x) |\, dx \leq L ; \qquad (3') \qquad \int_{\Delta^m_{\gamma,\delta}} | y'_m(z) |\, dz \leq L'$$

con L e L' costanti indipendenti da m; dimostriamo per esempio la (3).

Poichè ogni punto dell'arco $C_{\alpha\beta}$ di $\overline{C} : y = \overline{y}(x)$, $\alpha \leq x \leq \beta$, soddisfa alla *condizione* $\overline{\alpha}$), per il teorema di PINCHERLE BOREL potremmo dividere (α, β) in un certo numero λ di parti mediante i punti $a_1 = \alpha, a_2, \ldots, a_h, \ldots$ $\ldots, a_\lambda, a_{\lambda+1} = \beta$, e determinare i numeri ϱ_h, ν_h, Y'_h con ϱ_h e ν_h positivi e $Y'_h \geq 1$ $(h = 1, \ldots, \lambda)$, in modo che detto $\overline{C}_h$ l'arco di $\overline{C}_{\alpha,\beta}$: $y = \overline{y}(x)$, $a_h \leq x \leq a_{h+1}$, per tutte le coppie di punti (x, y_1) e (z, y_2), appartenenti all'intorno (ϱ_h) di $\overline{C}_h$ sia:

$$(4) \qquad f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) \geq \nu_h \, | y'_1 | \, | y'_2 |$$

per $| y'_1 | \geq Y'_h$, $| y'_2 | \geq Y'_h$.

Sia $\overline{\varrho} = \min \left[\frac{\beta - \alpha}{4}, \varrho_1, \ldots, \varrho_\lambda \right]$. Per m sufficientemente grande, gli archi di $y_m(x)$ tali che x appartenga a $\Delta^m_{\alpha,\beta}$, appartengono propriamente all'intorno $(\overline{\varrho})$ di $C_{\alpha,\beta}$. Ma allora per giungere alla (3) non resta che ripetere il ragionamento col quale si è dimostrata la (28) del n. 3, § 1, cap. II, M. I, sfruttando la (4), il fatto che è sempre $f \geq \overline{\mu}$ e l'equilimitatezza superiore degli integrali:

$$\int_{\Delta^m_{\alpha\beta}} \int_{\Delta^m_{\alpha\beta}} f(x, z, y_m(x), y_m(z), y'_m(x), y'_m(z))\, dx\, dz .$$

Si consideri ora, per m sufficientemente grande, in modo che valgano le (3) e (3'), l'insieme delle coppie di funzioni $[y_m(x), x \in \Delta^m_{\alpha,\beta}, y_m(z), z \in \Delta^m_{\gamma,\delta}]$

che indicheremo con $[y_m(\alpha , \beta) , y_m(\gamma . \delta)]$ e della coppia di funzioni $[\overline{y}(x)$, $\alpha \leq x \leq \beta$; $\overline{y}(z)$, $\gamma \leq z \leq \delta]$, che indicheremo con $[\overline{y}(\alpha, \beta) , \overline{y}(\gamma , \delta)]$. Esso costituisce una classe $K(R')$ di « curve C » considerate nel cap. I; risulta

$$I(y_m(\alpha , \beta) , y_m(\gamma , \delta)) = \int\limits_{\Delta^m_{\alpha,\beta}} \int\limits_{\Delta^m_{\gamma,\delta}} f(x , z , y_m(x) , y_m(z) , y'_m(x) , y'_m(z)) \, d\,x\, d\,z$$

ed inoltre $\Delta^m_{\alpha\beta}$ e $\Delta^m_{\gamma,\delta}$ hanno lunghezza rispettivamente $\geq \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ e $\dfrac{\delta - \gamma}{2}$, se m è sufficientemente grande.

Cerchiamo allora di applicare i risultati del n. 1 dell'*Introduzione.* Le (3) e (3') e l'equilimitatezza degli integrali $I(y_m(\alpha . \beta) , y_m(\gamma , \delta)$, insieme all'ipotesi I) e alla $f \geq \overline{\mu}$, ci permettono di applicare i risultati dell'*Osservazione* II dell'*Introduzione* (e precisamente quelli che sono in relazione con le *Osservazioni* I e I'), assicurandoci così l'esistenza dell'integrale:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{\gamma}^{\delta} f(x , z , \overline{y}(x) , \overline{y}(z) , \overline{y}'(x) , \overline{y}'(z)) \, d\,x\, d\,z .$$

