ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIOVANNI DANTONI

Sulle singolarità della jacobiana e su quelle della varietà delle ipersuperficie con punto doppio di un generico sistema lineare ∞^r di V_{r-1}^n di S_r

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 3, nº 1-4 (1950), p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_3_1-4_1_0>

SULLE SINGOLARITÀ DELLA JACOBIANA E SU QUELLE DELLA VARIETÀ DELLE IPERSUPERFICIE CON PUNTO DOPPIO DI UN GENERICO SISTEMA LINEARE ∞^r DI V_{r-1}^n DI S_r.

di GIOVANNI DANTONI (Pisa)

Le singolarità della ipersuperficie jacobiana J di un sistema lineare Σ_r, ∞^r, di V_{r-1}^n dello spazio S_r, sono state studiate da vari autori sia per $r \leq 3$, sia per r qualunque (1).

Nella prima parte del presente lavoro studiamo le singolarità della J nel caso in cui Σ_r sia un sistema lineare ∞^r *generico* di V_{r-1}^n di S_r.

Nel n. 1 osserviamo che se Σ_r è un sistema lineare ∞^r di V_{r-1}^n, non composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva, e se P_0 è un punto di S_r non base per Σ_r e tale che esista una ed una sola ipersuperficie $f_0 = 0$ di Σ_r la quale abbia P_0 come punto multiplo, allora gli iperpiani tangenti in P_0 alle ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0 hanno a comune una retta t_0 (per P_0) e non uno spazio di dimensione maggiore. Inoltre, se P_0 è s-uplo per $f_0 = 0$, allora esso è $(s-1)$ uplo per la jacobiana J di Σ_r, e il cono tangente in P_0 alla J è la prima polare di t_0 rispetto al cono tangente in P_0 alla $f_0 = 0$, a meno che la retta t_0 non sia una generatrice s upla di quest'ultimo cono tangente, nel qual caso la detta prima polare risulta indeterminata e P_0 ha in J molteplicità maggiore di $s-1$.

Nei nn. 2, 3 estendiamo l'osservazione precedente al caso in cui ci siano più V_{r-1}^n di Σ_r aventi P_0 come punto multiplo.

Nei successivi nn. 4, 5, 6, dimostriamo che se il sistema lineare Σ_r è *generico,* allora la sua jacobiana J è irriducibile e, per $r < 4$ è priva di punti multipli, mentre per $r \geq 4$ essa ha una varietà di dimensione $r-4$

(1) Per $r \leq 3$, vedi: GERBALDI, *Sulle singolarità della jacobiana ecc.*, Rend. Circ. Mat. Palermo, T. VIII (1894) e T. X. (1896); A. LEVI, *Sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie.* Giornale di Mat, T. X (1896). Per r qualunque: M. VILLA, *Sulle singolarità ecc.*, Memorie Ist. Lombardo, Vol. XXII (1931).

ed ordine $(n-1)^4 \frac{r(r+1)^2(r+2)}{12}$ di punti doppi. Proviamo che i punti multipli della J sono tutti e soli i punti di S_r che sono multipli per almeno ∞^1 ipersuperficie di Σ_r (n. 5) e facciamo vedere che essi sono anche tutti e soli i punti di S_r le cui coordinate abbassano di almeno due unità la caratteristica della matrice jacobiana $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$ di Σ_r (n. 6). Osserviamo infine che quest'ultima proprietà non è vera per sistemi lineari ∞^r qualunque. Nella seconda parte del lavoro studiamo la varietà W^δ_{r-1} delle ipersuperficie di Σ_r (sempre generico) che hanno un punto doppio, e cerchiamo i punti multipli di questa varietà W^δ_{r-1}. Precisamente, rappresentiamo le ipersuperficie di Σ_r con i punti di uno spazio lineare $\overline{S}_r$ (2) e consideriamo in $\overline{S}_r$ quei punti che corrispondono a ipersuperficie di Σ_r aventi un punto doppio. Otteniamo così in $\overline{S}_r$ una ipersuperficie W^δ_{r-1} di ordine $\delta = (r+1)(n-1)^r$, la quale è birazionalmente identica alla jacobiana J di Σ_r [la quale è di ordine $d = (r+1)(n-1)$]. Vedremo che (3) i punti doppi della W^δ_{r-1} si distribuiscono in due varietà irriducibili e di dimensione $r-2$: $W^{\delta'}_{r-1}$ e $W^{\delta''}_{r-2}$; la prima, $W^{\delta'}_{r-2}$, è formata dai punti di W^δ_{r-1} che rappresentano ipersuperficie di Σ_r aventi due punti doppi, e la seconda, $W^{\delta''}_{r-2}$, è formata dai punti di W^δ_{r-1} che rappresentano ipersuperficie di Σ_r con un punto doppio a cono tangente dotato di una generatrice doppia. Inoltre il cono tangente in un generico punto Q' di $W^{\delta'}_{r-2}$ è spezzato nei due iperpiani che sono immagini dei due sistemi lineari ∞^{r-1} di ipersuperficie di Σ_r che passano per l'uno o per l'altro dei due punti doppi della V^n_{r-1} di Σ_r rappresentata da Q'. Il cono tangente in un generico punto Q'' di $W^{\delta''}_{r-2}$ è l'iperpiano, contato due volte, immagine del sistema lineare ∞^{r-1} delle ipersuperficie di Σ_r che passano per il punto doppio della V^n_{r-1} rappresentata da Q''.

Nel n. 14 studiamo la corrispondenza birazionale fra la jacobiana J di Σ_r e la varietà W^δ_{r-1}.

Infine nel n. 15 osserviamo che la W^δ_{r-1}, e quindi anche la jacobiana J, ha irregolarità superficiale nulla (per $r \geq 3$).

Le suddette proprietà della W^δ_{r-1} saranno dedotte da proprietà analoghe della varietà W^δ_{N-1} i cui punti rappresentano le V^n_{r-1} di S_r con un punto doppio, nello spazio S_N $\left[N = \binom{r+n}{r} - 1\right]$ immagine (4) di tutte le ipersu-

---

(2) Cioè alle ipersuperficie del sistema lineare $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r = 0$ facciamo corrispondere il punto di coordinate $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$.

(3) Per $r \geq 2$ ed $n \geq 3$.

(4) Nel senso che alla V^n_{r-1} di equazione $f = 0$, facciamo corrispondere in S_N il punto che ha per coordinate i coefficienti di f.

perficie di ordine n di S_r. Per altre proprietà delle varietà J, W^{δ}_{r-1} e W^{δ}_{N-1}, rimandiamo ai nn. 10, 14.

1. — Indichiamo con J l'ipersuperficie jacobiana di un sistema lineare Σ_r, di dimensione r, di ipersuperficie di ordine n di S_r, non composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva (5). La J è il luogo dei punti di S_r che sono multipli per qualche ipersuperficie di Σ_r.

