ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIA CINQUINI CIBRARIO

Sopra la teoria delle caratteristiche per i sistemi di equazioni quasi-lineari alle derivate parziali del primo ordine

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 3, nº 1-4 (1950), p. 161-197
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_3_1-4_161_0>

SOPRA LA TEORIA DELLE CARATTERISTICHE PER I SISTEMI DI EQUAZIONI QUASI-LINEARI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL PRIMO ORDINE

di MARIA CINQUINI CIBRARIO (Modena).

I sistemi di equazioni alle derivate parziali non lineari del primo ordine

(a) $F_i(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$

o brevemente

$$F_i(x, y; z_j; p_j; q_j) = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

dove si è posto

$$(1) \qquad p_j = \frac{\partial z_j}{\partial x}, \qquad q_j = \frac{\partial z_j}{\partial y}$$

sono stati oggetto di studio in due nostri lavori anteriori [1], in cui è stato risolto, nel campo delle funzioni di variabile reale, il problema di CAUCHY: « *determinare un sistema di integrali del sistema* (a), *quando siano assegnati i valori di* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *su una curva data* ».

Il problema di CAUCHY non è il solo che si possa proporre per il sistema (a); per esso si possono proporre, per esempio, problemi del tipo di GOURSAT, tra i quali il più semplice è il seguente: « determinare un sistema di integrali $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *del sistema* (a), *quando alcune delle* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *sono assegnate su un arco di curva, e le altre su un altro arco di curva, che incrocia il primo in un punto* ».

---

[1] (M_1) M. CINQUINI CIBRARIO, *Sopra il problema di* CAUCHY *per i sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine*. Rend del Seminario matematico di Padova, A. XVII, 1948, pp. 75 96.

(M_2) M. CINQUINI CIBRARIO, *Sopra i sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali e multiple* Rend Acc. dei LINCEI, s. VIII, vol IV, pp. 682-688. Nel seguito questi lavori saranno citati con (M_1) e (M_2).

Un problema di questo tipo e stato studiato da L. A. MELTZER (2) per un sistema lineare

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, y) p_j + b_{ij}(x, y) q_j = c_i(x, y; z_1, \ldots, z_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

mentre non mi sono noti lavori sull'argomento relativi al sistema generale (a).

Nel presente lavoro iniziamo questo campo di ricerche, risolvendo, nel campo delle funzioni di variabile reale, un particolare problema di GOURSAT per un sistema quasi lineare del tipo iperbolico (3)

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n) p_j + B_{ij}(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n) q_j = \\ &= C_i(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n). \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

La risoluzione di tale problema è di particolare importanza, perchè essa ci permetterà di dare nel presente lavoro un *assetto compiuto alla teoria delle caratteristiche del sistema* (I) *nel campo delle funzioni di variabile reale.* I risultati ottenuti nel presente lavoro saranno estesi, in successivi lavori, al sistema generale (a), e ad equazioni e sistemi di equazioni di ordine superiore.

Nel § 1, dopo aver definito ciò che si intende come sistema di curve caratteristiche del sistema (I), viene enunciato il *risultato fondamentale della presente ricerca, relativo all'esistenza di un sistema di integrali del sistema* (I), *che contengono una curva caratteristica data, e in più nei punti di una curva assegnata del piano* x, y *soddisfano una condizione lineare* (*in particolare una delle* $z_j(x, y)$ *fissata si riduce ad una funzione assegnata*).

Nel § 2 la dimostrazione di tale teorema viene ricondotta alla risoluzione di un problema studiato in due nostre note recenti (4).

Nel § 3 si dimostra un altro teorema di esistenza e di unicità e si prova il risultato che *ogni curva caratteristica del sistema di equazioni alle derivate parziali* (I) *appartiene a infiniti sistemi di integrali del sistema* (I); si prova pure un risultato negativo, e cioè che, in generale, *per due curve caratteristiche date del sistema* (I), *appartenenti a due diversi tra gli* n *sistemi di curve caratteristiche, non passa alcun sistema di integrali del sistema dato.*

---

(2) L. A MELTZER, *On the correct Statement of Goursats problem.* Recueil mathématique, nouvelle série, T. 18 (60), 1946, e *Sur la position correcte du problème de Goursat,* C. R Acad. Sc. U. R S S, N S. 30, p. 693 696, 941.

(3) Nel senso che ammette n sistemi distinti di curve caratteristiche, tutte reali

(4) M CINQUINI CIBRARIO. *Sopra alcuni problemi preliminari.* Nota I e Nota II, Rend dell'Istituto Lombardo, Vol. 83. Esse saranno citate rispettivamente con (M_3) e (M_4).

Il § 4 contiene alcune osservazioni relative alla determinazione delle *striscie caratteristiche dei vari ordini* e ai sistemi di integrali del sistema (I), che le contengono.

Nel § 5 si completano, mediante i risultati del presente lavoro, i nostri teoremi, contenuti in (M_1) e relativi alla risoluzione del problema di CAUCHY per il sistema (I).

Mentre nei §§ 1-5 si è sempre supposto che il sistema (I) ammetta n *sistemi distinti* e tutti reali di caratteristiche, il § 6 è dedicato al caso, già studiato in (M_2), in cui vi sono dei sistemi di caratteristiche multiple, purchè tutte reali e soddisfacenti ad una condizione, già introdotta in (M_2) [5]; alcuni dei risultati dei §§ 1-5 valgono senz'altro; altri devono essere opportunamente modificati.

Il § 7 e dedicato al caso, in cui i sistemi di caratteristiche distinti si riducono a due; in questo caso infatti vi sono delle notevoli semplificazioni nelle ipotesi e nei risultati. Infine nel § 8 si studia il caso in cui vi è *un solo* sistema di caratteristiche n-ple.

§ 1 - Posizione del problema.

1. — Si supponga che A_{ij}, B_{ij}, C_i siano definite in un campo D e ivi lipschitziane, e che l'equazione

$$\text{(II)}\qquad \begin{vmatrix} A_{11}\,dy - B_{11}\,dx & A_{12}\,dy - B_{12}\,dx & \ldots\ldots & A_{1n}\,dy - B_{1n}\,dx \\ A_{21}\,dy - B_{21}\,dx & A_{22}\,dy - B_{22}\,dx & \ldots\ldots & A_{2n}\,dy - B_{2n}\,dx \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}\,dy - B_{n1}\,dx & A_{n2}\,dy - B_{n2}\,dx & \ldots\ldots & A_{nn}\,dy - B_{nn}\,dx \end{vmatrix} = 0$$

abbia in tutto D sempre n radici reali e distinte, cioè che il sistema (I) sia del tipo iperbolico in tutto D.

Indicato con A il determinante il cui termine generale è A_{ij}, in tutto D sia [6]

$$(1)\qquad A \neq 0\,.$$

[5] Cfr. (M_2), p. 683 Ipotesi A).

[6] Si vedrà in seguito (cfr § 2, n. 1) che l'ipotesi (1) non è restrittiva per quanto concerne i teoremi, che enunceremo, in quanto essa può sempre essere soddisfatta nell'intorno di un punto $x, y, z_1, \ldots, z_n$ del campo D.

Posto allora $\dfrac{dy}{dx} = \varrho$ nella (II), nel seguito considereremo sempre la (II) come una equazione nell'incognita ϱ.

Sia

$$z_1 = z_1(x, y) \quad z_2 = z_2(x, y), \ldots, z_n = z_n(x, y) \tag{2}$$

un sistema di integrali del sistema (I); nello spazio a $n+2$ dimensioni, in cui variano $x, y, z_1, z_2, \ldots, z_n$, le (2) definiscono una superficie Σ, che diremo superficie integrale del sistema (I).

Nel primo membro dell'equazione (II) si pongano al posto di $z_1, z_2, \ldots, z_n$ le funzioni (2), e sia

$$\frac{dy}{dx} = \varrho\,[x, y, z_1(x, y), \ldots, z_n(x, y)] \tag{3}$$

una radice dell'equazione in $\dfrac{dy}{dx}$ così ottenuta.

La (3) definisce su Σ un sistema di curve, che costituisce il sistema di *curve caratteristiche* relativo alla radice ϱ della (II); nei punti di tali curve valgono le due equazioni

$$dy = \varrho\, dx\,; \quad \sum_{i,j=1}^{n} h_i A_{ij}\, dz_j = \sum_{i=1}^{n} h_i C_i\, dx\,, \tag{III}$$

dove le $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sono funzioni di $x, y, z_1, z_2, \ldots, z_n$, non tutte nulle contemporaneamente, che soddisfano le

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{ij}\, \varrho - B_{ij})\, h_i = 0\,, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{4}$$

2. — Si faccia ora astrazione dalla conoscenza del sistema (2) di integrali del sistema (I), e sia dato un sistema di funzioni D^I (7), definite in un intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$

$$y = f(x)\,, \quad z_1 = \zeta_1(x)\,, \ldots, z_n = \zeta_n(x)\,. \tag{IV}$$

Diremo che il sistema (IV) di funzioni costituisce una curva caratteristica del sistema (I), relativa alla radice ϱ della (II), se tutti i sistemi di valori $x, f(x), \zeta_1(x), \ldots, \zeta_n(x)$, ottenuti al variare di x nell'intervallo

---

(7) Diremo funzione D^n una funzione continua con tutte le sue derivate fino a quelle di ordine n incluse, e funzione $D^n - L$ una funzione D^n, le cui derivate n-esime sono inoltre, lipschitziane

$x_1 < x \leq x_2$, appartengono al campo D, e se le funzioni (IV) soddisfano il sistema di equazioni differenziali (III). Si dice che una superficie integrale Σ del sistema (I), avente per equazioni le (2), contiene la curva caratteristica (IV), se la curva $y = f(x)$ appartiene al campo δ di definizione delle funzioni $z_j(x, y)$, e se è [8]

$$z_1[x, f(x)] = \zeta_1(x), \ldots, z_n[(x, f(x)] = \zeta_n(x). \tag{V}$$

3. – Si indichino ora con $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ le n radici distinte della (II); si considerino poi gli n sistemi di funzioni $h_i^r(x, y; z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $(i, r = 1, 2, \ldots, n)$, che soddisfano gli n sistemi di equazioni analoghi al sistema (4):

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{ij}\,\varrho_r - B_{ij})\, h_i^r = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Si indichi con Δ il determinante, il cui termine generale è

$$c_{rj} = \sum_{i=1}^{n} h_i^r\, A_{ij}, \tag{6}$$

e con H il determinante, il cui termine generale è h_i^r; poichè

$$\Delta = A\, H, \tag{7}$$

e si è dimostrato in (M_1) [9] che

$$H \neq 0, \tag{8}$$

da questa e dalla (1) segue che

$$\Delta \neq 0. \tag{9}$$

Indicheremo con γ_{rj} il complemento algebrico in Δ dell'elemento c_{rj}.

4. – Si ponga $\varrho_1 = \varrho$; sia assegnata, mediante la (IV), una curva caratteristica Γ del sistema (I), relativa alla radice ϱ_1 della (II); nei punti di Γ le A_{ij}, B_{ij}, C_i, ϱ_r, $h_i^{(r)}$, c_{rj}, γ_{rj}, $(i, j, r = 1, 2, \ldots, n)$ sono tutte funzioni note di x.

---

(8) Può darsi che il campo δ non contenga l'*intera* curva $y = f(x)$, ma soltanto un arco di essa; in tale caso si intende che le (V) sono soddisfatte soltanto su tale arco, e che quindi la superficie integrale Σ contiene non l'intera curva Γ data, ma soltanto un arco di essa. Questa osservazione va tenuta presente nel seguito.

(9) Cfr (M_1), § 3, n. 2

Si supponga poi che le funzioni A_{ij}, B_{ij}, C_i, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ siano funzioni $D^{II} - L$ in tutto il campo D, e che le funzioni (IV) siano $D^{II} - L$ nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$. Sia x_0 un punto interno all'intervallo $x_1 < x < x_2$ e siano y_1 e y_2 due valori di y, tali che sia $y_1 < f(x_0) < y_2$.