Ancora le (3) e (3'), l'ipotesi I) e la $f \geq \overline{\mu}$, in virtù delle *Osservazioni* I *e* I' dell'*Introduzione,* ci assicurano poi le semicontinuità inferiore nella classe $K(R')$ considerata, dell'integrale $I(y_1 , y_2)$ relativo alla f. Sicchè ne viene facilmente:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{\gamma}^{\delta} [f(x , z , \overline{y}(x) , \overline{y}(z) , \overline{y}'(x) , \overline{y}'(z)) \quad \overline{\mu}] \, dx\, dz \leq \iota + 1 + |\overline{\mu}| D^2. \tag{5}$$

Ma allora da quest'ultima disuguaglianza, poichè $f - \overline{\mu} \geq 0$, segue l'integrabilità di $f(x , z , \overline{y}(x) , \overline{y}(z) , \overline{y}'(x) , \overline{y}'(z))$ su tutto $R_{r,s}$ e quindi su tutto R.

Allora, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare in ognuno dei rettangoli $R_{r,s}$ il rettangolino $R' [\alpha \leq x \leq \beta$; $\gamma \leq z \leq \delta]$ in modo che la misura della somma degli R' si scosti tanto poco da quella di R così da aversi, se si indica con Γ il complementare della somma $\Sigma'(R')$ degli R' rispetto ad R:

$$\int\int\limits_{\Gamma} [f , x , z , \overline{y}(x) , \overline{y}(z) , \overline{y}'(x) , \overline{y}'(z)) - \overline{\mu}] \, d\,x\, d\,z < \varepsilon .$$

Si può quindi scrivere:

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} [f(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)) - \bar{\mu}]\, d\,x\, d\,z <$$

(6)

$$< \Sigma' \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} [f(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)) - \bar{\mu}]\, d\,x\, d\,z + \varepsilon .$$

Ma si è già dimostrato più sopra che $I(y_1, y_2)$, relativo alla funzione f, è semicontinuo inferiormente su $[\bar{y}(\alpha, \beta), \bar{y}(\gamma, \delta)]$ nella classe $K(R')$ definita per un qualunque rettangolino R'; tale è dunque anche l'integrale $I(y_1, y_2)$, relativo alla funzione $f - \bar{\mu}$. Si può allora determinare un $\bar{m}$ in modo che risulti, per $m > \bar{m}$ e per ognuno degli R', or ora determinati in corrispondenza ad ε:

$$\int_{\Delta^m_{\alpha,\beta}}\int_{\Delta^m_{\gamma\,\delta}} [f(x, z, y_m(x), y_m(z), y'_m(x), y'_m(z)) - \bar{\mu}]\, d\,x\, d\,z \geq$$

$$\geq \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} [f(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)) - \bar{\mu}]\, d\,x\, d\,z - \varepsilon .$$

Allora dalla (6) si ha, se p è il numero degli R':

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} [f(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)) - \bar{\mu}]\, d\,x\, d\,z <$$

$$< \Sigma' \int_{\Delta^m_{\alpha,\beta}}\int_{\Delta^m_{\gamma,\delta}} [f(x, z, y_m(x), y_m(z), y'_m(x), y'_m(z)) - \bar{\mu}]\, d\,x\, d\,z + p\,\varepsilon + \varepsilon ,$$

da cui, essendo $f - \bar{\mu} \geq 0$,

$$\int_{\bar{a}}^{\bar{b}}\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} [f(x, z, \bar{y}(x), \bar{y}(z), \bar{y}'(x), \bar{y}'(z)) - \bar{\mu}]\, d\,x\, d\,z <$$

$$< \int_{a_m}^{b_m} \int_{a_m}^{b_m} [f(x, z, y_m(x), y_m(z), y'_m(x), y'_m(z)) - \bar{\mu}] \, dx \, dz +$$

$$+ (p+1)\varepsilon \leq i + \frac{1}{m} - \bar{\mu}(b_m - a_m)^2 + (p+1)\varepsilon .$$

Di qui risulta $I(\bar{y}) \leq i$ ed essendo $\bar{C}$ una curva ordinaria e K una classe completa: $I(\bar{y}) = i$.