Sia P_0 un punto non base per Σ_r, e tale che esista una ed una sola ipersuperficie ($f_0 = 0$) di Σ_r avente P_0 come punto multiplo. In queste ipotesi le ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0 formano un sistema lineare ∞^{r-1}, Σ_{r-1}, e gli iperpiani tangenti ad esse in P_0 formano un sistema lineare ∞^{r-2} (6) e quindi hanno a comune una retta t_0 e non uno spazio di dimensione superiore. Possiamo individuare Σ_r mediante la $f_0 = 0$, $r-1$ ipersuperficie $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \dots, f_{r-1} = 0$ di Σ_{r-1} aventi gli iperpiani tangenti in P_0 linearmente indipendenti, e infine una ipersuperficie di Σ_r, $f_r = 0$, non passante per P_0. Se scegliamo P_0 come vertice $A_0 \equiv (1, 0, \dots, 0)$ della piramide fondamentale, e gli iperpiani tangenti in P_0 alle $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \dots, f_{r-1} = 0$ come iperpiani $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_{r-1} = 0$, le equazioni delle nostre $f_i = 0$ assumono la forma

$$\begin{aligned}
f_0 &\equiv \varphi_s^{(0)} x_0^{n-s} + \varphi_{s+1}^{(0)} x_0^{n-s-1} + \dots + \varphi_n^{(0)} = 0 \\
f_1 &\equiv x_1 x_0^{n-1} + \varphi_2^{(1)} x_0^{n-2} + \dots + \varphi_n^{(1)} = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_{r-1} &\equiv x_{r-1} x_0^{n-1} + \varphi_2^{(r-1)} x_0^{n-2} + \dots + \varphi_n^{(r-1)} = 0 \\
f_r &\equiv x_0^n + \varphi_1^{(r)} x_0^{n-1} + \dots + \varphi_n^{(r)} = 0
\end{aligned}$$

dove $s \geq 2$ è la molteplicità di P_0 per la $f_0 = 0$, e le φ_i sono forme di ordine i nelle $x_1, x_2, \dots, x_r$. Si può anche supporre che sia $\varphi_1^{(r)} = 0$, perchè se così non fosse basterebbe operare il cambiamento di riferimento:

$$x_0 = X_0 - \frac{1}{n} \Phi_1^{(r)}, \quad x_i = X_i \text{ per } i = 1, 2, \dots, r, \text{ e } \Phi_1^{(r)} = \varphi_1^{(r)} (X_1, X_2, \dots, X_r).$$

(5) Come è noto, se Σ_r è composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva la sua jacobiana è indeterminata, e viceversa. Vedi BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª edizione, Messina, 1923, pag. 278.

(6) BERTINI, *loc. cit.*, pag. 262

Dopo ciò, scrivendo l'equazione $\frac{\partial (f_0, f_1, \ldots, f_r)}{\partial (x_0, x_1, \ldots, x_r)} = 0$ della jacobiana si vede che il termine di grado più elevato in x_0 è

$$n \frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial x_r} x_0^{r(n-1)+n-s}$$

purchè sia $\frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial x_r} \not\equiv 0$. Si osservi ora che $\frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial x_r}$ è identicamente nulla allora e solo quando la retta $A_0 A_r$ è una generatrice s-upla del cono $\varphi_s^{(0)} = 0$, cioè allora e solo quando risulta indeterminata la prima polare $\left(\frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial x_r} = 0\right)$ della retta $t_0 \equiv A_0 A_r$ rispetto al cono $\varphi_s^{(0)} = 0$ nella stella di centro $A_0 \equiv P_0$. Tenendo presente che l'ordine della jacobiana J di Σ_r è $d = (r+1)(n-1)$, e che $r(n-1) + n - s = d - (s-1)$ si ha che P_0 è $(s-1)$ uplo per J e il cono tangente in P_0 alla J non e altro che la prima polare $\left(\frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial x_r} = 0\right)$ di t_0 rispetto al cono tangente in P_0 alla $f_0 = 0$, a meno che la suddetta prima polare non risulti indeterminata, nel qual caso P_0 ha in J molteplicità maggiore di $s-1$.

Riassumendo:

Sia dato un sistema lineare Σ_r, ∞^r, di ipersuperficie di S_r, non composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva; sia P_0 un punto non base per Σ_r e tale che esista una ed una sola ipersuperficie, $f_0 = 0$, di Σ_r la quale abbia P_0 come punto multiplo. In queste ipotesi gli iperpiani tangenti in P_0 alle ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0, hanno a comune una retta t_0 (per P_0) e non uno spazio di dimensione maggiore. Inoltre se P_0 è s-uplo per la $f_0 = 0$, allora esso è $(s-1)$-uplo per l'ipersuperficie jacobiana J di Σ_r, e *il cono tangente in* P_0 *alla* J *è la prima polare di* t_0 *rispetto al cono tangente in* P_0 *alla* $f_0 = 0$, a meno che la retta t_0 non sia una generatrice s-upla di quest'ultimo cono tangente, nel qual caso la detta prima polare risulta indeterminata e P_0 ha in J molteplicità maggiore di $s-1$.

2. — Consideriamo ancora un sistema lineare Σ_r di dimensione r, di ipersuperficie di S_r, non composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva. Sia P_0 un punto non base per Σ_r; indichiamo con:

a) Σ_{r_1} il sistema lineare delle ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0, e sia $s_1 (\geq 1)$ la molteplicità di P_0 in quanto punto base di Σ_{r_1}.

b) Σ_{r_2} il sistema lineare delle ipersuperficie di Σ_{r_1} che hanno in P_0 molteplicità maggiore di s_1; e sia s_2 la molteplicità di P_0 in quanto punto base di Σ_{r_2}.

c) Σ_{r_3} il sistema lineare delle ipersuperficie di Σ_{r_2} che hanno in P_0 molteplicità maggiore di s_2; e sia s_3 la molteplicità di P_0 in quanto punto base di Σ_{r_3}.

. . . .

d) Σ_{r_h} il sistema lineare delle ipersuperficie di $\Sigma_{r_{h-1}}$ che hanno in P_0 molteplicità maggiore di s_{h-1}; e sia s_h la molteplicità di P_0 in quanto punto base di Σ_{r_h}. I sistemi lineari $\Sigma_r, \Sigma_{r_1}, \Sigma_{r_2}, \dots, \Sigma_{r_h}$, sono tali che ognuno di essi è contenuto nel precedente: per le loro dimensioni si ha $r_1 = r - 1 > r_2 > r_3 > \dots > r_h \geq 0$. Inoltre Σ_{r_h} è formato dalle ipersuperficie di Σ_{r_1} che hanno in P_0 molteplicità massima.

Scegliamo ora P_0 come vertice $A_0 \equiv (1, 0, 0, \dots, 0)$ della piramide fondamentale e individuiamo Σ_{r_h} mediante $r_h + 1$ sue ipersuperficie linearmente indipendenti $f_0 = 0, f_1 = 0, \dots, f_{r_h} = 0$; $\Sigma_{r_{h-1}}$ mediante queste $r_h + 1$ ed altre $r_{h-1} - r_h$ sue ipersuperficie $f_{r_h+1} = 0, f_{r_h+2} = 0, \dots, f_{r_{h-1}} = 0$, in modo che le $r_{h-1} + 1$ ipersuperficie così ottenute siano linearmente indipendenti; . . . ; Σ_{r_1} mediante le precedenti $r_2 + 1$ ed altre $r_1 - r_2$ sue ipersuperficie $f_{r_2+1} = 0, f_{r_2+2} = 0, \dots, f_{r_1} = 0$, in modo che le $r_1 + 1 = r$ ipersuperficie così ottenute siano linearmente indipendenti; e infine Σ_r mediante le precedenti r ed una sua ipersuperficie $f_r = 0$ non passante per P_0.