Posto $y_0 = f(x_0)$, sia $x = g(y)$ una funzione $D^{II} - L$ definita nell'intervallo $y_1 \leq y \leq y_2$ e tale che sia $x_0 = g(y_0)$; nel punto comune (x_0, y_0) le due curve $y = f(x)$, $x = g(y)$ non siano tangenti, così che

$$1 - f'(x_0)\, g'(y_0) \neq 0 . \tag{10}$$

Siano assegnate inoltre $n + 1$ funzioni $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\ldots$, $\varphi_n(y)$, $G(y)$, definite nell'intervallo $y_1 \leq y \leq y_2$, ivi $D^{II} - L$ e soddisfacenti le condizioni

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y_0)\, \zeta_j(x_0) = G(y_0), \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y_0)\, \gamma_{1j}[x_0, y_0; \zeta_1(x_0), \zeta_2(x_0), \ldots, \zeta_n(x_0)] \neq 0. \tag{12}$$

Si può allora enunciare il seguente:

TEOREMA I. *Nelle ipotesi precedenti esiste uno e un solo sistema di integrali del sistema* (I)

$$z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y), \ldots, z_n = z_n(x, y), \tag{13}$$

che sono definiti in un campo δ abbastanza piccolo del piano x, y, *contenente all'interno il punto* (x_0, y_0), *sono ivi funzioni* $D^{II} - L$, *soddisfano le* (V) [10], *e soddisfano inoltre la condizione* [11]

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y)\, z_j[g(y), y] = G(y) \text{ ».} \tag{VI}$$

Geometricamente il TEOREMA I assicura che: « *Esiste una e una sola superficie integrale* Σ *del sistema* (I), *che passa per la curva caratteristica* Σ, *e inoltre contiene una curva* Λ, *che si proietta sul piano* x, y *nella curva* $x = g(y)$, *nei punti della quale è soddisfatta la* (VI) » [12]

(10) Si intende che le (V) sono soddisfatte soltanto sull'arco della curva $y = f(x)$, contenuto nel campo δ (cfr la precedente nota (8)).

(11) Si intende che la (VI) è soddisfatta nei punti della curva $x = g(y)$, appartenenti al campo δ.

(12) Si intende (cfr le precedenti note (8), (10), (11)) che queste condizioni sono soddisfatte *in piccolo,* cioè sono relative agli archi delle curve Γ e Λ, che si proiettano sul piano x, y in punti del campo δ. Analoga osservazione si intenderà sempre fatta nel seguito.

In particolare le $\varphi_j(y)$ possono essere costanti per $y_1 \leq y \leq y_2$ (soddisfacenti le (11) e (12)), e, ancora più in particolare, possono essere tutte nulle, tranne una, p. es. la $\varphi_1(y)$; posto

$$Z_1(y) = \frac{G(y)}{\varphi_1(y)},$$

le (11) e (12) divengono

$$\zeta_1(x_0) = Z_1(y_0), \tag{11'}$$

$$\gamma_{11}[x_0, y_0; \zeta_1(x_0), \zeta_2(x_0), \ldots, \zeta_n(x_0)] \neq 0. \tag{12'}$$

Come caso particolare si ha dunque dal TEOREMA I il seguente

COROLLARIO I. — « *Nelle ipotesi del* TEOREMA I (sostituendo le (11') e (12') alle (11) e (12)) *esiste uno e un solo sistema di integrali* (13) *del sistema* (1), *che sono definiti in un campo δ abbastanza piccolo del piano* x, y, *contenente all'interno il punto* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$, *sono ivi funzioni* $\mathrm{D^{II}} - \mathrm{L}$, *soddisfano le* (V) *e soddisfano inoltre la*

$$z_1[g(y), y] = Z_1(y) \text{ ».} \tag{VI*}$$

Sulla curva $y = f(x)$ sono dunque assegnati i valori di *tutte* le $z_j(x, y)$ (in modo che essi, insieme alla $y = f(x)$, costituiscano nello spazio a $n + 2$ dimensioni delle variabili $x, y, z_1, z_2, \ldots, z_n$ una *curva caratteristica*); sulla curva $x = g(y)$ sono dati i valori di una sola delle $z_1(x, y)$, e cioè della $z_1(x, y)$ [13]. Geometricamente: « *Esiste una e una sola superficie integrale Σ del sistema* (1), *che contiene la curva caratteristica Γ, e inoltre contiene una curva Λ, che si proietta nello spazio delle variabili* x, y, z_1, *in una curva data di equazioni* $\mathrm{x} = \mathrm{g}(\mathrm{y})$, $\mathrm{z}_1 = \mathrm{Z}_1(\mathrm{y})$ ».

§ 2 - Dimostrazione del TEOREMA I.

1. — Nello spazio a $n + 2$ dimensioni delle variabili $x, y, z_1, z_2, \ldots, z_n$ si porti l'origine nel punto $x_0, y_0, \zeta_1(x_0), \ldots, \zeta_n(x_0)$, che appartiene alla caratteristica Γ assegnata; in questa ipotesi è

$$x_0 = y_0 = 0; \quad \zeta_1(0) = 0; \ldots; \zeta_n(0) = 0, \tag{1}$$

---

(13) Sulla curva $x = g(y)$ si possono dare soltanto i valori di *una sola* qualunque delle $z_j(x, y)$, e sia p. es. $z_{j_0}(x, y)$, purchè per tale indice j_0 sia $\gamma_{1 j_0}[x_0, y_0; \zeta_1(x_0), \zeta_2(x), \ldots, \zeta_n(x_0)] \neq 0$ (che è la condizione (12') se $j_0 = 1$; certamente vi è almeno un valore j_0 dell'indice j, per cui questa condizione è soddisfatta, perchè il determinante Λ è diverso da zero.

e quindi

$$f(0) = g(0) = G(0) = 0\,. \tag{2}$$

Si prenda come asse x la tangente alla curva caratteristica Γ nell'origine; ne segue subito che

$$f'(0) = 0\,; \qquad \zeta_1'(0) = 0\,; \ldots ; \zeta_n'(0) = 0\,; \qquad (\varrho_1)_0 = 0\ \text{[14]}\,. \tag{3}$$

Dalle condizioni (V) e dalle (2) e (3) segue che le $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sono tutte nulle nell'origine; dalla condizione (VI) derivando e tenendo conto delle (2) e dal fatto che le $(p_j)_0$ sono tutte nulle, segue che

$$\sum_{j=0}^{n} \varphi_j(0)\,(q_j)_0 = G'(0)\,. \tag{4}$$

Poichè anche nell'origine valgono le (VII) (cfr. più oltre n. 2) le $(q_j)_0$ soddisfano anche le

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (h_i^{(r)})_0\,(A_{ij})_0\,(q_j)_0 = \frac{1}{(\varrho_r)_0} \sum_{i=1}^{n} (h_i^{(r)})_0\,(C_i)_0\,, \tag{5}$$

che si ricavano facilmente dalle (VII), tenendo presente che per l'ipotesi fatta che il sistema (I) sia del tipo iperbolico e per l'ultima delle (3) è certo

$$(\varrho_r)_0 \neq 0\,, \qquad (r = 2, 3, \ldots, n), \tag{6}$$

e che per l'ipotesi (1) del § 1 nessuna delle $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ può diventare infinita nel campo D. Il determinante dei coefficienti del sistema delle (4) e (5) è diverso da zero per la condizione (12) del § 1, perchè tale determinante è uguale al primo membro della (12), come si può vedere facilmente. Ne segue che nell'origine i dati determinano immediatamente i valori di tutte le derivate prime degli integrali cercati $z_j(x, y)$ del sistema (I); non è restrittivo supporre che tali derivate prime siano tutte nulle, così che è anche

$$(C_i)_0 = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,; \qquad G'(0) = 0\,. \tag{7}$$

Il piano tangente nell'origine alla superficie Σ richiesta coincide allora con il piano x, y; tale piano contiene tutte le direzioni caratteristiche nel-

---

[14] Colla notazione $(F)_0$ indicheremo, qui e in seguito, il valore della funzione F, quando tutte le variabili, da cui essa dipende, sono nulle.

l'origine; per l'ipotesi (1) del § 1, nessuna di tali direzioni coincide con l'asse y [15].

Si fissi l'attenzione sopra *una radice qualsiasi* della (II), distinta da ϱ_1, e sia ϱ_2; si ponga

$$\sigma = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Per l'ipotesi (1) del § 1 è certo

$$(\sigma)_0 \neq 0. \tag{8}$$

Non è restrittivo supporre che sia [16]

$$| g'(0) - (\sigma)_0 | < 1. \tag{9}$$

2. Supposta nota la superficie integrale Σ che soddisfa il TEOREMA I, si prendano su di essa come linee coordinate $\lambda = \text{cost.}$, $\mu = \text{cost.}$ due sistemi distinti di curve caratteristiche, e precisamente come sistema $\mu = \text{cost.}$ quello relativo alla radice $\varrho_1 = \varrho$ della (II), a cui appartiene la caratteristica data Γ, e come sistema $\lambda = \text{cost.}$ il sistema relativo alla radice $\varrho_2 = \dfrac{1}{\sigma}$ della (II). Si prenda poi l'origine come punto $\lambda = \mu = 0$, così che la caratteristica Γ abbia equazione $\mu = 0$; si scelga il parametro λ in modo che nei punti di Γ sia $\lambda = x$, e il parametro μ in modo che nei punti della curva Λ (cfr. § 1, n. 4) sia $\mu = y$. Nelle coordinate λ, μ la curva Λ ha equazione, che si può porre nella forma $\lambda = \psi(\mu)$, dove $\psi(\mu)$ è una funzione $D^{II} - L$, definita nell'intervallo $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ (con $y_1 = \mu_1, y_2 = \mu_2$), intervallo che contiene il punto $\mu = 0$ come punto interno; è

$$\psi(0) = 0. \tag{10}$$

Nei punti della superficie Σ le $x, y, z_1(x, y), \dots, z_n(x, y)$ si riducono a funzioni $D^{II} - L$ di λ, μ

$$x(\lambda, \mu), \quad y(\lambda, \mu), \quad \bar{z}_1(\lambda, \mu), \dots, \bar{z}_n(\lambda, \mu). \tag{11}$$

---

[15] Ne segue che la condizione (1) del § 1 non è restrittiva, almeno per quanto concerne teoremi che si dimostrano in piccolo

[16] Se la condizione (9) non è soddisfatta, basta fare il cambiamento di variabili $X = x$, $Y = k\,y$, e scegliere per k un valore opportuno.

Come si è visto in (M_1), esse soddisfano il sistema [17]

$$
(\mathrm{VII})\qquad \left\{\begin{aligned}
& y_\lambda = \varrho\, x_\lambda\,; \qquad x_\mu = \sigma\, y_\mu\,;\\
& \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(1)} A_{ij}\, \bar z_{j_\lambda} = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(1)} C_i\, x_\lambda\,;\\
& \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(2)} A_{ij}\, \bar z_{j_\mu} = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(2)} C_i\, x_\mu\,;\\
& \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(r)} A_{ij}\, \frac{d\,\bar z_j}{d\,t_r} = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(r)} C_i\, \frac{d\,x}{d\,t_r}
\end{aligned}\right.
$$

dove si è posto (cfr. § 1, n. 4) $\varrho_1 = \varrho$, dove inoltre

$$
(12)\qquad \frac{d}{d\,t_r} = \frac{\partial}{\partial\,\lambda}\frac{d\,\lambda}{d\,t_r} + \frac{\partial}{\partial\,\mu}\frac{d\,\mu}{d\,t_r}, \qquad (r = 3\,, 4\,, \ldots\,, n),
$$

in cui il rapporto tra $\dfrac{d\,\lambda}{d\,t_r}$ e $\dfrac{d\,\mu}{d\,t_r}$ è determinato dalla

$$
(13)\qquad \frac{d\,y}{d\,t_r} = \varrho_r \frac{d\,x}{d\,t_r}, \qquad (r = 3\,, 4\,, \ldots\,, n),
$$

e infine le $h_i^{(r)}$, $(i = 1\,, 2\,, \ldots\,, n\,,\ r = 1\,, 2\,, \ldots\, n)$ soddisfano gli n sistemi di equazioni (5) del § 1, n. 3.

La condizione che la superficie Σ contenga la curva caratteristica Γ (cioè le condizioni (V) del § 1) diviene

$$
(14)\quad x(\lambda, 0) = \lambda,\ y(\lambda, 0) = f(\lambda);\ \bar z_1(\lambda, 0) = \zeta_1(\lambda), \bar z_2(\lambda, 0) = \zeta_2(\lambda), \ldots, \bar z_n(\lambda, 0) = \zeta_n(\lambda),
$$

e la (VI) diviene

$$
(15)\qquad \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(\mu)\, \bar z_j\, [\psi(\mu)\,.\,\mu] = G(\mu).
$$

3. — Si faccia la posizione

$$
(16)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} (h_i^{(r)})_0\, (A_{ij})_0\, \bar z_j\, (\lambda\,, \mu) = u_r\,(\lambda\,, \mu), \qquad (r = 1\,, 2\,, \ldots\,, n).
$$

---

[17] Cfr. (M_1), § 6, n. 2, p. 94, form. (IX), vi è nel presente lavoro qualche lieve differenza di notazioni.