4. — TEOREMA III''. — *Supposto che:*

I) *la funzione f soddisfi alle ipotesi* 2) *e* 4) [*oppure* 4')] [36];

II) $I(y)$ *sia quasi-regolare positivo seminormale rispetto a* $y'_1 y'_2$;

III) *esista un insieme* $G_{\bar{\alpha}}$ *di punti di* A *soddisfacenti alla* condizione α) (*v. n. precedente), in modo che i punti dell'insieme* $G = A - G_{\bar{\alpha}}$ (*eventualmente anche vuoto) giacciano in parte su un numero finito o su un'infinità numerabile di curve:* $y = \varphi_\nu(x)$, $a_\nu \leq x \leq b_\nu$, *con* $\varphi_\nu(x)$ *assolutamente continue, ed in parte su rette* R *parallele all'asse delle x ed intersecanti l'asse delle y in un'insieme di misura nulla; allora in ogni classe completa* K *di curve* C *ordinarie appartenenti ad* A, *esiste il minimo assoluto di* $I(y)$.

Accenniamo alla dimostrazione, adattando al nostro caso quella del n. 16 pag. 423 della Memoria del TONELLI citata in [24].

Dimostriamo dunque anzitutto che le curve C ordinarie per le quali è soddisfatta la relazione:

$$I(y) \leq M \tag{7}$$

con M numero fisso, sono ugualmente continue. Possiamo supporre senz'altro, nel ragionamento che faremo, $f > 0$, perchè altrimenti basterebbe sostituire l'integrale $I(y)$, con quello:

$$\bar{I}(y) = \int_a^b \int_a^b [f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)) - (P + Q y'(x) + R y'(z) + S y'(x) y'(z))] \, dx \, dz$$

dove P, Q, R, S sono le funzioni di cui alla definizione di integrale quasi regolare positivo (v. n. 1, § 1); ed infatti $\bar{I}(y)$ soddisfa alle stesse ipotesi di $I(y)$ ed inoltre sulle curve per cui è soddisfatta la (7), vale pure una disuguaglianza analoga per $\bar{I}(y)$ [$\bar{I}(y) \leq M'$], in virtù del *lemma* II del n. 2, § 1.

---

(36) v. nota (26).

Ciò premesso, supponiamo per assurdo, seguendo il TONELLI, che le curve C soddisfacenti alla (7) non siano ugualmente continue. Allora esisterà un $\lambda > 0$ tale che, per ogni intero positivo n, si possa trovare una curva ordinaria $C_n\,[y_n(x)\,, a_n \leq x \leq b_n]$ soddisfacente alla (7) ed una coppia di punti $x_{n,1}\,, x_{n,2}$ appartenenti ad $(a_n\,, b_n)$ e soddisfacente alle

$$0 < x_{n,2} - x_{n,1} \leq \frac{1}{n}\,, \quad |\, y_n(x_{n,2}) - y_n(x_{n,1})\,| > \lambda\,.$$

Sia x_0 un punto di accumulazione degli $x_{n,1}$; possiamo senz'altro supporre che per $n \to +\infty$, $x_{n,1} \to x_0$ (e quindi anche $x_{n,2} \to x_0$), $y_n(x_{n,1}) \to y_{0,1}$ e $y_n(x_{n,2}) \to y_{0,2}$ e per esempio $y_{0,1} < y_{0,2}$; dovrà dunque essere $y_{0,2} - y_{0,1} \geq \lambda$.

Siano ora l_1 e l_2 2 numeri tali che $y_{0,1} < l_1 < l_2 < y_{0,2}$ e diciamo P_1 e P_2 i punti $(x_0\,, l_1)$ e $(x_0\,, l_2)$. Per $n \geq \bar{n}$ ($\bar{n}$ opportuno) sarà $y_n(x_{n,1}) < l_1$ e $y_n(x_{n,2}) > l_2$. I punti di G appartenenti al segmento $P_1 P_2$ costituiscono un insieme di misura nulla; si può dunque trovare un insieme chiuso E di $P_1 P_2$, di misura $(l_2 - l_1) : 2$, i cui punti soddisfano alla *condizione* $\bar{\alpha}$).

Possiamo allora determinare un numero finito di intervalli Δ_h $(h = 1, \dots, s)$ di $P_1 P_2$, senza punti comuni [37], ricoprenti E, di lunghezza complessiva $> (l_2 - l_1) : 2$, ed in corrispondenza a Δ_h $(h = 1, \dots, s)$ 2 numeri ϱ_h e Y'_h positivi ed una funzione $\Phi_h(u\,, t)$, definita per gli u e t ambedue $\geq Y'_h$ e tale che $\Phi_h(u\,, t) : u\,t \to +\infty$ per $u\,t \to +\infty$, per la quale si abbia, per tutte le coppie di punti $(x\,, y_1)$ e $(z\,, y_2)$ di A distanti ciascuno da Δ_h per non più di ϱ_h e per $|\, y'_1\,| \geq Y'_h$, $|\, y'_2\,| \geq Y'_h$:

$$f(x\,, z\,, y_1\,, y_2\,, y'_1\,, y'_2) > \Phi_h(\,|\, y'_1\,|\,, |\, y'_2\,|\,)\,.$$

