Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Salvatore Cherubino

Sulle matrici infinite

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 3, nº 1-4 (1950), p. 133-159

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_3_1-4_133_0>

SULLE MATRICI INFINITE

di SALVATORE CHERUBINO (Pisa)

In questa Nota presento alcune osservazioni sulle matrici infinite di cui le più semplici potrebbero costituire la premessa per un'esposizione sistematica della teoria delle matrici finite o infinite ([1]).

Particolarmente interessanti e forse nuove, almeno per la forma, credo siano le proprietà delle matrici antisimmetriche infinite ed il modo di portarle a forma diagonale. Questo modo è del tutto analogo a quello, altrettanto semplice, esposto in una mia recente Nota ([2]), che ivi diede luogo ad una rapida ed elegante dimostrazione del teorema di SYLVESTER-HADAMARD sul massimo modulo del determinante di una matrice finita, insieme ad osservazioni che lo precisano.

Nell'ultimo paragrafo del presente scritto, questo celebre teorema viene agevolmente esteso alle matrici infinite con determinante convergente, ricevendo notevole rilievo nel caso delle matrici delle trasformazioni lineari nello spazio hilbertiano.

Questa Nota dà un'idea del metodo che potrebbe seguirsi per estendere alle matrici infinite, quando possibile, molte proprietà di quelle finite, fra le quali le importanti nozioni e proprietà delle forme canonica, semi-canonica e quasi-canonica, con le relative applicazioni.

§ 1. Dipendenza e indipendenza lineare.

1. Sia

$$A = \| a_{rs} \|$$

una matrice con un numero qualunque, finito o infinito, di righe e di colonne, i cui elementi appartengano ad un campo (o corpo numerico commutativo C fissato a piacere.

([1]) Come vado facendo nel corso di Matematiche Superiori di quest'anno accademico 1949-50 presso l'Università di Pisa. Nella Nota in corso di stampa in questi Annali: *Sui fondamenti del calcolo con matrici infinite,* V. CHECCUCCI precisa, in forma comoda e suggestiva, le condizioni di convergenza ed associatività del prodotto di matrici ed indica un caso notevole di invertibilità. Qui supporremo verificate le condizioni predette

([2]) S. CHERUBINO: *Forma quasi-canonica delle matrici* [Annali della Sc. Norm. di Pisa s. vol. (1948)] pp. 151-166, Le notazioni, le definizioni ed il simbolismo in uso per le matrici finite, si estendono senz'altro al caso delle matrici infinite, purchè siano verificate le condizioni di convergenza necessarie e sufficienti perchè i simboli o le operazioni che vogliono adoprarsi abbiano significato e valgano le solite proprietà formali.

Così, diremo che le righe di A sono linearmente dipendenti se esiste un complesso *orizzontale*

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

di numeri non tutti zero tale che il prodotto xA sia il complesso orizzontale nullo, cioè quello i cui elementi sono tutti zero. Si scriverà, in tal caso:

$$xA = 0 . \tag{1.1}$$

Analogamente, essere dipendenti le colonne di A significa che esiste un complesso x non nullo, tale che

$$A x_{-1} = 0 . \tag{1.1'}$$

ove x_{-1} indica il complesso verticale trasposto di x, cioè lo stesso x scritto verticalmente: il secondo membro è ora il complesso verticale nullo, mentre prima era il complesso orizzontale nullo.

La dipendenza può sussistere nel campo C cui appartengono gli elementi a_{rs} di A: in tal caso gli elementi x_r di x devono appartenere a C e non coincidere tutti con lo zero di C ed il secondo membro delle (1.1), (1.1)' è un complesso nullo in C, cioè ad elementi tutti eguali allo zero di C. Osservisi che le righe e le colonne di A possono esser dipendenti in un campo più ampio di C (ad es. in quello dei numeri complessi) ed essere indipendenti in C.