Il sistema (16) è risolubile nelle $z_j(\lambda, \mu)$, perchè il determinante dei suoi coefficienti è $(\Delta)_0 = (A)_0 (H)_0$, dove A, Δ, H sono i determinanti, definiti nel § 1 (n. 1 e n. 3 rispettivamente), e valgono le (1), (8) e (9) del § 1.

Il sistema (VII) si trasforma allora in un sistema del tipo

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} y_\lambda = \varrho\, x_\lambda ; \qquad\qquad x_\mu = \sigma\, y_\mu ; \\ u_{1_\lambda} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{1s}\, u_{s_\lambda} + \alpha_1\, x_\lambda \\ u_{2_\mu} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{2s}\, u_{s_\mu} + \alpha_2\, x_\mu \\ \dfrac{d\, u_r}{d\, t_r} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{rs} \dfrac{d\, u_s}{d\, t_r} + \alpha_r \dfrac{d\, x}{d\, t_r} , \qquad (r = 3\,, 4\,, \ldots, n). \end{cases}$$

dove si è posto per brevità

$$(17) \qquad \alpha_r = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(r)}\, C_i\,, \qquad (r = 1\,, 2\,, \ldots, n)$$

e, tenuto conto dell'ultima delle (3), delle (7) e delle posizioni (16), è

$$(18) \qquad (\varrho)_0 = 0\,;\ (a_{rs})_0 = 0\,;\ (\alpha_r)_0 = 0\,, \qquad (r, s = 1\,, 2\,, \ldots, n),$$

mentre valgono le (6) e (8).

Posto

$$(19) \qquad U_r(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} (h_i^{(r)})_0 (A_{ij})_0\, \zeta_j(\lambda)\,, \qquad (r = 1\,, 2\,, \ldots, n),$$

le $U_r(\lambda)$ sono funzioni note, definite nell'intervallo $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ (con $\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = x_2$), contenente all'interno il punto $\lambda = 0$, sono $D^{II} - L$ in tale intervallo, e per le (1) e (3) si annullano nell'origine, assieme alle loro derivate prime. La condizione (15), tenuto conto della (12) del § 1, si trasforma in una relazione che si può porre nella forma

$$(20) \qquad u_1[\psi(\mu), \mu] = \Phi(\mu) + \sum_{r=2}^{n} k_r(\mu)\, u_r[\psi(\mu), \mu],$$

dove $\Phi(\mu)$, $k_2(\mu), \ldots, k_n(\mu)$ sono funzioni note, definite nell'intervallo $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ e ivi $D^{II} - L$ e la $\Phi(\mu)$ è nulla per $\mu = 0$ assieme alla sua derivata prima (cfr. le (2) e (7)).

Se dunque esiste un sistema di integrali del sistema (I), che soddisfa il TEOREMA I, allora ammette in corrispondenza un ben determinato sistema di soluzioni il seguente:

PROBLEMA a). — *Determinare un sistema di funzioni*

$$x(\lambda, \mu), \quad y(\lambda, \mu), \quad u_1(\lambda, \mu), \quad u_2(\lambda, \mu), \ldots, u_n(\lambda, \mu),$$

definite almeno per $|\lambda|$, $|\mu|$ *abbastanza piccoli, ivi* $D^{II} - L$, *e soddisfacenti il sistema* (VIII), *e una funzione* $\psi(\mu)$ *definita almeno per* $|\mu|$ *abbastanza piccolo e* $D^{II} - L$, *in modo che valgano le seguenti condizioni*

$$\text{(IX)} \qquad \begin{cases} x(\lambda, 0) = \lambda, \quad u_r(\lambda, 0) = U_r(\lambda), \qquad (r = 2, 3, \ldots, n), \\ \psi(0) = 0 \\ x[\psi(\mu), \mu] = g(\mu); \qquad y[\psi(\mu), \mu] = \mu, \\ u_1[\psi(\mu), \mu] = \Phi(\mu) + \sum_{r=2}^{n} k_r(\mu)\, u_r[\psi(\mu), \mu]. \end{cases}$$

4. — Il PROBLEMA a), quando si ponga

$$(21) \qquad u(\lambda, \mu) = x(\lambda, \mu); \qquad v(\lambda, \mu) = y(\lambda, \mu)$$

è stato risolto nel nostro lavoro già citato (M_3) [18]; ivi è stato provato che il problema in questione ammette uno e un solo sistema di soluzioni. Si verifica immediatamente, tenendo conto anche delle (9) e (10) e del fatto che nel caso presente è

$$(22) \qquad U(\mu) = g(\mu), \qquad V(\mu) = \mu,$$

che tutte le condizioni imposte nel lavoro citato sono soddisfatte.

Come si è ivi osservato [19], se

$$(23) \quad u = u(\lambda, \mu), \quad v = v(\lambda, \mu); \quad u_1 = u_1(\lambda, \mu), \quad u_2 = u_2(\lambda, \mu), \ldots, u_n = u_n(\lambda, \mu)$$

---

[18] Cfr. (M_3), n. 4, TEOREMA I; nel caso presente è $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, $U(\mu) = g(\mu)$, $V(\mu) = \mu$, e le β_r sono tutte identicamente nulle.

[19] Cfr. (M_3) n. 2 e n. 4 alla fine: nel caso presente è $W(\lambda) = f(\lambda)$ (si ricordi che le funzioni (IV) assegnate soddisfano le (III))

è un sistema di soluzioni del PROBLEMA a), nel campo di esistenza di tali funzioni ([20]) valgono anche le

$$v(\lambda, 0) = f(\lambda), \qquad u_1(\lambda, 0) = U_1(\lambda) \tag{24}$$

Dal sistema (23) di soluzioni del PROBLEMA a), tenuto conto delle (21) e delle (16), si ricava immediatamente un sistema di funzioni (11), che soddisfano le (VII).

Dal confronto delle (16) e (19) e delle prime n tra le condizioni (IX), tenuto conto anche delle (21) e (24) e del fatto che il determinante dei coefficienti sia del sistema (16) che del sistema (19) è $(\Delta)_0$, che è diverso da zero, segue che valgono le (14). Dalla (20), per il modo in cui è stata ottenuta, si ricava subito la (15).

5. — Le

$$x = x(\lambda, \mu), \qquad y = y(\lambda, \mu) \tag{25}$$

determinano un cambiamento di variabili, che è invertibile in un intorno dell'origine; si ottengono così le

$$\lambda = \lambda(x, y), \qquad \mu = \mu(x, y), \tag{26}$$

dove le $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$ sono definite per $|x|$, $|y|$ abbastanza piccoli e sono $D^{II} - L$; sostituendo le funzioni (26) nelle $\overline{z}_1(\lambda, \mu)$, $\overline{z}_2(\lambda, \mu), \ldots, \overline{z}_n(\lambda, \mu)$, si ottengono le funzioni

$$z_1 = z_1(x, y), \qquad z_2 = z_2(x, y), \ldots, z_n = z_n(x, y), \tag{27}$$

che sono definite in un campo δ contenente l'origine come punto interno e sono ivi $D^{II} - L$. Dalle (14) segue che sono soddisfatte le (V), cioè che la superficie Σ di equazioni (27) passa per la curva caratteristica Γ di equazioni (IV); dalla (15), tenuto conto del modo in cui sono state introdotte le coordinate λ, μ, segue che le funzioni (27) soddisfano la relazione (VI). Con ragionamenti simili a quelli tenuti in (M_1) si prova ([21]) che le funzioni (27) costituiscono un sistema di integrali del sistema (I).

Il TEOREMA I è così completamente dimostrato.

([20]) Circa tale campo di esistenza cfr: M. CINQUINI CIBRARIO, *Sopra un nuovo problema ai limiti per un sistema di equazioni alle derivate parziali*. Rend. Istituto Lombardo, vol LXXIX 1949, nn 6 e 7.

([21]) Cfr (M_1), § 6, n 2, p 95-96

§ 3 - Altri teoremi di esistenza.

1. — Si suppongano soddisfatte tutte le ipotesi fatte nel § 1, n. 4, tranne quelle relative alla curva $x = g(y)$. Vale allora il:

TEOREMA II. — « *Esiste uno e un solo sistema di integrali del sistema* (I)

$$z_1 = z_1(x, y), \qquad z_2 = z_2(x, y), \ldots, z_n = z_n(x, y),$$

che sono definiti in un campo δ *abbastanza piccolo del piano* x, y, *contenente all'interno il punto* (x_0, y_0), *sono ivi funzioni* D^{II} — L, *soddisfano le* (V), *e inoltre nei punti della curva caratteristica* C, *passante per il punto*

$$(x_0, f(x_0), \ \zeta_1(x_0), \ \zeta_2(x), \ldots, \zeta_n(x_0))$$

e appartenente a un ben determinato sistema, distinto da quello a cui appartiene la curva caratteristica Γ, *soddisfano la*

$$\text{(X)} \qquad \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(y) z_j = G(y) \text{»}.$$

Geometricamente: « *Esiste una e una sola superficie integrale* Σ *del sistema* (I), *che passa per la curva caratteristica* Γ, *e inoltre è tale che lungo un'altra sua curva caratteristica* C, *avente con* Γ *un punto in comune e appartenente a un ben determinato sistema, diverso da quello, a cui appartiene la curva* Γ, *è soddisfatta la* (X) ».

Si tenga presente che la caratteristica *C non è data,* ma è dato *soltanto il sistema,* a cui essa appartiene. Anche qui, in particolare, le $\varphi_j(y)$ possono essere tutte costanti per $y_1 \leq y \leq y_2$, e, più in particolare ancora, tutte nulle, tranne una, per es. la $\varphi_1(y)$ (purchè valgano le (11') e (2') del § 1, n. 4). Si ha così il:

COROLLARIO II. — « *Nelle ipotesi del* TEOREMA II *esiste uno e un solo sistema di integrali del sistema* (I), *che sono definiti in un campo* δ *abbastanza piccolo contenente il punto* (x_0, y_0) *come punto interno, sono ivi* D^{II} — L, *soddisfano le* (V), *e inoltre nei punti della caratteristica* C, *definita nel* TEOREMA II, *soddisfano la*

$$(X_*) \qquad z_1 = Z_1(y) \text{»}.$$

Geometricamente: « *Esiste una e una sola superficie integrale* Σ *del sistema* (I), *che passa per la curva caratteristica* Γ, *e inoltre è tale che nei punti della curva caratteristica* C *è soddisfatta la* (X_*), *cioè contiene una curva caratteristica* C *di cui è nota la proiezione nel piano* y, z_1 ».

2. — Si porti, anche nel caso presente, l'origine in un punto della curva Γ, e si prenda come asse x la tangente alla curva Γ nell'origine; valgono allora le (1), (2), e (3) del § 2 n. 1: come nel § 2, n. 1, anche nel caso presente i dati permettono di calcolare immediatamente le derivate prime delle funzioni cercate $z_1(x, y), z_2(x, y), \ldots, z_n(x, y)$ nell'origine. Ci si può ricondurre al caso in cui tali derivate sono tutte nulle; valgono allora anche le (7) del § 2. Si indichi con ϱ_2 la radice dell'equazione (II), relativa al sistema, a cui si impone che appartenga la caratteristica C incognita, lungo la quale deve essere soddisfatta la (X), e si ponga

$$\sigma = \frac{1}{\varrho_2}. \tag{1}$$

Come nel § 2, n. 2 si introducano le coordinate λ, μ; nel caso presente si prende come sistema di curve $\lambda =$ cost. il sistema a cui deve appartenere la caratteristica C, che ha dunque equazione $\lambda = 0$; il parametro μ si scelga in modo che nei punti di C sia $\mu = y$. Ragionando come nel § 2, nn. 2, 3 e introducendo le $u_r(\lambda, \mu)$ mediante le (16) del § 2 e le $U_r(\lambda)$ mediante le (19) del § 2, si vede facilmente che se esiste un sistema di integrali del sistema (I), che soddisfa il TEOREMA II, allora ammette anche un sistema di soluzioni il:

PROBLEMA *b*). – « *Determinare un sistema di funzioni*

$$x(\lambda, \mu), \quad y(\lambda, \mu), \quad u_1(\lambda, \mu), \ldots, u_n(\lambda, \mu),$$

definite almeno per $|\lambda|, |\mu|$ *abbastanza piccoli, ivi* $D^{II} - L$, *soddisfacenti il sistema* (VIII) *e le*

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} x(\lambda, 0) = \lambda; \quad u_r(\lambda, 0) = U_r(\lambda), & (r = 2, 3, \ldots, n) \\ y(0, \mu) = \mu \\ u_1(0, \mu) = \Phi(\mu) + \sum\limits_{r=2}^{n} k_r(\mu) u_r(0, \mu) \text{ ».} \end{cases}$$

Ora in (M_4) è stato dimostrato [22] che il PROBLEMA *b*) ammette uno e un solo sistema di soluzioni; ragionando in modo simile al § 2, nn. 4 e 5, si dimostra completamente il TEOREMA II.