Dopo ciò, scrivendo l'equazione della jacobiana $\dfrac{\partial (f_0, f_1, \dots, f_r)}{\partial (x_0, x_1, \dots, x_r)} = 0$ si vede che il termine di grado più elevato in x_0 ha per esponente $(r + 1)(n - 1) - \sum_{i=1}^{h} (r_i - r_{i+1})(s_i - 1)$ (con $r_{h+1} = -1$) ed ha per coefficiente

$$\frac{\partial (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(r-1)})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_r)} \tag{1}$$

dove $\varphi^{(0)} = 0$, $\varphi^{(1)} = 0, \dots, \varphi^{(r-1)} = 0$, sono le equazioni dei coni tangenti in $P_0 \equiv A_0$ alle ipersuperficie $f_0 = 0, f_1 = 0, \dots, f_{r-1} = 0$.

Da quanto sopra segue che, nelle nostre ipotesi, *il punto* P_0 *ha molteplicità* (7)

$$\sigma = \sum_{i=1}^{h} (r_i - r_{i+1})(s_i - 1) \qquad (r_{h+1} = -1) \tag{2}$$

nella jacobiana J di Σ_r, a meno che non sia identicamente nullo il determinante jacobiano (1) nel qual caso P_0 ha molteplicità maggiore di σ.

(7) Il numero σ coincide col numero s di VILLA, *calcolato rispetto alle* $f_0, f_1, \dots, f_r$ *di cui sopra* (VILLA, *loc. cit.*, pag. 180).

3. – Si osservi in particolare che *se P_0 (non base) è multiplo per almeno due ipersuperficie di Σ_r, allora esso è certamente multiplo per la jacobiana.* Ciò vale anche se P_0 è un punto base, e si verifica subito assumendo P_0 come vertice A_0 della piramide fondamentale e scrivendo l'equazione della jacobiana.

Per il seguito importa considerare il caso in cui è $r \geq 4$ e P_0 è doppio per un fascio di ipersuperficie di Σ_r, e non ha molteplicità maggiore di due per nessuna ipersuperficie di Σ_r; cioè, con le notazioni precedenti, il caso $r \geq 4$, $h = 2$, $r_2 = 1$, $s_2 = 2$. In queste ipotesi P_0 risulta, in generale, doppio per la jacobiana J $(\sigma = 2)$; inoltre gli iperpiani tangenti in P_0 alle ipersuperficie $f_2 = 0$, $f_3 = 0, \ldots, f_{r-1} = 0$, sono linearmente indipendenti e quindi si segano in un piano π_0. Assumendo i detti iperpiani come facce $x_1 = 0$, $x_2 = 0 \ldots, x_{r-2} = 0$, della piramide fondamentale, si ha $\pi_0 \equiv A_0 A_{r-1} A_r$ e l'equazione del cono tangente in $P_0 \equiv A_0$ alla J, diventa per la (1):

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x_{r-1}} & \dfrac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x_r} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_{r-1}} & \dfrac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_r} \end{vmatrix} = 0 .$$

Questa equazione rappresenta la quadrica luogo degli ∞^1 spazi S_{r-2} polari del piano $\pi_0 \equiv A_0 A_{r-1} A_r$ rispetto ai coni del fascio $\varphi^{0} + \lambda \varphi^{1} = 0$, quadrica che è un cono avente lo spazio S_{r-4}

$$(4) \qquad \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_{r-1}} = 0 , \quad \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_r} = 0 , \quad \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_{r-1}} = 0 , \quad \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_r} = 0$$

tutto di punti doppi [8]. Concludendo si ha:

Se è $r \geq 4$, e se P_0 (non base) è doppio per un fascio [9] $f_0 + \lambda f_1 = 0$ di ipersuperficie di Σ_r e non ha molteplicità maggiore di due per nessuna ipersuperficie di Σ_r, allora gli iperpiani tangenti in P_0 alle V^n_{r-1} di Σ_r che passano per P_0, hanno a comune un piano π_0 e non uno spazio di dimensione maggiore. Inoltre P_0 è, in generale, doppio per la jacobiana J di Σ_r ed *il cono tangente Γ ad J in P_0 è il luogo degli ∞^1 spazi S_{r-2} polari di π_0 rispetto ai coni tangenti in P_0 alle ipersuperficie del fascio $f_0 + \lambda f_1 = 0$.* Infine il cono Γ ha un S_{r-4} di punti doppi.

---

(8) Perchè le derivate parziali del determinante (3) sono combinazioni lineari dei primi membri delle (4).

(9) E non per un sistema lineare di dimensione > 1.

Si noti che segando il cono Γ con un generico S_3 di S_r, si ottiene una quadrica V_2^2; questa quadrica ha due schiere di rette che, proiettate dallo spazio S_{r-4}, danno luogo a due schiere ∞^1 di spazi S_{r-2} generatori di Γ, una delle quali è quella considerata sopra. Nel seguito chiameremo ***spazi generatori della prima schiera,*** gli spazi S_{r-2} di cui al precedente enunciato, cioè gli spazi polari del piano π_0 rispetto ai coni tangenti in P_0 alle ipersuperficie di Σ_r che hanno P_0 come punto doppio.

4. — Supponiamo ora che Σ_r sia un sistema lineare ∞^r *generico* di ipersuperficie V_{r-1}^n di ordine $n\,(>1)$ di S_r.

Dall'ipotesi della genericità segue subito che Σ_r non ha punti base e non è composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva.

Inoltre in Σ_r non ci sono ipersuperficie con un punto triplo (o di molteplicità >3); infatti, nello spazio $S_N \left[N = \binom{n+r}{r} - 1\right]$ rappresentativo di tutte le V_{r-1}^n di S_r, le V_{r-1}^n con un punto triplo (non assegnato) sono rappresentate dai punti di una varietà di dimensione $N - \binom{r+2}{2} + r$, e questa varietà non ha punti a comune con un S_r generico di S_N, perchè $N - \binom{r+2}{2} + r + r < N$.

Proviamo infine che *in Σ_r non ci sono ipersuperficie con un punto doppio P_0 a cono tangente dotato di generatrice doppia t_0, la quale sia tangente in P_0 a tutte le ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0.*

Poichè i sistemi lineari ∞^r di ipersuperficie V_{r-1}^n di S_r sono $\infty^{(r+1)(N-r)}$, basterà provare che il numero dei parametri da cui dipendono i sistemi lineari ∞^r che godono della proprietà suddetta è minore di $(r+1)(N-r)$.