Fissato un numero $N > \dfrac{16\, s^2 M}{(l_2 - l_1)^2}$ e detto $\bar{\varrho}$ il più piccolo dei ϱ_h $(h = 1, \dots, s)$, possiamo allora determinare un Y' tale che per tutte le coppie di punti $(x\,, y_1)$ e $(z\,, y_2)$ di A, distanti ciascuno per non più di $\bar{\varrho}$ da uno stesso dei Δ_h $(h = 1, \dots, s)$ risulti verificata, per $|\, y'_1\,| > Y'$ e $|\, y'_2\,| > Y'$ la:

$$f(x\,, z\,, y_1\,, y_2\,, y'_1\,, y'_2) \geq N\,|\, y'_1\,|\,|\, y'_2\,|\,. \tag{8}$$

Sia ora δ un numero positivo $< \bar{\varrho}$ e $< (l_2 - l_1) : 8\, Y'$ e supponiamo che il numero $\bar{n}$ di cui sopra sia anche tale che per $n > \bar{n}$ si abbia;

$$x_0 - \delta < x_{n,1} < x_{n,2} < x_0 + \delta$$

---

[37] I Δ_h potrebbero essere per es. chiusi a sinistra e aperti a destra (cioè $\Delta_h \equiv y_h \leq y < y_{h+1}$ se y_h e y_{h+1} sono gli estremi di Δ_h).

Si consideri per $n \geq \bar{n}$ l'arco della C_n che si proietta ortogonalmente in $(x_{n,1}, x_{n,2})$ e indichiamo con $C^*_{n,h}$ la parte di questo arco che si proietta ortogonalmente sul segmento Δ_h $(h = 1, \ldots, s)$; sia poi l^h_n l'insieme dei punti dell'asse delle x su cui si proietta ortogonalmente $C^*_{n h}$; scomponiamo l^h_n nei due insiemi $l^h_{n,1}$ dei punti in cui la $y'_n(x)$ esiste finita e in modulo $\geq Y'$ e $l^h_{n,2}$ dei punti rimanenti. Si ponga poi $l_{n,1} = \sum_{h=1}^{s} l^h_{n,1}$ ed $l_{n,2} = \sum_{h=1}^{s} l^h_{n,2}$. Si osservi che la variazione totale di $y_n(x)$ su $l_{n,1} + l_{n,2}$ è $> (l_2 - l_1) : 2$, tale essendo la lunghezza complessiva dei Δ_h $(h = 1, \ldots, s)$; d'altra parte è pure

$$Y' \int_{l_{n,2}} d\,x < Y'(x_{n,2} - x_{n,1}) < 2\, Y' \delta < (l_2 - l_1) : 4$$

Possiamo dunque scrivere, tenendo anche presente l'ipotesi $f \geq 0$:

$$\sqrt{N}(l_2 - l_1) : 4 < \sqrt{N} \left\{ \int_{l_{n,1}+l_{n,2}} |\, y'_n(x) \,|\, d\,x - Y' \int_{l_{n,2}} d\,x \right\} \leq \sqrt{N} \int_{l_{n,1}} |\, y'_n(x) \,|\, d\,x =$$

$$= \sqrt{N} \sum_{h=1}^{s} \int_{l^h_{n,1}} |\, y'_n(x) \,|\, d\,x = \sqrt{N} \sum_{h=1}^{s} \left\{ \int_{l^h_{n,1}} \int_{l^h_{n,1}} |\, y'_n(x) \,|\,|\, y'_n(z) \,|\, d\,x\, d\,z \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{h=1}^{s} \left\{ \int_{l^h_{n,1}} \int_{l^h_{n,1}} f(x, z, y_n(x), y_n(z), y'_n(x), y'_n(z))\, d\,x\, d\,z \right\}^{1/2} \leq s\sqrt{I(y_n)} \leq s\sqrt{M}$$

Risulterebbe dunque $N < \dfrac{16\, s^2 M}{(l_2 - l_1)^2}$, in contraddizione con la scelta fatta di N.