---

(22) Cfr. (M_4), n. 9, TEOREMA II

3. — Dal TEOREMA I oppure dal TEOREMA II segue subito il:

TEOREMA III. — « *Se le funzioni* A_{ij}, B_{ij}, C_i, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *sono* $D^{II} - L$ *nel campo* D, *e se le funzioni* (IV) *sono* $D^{II} - L$ *nell'intervallo* $x_1 \leq x \leq x_2$, *esistono infinite superfici integrali del sistema* (I), *aventi equazioni della forma*

$$z_1 = z_1(x, y), z_2 = z_2(x, y), \ldots, z_n = z_n(x, y). \tag{2}$$

dove le $z_j(x, y)$ *sono definite in un campo* δ *abbastanza piccolo, a cui è interno il punto* $(x_0, f(x_0))$, *e sono ivi* $D^{II} - L$, *le quali passano per la curva* Γ *di equazioni* (IV), *che è una loro caratteristica comune* ([23]) ».

Se è *data* una *superficie integrale* del sistema (I) ed è *data una sua curva caratteristica,* è noto un sistema di funzioni, che costituisce una curva caratteristica. Dal TEOREMA III segue subito il:

TEOREMA IV. — « *Se le funzioni* A_{ij}, B_{ij}, C_i, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *sono* $D^{II} - L$ *nel campo* D, *e se è data una superficie integrale del sistema* (I) *di equazioni*

$$z_1 = \xi_1(x, y), \quad z_2 = \xi_2(x, y), \ldots, z_n = \xi_n(x, y), \tag{3}$$

dove le $\xi_n(x, y)$ *sono definite in un campo* δ *del piano* x, y *e sono ivi* $D^{II} - L$, *e se su tale superficie è data una curva caratteristica* Γ, *esistono infinite altre superfici integrali del sistema* (I), *passanti per la curva* Γ ([24]); *per ognuna di esse* Γ *è una curva caratteristica* ».

4. — Siano date ora due curve caratteristiche del sistema (I), appartenenti a due diversi sistemi, e siano la curva Γ, di equazioni (IV), appartenente al sistema relativo alla radice $\varrho_1 = \varrho$ della (II), e la curva Γ_2, appartenente al sistema relativo alla radice $\varrho_2 = -\dfrac{1}{\sigma}$ della (II) e avente equazioni

$$x = x(y); \quad z_1 = Z_1(y), \quad z_2 = Z_2(y), \ldots, z_n = Z_n(y), \tag{XII}$$

([23]) Cfr. la precedente nota ([8]).

([24]) Si intende che se $(x_0, f(x_0), \zeta_1(x_0), \ldots \zeta_n(x_0))$ è un punto della curva caratteristica Γ, e se le (2) sono le equazioni di una di tali superfici integrali, le funzioni (2) sono definite in un campo δ abbastanza piccolo contenente il punto $(x_0, f(x_0))$ all'interno. Cfr. pure la nota ([8]).

dove le funzioni $X(y)$, $Z_1(y)$, $Z_2(y), \ldots, Z_n(y)$ sono definite in un intervallo $y_1 \leq y \leq y_2$ e ivi D^{II} L, sono tali che tutti i sistemi di valori

$$X(y), y; \quad Z_1(y), \quad Z_2(y), \ldots, Z_n(y)$$

al variare di y nell'intervallo $y_1 \leq y \leq y_2$ appartengono al campo D, e soddisfano inoltre le

$$\text{(XIII)} \qquad dx = \sigma\, dy, \quad \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{2} A_{ij}\, dz_j = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(} \; C_i\, dx$$

Il valore $y_0 = f(x_0)$ sia inoltre interno all'intervallo $y_1 \leq y \leq y_2$, e valgano le

$$(4) \qquad x_0 = X(y_0); \; \zeta_1(x_0) = Z_1(y_0); \; \zeta_2(x_0) = Z_2(y_0) \ldots, \zeta_n(x_0) = Z_n(y_0),$$

così che le due curve caratteristiche Γ e Γ_2 abbiano un punto in comune.

In generale *non esiste alcuna superficie integrale del sistema* (I), *passante per entrambe le curve caratteristiche Γ e Γ_2*. Infatti il COROLLARIO II assicura soltanto (nelle ipotesi là enunciate) che esiste una e una sola superficie integrale del sistema (I), che *passa per la curva caratteristica Γ, e inoltre nei punti della sua curva caratteristica* C, *uscente dal punto* $(x_0, y_0, \zeta_1(x_0), \ldots$ $\ldots, \zeta_n(x_0))$ *e appartenente al sistema relativo alla radice ϱ_2 della* (II), *soddisfa la condizione* (X_*) *ma nulla assicura che nei punti della caratteristica* C *valgano anche le*

$$x = X(y); \qquad z_2 = Z_2(y), \ldots, z_n = Z_n(y),$$

cioè che *la curva caratteristica* C *coincida colla curva caratteristica Γ_2 data* (per quanto le due curve caratteristiche C e Γ_2 escano dallo stesso punto dello spazio a $n+2$ dimensioni e appartengano allo stesso sistema). Le equazioni della caratteristica C *non si possono* infatti *calcolare a priori,* partendo dalle funzioni, che il COROLLARIO II suppone note, e dal sistema (XIII); tali equazioni *sono note* soltanto *dopo* costruita la superficie integrale Σ, che soddisfa il COROLLARIO II.

Fa eccezione il caso $n = 2$, di cui parleremo nel § 7.

§ 4 - Alcune osservazioni circa le curve e le striscie caratteristiche.

1. — Come si è visto nel § 1, n. 1 le equazioni (III) sono soddisfatte nei punti di una qualunque curva caratteristica del sistema relativo alla radice ϱ della (II). Le (III), quando si pensi x come variabile indipendente,

costituiscono un sistema di due equazioni differenziali nelle $n+1$ funzioni incognite y, $z_1, z_2, \dots, z_n$. Nell'ipotesi che le A_{ij}, B_{ij}, C_i siano *lipschitziane*, per determinare una caratteristica si danno ad arbitrio $n-1$ di tali funzioni incognite, p. es. $n-1$ tra le z_j come funzioni D^I di x; le (III) determinano allora la y e la ulteriore z_j [25] come funzioni D^I di x, quando se ne diano i valori in un punto assegnato $x = x_0$ [26]. Dunque le caratteristiche di un sistema fissato dipendono da $n-1$ funzioni arbitrarie, e inoltre da *due* costanti arbitrarie.

2. — Si supponga *data* la curva caratteristica Γ di equazioni (IV), e si consideri *una qualunque* Σ tra le infinite superfici integrali (di cui il **TEOREMA** III assicura l'esistenza) passante per Γ, e siano

$$(1) \qquad z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y), \dots, z_n = z_n(x, y)$$

le sue equazioni. I valori delle derivate prime p_j, q_j, $(j = 1, 2, \dots, n)$ delle funzioni (1) nei punti di Γ sono ben determinate funzioni di x

$$(2) \qquad p_j = \pi_j(x); \quad q_j = \chi_j(x), \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

definite per $x_1 \leq x \leq x_2$. Si dice che *il sistema delle funzioni* (IV) *e delle* (2) *costituisce una striscia caratteristica del primo ordine, che ha come sostegno la curva caratteristica data* (IV) [27].

Se le funzioni (1) sono D^{II}, le loro derivate seconde r_j, s_j, t_j, $(j = 1, 2, \dots, n)$ nei punti di Γ si riducono a ben determinate funzioni di x

$$(3) \qquad r_j = R_j(x), \quad s_j = S_j(x), \quad t_j = T_j(x), \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Le funzioni (3) assieme alle (IV) e (2) *costituiscono una striscia caratteristica del secondo ordine, contenente la striscia caratteristica del primo ordine,* definita dalle (IV) e (2).

---

(25) Se essa è, p. es., z_{j_0}, il coefficiente $\sum_{i=1}^{n} A_{ij_0} h_i$ di dz_{j_0} nella seconda delle (III) deve essere diverso da zero (poichè, come si è osservato nel § 1, n. 3, il determinante Δ, là definito, è diverso da zero, vi è certo un indice j_0 per cui è $\sum_{i=1}^{n} A_{ij_0} h_i \neq 0$).

(26) Si intende che in tal modo la curva caratteristica Γ riesce determinata *in piccolo*, cioè per $|x - x_0|$ abbastanza piccolo; analoga osservazione vale anche nel seguito del presente paragrafo.

(27) Dunque una striscia caratteristica del primo ordine è costituita dalla curva Γ, e dal sistema dei piani tangenti a una superficie integrale nei punti di Γ.

In generale, se le funzioni (1) sono D^m, si dice che *le funzioni* (IV) *assieme ai valori assunti nei punti di* Γ *da tutte le derivate delle funzioni* (1) *fino a quelle di ordine* m *incluse, costituiscono una striscia caratteristica di ordine* m, *che ha per sostegno la curva caratteristica* Γ. *Posto*

$$p_{j,r,s}(x, y) = \frac{\partial^{r+s} z_j(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}, \quad (j = 1, \ldots, n; \; r + s = 1, 2, \ldots),$$

nei punti di una striscia caratteristica di ordine m, avente per sostegno la curva, valgono le (IV) e assieme le

$$\text{(XIV)} \qquad p_{j,r,s}(x, y) = \pi_{j,r,s}(x), \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \; r + s = 1, 2, \ldots, m),$$

dove le $\pi_{j,r,s}(x)$ sono funzioni note. Supposto che le $f(x)$, $z_j(x)$ siano D^{m+1} e che le $\pi_{j,r,s}(x)$ siano $D^{m-r-s+1}$ per $x_1 \leq x \leq x_2$, e che le A_{ij}, B_{ij}, C_i siano D^m in D, con opportune derivazioni eseguite sulle equazioni del sistema (I) e con calcoli, su cui non insistiamo, si ottiene un sistema di equazioni differenziali nelle funzioni (IV) e (XIV), che definisce il sistema delle strisce caratteristiche di ordine m ($m = 1, 2, \ldots$), relative alla radice ϱ della (II). Non staremo a scrivere tale sistema, nemmeno per i primi valori di m.

3. Ragionando in modo simile al § 3, n. 2, si supponga di aver introdotte sulla superficie integrale Σ le coordinate λ, μ; su Σ e, in particolare, nei punti di Γ, che è la curva $\mu = 0$, valgono le (VII).

Facciamo ora astrazione dalla particolare superficie integrale Σ, passante per Γ; teniamo solo presente che per il modo, in cui si è pensato di introdurre le coordinate λ, μ, è

$$\text{(4)} \qquad (y_\mu)_0 = 1; \qquad (y_{\mu\mu})_0 = 0.$$

Nei punti della curva Γ è $x = \lambda$, e dalle (IV) si ottengono le

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial \lambda} = 1; \quad \frac{\partial y(\lambda, 0)}{\partial \lambda} = f'(\lambda); \quad \frac{\partial \bar{z}_j(\lambda, 0)}{\partial \lambda} = \zeta_j'(\lambda), \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Si dia ad arbitrio una relazione della forma

$$\text{(6)} \qquad \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \mu}\right)_0 = H,$$

dove $c_1, c_2, \ldots, c_n, H$ sono costanti arbitrarie [28], colla condizione però che sia

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (\gamma_{1j})_0 \neq 0 . \tag{7}$$

In particolare si può dare ad arbitrio il valore di *una sola* delle $\left(\frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \mu}\right)_0$, p. es. la $\left(\frac{\partial \bar{z}_{j_0}}{\partial \mu}\right)_0$, purchè per l'indice j_0 fissato sia [29]

$$(\gamma_{1j_0})_0 \neq 0 . \tag{7'}$$

La prima delle (VII), tenuto conto che $(y_\mu)_0 = 1$, determina $(x_\mu)_0 = (\sigma)_0$; il sistema costituito dalla (6) e dalle ultime $n - 1$ tra le (VII), nelle quali si ponga $\lambda = \mu = 0$, determina i valori delle $(z_{j\mu})_0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, perchè il determinante di tale sistema è, a meno di fattori diversi da zero, il primo membro della (7) [30], che è diverso da zero. I valori delle $(z_{j\mu})_0$ dipendono dunque da una costante arbitraria [31].