Supponiamo prima che sia $n>2$ e osserviamo che, in questa ipotesi, le V_{r-1}^n di S_r le quali hanno un punto doppio (non assegnato) a cono tangente dotato di generatrice doppia, sono ∞^{N-2}. Per fissare un generico sistema lineare Σ_r, ∞^r, di V_{r-1}^n di S_r, contenente una qualche ipersuperficie con un punto doppio P_0 (non assegnato) a cono tangente dotato di generatrice doppia tangente in P_0 a tutte le ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0, basterà procedere nel seguente modo

Fissiamo una generica $\overline{V}_{r-1}^n$ entro la totalità ∞^{N-2} delle V_{r-1}^n che hanno un punto doppio a cono tangente dotato di generatrice doppia; la $\overline{V}_{r-1}^n$ ha un solo punto doppio P_0 e il cono tangente ad essa in P_0 ha una sola generatrice doppia t_0. Dopo ciò, dentro il sistema lineare Σ_{N-2}, di dimensione $N-2$, delle V_{r-1}^n tangenti in P_0 alla retta t_0, fissiamo un generico sistema lineare $\overline{\Sigma}_{r-1}$, di dimensione $r-1$, contenente la $\overline{V}_{r-1}^n$; questi sistemi lineari ∞^{r-1} dipendono da $(r-1)(N-2)-(r-1)^2$ parametri. Infine, dentro il sistema lineare ∞^{N^*} di tutte le V_{r-1}^n di S_r, fissiamo un generico sistema lineare $\overline{\Sigma}_r$, di dimensione r, contenente $\overline{\Sigma}_{r-1}$; questi sistemi lineari ∞^r dipendono da $N-r$ parametri. In totale i parametri fissati sono

$$N-2+(r-1)(N-2)-(r-1)^2+N-r=(r+1)(N-r)-1$$

e quindi i sistemi lineari Σ_r, di dimensione r, i quali godono della proprietà di cui sopra, dipendono da meno di $(r+1)(N-r)$ parametri. La nostra proposizione è quindi provata per $n>2$.

Per $n=2$ le $\overline{V}_{r-1}^n$ sono coni quadrici con una retta di punti doppi, e il ragionamento fatto sopra si può ripetere ancora osservando che i detti coni sono ∞^{N-3} e i sistemi $\overline{\Sigma}_{r-1}$, relativi ad uno generico di questi coni, dipendono da $(r-1)(N-2)-(r-1)^2+1$ parametri.

5. — Da quanto sopra, e tenendo presente il risultato del n. 1 e la prima osservazione del n. 3, si ha che:

I punti multipli della jacobiana di un generico sistema lineare Σ_r, di dimensione r, di ipersuperficie V_{r-1}^n di S_r, sono tutti e soli quei punti di S_r che sono doppi per almeno un fascio di ipersuperficie di Σ_r.

Proviamo ora che di questi punti non ne esistono per $r<4$, mentre per $r\geq 4$ ne esistono ∞^{r-4}. Infatti, consideriamo un generico sistema lineare ∞^{r+2} di V_{r-1}^n di S_r, e indichiamolo con Σ_{r+2}. Rappresentiamo gli elementi di Σ_{r+2} con i punti di uno spazio lineare S_{r+2} e consideriamo, dentro questo S_{r+2}, l'ipersuperficie W_{r+1} i cui punti rappresentano le V_{r-1}^n di Σ_{r+2} le quali hanno un punto doppio. Poichè per un generico punto di S_r passano ∞^1 (un fascio) di V_{r-1}^n di Σ_{r+2} aventi quel punto come punto doppio, e poichè una generica V_{r-1}^n di Σ_{r+2} dotata di punto doppio, non ha più di un punto doppio (per la genericità di Σ_{r+2}), si ha che la W_{r+1} contiene una involuzione di rette, ciascuna delle quali rappresenta un fascio di V_{r-1}^n con un punto base doppio. Segando la W_{r+1} con un S_{r+1} generico di S_{r+2}, si ottiene una W_r la quale non può contenere più di ∞^{r-2} delle nostre rette, altrimenti la W_r sarebbe composta con l'involuzione di rette con cui è composta la W_{r+1}; e ciò è assurdo perchè S_{r+1} è generico in S_{r+2}. Inoltre la W_r non può contenere meno di ∞^{r-2} delle suddette rette perchè alle rette di S_{r+2} bisogna imporre due condizioni (e non più) affinchè stiano in un S_{r+1}. Indichiamo ora con W_{r-1} la varietà luogo delle nostre ∞^{r-2} rette; la W_{r-1} sta in S_{r+1} e le dette ∞^{r-2} rette formano una involuzione in essa. Segando la W_{r-1} con un generico S_r^* di S_{r+1} e ragionando come sopra, si vede che delle nostre rette ce ne sono ∞^{r-4} e non più che stanno in S_r^*. Con ciò risulta provato quanto volevasi e si ha quindi che:

La jacobiana di un generico sistema lineare ∞^r di ipersuperficie di S_r, è priva di punti multipli per $r < 4$, mentre per $r \geq 4$ essa ha ∞^{r-4} punti doppi.

Da ciò segue in particolare la irriducibilità della suddetta jacobiana, per $r > 1$ qualunque.

6. — Sempre nell'ipotesi che il sistema lineare Σ_r sia generico, indichiamo con

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_r f_r = 0$$

la sua equazione. È facile provare che *i punti multipli della jacobiana J di Σ_1 sono tutti e soli quelli in cui la matrice $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$ ha la caratteristica minore di r.*

Infatti, sia P_0 un punto in cui la caratteristica della detta matrice sia minore di r. Poichè le derivate parziali prime del determinante $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ si esprimono come combinazioni lineari (a coefficienti polinomiali) dei minori di ordine r, si ha che esse sono tutte nulle in P_0 e quindi P_0 è un punto multiplo di J.

Viceversa, se P_0 è un punto multiplo di J allora esso è multiplo per almeno un fascio di ipersuperficie di Σ_r (n. 4), e quindi il sistema lineare

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, r)$$

ammette, per $P \equiv P_0$, almeno due soluzioni indipendenti nelle λ; da ciò segue che la matrice $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$ ha caratteristica minore di r in P_0.

Poichè per quanto abbiamo visto al n. 5 la dimensione della varietà M dei punti multipli di J è $r - 4$, dalla proprietà dimostrata ora e tenuto presente un risultato di C. Segre [10], segue che l'ordine di M è

$$(n-1)^4 \frac{r(r+1)^2(r+2)}{12}.$$

Osservazione. — Se il sistema lineare Σ_r non è generico, allora un punto P_0 in cui la caratteristica della matrice $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$ (supposta non identicamente nulla) è $r + 1 - k$, ha molteplicità $\sigma \geq k$ nella ipersuperficie jacobiana

---

[10] C. Segre, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rend. Acc. Lincei, Serie 5ª, Vol. IX (1900).

J; ciò perchè le derivate parziali di ordine $k-1$ del determinante $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|$ si esprimono come combinazioni lineari (a coefficienti polinomiali) dei minori di ordine $r-k+2$.

Può effettivamente accadere che sia $\sigma > k$. Per esempio se P_0 non è un punto base ed è multiplo per una sola ipersuperficie, $f_0 = 0$, di Σ_r, allora si ha $k=1$ qualunque sia la molteplicità $s \geq 2$ di P_0 in f_0; mentre la molteplicità di P_0 in J è $\sigma \geq s-1$ (n. 1).