Dimostrata così questa proposizione, potremo, in virtù di essa, determinare in K una successione minimizzante $\{C_n\}$ convergente uniformemente ad una funzione $y = \bar{y}(x)$, $\bar{a} \leq x \leq \bar{b}$ continua. Per provare allora l'assoluta continuità di $\bar{y}(x)$ non si ha che da ripetere in modo opportuno, usando del ragionamento or ora fatto, la dimostrazione analoga del TONELLI (pag. 425-26 della memoria citata). Le ipotesi I) e II), in virtù dell'*Osservazione* II* e della *Proposizione* II* dell'*Introduzione*, ci assicurano poi che la curva $y = \bar{y}(x)$ è anche ordinaria e che su di essa $I(y)$ è semicontinuo inferiormente; dal che si deduce che $I(\bar{y})$ dà il minimo assoluto di $I(y)$ in K.

Esempi di funzioni f cui non è possibile applicare i teoremi precedenti (teoremi I', II', III', IV', I'', II'') mentre è applicabile il teorema III'' sono i seguenti:

1) $f = y_1^2 y_2^2 y_1'^2 y_2'^2 + \sqrt{(1 + y_1'^2)(1 + y_2'^2)}$, considerata in un campo A che contenga punti di ordinata $y = 0$;

2) $f = y_1'^2 y_2'^2 - y_1' y_2' - (y_1' + y_2)$, considerata in un qualunque campo A. Si osservi che nell'esempio 2) l'insieme G dell'enunciato è vuoto, qualunque sia il campo A in cui si considera la f: tuttavia non è possibile applicare i teoremi I″ e II″.

5. — Teorema IV″. *Supposto che*:

I) *la funzione f soddisfi alle ipotesi* 2), 4) [*oppure* 4')] (38);

II) *$I(y)$ sia quasi-regolare positivo seminormale rispetto a $y_1' y_2$*;

III) *i punti di* A *si dividano in 3 insiemi disgiunti $G_{\bar\alpha}$, $G_{\bar\beta}$ e G tali che*:

a) $G_{\bar\alpha} + G_{\bar\beta} + G = A$;

b) *l'insieme $G_{\bar\alpha}$ soddisfi alla* condizione $\bar\alpha$);

c) *i punti di $G_{\bar\beta}$ soddisfino alla* condizione $\bar\beta$);

d) *i punti di* G *giacciano in parte su un numero finito o un'infinità numerabile di curve*:

$$y = \varphi_1(x),\ a_1 < x < b_1,$$

con $\varphi_1(x)$ funzione assolutamente continua ed in parte su rette R *parallele all'asse delle x ed intersecanti l'asse delle y in un insieme di misura nulla; allora in ogni classe completa* K *di curve* C *ordinarie, appartenenti ad* A, *esiste il minimo assoluto di $I(y)$*.

La dimostrazione si ottiene applicando in modo opportuno le considerazioni sviluppate per i *teoremi* II″ e III″ e le osservazioni di fine pag. 427 e pag. 428 della memoria del Tonelli citata in (24).

6. — Osservazioni. Abbiamo dato per $I(y)$ due gruppi di teoremi in ordine a 2 diversi tipi di ipotesi. Si può vedere che gli stessi ragionamenti permetterebbero di dare altri criteri di esistenza del minimo di $I(y)$, combinando opportunamente tra di loro i due diversi tipi di ipotesi.

Per esempio in ogni classe completa K_y di curve C ordinarie, appartenenti ad A, esiste il minimo assoluto se sono soddisfatte le ipotesi 1), 2), 4') e la II) del n. 3, § 2, cap. II e se i punti dell'insieme $A = G_{\bar\beta}$ (dove $G_{\bar\beta}$ è l'insieme di cui all'ipotesi II) ora richiamata) soddisfano alla *condizione* α_1) del n. 2, § 2, cap. I (la quale va naturalmente enunciata tenendo presenti le analogie di nomenclatura usate tra $I(y_1, y_2)$ e $I(y)$). Ma su ciò non credo opportuno insistere oltre.

(38) V. nota (26).

§ 3. - L'esistenza del minimo di $I(y)$ in campi illimitati.

1. — Anche per i campi illimitati si possono considerare 2 tipi di criteri di esistenza: gli uni estendono i risultati ottenuti per i campi limitati con i *teoremi* I', II', III', IV' del n. 1, § 2 di questo cap. e si ottengono dunque, per una classe completa K_η di curve C ordinarie, direttamente dai risultati del § 3, cap. I relativi a $I(y_1, y_2)$, con le opportune modifiche di nomenclatura; non mi soffermo ad enunciarli esplicitamente, ma solo osservo che nel criterio analogo al I del n. 2, § 3, cap. I basterà supporre verificata una sola delle (4) e (5) e in quello analogo al II una sola delle (6) e (7).