4. — Le $A_{ij}, B_{ij}, C_i, (i, j = 1, 2, \ldots, m)$ siano D^I nel campo D e le funzioni (IV) siano D^{II} per $x_1 < x \leq x_2$. Si derivino la prima e la terza delle (VII) rispetto a μ, e le rimanenti rispetto a λ [32], e nel sistema così ottenuto si ponga $\mu = 0$. Si tenga conto che per $\mu = 0$ è $x = \lambda$, $y = f(\lambda)$, $\bar{z}_j = \zeta_j(\lambda)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, che le (5) danno i valori delle $\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}$;

---

[28] Si osservi che, se valgono le ipotesi (1), (2), (3) del § 1, n. 1 è $(z_{j\mu})_0 = (q_j)_0$.

[29] Ricordando il significato delle γ_{1j} (§ 1, n. 3), certamente una almeno delle γ_{1j} è diversa da zero.

[30] Si tenga presente il significato delle γ_{1j} (§ 1, n. 3): si tenga presente pure che (§ 2, n. 2, form. (12) e (13))

$$\frac{d}{d t_r} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{d \lambda}{d t_r} + \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{d \mu}{d t_r},$$

dove il rapporto tra $\frac{d \lambda}{d t_r}$ e $\frac{d \mu}{d t_r}$ è determinato da'le $\frac{d y}{d t_r} = \varrho_r \frac{d x}{d t_r}$; se

$$\varphi_r(\lambda, \mu) = \frac{(\varrho - \varrho_r) x_\lambda}{(\varrho_r \sigma - 1) y_\mu}$$

si trova facilmente che si può porre $\frac{d}{d t_r} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \mu} \varphi_r$, e che $(\varphi_r)_0 \neq 0$.

[31] Si osservi che, per le ultime $n - 1$ tra le (VII), le $(z_{j\mu})_0$ sono proporzionali alle $(\gamma_{1j})_0$; il fattore di proporzionalità è determinato dalla (6).

[32] Si tenga presente quanto è detto nella precedente nota [30].

$\dfrac{\partial \bar{z}_j}{\partial \lambda}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ per $\mu = 0$, e che dalle (5) si ricavano immediatamente i valori delle $\dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2}$, $\dfrac{\partial^2 \bar{z}_j}{\partial \lambda^2}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ per $\mu = 0$. Se dunque si risolve il sistema ottenuto rispetto alle [33]

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}, \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu}, \frac{\partial^2 \bar{z}_j}{\partial \lambda \partial \mu} \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

queste risultano espresse mediante le $\dfrac{\partial x}{\partial \mu}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \mu}$, $\dfrac{\partial \bar{z}_j}{\partial \mu}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ e mediante funzioni note di λ.

Si ha così un sistema di equazioni differenziali nelle funzioni

$$(8) \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} = \xi(\lambda); \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} = \eta(\lambda); \quad \left(\frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \mu}\right)_{\mu=0} = \Xi_j(\lambda), \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Poichè nel n. 3 sono stati calcolati i valori $\xi(0)$, $\eta(0)$, $\Xi_j(0)$, il sistema di equazioni differenziali in questione determina le funzioni $\xi(\lambda)$, $\eta(\lambda)$, $\Xi_j(\lambda)$ per $|\lambda|$ abbastanza piccolo.

Note così le derivate prime delle funzioni $x(\lambda, \mu)$, $y(\lambda, \mu)$; $\bar{z}_j(\lambda, \mu)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ per $\mu = 0$ [34], si ottengono subito i valori delle derivate $p_j(x, y)$, $q_j(x, y)$ delle $z_j(x, y)$ nei punti di Γ; la conoscenza di tali derivate prime nei punti di Γ, e quindi di una *striscia caratteristica del primo ordine avente per sostegno la curva caratteristica Γ, dipende* dunque *da una costante arbitraria.*

5. Da quanto si è detto segue che sono noti i valori per $\mu = 0$ delle derivate seconde

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2}; \frac{\partial^2 \bar{z}_j}{\partial \lambda^2}; \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}, \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu}, \frac{\partial^2 \bar{z}_j}{\partial \lambda \partial \mu}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

(33) Le prime due tra le equazioni, ottenute derivando le (VII) nel modo detto e poi facendo $\mu = 0$, danno $\dfrac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}$, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu}$ (perchè $1 - \varrho\sigma \neq 0$, essendo $\varrho = \varrho_1$, $\sigma = \dfrac{1}{\varrho_2}$, e ϱ_1 e ϱ_2 radici distinte della (II)); le altre costituiscono un sistema lineare nelle $\dfrac{\partial^2 \bar{z}_j}{\partial \lambda \partial \mu}$, il cui determinante differisce per fattori non nulli dal determinante Δ definito nel § 1, n. 3, ed è $\Delta \neq 0$ (cfr. ivi form (9)).

(34) Si intende che si tratta di conoscenza in piccolo, e lo stesso nel seguito.

Si dia ora una nuova relazione della forma

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \left(\frac{\partial^2 z_j}{\partial \mu^2}\right)_0 = K, \tag{9}$$

dove $d_1, d_2, \ldots, d_n$, K sono costanti arbitrarie [35], colla condizione che sia [36]

$$\sum_{j=1}^{n} d_j (\gamma_{1j})_0 \neq 0. \tag{10}$$

Si derivino la seconda e le ultime $n-1$ tra le (VII) rispetto a μ, e nel sistema ottenuto si ponga $\mu = 0$; poichè $(y_{\mu\mu})_0 = 0$, il sistema in questione assieme alla (9) permette, ragionando come nel n. 3, di calcolare le $(x_{\mu\mu})_0$, $(\bar{z}_{j\mu\mu})_0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, i cui valori dipendono dunque da una costante arbitraria.

Se le A_{ij}, B_{ij}, C_i sono D^{II} nel campo D e le funzioni (IV) sono D^{III} per $x_1 \leq x \leq x_2$, ragionando in modo simile a quello tenuto nel n 4, con opportune derivazioni sulle equazioni del sistema (VII), si ottiene per $\mu = 0$ un sistema, che, assieme ai valori, già noti, delle $(x_{\mu\mu})_0$, $(y_{\mu\mu})_0$, $(\bar{z}_{j\mu\mu})_0$, permette di calcolare i valori delle

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2}; \frac{\partial^2 \bar{z}_j}{\partial \mu^2}, \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

per $\mu = 0$ e $|\lambda|$ abbastanza piccolo. La conoscenza di tali valori permette di calcolare le derivate seconde $r_j(x, y)$, $s_j(x, y)$, $t_j(x, y)$ delle $z_j(x, y)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ nei punti della curva. La determinazione di tali derivate, e quindi di una *striscia caratteristica del secondo ordine contenente la striscia caratteristica del primo ordine,* definita nel n. 3, *dipende* dunque *da una nuova costante arbitraria.*

6. — Il procedimento può essere continuato; precisamente per la determinazione delle derivate m^e delle $z_j(x, y)$ nei punti di Γ si supporrà che le A_{ij}, B_{ij}, C_i siano D^m e le funzioni (IV) siano D^{m+1} e si daranno successivamente m relazioni del tipo (6) e (9) (con condizioni del tipo (7) e (10)).

Supposte soddisfatte per ogni valore di m le ipotesi enunciate, si ottiene il:

---

(35) Nelle ipotesi (1), (2), (3) del § 1, n. 1, la (9) equivale a dare una relazione tra le $(z_{jyy})_0$.

(36) Si può, in particolare, dare una sola tra le $(z_{j\mu\mu})_0$, purchè in corrispondenza sia $(\gamma_{1j})_0 \neq 0$ (cfr. la nota (29)).

TEOREMA V. — « *Data una curva caratteristica Γ, esistono infinite striscie caratteristiche del primo ordine, che la hanno come sostegno; la loro determinazione dipende da una costante arbitraria. Ogni striscia caratteristica del primo ordine è contenuta in infinite striscie caratteristiche del secondo ordine, dipendenti da una costante arbitraria.*

In generale una striscia caratteristica di ordine m *è contenuta in infinite striscie caratteristiche di ordine* m $+ 1$, *dipendenti da una costante arbitraria* ».

Dai ragionamenti fatti nei nn. precedenti segue anche che, pur non avendo scritto il sistema di equazioni che definisce le strisce caratteristiche di ordine m del sistema relativo a una data radice $\frac{dy}{dx} = \varrho_1$ della (II), si può asserire che una di tali strisce è determinata da tale sistema di equazioni, da $n - 1$ funzioni arbitrarie e da $m + 2$ costanti arbitrarie.

7. — Si dirà che una superficie integrale Σ di equazioni (1) contiene la striscia caratteristica del primo ordine, determinata dalle equazioni (IV) e (2), se essa passa per la curva Γ e valgono inoltre le

(11) $$p_j [x, f(x)] = \pi_j (x) ; \qquad q_j [x, f(x)] = \chi_j (x) .$$

Così, se le funzioni $z_j (x, y)$ sono D^{II}, si dirà che la superficie integrale Σ contiene la striscia caratteristica del secondo ordine, definita dalle (IV), (2), e (3), se essa passa per la curva Γ e inoltre valgono le (11) e le

(12) $$r_j [x, f(x)] = R_j (x) ; \quad s_j [x, f(x)] = S_j (x) , \quad t_j [x, f(x)] = T_j (x) .$$

Analoghe definizioni, sotto ipotesi opportune di derivabilità, si danno per le strisce caratteristiche dei successivi ordini $3, 4, \dots, m, \dots$

Dalle considerazioni del presente paragrafo, detto elemento di ordine m il sistema di valori assunti in un punto (x, y) dalle z_j e dalle loro derivate fino a quelle di ordine m incluse, segue il:

TEOREMA VI. — « *Se le* A_{ij}, B_{ij}, C_i *sono* D^m *e le funzioni* (IV) *sono* D^{m+1}, *e se è data una striscia caratteristica definita dalle* (IV) *e dalle* (XIV) [37], *dove le* $\pi_{jrs}(x)$ *sono definite nell'intervallo* $x_1 \leq x \leq x_2$ *e ivi* $D^{m-r-s+1}$, *ogni superficie integrale Σ del sistema* (I), *avente per equazioni le* (2) (*nell'ipotesi che le* $z_j(x, y)$ *siano* D^{m+1} *nel campo δ in cui esse sono definite*), *passante*

---

(37) Si intende che le funzioni (IV) e (XIV) devono soddisfare le equazioni relative ad una striscia caratteristica di ordine m (alle quali si è accennato alla fine del n. 2).

per la curva caratteristica Γ *e avente in un punto* $x_0, f(x_0), \zeta_1(x_0), \zeta_2(x_0), \dots$ $\dots, \zeta_n(x_0)$ *di* Γ *come elemento di ordine* m *proprio il sistema di valori* $\pi_{j,r,s}(x_0)$, *contiene tutta la striscia caratteristica definita dalle* (IV) *e* (XIV) » [38].

8. Poichè si può sempre imporre che le funzioni $z_j(x, y)$ (supposte D^m) che compaiono nelle (2) assumano in un punto (x_0, y_0) fissato del loro campo di definizione valori assegnati assieme a tutte le loro derivate fino a quelle di ordine m incluso, dal TEOREMA III e dal TEOREMA VI segue il:

TEOREMA VII. — « *Nelle ipotesi del* TEOREMA VI [39], *esistono infinite superfici integrali* Σ, *che contengono una striscia caratteristica di ordine* m, *definita dalle* (IV) *e* (XIV); *se le* (2) *sono le equazioni di una di esse, le* $z_j(x, y)$ *sono definite in un campo* δ, *abbastanza piccolo, contenente all'interno il punto* $(x_0, f(x_0))$, *e sono ivi* D^{m+} [39]bis. *Tutte queste superfici integrali hanno in comune la curva caratteristica* Γ, *nei punti della quale hanno tra loro un contatto di ordine* m ».

§ 5 - Relazioni fra teoria delle caratteristiche e Problema di CAUCHY.