* * *

7. — Nei nn. 3, 4, 5 abbiamo considerato l'ipersuperficie jacobiana J di un generico sistema lineare Σ_r, ∞^r, di ipersuperficie V_{r-1}^n di S_r; cioè abbiamo considerato la totalità dei punti di S_r i quali sono doppi per qualche ipersuperficie di Σ_r. Abbiamo visto che per $r<4$ la J non ha punti multipli, mentre per $r \geq 4$ la J ha ∞^{r-4} punti doppi, i quali sono tutti e soli quei punti di S_r che sono multipli per almeno ∞^1 ipersuperficie di Σ_r.

Consideriamo ora la varietà W_{r-1} delle ipersuperficie di Σ_r che hanno un punto doppio (non assegnato) e cerchiamo i punti multipli di questa varietà. Precisamente, rappresentiamo le ipersuperficie di Σ_r con i punti di uno spazio lineare $\overline{S}_r$ e consideriamo in $\overline{S}_r$ quei punti che corrispondono a ipersuperficie di Σ_r aventi un punto doppio; questi punti riempiono una ipersuperficie W_{r-1}, la quale è birazionalmente identica alla jacobiana J di Σ_r. Vedremo che i punti doppi della W_{r-1}, per $r \geq 2$, ed $n \geq 3$, si distribuiscono in due varietà irriducibili, ∞^{r-2}, di cui una è formata da quei punti che rappresentano le ipersuperficie di Σ_r che hanno due punti doppi, e l'altra è formata dai punti che rappresentano le ipersuperficie di Σ_r che hanno un punto doppio a cono tangente dotato di una generatrice doppia.

Per provare queste ed altre proprietà della W_{r-1} conviene premettere alcune osservazioni sulla varietà delle V_{r-1}^n di S_r che hanno un punto doppio.

8. — Rappresentiamo le ipersuperficie V_{r-1}^n di S_r con i punti di uno spazio $S_N\left[N = \binom{n+r}{r} - 1\right]$, assumendo come coordinate omogenee di un punto di S_N i coefficienti dell'equazione della V_{r-1}^n. Le V_{r-1}^n con un punto doppio (non assegnato) sono rappresentate dai punti di una varietà W_{N-1}^{δ} di ordine δ e dimensione $N-1$. La W_{N-1}^{δ} è luogo di ∞^r spazi S_{N-r-1}, ciascuno dei quali rappresenta le V_{r-1}^n di S_r con un assegnato punto doppio. Questi S_{N-r-1} sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con i punti di S_r perchè le V_{r-1}^n con un dato punto doppio P non hanno, in generale, altri punti doppi. Per un punto Q generico di W_{N-1}^{δ} passa uno ed uno solo

di questi S_{N-r-1}, perchè Q è immagine di una V_{r-1}^n con *un* punto doppio. Ne segue che i detti spazi S_{N-r-1} formano una involuzione razionale in W_{N-1}^{δ} e quindi questa varietà è razionale (11). Infine notiamo che l'ordine della W_{N-1}^{δ} è $\delta = (r+1)(n-1)^r$; infatti l'ordine δ della W_{N-1}^{δ} è il numero delle ipersuperficie di un fascio generico di V_{r-1}^n che hanno un punto doppio, ed è anche, per la genericità del fascio, l'ordine della jacobiana di detto fascio, ordine che, come è noto (12) è uguale a $(r+1)(n-1)^r$. Concludendo: la W_{N-1}^{δ} è irriducibile, razionale, e di ordine $\delta = (r+1)(n-1)^r$; inoltre essa è composta con una involuzione razionale $\{S_{N-r-1}\}$ di spazi S_{N-r-1}, ciascuno dei quali rappresenta le V_{r-1}^n con un dato punto doppio (13).

9. — Le V_{r-1}^n con due punti doppi (non assegnati) sono rappresentate in S_N dai punti di una varietà $W_{N-2}^{\delta'}$, di dimensione $N-2$, purchè sia $r \geq 2$ ed $n \geq 3$. Infatti, fissiamo in S_r due punti A, B e consideriamo il sistema lineare Σ' delle V_{r-1}^n che passano doppiamente per A e B. Questo sistema lineare Σ' ha la dimensione $N-2r-2$ (14). Inoltre una generica V_{r-1}^n di Σ' non ha punti multipli oltre A e B, perchè Σ' non ha punti base oltre A e B in quanto fra queste V_{r-1}^n ci sono quelle spezzate in una quadrica generica per A e B, in un iperpiano generico per A e B, e (se $n > 3$) in una V_{r-1}^{n-3} generica di S_r. Infine A e B sono effettivamente doppi (e non di molteplicità maggiore) per la generica V_{r-1}^n di Σ', e in ciascuno di essi il cono tangente non ha generatrici multiple; ciò si verifica subito assumendo A e B come vertici della piramide fondamentale. Ne segue che alle

---

(11) Fissato in S_N uno spazio S_r^* generico, si vede subito che la W_{N-1}^{δ} è in corrispondenza biunivoca con le coppie formate da un S_{r+1} per l'S_r^* e un S_{N-r-1} dell'involuzione $\{S_{N-r-1}\}$ con cui è composta la W_{N-1}^{δ}.

(12) BERTINI *loc cit*, pag. 271.

Dal fatto che la W_{N-1}^{δ} è irriducibile e di ordine $\delta = (r+1)(n-1)^r$ segue che *il risultante delle* r + 1 *forme* $\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ (dove f è una forma di grado n in $x_0, x_1, \ldots, x_r$, a coefficienti indeterminati) *è irriducibile.* Infatti il risultante di $r+1$ forme $\varphi_0 \varphi_1 \ldots \varphi_r$, di grado $n-1$ in $x_0, x_1 \ldots, x_r$, è un polinomio R omogeneo e di grado $(r+1)(n-1)^r$ nei coefficienti delle φ_i; per $\varphi_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$ l'equazione $R=0$ non è altro che l'equazione della W_{N-1}^{δ} e poichè questa è irriducibile e di ordine $(r+1)(n-1)^r$, segue che, per $\varphi_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$, R è irriducibile.

(13) Per $r=2$ l'irriducibilità e la razionalità della W_{N-1}^{δ} sono state provate da SEVERI (*Vorlesungen über algebraische Geometrie,* Berlino, 1921, pag. 313) Le considerazioni fatte in questo numero sono l'immediata estensione di quelle di SEVERI.

(14) BERTINI, *loc. cit.*, pag. 288.

∞^{2r} coppie di punti di S_r corrispondono, biunivocamente, in S_N ∞^{2r} spazi S_{N-2r-2} i quali riempiono una varietà $W^{\delta'}_{N-2}$ di dimensione $N-2$, immersa in W^{δ}_{N-1}. Questi S_{N-2r-2} formano una involuzione razionale $\{S_{N-2r-2}\}$ in $W^{\delta'}_{N-2}$; questa varietà è quindi irriducibile e razionale. Un punto generico di $W^{\delta'}_{N-2}$ rappresenta una V^{n}_{r-1} con due punti doppi distinti in cui i coni tangenti non hanno generatrici multiple.