Gli altri criteri di esistenza in campi illimitati, valevoli per ogni classe completa K di curve ordinarie C, si rifanno ai *teoremi* I'', II'', III'', IV'' del paragrafo precedente. Anche per questo secondo tipo di estensione potremo, con la stessa dimostrazione del TONELLI già citata nel n. 1, § 3, cap. I dimostrare il seguente:

TEOREMA GENERALE: *In ogni classe completa* K *di curve ordinarie* $C[y(x)]$, *aventi almeno un punto* $[x, y(x)]$ *in un dato insieme chiuso e limitato del campo* A *esiste il minimo assoluto di* $I(y)$, *se:*

a) *il valore di* $I(y)$ *relativo ad una qualunque curva* C *di* K *tende a* $+\infty$ *al tendere a* $+\infty$ *del massimo della somma* $x^2 + y^2(x)$;

b) *in ogni campo limitato e chiuso appartenente ad* A *sono verificate le condizioni di uno qualunque dei* teoremi I'', II'', III'', IV'' *del paragrafo precedente.*

Modificando poi in modo ovvio le dimostrazioni citate a proposito dei criteri I e II del n. 2, § 3, cap. I si dimostra che la condizione a) del teorema precedente è certamente verificata in ogni classe completa K di curve C ordinarie, aventi almeno un punto in un insieme limitato e chiuso di A, se vale una delle seguenti ipotesi:

I'' — 1) *esiste un numero* $c > 0$ *per cui in tutti i punti di* A *sia:* $-c \leq x \leq c$; 2) *esiste un numero* N *per cui si abbia* $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2) > N$ *per ogni coppia di punti* (x, y_1), *e* (z, y_2) *di* A *e per ogni valore di* y'_1 *e* y'_2; 3) *esiste un numero positivo* λ *e una funzione* $\varphi(u)$ *definita per* $|u| \geq \lambda$, *continua, non negativa e tale che*

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \varphi(u)\, d\, u = \int_{-\infty}^{-\lambda} \varphi(u)\, d\, u = +\infty$$

in modo che si abbia, per tutte le coppie (x, y_1) *e* (z, y_2) *di punti di* A *con* $|y_1| \geq \lambda$ *e* $|y_2| \geq \lambda$

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \geq |y_1'| \varphi(y_1) |y_2'| \varphi(y_2)$$

per $|y_1'| \geq 1/\varphi(y_1)$ *e* $|y_2'| \geq 1/\varphi(y_2)$;

II″ — 1) *esistono* 2 *numeri* a^* *e* b^* *per cui in tutti i punti di* **A** *è:* $a^* \leq x \leq b^*$ 2) *è:*

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') \equiv g_1(x, z, y_1', y_2') - g_2(x, z, y_1, y_2)$$

ed è possibile determinare un numero $h > b^* - a^*$ *e due funzioni* $\psi_1(u)$ *e* $\psi_2(u)$, *definite e continue per* $u \geq 0$, *non decrescenti, con* $\psi_1(u)$ *concava verso l'alto, tali che sia:*

$$[\psi_1(u)]^2 - [\psi_2(u)]^2 \to +\infty \quad \text{per} \quad u \to \infty,$$

in modo che risulti per tutte le coppie (x, y_1) *e* (z, y_2) *di punti di* **A** *e per ogni* y_1' *e* y_2'

$$g_1(x, z, y_1', y_2') \geq \psi_1(h |y_1'|) \psi_1(h |y_2'|)$$

$$g_2(x, z, y_1, y_2) \leq \psi_2(|y_1|) \psi_2(|y_2|).$$

Infine si osservi che anche per questo secondo tipo di estensione si può prendere in esame il caso in cui non sia verificata l'ipotesi che ogni curva della classe K, che si considera, abbia almeno un punto in un dato insieme chiuso e limitato del campo A e dare un teorema in proposito, che si ispiri a quello già citato di S. CINQUINI ([39]) per l'integrale semplice di linea.

2. - È immediato vedere che nell'estensione ai campi illimitati del *teorema* I′ rientra il funzionale particolare studiato dal FUBINI nella memoria citata in ([2]) (v. pag. 225 e seg.), quando si tengano presenti anche le osservazioni già fatte su di esso nel § 2, cap. II, M. I.

[*Pervenuto alla redazione il 13 settembre 1949*]

([39]) v luogo citato in ([33])