1. — Sia dato un sistema di funzioni

$$y = f(x), \quad z_1 = \zeta_1(x), \quad z_2 = \zeta_2(x), \dots, z_n = \zeta_n(x) \tag{1}$$

definite in un intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$, ivi $D^{II} - L$, tali che tutti i sistemi di valori x, $y = f(x)$, $z_j = \zeta_j(x)$, $(j = 1, 2, \dots, n)$ al variare di x in tale intervallo siano interni al campo D. Si indichi con $H(x, \varrho)$ ciò che diviene il primo membro dell'equazione (II), quando nelle A_{ij}, B_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ si pongano per $y, z_1, z_2, \dots, z_n$ le funzioni (1), e inoltre si faccia $\dfrac{dy}{dx} = \varrho$.

Se $f'(x)$ *non è mai radice* dell'equazione in ϱ:

$$H(x, \varrho) = 0, \tag{2}$$

comunque sia x nell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$, e se le A_{ij}, B_{ij}, C_i sono $D^{II} - L$ in D, si è dimostrato in (M_1) [40] che il problema di CAUCHY *relativo alle*

---

(38) Si intende che il risultato vale in piccolo, cioè per $|x - x_0|$ sufficientemente piccolo.

(39) Se $m \leq 2$, si deve fare l'ipotesi che le A_{ij}, B_{ij}, C_i siano $D^{II} - L$; per $m = 1$ bisogna supporre che le funzioni (IV) siano $D^{II} - L$.

(39)bis Se $m = 1$ le $z_j(x, y)$ sono $D^{II} - L$.

(40) Cfr. (M_1), § 1, TEOREMA I, p. 79.

funzioni assegnate (1) *ha una e una sola soluzione*, cioè che *esiste uno e un solo sistema di integrali del sistema* (1)

$$(3) \qquad z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y), \dots, z_n = z_n(x, y),$$

che sono definiti almeno in un campo δ *abbastanza piccolo, a cui è interna la curva* $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$, *sono ivi* $\mathrm{D}^{11} - \mathrm{L}$, *e soddisfano le*

$$(4) \qquad z_1[x, f(x)] = \zeta_1(x), \quad z_2[x, f(x)] = \zeta_2(x), \dots, z_n[x, f(x)] = \zeta_n(x).$$

Geometricamente: *esiste una e una sola superficie integrale* Σ, *passante per la curva assegnata* Λ *di equazioni* (1).

Dai risultati dei precedenti paragrafi segue facilmente, supposte soddisfatte le ipotesi sopra enunciate, che vale il:

TEOREMA VIII. — « *Se è, identicamente per* $\mathrm{x}_1 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{x}_2$:

$$(5) \qquad H[x, f'(x)] = 0$$

e se inoltre vale la [41]

$$(6) \qquad \sum_{i\,j=1}^{n} h_i^{1}[x, f(x), \zeta_1(x), \zeta_2(x), \dots, \zeta_n(x)]\, A_{ij}[\dots]\, \zeta_j'(x) \neq \sum_{i=1}^{n} h_i^{(1)}[\dots]\, C_i[\dots]$$

allora il PROBLEMA DI CAUCHY *per il sistema* (I), *relativo ai dati* (1), *non è risolubile* [42]; *se invece la* (5) *è soddisfatta identicamente per* $\mathrm{x}_1 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{x}_2$, *e assieme vale la*

$$(7) \qquad \sum_{i\,j=1}^{n} h_i^{(1}[x, f(x), \zeta_1(x), \zeta_2(x), \dots, \zeta_n(x)]\, A_{ij}[\dots]\, \zeta_i'(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i^{1}[\dots]\, C_i[\dots]$$

identicamente per $\mathrm{x}_1 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{x}_2$, *allora il* PROBLEMA DI CAUCHY *per il sistema* (I), *relativo ai dati* (1), *ammette infinite soluzioni* ».

Infatti, se esiste una superficie integrale Σ del sistema (1), che contiene la curva Γ, e se nei punti di questa vale la (5) identicamente in x, Γ è una curva caratteristica della superficie Σ e su di essa deve valere identicamente la (7) (cfr. le (III)); quindi se invece vale la (6), il PROBLEMA DI

---

[41] Si suppone che $f'(x)$ coincida colla radice ϱ_1 della (II).

[42] Se le (5) e (6) sono soddisfatte assieme in un punto soltanto $x = x_0$ dell'intervallo $x_1 \leq x \leq x_2$, il PROBLEMA DI CAUCHY non è risolubile in un intorno del punto di Γ corrispondente a $x = x_0$ (ma potrebbe essere risolubile nell'intorno di un altro punto di Γ).

CAUCHY è impossibile. Se invece per $x_1 \leq x \leq x_2$ sono soddisfatte assieme identicamente le (5) e (7), la curva Γ è una curva caratteristica e per essa passano infinite superfici integrali del sistema (I) (cfr. il TEOREMA III)

2. — Dall'unicità della soluzione del problema di CAUCHY, relativo ai dati (1), quando questi non costituiscono una curva caratteristica [43], e dalle considerazioni fatte nel § 5, n. 7, TEOREMA VI, segue immediatamente, supposto che le A_{ij}, B_{ij}, C_i siano D^{II} L, che vale il:

TEOREMA IX. — « *Se due superfici integrali del sistema* (I), *di equazioni rispettive* $z_j = z_j(x, y)$ *e* $z_j = \chi_j(x, y)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, *dove le* $z_j(x, y)$, $\chi_j(y, y)$ *sono definite in uno stesso campo* δ, *sono ivi* $D^{II} - L$, *e hanno in comune una curva* Γ, *questa è una caratteristica per entrambe le superfici. Sotto convenienti ipotesi di derivabilità* [44], *se le due superfici hanno in un punto di* Γ *un contatto di ordine* m $(m = 1, 2, \ldots)$, *esse hanno un contatto di ordine* m *in ogni punto di* Γ [45].

§ 6 - Sistemi a caratteristiche reali e multiple.

1. — Si supponga che l'equazione (II), nella quale si pensi di aver posto $\dfrac{dy}{dx} = \varrho$, abbia nel campo D radici tutte reali, ma non tutte semplici; valga però la seguente ipotesi, già introdotta in (M_2) [46], e che nel presente paragrafo supporremo sempre soddisfatta:

IPOTESI A). — *Tutte le radici* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_l$ $(2 \leq l \leq n)$ *dell'equazione* (II) *sono reali nel campo* D; *ognuna di esse ha in tutto* D *sempre lo stesso ordine di molteplicità; e se* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_l$ *sono gli ordini di molteplicità rispettivi* $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_l = n)$, *il determinante a primo membro della* (II), *nel quale si ponga* $\dfrac{dy}{dx} = \varrho$, *ha, in corrispondenza alle radici* $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_l$ *della* (II), *proprio le caratteristiche* $n - \nu_1$, $n - \nu_2$, $n - \nu_l$ *rispettivamente in tutto il campo* D.

---

(43) Cfr. (M_1). § 1, TEOREMA I, p. 79.

(44) Precisamente è sufficiente supporre che A_{ij}, B_{ij}, C_i siano D^{m_1} in D e le $z_j(x, y)$, $\chi_j(x, y)$ siano D^{m+1} in δ.

(45) Quest'ultimo risultato vale nello stesso campo in cui vale il TEOREMA VII (cfr. nota (38)).

(46) Cfr. (M_2), n. 1, p. 683.

Nel presente paragrafo supporremo sempre che tale ipotesi sia soddisfatta.

Supposto che le A_{ij}, B_{ij}, C_i, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ siano lipschitziane nel campo D, si trova facilmente che nei punti di una curva caratteristica del sistema corrispondente a una radice ϱ_r della (II) sono soddisfatte nel caso presente le seguenti equazioni (che si riducono alle (III) per $\varrho_r = \varrho$, $\nu_r = 1$)

$$\text{(III')} \qquad \left\{ \begin{array}{l} d\,y = \varrho_r\, d\,x \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} h_i^{r,1}\, A_{ij}\, d\,z_j = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{r,1}\, C_i\, d\,x \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} h_i^{r,2}\, A_{ij}\, d\,z_j = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{r,2}\, C_i\, d\,x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} h_i^{r,\nu_r}\, A_{ij}\, d\,z_j = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{r,\nu_r}\, C_i\, d\,x \end{array} \right.$$

dove le $h_i^{r,s}$ $(s = 1, 2, \ldots, \nu_r)$ sono ν_r sistemi di funzioni linearmente indipendenti che soddisfano le

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}\, \varrho_r - B_{ij})\, h_i^{r,s} = 0\,, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n\,;\ s = 1, 2, \ldots, \nu_r)\,.$$

Tali ν_r sistemi esistono certamente per l'ipotesi fatta A) che per $\dfrac{d\,y}{d\,x} = \varrho_r$ il determinante a primo membro della (II) abbia proprio caratteristica $n - \nu_r$. Pensando, p. es., x come variabile indipendente, il sistema (III') è un sistema di $n + 1$ equazioni nelle $n + 1$ funzioni incognite $y, z_1, z_2, \ldots, z_n$; dunque, dando ad arbitrio $n - \nu_r$ di tali funzioni, le rimanenti $\nu_r + 1$ sono determinate dal sistema (III') e dai valori assegnati per esse in un punto $x = x_0$, o, come si suol dire, *le curve caratteristiche* relative a una radice ϱ_r di molteplicità ν_r della (II) *dipendono,* nell'ipotesi A) ([47]), *da* $n - \nu_r$ *funzioni arbitrarie* (invece che da $n - 1$, come avviene se la radice ϱ_r è semplice, cfr. § 4, n. 1), *oltre che da* $\nu_r + 1$ *costanti arbitrarie* (i valori assegnati per le rimanenti $\nu_r + 1$ funzioni in un punto $x = x_0$).

([47]) Per questo risultato particolare è sufficiente che l'IPOTESI A) sia soddisfatta per la sola radice ϱ_r considerata.

2. — Si considerino le l radici distinte $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_l$; e in corrispondenza gli n sistemi

$$h_i^{(1,s)}, (i = 1, 2, \dots, n;\ s = 1, 2, \dots, \nu_1),\quad h_i^{(2,s)}\ (i = 1, 2, \dots, n;\ s = 1, 2, \dots, \nu_2);$$

(2)

$$\dots, h_i^{(l,s)}\quad (i = 1, 2, \dots, n;\ s = 1, 2, \dots, \nu_l).$$

Si indichino con $h_i^{(1)}, h_i^{(2)}, \dots, h_i^{(n)}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ ordinatamente i sistemi di funzioni (2); si può allora costruire, come nel § 1, n. 3, il determinante Δ, il cui termine generale è

$$c_{rj} = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(r)} A_{ij}, \quad (r, j = 1, 2, \dots, n); \tag{3}$$

si trova che

$$\Delta = A\, H, \tag{4}$$

dove A è il determinante, il cui termine generale è A_{ij}, e H è il determinante il cui termine generale è h_i^{r} $(i, r = 1, 2, \dots, n)$. In (M_2) si è provato ([48]) che in tutto D è

$$H \neq 0. \tag{5}$$

Ne segue, tenuto conto che per la (1) del § 1, n. 1 è $A \neq 0$, che

$$\Delta \neq 0 \tag{6}$$

in tutto il campo D.

Si indichi con γ_{rj} il complemento algebrico in Δ dell'elemento c_{rj}.

3. — I TEOREMI I e II e i relativi COROLLARI restano validi anche nel caso, in cui vi siano caratteristiche multiple, purchè sia soddisfatta l'IPOTESI A), se il sistema di caratteristiche, a cui appartiene la curva caratteristica data, è semplice, ed è dunque $\nu_1 = 1$; essi si dimostrano coi metodi tenuti nel § 2 e nel § 3, n. 2, rispettivamente, tenendo conto anche di quanto è detto nel precedente n. 2 e del fatto che il sistema (VII) è rimpiazzato nel caso presente dal sistema (VII'), che scriveremo tra poco, nel quale si faccia però $\nu_1 = 1$. Se $\nu_1 > 1$, cioè se il sistema di caratteristiche a cui appartiene la caratteristica data (IV) non è semplice, i TEO-

---

([48]) Cfr. (M_2), n. 4, pp. 685-687.

REMI I e II (e i loro COROLLARI) devono essere modificati nel senso che per determinare un integrale si devono dare ν_1 condizioni (invece di una sola) sulla curva $x = g(y)$, oppure su un'altra caratteristica, uscente da un punto della caratteristica data (IV).