Notiamo infine che un S_{N-2r-2} generico dell'involuzione $\{S_{N-2r-2}\}$ è l'intersezione di due ben determinati S_{N-r-1} dell'involuzione $\{S_{N-r-1}\}$ con cui è composta la W^{δ}_{N-1}; viceversa due spazi di quest'ultima involuzione si segano in uno spazio dell'involuzione $\{S_{N-2r-2}\}$.

10. — Le V^{n}_{r-1} che hanno un punto doppio (non assegnato) in cui il cono tangente ha una generatrice doppia, sono rappresentate in S_N dai punti di una varietà $W^{\delta''}_{N-2}$, di dimensione $N-2$ (sempre per $r \geq 2$ ed $n \geq 3$), immersa in W^{δ}_{N-1}. La $W^{\delta''}_{N-2}$ è irriducibile, è razionale, ed è composta con una involuzione razionale $\{S_{N-2r-1}\}$ di spazi S_{N-2r-1}, ciascuno dei quali rappresenta le V^{n}_{r-1} con un dato punto doppio in cui il cono tangente ha una data generatrice doppia. Il generico punto di $W^{\delta''}_{N-2}$ rappresenta una V^{n}_{r-1} con un solo punto doppio (e non di molteplicità maggiore) in cui il cono tangente ha una sola generatrice doppia. Tutto ciò si prova con considerazioni analoghe a quelle fatte nel n. 9 per la $W^{\delta'}_{N-2}$.

Osserviamo che *uno spazio* S'_{N-2r-1} *dell'involuzione con cui è composta la* $W^{\delta''}_{N-2}$ *è l'intersezione di un ben determinato spazio* S'_{N-r-1} *dell'involuzione* $\{S_{N-r-1}\}$ *con cui è composta la* W^{δ}_{N-1}, *con uno degli* ∞^{r-1} *spazi* S_{N-r-1} *infinitamente vicini a* S'_{N-r-1} *nella detta involuzione* $\{S_{N-r-1}\}$.

Infatti, lo spazio S'_{N-2r-1} è l'immagine delle V^{n}_{r-1} che hanno un certo punto doppio P_0 in cui il cono tangente ha una certa generatrice doppia t_0. Assumiamo P_0 come vertice $A_0 \equiv (1, 0, 0, \ldots, 0)$ della piramide fondamentale e t_0 come spigolo $A_0 A_1$. Posto $y_i = \frac{x_i}{x_0}$ per $i = 1, 2, \ldots, r$, l'equazione di una qualunque delle dette V^{n}_{r-1} è del tipo:

$$\varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n = 0 \tag{5}$$

con φ_h forma di grado h in $y_1, y_2, \ldots, y_r$, a coefficienti arbitrari e $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \equiv 0$.

La stessa equazione (3), senza la condizione $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \equiv 0$, rappresenta, al variare dei coefficienti, le V^{n}_{r-1} che hanno $P_0 \equiv A_0$ come punto doppio; a queste V^{n}_{r-1} corrisponde in S_N uno spazio S'_{N-r-1}. Consideriamo ora le V^{n}_{r-1}

che hanno il punto $y_1 = -\varepsilon$, $y_2 = 0, \ldots, y_r = 0$, come punto doppio; la loro equazione è del tipo

$$\psi_2 + \psi_3 + \cdots + \psi_n = 0 \quad \text{con} \quad \psi_h \equiv \varphi_h(y_1 + \varepsilon, y_2, \ldots, y_r)$$

e questa equazione (sviluppando rispetto ad ε) si può scrivere nella forma

$$(6) \qquad \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_n + \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} \right) + [2] = 0$$

dove con [2] abbiamo indicato i termini che contengono a fattore ε^2. Dalla (6), trascurando i termini di grado ≥ 2 in ε, risulta che, affinchè $P_0 \equiv A_0$ sia doppio per le nostre ipersuperficie occorre e basta che sia $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \equiv 0$; si trova cioè la condizione che esprime che le (5) abbiano la retta $t_0 \equiv A_0 A_1$ come generatrice doppia del cono tangente in $P_0 \equiv A_0$.

11. — *Un punto Q di W^{δ}_{N-1} che non appartenga nè a $W^{\delta'}_{N-2}$ nè a $W^{\delta''}_{N-2}$ è semplice per W^{δ}_{N-1}, e l'iperpiano tangente in esso rappresenta le V^n_{r-1} che passano per il punto doppio P della $\overline{V}^n_{r-1}$ che ha per immagine Q.*

Infatti una retta generica per Q è l'immagine di un fascio generico contenente $\overline{V}^n_{r-1}$. Il punto P non è punto base in questo fascio, è l'unico punto doppio della $\overline{V}^n_{r-1}$, ed il cono tangente in P alla $\overline{V}^n_{r-1}$ non ha generatrici multiple. Ne segue che la $\overline{V}^n_{r-1}$ conta per una sola unità agli effetti del calcolo dell'invariante di ZEUTHEN SEGRE di S_r, mediante il detto fascio; cioè una retta generica per Q ha una intersezione semplice in Q con la W^{δ}_{N-1}, e quindi Q è un punto semplice per la W^{δ}_{N-1}.

Consideriamo ora il fascio che congiunge $\overline{V}^n_{r-1}$ con una generica V^n_{r-1} per P. Il punto P appartiene alla varietà base $\overline{V}_{r-2}$ di questo fascio, ed è punto doppio ordinario per essa. Calcolando l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE [15], $I(S_r)$, di S_r mediante un fascio generico contenente $\overline{V}^n_{r-1}$, si ha:

$$I(S_r) = \delta - 2\, I(V^n_{r-1}) - I(V_{r-2})$$

e calcolando $I(S_r)$ mediante un fascio congiungente $\overline{V}^n_{r-1}$ con una V^n_{r-1} generica per P, si ha

$$I(S_r) = \overline{\delta} - 2\, I(V^n_{r-1}) - I(\overline{V}_{r-2}).$$

---

[15] C. SEGRE, *Intorno ad un carattere ecc*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol XXXI (1896)

E poichè $I(\overline{V}_{r-2}) = I(V_{r-2}) - 1$ [16], si ha $\overline{\delta} = \delta - 1$, e quindi la $\overline{V}^n_{r-1}$ conta per due unità nel calcolo di $I(S_r)$ mediante un fascio dell'ultimo tipo.

Un punto generico Q' di $W^{\delta'}_{N-2}$ è doppio per W^{δ}_{N-1}, e il cono tangente in esso è spezzato nei due iperpiani che rappresentano le V^n_{r-1} passanti per l'uno o per l'altro dei due punti doppi P_1 e P_2 della $\overline{V}^n_{r-1}$ che ha per immagine Q' [17].

Infatti, la $\overline{V}^n_{r-1}$ conta per due unità nel calcolo dell'invariante di ZEUTHEN-SEGRE $I(S_r)$ di S_r mediante un fascio generico contenente $\overline{V}^n_{r-1}$; ne segue che Q' è un punto doppio di W^{δ}_{N-1}. Inoltre, ragionando come per Q, si vede che la $\overline{V}^n_{r-1}$ conta per tre unità nel calcolo di $I(S_r)$ mediante un fascio che congiunge $\overline{V}^n_{r-1}$ con una generica V^n_{r-1} passante per P_1 o per P_2; ne segue che il cono tangente in Q' è spezzato nei due iperpiani che rappresentano le V^n_{r-1} per P_1 o per P_2.