2. Se le righe (le colonne) di una matrice A non nulla non sono tutte linearmente indipendenti saranno tali solo una parte di esse, per es. quelle costituenti la matrice B, mentre le rimanenti sono combinazioni lineari di esse, cioè costituiscono una matrice μB (una matrice $B\nu$) ove μ (ove ν) è una matrice di cui ciascuna riga (ciascuna colonna) indica la combinazione lineare che occorre eseguire sulle righe (sulle colonne) di B per avere ordinatamente le rimanenti righe (colonne) di A. Allora, a meno dell'ordine delle righe (delle colonne) si può scrivere:

$$A = \left(\frac{B}{\mu B}\right) \qquad [A = (B \mid B\nu)] . \tag{2.1}$$

Se la indipendenza o dipendenza si considera nel campo C, la matrice μ (la matrice ν) ha i suoi elementi in esso.

Osservisi che un gruppo di righe indipendenti di A delle quali le rimanenti sono combinazioni lineari (a meno che le righe di A non siano tutte indipendenti) può sempre scegliersi in più modi : ogni riga non nulla di A può includersi in uno almeno di detti gruppi.

Si dimostrano facilmente le proposizioni di cui agli articoli seguenti.

3. PROP. I. *Se due matrici sono entrambe a righe (entrambe a colonne) tutte linearmente indipendenti, altrettanto avviene pel loro prodotto (se esiste).*

Consideriamo il prodotto :

$$A \cdot B = C \tag{3.1}$$

ove A e B sono due matrici a righe tutte linearmente indipendenti. Se C non fosse anch'essa a righe linearmente indipendenti esisterebbe un complesso orizzontale x non nullo pel quale si avrebbe :

$$x\,C = 0\,.$$

Ponendo :

$$x\,A = y\,,$$

poichè le righe di A sono tutte indipendenti [3] ed $x \neq 0$, sarà necessariamente $y \neq 0$; quindi si avrebbe :

$$x\,C = x\,A\,B = y\,B = 0$$

il che è impossibile, perchè B è a righe tutte indipendenti.

Allo stesso modo si ragionerebbe sulle colonne.

PROP. II. *Se un prodotto di due matrici ha un numero finito di righe (di colonne) linearmente indipendenti, questo numero è non maggiore di quello delle righe (delle colonne) linearmente indipendenti del primo (del secondo) fattore.*

Abbiasi :

$$A\,B = C \tag{3.1}$$

e C possegga n righe linearmente indipendenti e non più. A meno dell'ordine delle righe, potrà scriversi :

$$C = \left(\frac{c}{\mu\,c}\right) \tag{4.1}$$

---

(3) Per brevità l'avverbio « linearmente » sarà omesso ogni volta che ciò non dia luogo a confusione.

ove c è la matrice di n righe indipendenti di C e μ è una matrice opportuna, ad n colonne.

Dopo lo stesso scambio di righe operato su C, separiamo in A le prime n righe dalle altre, e scriviamo:

$$A = \left(\frac{a}{b}\right) \tag{5.1}$$

dove a è una matrice ad n righe: sarà necessariamente:

$$c = a\,B\,. \tag{7.1}$$

Dico che le righe di a sono tutte indipendenti. Infatti, se non lo fossero, si avrebbe, per un n-complesso orizzontale x non nullo:

$$x\,a = 0\,, \tag{8.1}$$

quindi anche, dalla (7.1):

$$x\,c = x\,a\,B = 0\,B = 0 \tag{9.1}$$

e c non avrebbe le sue righe tutte indipendenti, contro l'ipotesi. Dunque, il numero delle righe indipendenti di A non può essere minore di n.

Ripetendo lo stesso ragionamento sulla matrice:

$$C_{-1} = B_{-1}\,A_{-1}$$

trasposta del prodotto considerato, si trova che il numero delle colonne indipendenti di C non supera quello delle colonne indipendenti di B.