Precisamente, supposte soddisfatte le ipotesi enunciate nel § 1, n. 4 (eccettuate quelle relative alle funzioni $\varphi_j(y)$, $G(y)$), siano dati ν_1 sistemi di funzioni $\varphi_j^{(s)}(y)$, $G_s(y)$, $(j = 1, 2, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, \nu_1)$ $D^{II} - L$ nell'intervallo $y_1 \leq y \leq y_2$, tali che valgano le ν_1 relazioni

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(s)}(y_0)\, \zeta_j(x_0) = G_s(y_0), \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_1), \tag{7}$$

e che, indicato con K il determinante, di ordine ν_1, il cui termine generale è

$$k_{rs} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(s)}(y_0)\, \gamma_{rj}[x_0, y_0, \zeta_1(x_0), \ldots, \zeta_n(x_0)], \ (r = 1, 2, \ldots, \nu_1;\ s = 1, 2, \ldots, \nu_1), \tag{8}$$

sia

$$K \neq 0. \tag{9}$$

Vale allora il

TEOREMA I'. - « *Nelle ipotesi precedenti esiste uno e un solo sistema di integrali del sistema* (I)

$$z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y), \ldots, z_n = z_n(x, y), \tag{10}$$

che sono definiti in un campo δ sufficientemente piccolo, a cui è interno il punto $(x_0, f(x_0))$, *sono ivi $D^{II} - L$ soddisfano le* (V), *e inoltre le ν_1 relazioni*

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(s)}(y)\, z_j[g(y), y] = G_s(y) \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_1) \text{ ».} \tag{VI'}$$

Geometricamente : « *Esiste una e una sola superficie integrale Σ del sistema* (I) (*di equazioni* (10)), *che passa per la curva caratteristica data Γ, di molteplicità ν_1, e nei punti di una sua curva Λ, che si proietta nel piano* x , y *in una curva data* x = g (y), *soddisfa le ν_1 relazioni* (VI') ».

Le $\varphi_j^{(s)}(y)$ possono essere, in particolare, tutte costanti, e, anche più in particolare, tutte nulle, tranne ν_1 di esse, p. es. le $\varphi_s^{(s)}(y)$ per $s = 1, 2, \ldots, \nu_1$, nell'ipotesi che, indicato con K_1 il determinante il cui termine generale è

$$\gamma_{rs}[x_0, y_0;\ \zeta_1(x_0), \ldots, \zeta_n(x_0)], \quad (r, s = 1, 2, \ldots, \nu_1)$$

sia

$$K_1 \neq 0. \tag{11}$$

Posto allora

$$(12) \qquad Z_s(y) = \frac{G_s(y)}{\varphi'^s_s(y)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_1),$$

le $Z_s(y)$ sono funzioni $D^{II} - L$ date, definite nell'intervallo $y_1 \leq y \leq y_2$; esse sono i valori assegnati per ν_1 tra le $z_j(x, y)$ sulla curva $x = g(y)$ [49]; le (7) divengono nel caso presente

$$(13) \qquad Z_s(y_0) = \zeta_s(x_0) \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_1).$$

Vale il:

COROLLARIO I'. — « *Nelle ipotesi precedenti esiste uno e un solo sistema* (10) *di integrali del sistema* (I), *che sono definiti in un campo* δ *abbastanza piccolo, a cui è interno il punto* $(x_0, f(x_0))$, *sono ivi* $D^{II} - L$, *soddisfano le* (V) *e inoltre le*

$$(VI'_*) \qquad z_s[g(y), y] = Z_s(y), \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_1) ».$$

Geometricamente: « *Esiste una e una sola superficie integrale* Σ *del sistema* (I) (di equazioni (10)), *che passa per la curva caratteristica* Γ, *e contiene una curva* Λ, *che si proietta nello spazio delle variabili* $x, y, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu_1}$ *in una curva assegnata di equazioni*

$$(14) \qquad x = g(y), \quad z_1 = Z_1(y), \quad z_2 = Z_2(y), \ldots, z_{\nu_1} = Z_{\nu_1}(y) ».$$

4. — Il TEOREMA I' si dimostra con ragionamenti simili a quelli tenuti nel § 2 per dimostrare il TEOREMA I; bisogna tener presente che qui il

---

[49] Si possono dare ad arbitrio sulla curva $x = g(y)$ i valori di ν_1 qualsiasi delle $z_j(x, y)$, purchè, se $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ sono i loro indici, il minore formato colle colonne di indice $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ della matrice

$$\left\| \begin{array}{ll} \gamma_{11}[x_0, y_0, \zeta_1(x_0), \ldots, \zeta_n(x_0)] & \gamma_{12}[\ldots] \ldots \gamma_{1n}[\ldots] \\ \gamma_{21}[\ldots] & \gamma_{22}[\ldots] \ldots \gamma_{2n}[\ldots] \\ \ldots & \ldots \\ \gamma_{\nu_1,1}[\ldots] & \gamma_{\nu_1 2}[\ldots] \ldots \gamma_{\nu_1 n}[\ldots] \end{array} \right\|$$

sia diverso da zero; un tale minore, per una scelta opportuna degli indici $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ esiste certamente, poichè il determinante Δ è diverso da zero (cfr. il precedente n. 2, form. (6)).

sistema (VII) è sostituito dal sistema

$$
(\mathrm{VII})\quad \begin{cases} y_\lambda = \varrho\, x_\lambda\,; \qquad\qquad x_\mu = \sigma\, y_\mu \\[2mm] \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} h_i^{1,s} A_{ij}\, \bar{z}_{j_\lambda} = \sum_{i=1}^{n} h_i^{1,s}\, C_i\, x_\lambda\,, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_1) \\[2mm] \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} h_i^{2,s} A_{ij}\, \bar{z}_{j_\mu} = \sum_{i=1}^{n} h_i^{2,s}\, C_i\, x_\mu\,, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_2) \\[2mm] \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} h_i^{r,s} A_{ij} \frac{d\,\bar{z}_j}{d\,t_r} = \sum_{i=1}^{n} h_i^{r,s}\, C_i \frac{d\,x}{d\,t_r}\,, \quad (r = 3, 4, \ldots, l\,;\; s = 1, 2, \ldots, \nu_r), \end{cases}
$$

dove le derivate $\dfrac{d}{d\,t_r}$ sono definite dalle (12) e (13) del § 2, n. 3. Fatte anche qui le posizioni (16) e (19) del § 2, n. 3 (tenendo presente che le h_i^r sono ora le funzioni definite nel precedente n. 3 e che vale la (6)), ci si riconduce ad un PROBLEMA, che generalizza il PROBLEMA *a*), e che è stato risolto da noi in (M_4) ([50]).

5. — Il TEOREMA II diviene nel caso presente $(\nu_1 > 1)$:

TEOREMA II'. — « *Nelle ipotesi del* TEOREMA I' (*eccettuate quelle relative alla curva* $\mathrm{x} = \mathrm{g}(\mathrm{y})$), *esiste uno e un solo sistema* (10) *di integrali del sistema* (I), *che sono definiti in un campo* δ *del piano* x, y, *contenente all'interno il punto* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{f}(\mathrm{x}_0))$, *sono ivi funzioni* $\mathrm{D^{I}} - \mathrm{L}$, *soddisfano le* (V), *e inoltre nei punti della curva caratteristica* C, *passante per il punto* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{f}(\mathrm{x}_0), \zeta_1(\mathrm{x}_0), \zeta_2(\mathrm{x}_0), \ldots, \zeta_n(\mathrm{x}_0))$ *e appartenente a un ben determinato sistema, distinto da quello, a cui appartiene la curva caratteristica data* Γ, *soddisfano le*

$$
(\mathrm{X}')\qquad \sum_{j=1}^{n} q_j^{1,s}(y)\, z_j = G_s(y)\,, \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_1)\,».
$$

Geometricamente: « *Esiste una e una sola superficie integrale* Σ *del sistema* (I), *che passa per la curva caratteristica* Γ, *e inoltre è tale che lungo un'altra sua curva caratteristica* C, *avente con* Γ *un punto in comune e appartenente a un ben determinato sistema, diverso da quello, a cui appartiene la* Γ, *sono soddisfatte le* (X') ».

([50]) Cfr. (M_4), n. 11, form. (V) e (VI).

Il COROLLARIO II diviene:

COROLLARIO II'. — « *Nelle ipotesi del* TEOREMA II', *e supposto inoltre che valgano le* (11) *e* (13), *esiste uno e un solo sistema* (10) *di integrali del sistema* (I), *che sono definiti in un campo* δ *abbastanza piccolo contenente il punto* $(x_0, f(x_0))$ *come punto interno, sono ivi* $D^{II} - L$, *soddisfano le* (V), *e inoltre nei punti della caratteristica* C, definita nel TEOREMA II, *soddisfano le*

$$(X'_*) \qquad z_s = Z_s(y), \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_1) \text{ ».}$$

Geometricamente: « *Esiste una e una sola superficie integrale* Σ *del sistema* (I), *che passa per la curva caratteristica* Γ, *e inoltre contiene un'altra curva caratteristica* C, *avente con* Γ *un punto in comune e appartenente a un ben determinato sistema (diverso da quello a cui appartiene* Γ*), la quale si proietta nello spazio a* $\nu_1 + 1$ *dimensioni, in cui variano* $y, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu_1}$, *in una curva data* ».

Il TEOREMA II' si dimostra con considerazioni simili a quelle fatte nel § 3, n. 2 per dimostrare il TEOREMA II; il PROBLEMA *b*) è qui sostituito da un problema più generale, che è stato risolto da noi in (M_4) [51].

6. — I TEOREMI III e IV si estendono immediatamente al caso, in cui vi siano caratteristiche multiple, supposta soddisfatta l'IPOTESI *A*). Restano pure valide tutte le considerazioni fatte nel § 3, n. 4 sulla non esistenza, in generale, di una superficie integrale passante per due curve caratteristiche assegnate. Fa eccezione il caso $l = 2$, di cui ci occuperemo nel successivo § 7.

7. — Le considerazioni fatte nel § 4 sulle curve e strisce caratteristiche restano invariate, quando, per quanto il sistema (I) ammetta sistemi di caratteristiche multiple, il sistema a cui appartiene la curva caratteristica data Γ è semplice, cioè se $\nu_1 = 1$.

Se è $\nu_1 > 1$, i TEOREMI VI e VII restano invariati, mentre il TEOREMA V diviene (supposte soddisfatte le ipotesi di tale TEOREMA):

TEOREMA V'. — « *Data una curva caratteristica* Γ, *appartenente a un sistema di caratteristiche multiple di molteplicità* ν_1, *esistono infinite striscie caratteristiche del primo ordine, che la hanno come curva sostegno; la determina-*

---

[51] Cfr. (M_4), n. 11 form (V) e (VII)

zione di ognuna di esse dipende da ν_1 costanti arbitrarie. Ognuna di esse è contenuta in infinite striscie caratteristiche del secondo ordine, di cui ognuna è determinata da ν_1 costanti arbitrarie. In generale una striscia caratteristica di ordine m, *avente per sostegno la curva caratteristica Γ, è contenuta in infinite striscie caratteristiche di ordine* m + 1, *delle quali ognuna è determinata da ν_1 costanti arbitrarie* ».

Da questo teorema e da quanto si è detto nel precedente n. 1 segue che una striscia caratteristica di ordine m, relativa alla radice ϱ_1 della (II) di molteplicità ν_1, supposta soddisfatta l'IPOTESI A), dipende da $n - \nu_1$ *funzioni arbitrarie* e da $(m+1)\nu_1 + 1$ *costanti arbitrarie.*

8. In (M_2) [52] è stato dimostrato che nell'IPOTESI A) il PROBLEMA di CAUCHY per il sistema (I) è risolubile in modo unico. Segue subito che anche nel caso in cui vi siano caratteristiche multiple vale il TEOREMA IX, purchè sia soddisfatta l'IPOTESI A). In quanto al TEOREMA VIII, esso resta invariato, se è $\nu_1 = 1$, cioè se la curva assegnata mediante le (1) del § 5 è tale che nei punti di essa $\dfrac{dy}{dx} = \varrho_1$ è una radice semplice della (II). Se invece è $\nu_1 > 1$, supposte valide le ipotesi enunciate nei § 5, n. 1, e definito $H(x, \varrho)$ allo stesso modo che nel § 5, n. 1, il TEOREMA VIII diviene:

TEOREMA VIII'. - « *Se è identicamente per* $\mathrm{x}_1 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{x}_2$

$$H\,[\,x\,, f'(x)] = 0 \tag{15}$$

e se inoltre vale anche una sola delle diseguaglianze [53]

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(1,s)}\,[x\,, f(x)\,;\,\zeta_1(x)\,,\,\zeta_2(x)\,,\,\ldots\,,\,\zeta_n(x)]\,A_{ij}\,[\,\ldots\,|\,\zeta_j'(x) \neq \tag{16}$$

$$\neq \sum_{i-1}^{n} h_i^{(1,s)}\,[\,\ldots\,|\,C_i\,|\,\ldots\,|\,, \qquad (s = 1\,, 2\,, \ldots\,, \nu_1),$$

il PROBLEMA *di* CAUCHY *per il sistema* (I), *relativo ai dati* (1) *del* § 5, *non è risolubile: se invece, assieme alle* (15), *sono soddisfatte identicamente per* $\mathrm{x}_1 \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{x}_2$ *le*

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(s}\,|\ldots|\,A_{ij}\,|\ldots|\,\zeta_j'(x) = \sum_{i=1}^{n} h_j^{(s}\,|\ldots]\,C_i\,|\ldots|\,, \qquad (s = 1\,, 2\,, \ldots\,, \nu_1), \tag{17}$$

il PROBLEMA *di* CAUCHY *per il sistema* (I), *relativo ai dati* (1) *del* § 5, *ammette infinite soluzioni* ».