12. — *Un punto generico Q'' di $W^{\delta''}_{N-2}$ è doppio* [18] *per W^{δ}_{N-1}, e il cono tangente in esso è l'iperpiano, contato due volte, che rappresenta le V^n_{r-1} passanti per il punto doppio P della $\overline{V}^n_{r-1}$ che ha per immagine Q''.*

Indichiamo con H un generico fascio contenente la nostra $\overline{V}^n_{r-1}$, con K un generico fascio di iperpiani di S_r e con T la curva di contatto di questi due fasci. Poichè il punto P, come è noto, abbassa di tre unità la classe di una V^n_{r-1} [19], si ha che la sezione della $\overline{V}^n_{r-1}$ con l'iperpiano di K passante per P, conta per due unità nel numero delle sezioni di $\overline{V}^n_{r-1}$ (con gli iperpiani di K) le quali hanno un punto doppio. Ne segue che P conta per due unità nel numero dei punti doppi della g^1_m segata da H su T e quindi, tenendo presente il classico ragionamento di C. SEGRE [20], segue che la $\overline{V}^n_{r-1}$ conta per due unità nel calcolo dell'invariante $I(S_r)$ mediante il fascio H.

Con ragionamento analogo a quello fatto nel n. 11 si prova che la $\overline{V}^n_{r-1}$ conta per tre unità nel calcolo di $I(S_r)$ mediante un fascio che congiunge $\overline{V}^n_{r-1}$ con una generica V^n_{r-1} passante per P.

---

(16) Perchè la varietà base $\overline{V}_{r-2}$ ha il punto doppio (ordinario) P.

(17) Le due proprietà di questo numero si trovano dimostrate, per $r = 2$ e con considerazioni diverse dalle nostre, in SEVERI, *loc. cit.*, pp. 313, 314, 315. Per $r \geq 2$, vedi: B. SEGRE, *Dei sistemi lineari tangenti ad un qualunque sistema di forme*, Rend. Acc. Lincei, V. XXXIII (1924), p. 182. Vedi anche P. LORENZOLA, *Sul luogo dei punti di contatto ecc.*, Giornale di Mat., vol. XLIII (1905), pag. 213; V. E. GALAFASSI, *Criteri di equivalenza ecc.* Rend. Ist. Lombardo, Vol. LXXIX (1945), pag. 345.

(18) GALAFASSI, *loc. cit.*, pag. 354.

(19) In quanto P è un punto doppio di $\overline{V}^n_{r-1}$ a cono tangente dotato di generatrice doppia. E si noti che per la genericità di Q'' la $\overline{V}^n_{r-1}$ non ha altri punti multipli o altre particolarità tangenziali in P.

(20) C. SEGRE, *loc. cit.*, n. 8.

Osservazione. — La proprietà che il generico punto Q' di $W_{N-2}^{\delta'}$ è doppio per W_{N-1}^{δ}, si può anche dedurre dal fatto che per Q' passano due ben determinati S_{N-r-1} dell'involuzione $\{S_{N-r-1}\}$ con cui è composta W_{N-1}^{δ} (n. 9). Analogamente si può dire per il generico punto Q'' di $W_{N-2}^{\delta''}$ il quale appartiene all'intersezione di un ben determinato S_{N-r-1} con uno spazio infinitamente vicino della suddetta involuzione (n. 10).

13. Consideriamo ora in S_N un *generico* spazio ad r dimensioni, ed indichiamolo con $\overline{S}_r$; sia Σ_r il sistema lineare di V_{r-1}^n che ha per immagine $\overline{S}_r$. Indichiamo con J_{r-1}^d l'ipersuperficie jacobiana di Σ_r, e con W_{r-1}^{δ} la sezione di W_{N-1}^{δ} con $\overline{S}_r$.

Ricordiamo che l'ordine della J_{r-1}^d è $d = (r+1)(n-1)$, mentre l'ordine della W_{r-1}^{δ} è $\delta = (r+1)(n-1)^r$. La J_{r-1}^d non ha punti doppi per $r < 4$, ed ha ∞^{r-4} punti doppi per $r \geq 4$ (n. 5). Invece la W_{r-1}^{δ} ha due varietà irriducibili $W_{r-2}^{\delta'}$ e $W_{r-2}^{\delta''}$, di dimensione $r-2$, di punti doppi; esse sono le sezioni con S_r delle due varietà $W_{N-2}^{\delta'}$ e $W_{N-2}^{\delta''}$. La $W_{r-2}^{\delta'}$ è formata dai punti che rappresentano ipersuperficie di Σ_r le quali hanno due punti doppi; la $W_{r-2}^{\delta''}$ è formata dalle ipersuperficie di Σ_r le quali hanno un punto doppio a cono tangente dotato di generatrice doppia. In un generico punto Q' della $W_{r-2}^{\delta'}$ il cono tangente è spezzato nei due S_{r-1} che sono immagini dei due sistemi lineari ∞^{r-1} di ipersuperficie di Σ_r passanti per l'uno o per l'altro dei due punti doppi della V_{r-1}^n rappresentata da Q'; in un generico punto Q'' della $W_{r-2}^{\delta''}$ il cono tangente è l'S_{r-1}, contato due volte, immagine del sistema lineare ∞^{r-1} di ipersuperficie di Σ_r passanti per il punto doppio della V_{r-1}^n rappresentata da Q''.

Le due varietà J_{r-1}^d *e* W_{r-1}^{δ} *sono birazionalmente identiche.* Infatti un generico punto di W_{r-1}^{δ} rappresenta una V_{r-1}^n con *un* punto doppio, e quindi ad un punto di W_{r-1}^{δ} corrisponde un punto di J_{r-1}^d; viceversa, un generico punto di J_{r-1}^d individua una V_{r-1}^n di Σ_r che ha quel punto come punto doppio, e quindi ad un punto di J_{r-1}^d corrisponde un punto di W_{r-1}^{δ}.

14. — *La* W_{r-1}^{δ} *è l'immagine proiettiva del sistema lineare* $|J_{r-2}|$, ∞^r, *delle jacobiane dei sistemi lineari* Σ_{r-1}, *di dimensione* $r-1$, *contenuti in* Σ_r; infatti, alla sezione di W_{r-1}^{δ} con un generico $\overline{S}_{r-1}$ di $\overline{S}_r$ corrisponde in J_{r-1}^d la jacobiana J_{r-2} del sistema lineare Σ_{r-1} che ha per immagine $\overline{S}_{r-1}$.

Un generico punto doppio Q *della* W_{r-1}^{δ}, *se appartiene alla* $W_{r-2}^{\delta'}$, *proviene da due punti (semplici)* di J_{r-1}^d in quanto esso è l'immagine di una $\overline{V}_{r-1}^n$ con due punti doppi; *mentre se* Q *appartiene alla* $W_{r-2}^{\delta''}$, *esso proviene da un punto (semplice) della* J_{r-1}^d *e dal punto infinitamente vicino in una certa direzione*, in quanto Q è l'immagine di una $\overline{V}_{r-1}^n$ con un punto doppio P a cono tangente dotato di una generatrice doppia τ la quale è tangente in P alla J^d_{r-1} (n. 1) ed a tutte le J_{r-2} del sistema lineare $| J_{r-2} |$, che passano per P [21].