---

(52) Cfr. (M_2), n 2, p. 684.

(53) Si suppone che $f'(x)$ coincida colla radice ϱ_1 della (II)

§ 7 - Caso in cui vi siano due soli sistemi distinti di caratteristiche.

1. — Supponiamo nel presente paragrafo che l'equazione (II) abbia due sole radici reali e distinte ϱ_1 e ϱ_2, di molteplicità rispettiva ν_1 e ν_2 con $\nu_1 + \nu_2 = n$, e che sia soddisfatta l'IPOTESI A); allora il determinante a primo membro della (II), in corrispondenza alle sue radici ϱ_1 e ϱ_2, ha proprio come caratteristica ν_2 e ν_1 rispettivamente. Si hanno così due soli sistemi distinti di caratteristiche multiple, di molteplicità rispettiva ν_1 e ν_2 [54].

Il TEOREMA II' si semplifica notevolmente; infatti, supposta nota la superficie integrale Σ, che lo soddisfa, introdotte su di essa, come nel § 3, n. 2, le coordinate λ, μ, e posto

$$(1) \qquad x(0, \mu) = X(\mu), \qquad z_j(0, \mu) = Z_j(\mu)$$

sulla caratteristica C, di equazione $\lambda = 0$, valgono le

$$(2) \qquad y(0, \mu) = \mu$$

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^{(s)}(\mu)\, Z_j(\mu) = \Phi_s(\mu), \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu_1)$$

(cfr. l'enunciato del TEOREMA II'), e insieme le

$$(4) \begin{cases} X'(\mu) = \sigma(X, \mu; Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \\ \sum_{i,j=1}^{n} h_i^{(2s)}(\ldots)\, A_{ij}(\ldots)\, Z_j'(\mu) = \sum_{i=1}^{n} h_i^{2,s}(\ldots)\, C_i(\ldots)\, \sigma(\ldots), \; (s = 1, 2, \ldots, \nu_1) \end{cases}$$

che si ottengono immediatamente dalle (III'), quando in esse si ponga $r = 2$, e

$$(5) \qquad \sigma = \frac{1}{\varrho_2},$$

e si tenga conto delle posizioni (1) e della (2).

Si dimostra facilmente che il sistema delle (3) e (4), assieme alle condizioni

$$(6) \qquad X(0) = Z_j(0) = 0$$

([54]) Cfr. anche (M_2), n. 6; si intende che quanto è detto nel presente paragrafo vale, in particolare, se $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $n = 2$ (cfr. anche, per questo caso particolare, (M_1), § 5, p. 92-93).

determina in modo unico le funzioni

$$(7) \qquad x = X(\mu), \quad z_1 = Z_1(\mu), \quad z_2 = Z_2(\mu), \ldots, z_n = Z_n(\mu),$$

almeno per $|\mu|$ abbastanza piccolo. Tali funzioni determinano la curva caratteristica C del secondo sistema, le cui equazioni si possono dunque ottenere a priori come conseguenza immediata delle condizioni imposte nel TEOREMA II' e del sistema (I) (di cui le (4) sono una conseguenza), anche se non sono note le equazioni della superficie integrale Σ, che soddisfa tale teorema; ciò non avviene invece nel caso generale $l > 2$ (cfr. § 3, n. 4 e § 6, n. 6).

Nel caso presente il TEOREMA II' si può enunciare in una forma più semplice, e si possono fare alcune riduzioni nelle ipotesi; precisamente il TEOREMA II' equivale al seguente:

TEOREMA X. — « *L'equazione* (II) *abbia in tutto* D *due sole radici reali e distinte* ϱ_1 *e* ϱ_2 *di molteplicità rispettiva* ν_1 *e* ν_2 (*con* $\nu_1 + \nu_2 = n$) *e in tutto* D *valga l'*IPOTESI A); *le funzioni* A_{ij}, B_{ij}, C_i *siano* $D^I - L$ *in* D. *Siano date due curve caratteristiche* Γ *e* C *dei due diversi sistemi, aventi un punto in comune, di equazioni rispettive*

$$(IV) \qquad y = f(x), \quad z_1 = \zeta_1(x), \quad z_2 = \zeta_2(x), \ldots, z_n = \zeta_n(x)$$

$$(IV') \qquad x = X(y), \quad z_1 = Z_1(y), \quad z_2 = Z_2(y), \ldots, z_n = Z_n(y),$$

dove le funzioni (IV) *e* (IV') *sono definite rispettivamente negli intervalli* $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$ *e sono ivi* D^I; *esiste un punto* (x_0, y_0) *in cui valgono le*

$$(8) \quad y_0 = f(x_0),\ x_0 = X(y_0),\ \zeta_1(x_0) = Z_1(y_0),\ \zeta_2(x_0) = Z_2(y_0), \ldots, \zeta_n(x_0) = Z_n(y_0).$$

In queste ipotesi esiste una e una sola superficie integrale Σ *del sistema* (I), *che passa per le due curve caratteristiche assegnate* Γ *e* C, *avente equazioni*

$$(9) \qquad z_1 = z_1(x, y), \qquad z_2 = z_2(x, y), \ldots, z_n = z_n(x, y),$$

dove le funzioni $z_j(x, y)$ *sono definite in un campo* δ *abbastanza piccolo, a cui è interno il punto* (x_0, y_0), *e sono ivi* D^I ».

2. — Ragionando come nel § 3, n. 2, introdotte le coordinate λ, μ, la dimostrazione del TEOREMA X si riconduce alla risoluzione del seguente:

PROBLEMA (C). — « *Determinare un sistema di funzioni* $x(\lambda, \mu)$, $y(\lambda, \mu)$, $\bar{z}_1(\lambda, \mu)$, $\bar{z}_2(\lambda, \mu), \ldots, \bar{z}_n(\lambda, \mu)$, *definite almeno per* $|\lambda|$, $|\mu|$ *abbastanza pic-*

coli, finite e continue colle loro derivate prime e colle derivate seconde miste, che soddisfano il sistema di equazioni a derivate parziali [55]

$$
(\mathrm{VII}'')\quad \left\{\begin{array}{ll}
y_\lambda = \varrho\, x_\lambda ; \qquad x_\mu = \sigma\, y_\mu & \\
\sum\limits_{i,j=1}^{n} h_i^{1,s}\, A_{ij}\, \bar{z}_{j_\lambda} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{1,s}\, C_i\, x_\lambda , & (s = 1, 2, \ldots, \nu_1) \\
\sum\limits_{i,j=1}^{n} h_i^{2,s}\, A_{ij}\, \bar{z}_{j_\mu} = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^{2,s}\, C_i\, x_\mu . & (s = 1, 2, \ldots, \nu_2)
\end{array}\right.
$$

e le condizioni ai limiti

$$
(10)\quad \left\{\begin{array}{l}
x(\lambda, 0) = \lambda, y(\lambda, 0) = f(\lambda), \bar{z}_1(\lambda, 0) = \zeta_1(\lambda), \bar{z}_2(\lambda, 0) = \zeta_2(\lambda), \ldots, \bar{z}_n(\lambda, 0) = \zeta_n(\lambda), \\
x(0, \mu) = X(\mu), y(0, \mu) = \mu, \bar{z}_1(0, \mu) = Z_1(\mu), \bar{z}_2(0, \mu) = Z_2(\mu), \ldots, \bar{z}_n(0, \mu) = Z_n(\mu) \text{ ».}
\end{array}\right.
$$

Questo problema è un caso particolare di un problema risolto da noi in un nostro lavoro di alcuni anni fa [56] e, come si vede, è risolubile sotto ipotesi più ampie dei PROBLEMI a) e b).

3. — Confrontando il risultato del TEOREMA X con quanto è detto nel § 3, n. 4 e nel § 6, n. 6, si vede che il caso $l = 2$ si presenta come eccezionale rispetto al caso $l > 2$, nel quale *date due curve caratteristiche, appartenenti a due diversi sistemi, e aventi un punto in comune, non esiste, in generale, una superficie integrale che le contenga entrambe,* mentre il contrario avviene, come afferma il TEOREMA X, nel caso $l = 2$.

4. — Poichè il TEOREMA X sostituisce, nel caso $l = 2$, i TEOREMI II e II′, e vale sotto ipotesi più ampie di quelle introdotte in tali teoremi, le stesse ipotesi più ampie valgono, nel caso presente, in tutti i teoremi, che nei paragrafi precedenti seguono dal TEOREMA II oppure II′ [57].

È sufficiente, in ogni caso, che le A_{ij}, B_{ij}, C_i siano D^I L, e le funzioni (IV) siano D^I; in queste ipotesi gli infiniti sistemi di integrali del sistema (I), di cui il TEOREMA III, p. es., afferma l'esistenza, sono costituiti da funzioni $z_j = z_j(x, y)$, che sono D^I nel campo δ, in cui esse sono definite, invece che $D^{II} - L$. Analoghi cambiamenti devono essere fatti negli enunciati degli altri teoremi a cui si è accennato [58].

---

[55] Il sistema (VII′) si riduce al sistema (VII″) nel caso $n = 2$.

[56] M. CINQUINI CIBRARIO. *Intorno ad un sistema di equazioni alle derivate parziali del primo ordine*. Rend. dell'Istituto Lombardo, vol. LXXVI, 1943, TEOREMA II.

[57] Cfr. TEOREMI III, IV, VII, VIII, IX

[58] Cfr. la precedente nota [57].

§ 8 - Caso in cui vi sia un solo sistema di curve caratteristiche.

Nel § 6 si è escluso il caso $l = 1$, a cui vogliamo qui accennare brevemente. In tale caso l'equazione (II) ammette *una sola* radice reale n-pla; se vale l'IPOTESI A), in corrispondenza a tale radice il determinante a primo membro della (II) ha caratteristica zero; in tale caso si dimostra [59] che il sistema (I) si può porre sotto la forma

$$(1) \quad A\,(x\,,y\,;\,z_1\,,z_2\,,\ldots\,,z_n)\,p_i + B\,(\ldots)\,q_i = C_i\,(\ldots), \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots\,,n),$$

e se in tutto D è

$$(2) \qquad A \neq 0\,,$$

le equazioni dell'unico sistema di caratteristiche hanno la forma

$$(3) \quad A\,dy \quad B\,dx = 0\,; \qquad A\,dz_i - C\,dx = 0, \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots\,,n),$$

che determinano completamente le equazioni di una curva caratteristica

$$(4) \qquad y = f(x)\,; \qquad z_j = \zeta_i\,(x), \qquad (i = 1\,,2\,,\ldots\,,n),$$

quando siano assegnati i valori delle funzioni $f(x)\,,\zeta_i\,(x)$ in un punto $x = x_0$. Dunque, se $l = 1$, l'unico sistema di caratteristiche (n-ple) non dipende da funzioni arbitrarie, ma soltanto da $n + 1$ costanti arbitrarie.

Nel caso presente il TEOREMA I′ equivale al risultato che il PROBLEMA di CAUCHY per il sistema (1) è risolubile in modo unico (sotto ipotesi che non stiamo a precisare), come si può dimostrare con metodi classici [60], mentre il TEOREMA II′ nel caso presente non ha senso.

I TEOREMI III, IV, V′, VI, VII, VIII′, IX valgono anche nel caso presente, con qualche modificazione e qualche semplificazione nelle ipotesi e nei risultati, che non vale la pena precisare.

[*Pervenuto alla Redazione il 15-3-1950*]

---

[59] Cfr. E. GOURSAT *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, T. II, Paris, Hermann (1898), n. 216, pp. 323-325; cfr. in particolare le form. (38 bis) p. 324 e (39) p. 325.

[60] Cfr. anche (M_2), n. 8, p. 688.

ALDO GHIZZETTI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 17 Maggio 1950.