I punti base del sistema lineare $| \mathrm{J}_{r-2} |$ *sono tutti e soli i punti multipli di* J_{r-1}. Infatti un punto multiplo P di J^d_{r-1} è doppio per almeno ∞^1 ipersuperficie di Σ_r (n. 5) e quindi in ogni sistema lineare ∞^{r-1} contenuto in Σ_r c'è almeno una ipersuperficie che ha il punto P come punto doppio; cioè P appartiene ad ogni J_{r-2} di $| J_{r-2} |$. Viceversa, se P è un punto comune a tutte le J_{r-2} di $| J_{r-2} |$, allora ogni sistema lineare ∞^{r-1} contenuto in Σ_r contiene almeno una ipersuperficie la quale ha P come punto doppio; ne segue che P è doppio per almeno ∞^1 V^n_{r-1} di Σ_r e quindi (n. 5) esso è multiplo per J^d_{r-1}. Per quanto sopra e per quanto si è detto nel n. 5, il sistema lineare $| J_{r-2} |$ non ha punti base se è $r < 4$, ed ha ∞^{r-4} punti base, se è $r \geq 4$.

Un generico punto base P_0 *di* $| \mathrm{J}_{r-2} |$ *è doppio per la jacobiana* J^d_{r-1} *di* Σ_r, *ed ha per corrispondente in* W^δ_{r-1} *una retta* $\overline{\mathrm{S}}_1$, perchè P_0 è doppio per un fascio di V^n_{r-1} di Σ_r.

Consideriamo un generico punto Q di $\overline{S}_1$. Indichiamo con $\overline{V}^n_{r-1}$ l'ipersuperficie di Σ_r che ha per immagine Q, con π_0 il piano tangente in P_0 a tutte le $\overline{V}^n_{r-1}$ di Σ_r che passano per P_0 (n. 3), e con S_{r-2} lo spazio polare di π_0 rispetto al cono tangente in P_0 alla $\overline{V}^n_{r-1}$; questo spazio S_{r-2} sta nel cono tangente Γ^2_{r-1} alla J^d_{r-1} in P_0 (n. 3), anzi è uno degli ∞^1 spazi generatori della prima schiera del cono Γ^2_{r-1}. Indichiamo infine con $\overline{S}_{r-1}$ un generico iperpiano di $\overline{S}_r$, passante per Q e con Σ_{r-1} il sistema lineare che ha per immagine $\overline{S}_{r-1}$; Σ_{r-1} è un generico sistema lineare, ∞^{r-1}, contenuto in Σ_r e che contiene la $\overline{V}^n_{r-1}$.

Da quanto abbiamo detto nei nn. 1, 3, segue facilmente che *lo spazio* S_{r-2} *è tangente alla jacobiana* J_{r-2} *del sistema lineare* Σ_{r-1}. Infatti, consideriamo un generico sistema lineare Σ'_r, ∞^r, contenente Σ_{r-1}; e sia J'_{r-1} la sua jacobiana. Il punto P_0 è semplice per J'_{r-1} e l'iperpiano tangente in P_0 alla J'_{r-1} non è altro che l'S_{r-1} polare della retta t_0 tangente in P_0 a tutte le ipersuperficie di Σ'_r che passano per P_0, rispetto al cono tangente in P_0 alla $\overline{V}^n_{r-1}$. La retta t_0 sta nel piano π_0 e quindi l'iperpiano polare di t_0 contiene l'S_{r-2} polare di π_0; ne segue che questo S_{r-2} è tangente in P_0 alla J'_{r-1} e quindi, per la genericità di Σ'_r, esso è tangente in P_0 alla J_{r-2}.

---

[21] Una J_{r-2} per P è la jacobiana di un sistema lineare Σ_{r-1} contenente la $\overline{V}^n_{r-1}$ e contenuto in Σ_r; il sistema lineare Σ'_r congiungente Σ_{r-1} con una generica V^n_{r-1} di S_r, ha una jacobiana J'_{r-1} che contiene J_{r-2} ed è tangente in P alla retta τ (n. 1). Segue che τ è tangente in P alla J_{r-2}.

Le jacobiane J_{r-2} dei sistemi lineari Σ_{r-1} contenuti in Σ_r e che contengono la $\overline{V}_{r-1}^n$, sono dunque tangenti allo spazio S_{r-2} e quindi ai punti della retta $\overline{S}_1$ corrispondono univocamente gli spazi S_{r-2} generatori, della prima schiera, del cono tangente Γ_{r-1}^2 alla J_{r-1}^d in P_0. E poichè i punti di $\overline{S}_1$ e le ipersuperficie V_{r-1}^n di Σ_r che hanno per immagine $\overline{S}_1$ si corrispondono proiettivamente, e queste V_{r-1}^n sono in corrispondenza proiettiva con gli S_{r-2} polari di π_0, si ha che la corrispondenza fra i punti di $\overline{S}_1$ e gli spazi S_{r-2} generatori della prima schiera di Γ_{r-1}^2 è proiettiva. Concludendo:

Alle ∞^{r-2} *direzioni tangenti in un generico punto doppio* P_0 *della jacobiana* J_{r-1}^d *di* Σ_r, *corrispondono in* $\mathrm{W}_{r-1}^{\delta}$ *i punti di una retta* $\overline{\mathrm{S}}_1$; *alle direzioni che stanno in uno stesso* S_{r-2} *generatore della prima schiera del cono tangente* Γ_{r-1}^2 *in* P_0 *alla* J_{r-1}^d, *corrisponde lo stesso punto di* $\overline{\mathrm{S}}_1$; *e la corrispondenza fra gli spazi* S_{r-2} *generatori delle prima schiera di* Γ_{r-1}^2 *e i punti di* $\overline{\mathrm{S}}_1$ *è proiettiva.*

15. — Osserviamo infine che:

La jacobiana J_{r-1}^d *di* Σ_r *è superficialmente regolare* (per $r \geq 3$). Infatti la J_{r-1}^d è birazionalmente identica alla W_{r-1}^{δ} che è la sezione dell'ipersuperficie *razionale* W_{N-1}^{δ} con un $\overline{S}_r$ generico di S_N. Per un noto teorema ([22]), una tale sezione è superficialmente regolare, e quindi è anche tale la J_{r-1}^d.

L'ipotesi che il sistema lineare Σ_r sia generico, è essenziale. Particolari sistemi lineari ∞^r possono avere la jacobiana irriducibile e superficialmente irregolare; per esempio, se si considerano tre generiche reciprocità fra due spazi a tre dimensioni, si definisce una corrispondenza cremoniana $T_{3,3}$ e il sistema omaloidico relativo ha per jacobiana una rigata irriducibile di genere tre.

([22]) SEVERI, *Osservazioni varie ecc.*, Atti del R. Istituto Veneto, T LXV (1906).
CASTELNUOVO-ENRIQUES, *Sur les intégrales simples ecc*, Annales Sc. de l'Ecole Normale Sup, T. XXII (1906).

[*Pervenuto alla Redazione il 31 Dicembre 1949*]