COR. I. *Un prodotto di due matrici non può avere infinite righe (infinite colonne) linearmente indipendenti, senza che il primo fattore (il secondo fattore) possegga anch'esso infinite righe (infinite colonne) linearmente indipendenti.*

COR. II. *Se un prodotto di due fattori ha linearmente indipendenti un certo gruppo di righe (di colonne), altrettanto accade del gruppo delle corrispondenti righe (colonne) del primo fattore (del secondo fattore).*

4. PROP. III. *Se in un prodotto di due matrici il primo fattore (il secondo fattore) è a colonne (a righe) tutte linearmente indipendenti, il prodotto ha linearmente indipendenti le colonne (le righe) corrispondenti alle colonne (alle righe) indipendenti del secondo (del primo) fattore.*

Si abbia :

$$A\,B = C$$

e la matrice A sia a colonne tutte indipendenti, mentre B, a meno dell'ordine delle colonne, si scrive :

$$B = (b \mid b\,\nu) \tag{10.1}$$

con b matrice a colonne tutte linearmente indipendenti, eventualmente coincidente con B, ν matrice opportuna. Si ha quindi, con lo stesso scambio dell'ordine delle colonne :

$$C = (A\,b \quad A\,b\,\nu)\,. \tag{11.1}$$

Per la prop. prima, $A\,b$ è a colonne tutte linearmente indipendenti, quindi C ha indipendenti le colonne corrispondenti a quelle di b. Altrettanto accade per le righe, come si vede ragionando sulla trasposta di C.

COR. *Il massimo numero delle colonne (delle righe) linearmente indipendenti di un prodotto di due matrici di cui la prima (la seconda) è a colonne (a righe) tutte linearmente indipendenti, è eguale a quello delle colonne (delle righe) linearmente indipendenti della seconda (della prima).*

5. PROP. IV. *Se il massimo numero delle righe (delle colonne) linearmente indipendenti di A è finito, anche il massimo numero delle colonne (delle righe) di A linearmente indipendenti è finito ed i due numeri sono eguali.*

A possegga $n > 0$ righe linearmente indipendenti e non più di n e sia A' una matrice che ha per righe n righe indipendenti di A. Si potrà allora scrivere, a meno dell'ordine delle righe :

$$A = \left(\frac{A'}{\mu\,A'}\right). \tag{12.1}$$

La matrice A', avendo un numero (finito) n di righe, avrà un numero finito m di colonne linearmente indipendenti, e non più, con $0 < m \leq n$ (4), quindi può scriversi, a meno dell'ordine delle colonne :

$$A' = (a \mid b)$$

(4) Qui interviene la teoria dei sistemi lineari, che si può svolgere senza determinanti, sia nel caso finito che infinito.

con a matrice ad n righe ed m colonne, queste ultime linearmente indipendenti. e :

$$b = a\,\nu\,, \tag{13.1}$$

ν essendo una matrice opportuna.

Potrà allora scriversi, sempre a meno dell'ordine delle righe e delle colonne :

$$A = \left(\frac{a}{c}\middle|\frac{b}{d}\right)$$

e si avrà :

$$c = \mu\, a\,, \quad d = \mu\, b = \mu\, a\, \nu = c\, \nu\,. \tag{14.1}$$

Onde :

$$\left(\frac{b}{d}\right) = \left(\frac{a}{c}\right)\nu\,. \tag{15.1}$$

Poichè le colonne di a sono linearmente indipendenti, sono tali anche quelle di $\left(\frac{a}{c}\right)$, quindi A possiede m colonne linearmente indipendenti. Non ne possiede più di tante perchè, per la (15.1), le rimanenti sono combinazioni lineari delle m colonne di $\left(\frac{a}{c}\right)$ [5].

Si è dunque dimostrato che il numero m delle colonne di A linearmente indipendenti non supera quello n delle righe.

Analogamente, partendo dalle colonne, si trova che $n \leq m$, e si conclude che $n = m$.

---

[5] Tutte le colonne di A, comprese quelle di $\left(\frac{a}{c}\right)$, sono allora combinazioni lineari di quelle di $\left(\frac{a}{c}\right)$. Perciò, se si prendono $m' > m$ colonne qualunque di A, la loro matrice è data da un prodotto come:

$$\left(\frac{a}{c}\right)\tau\,,$$

con τ matrice ad m righe ed m' colonne. Essendo $m' > m$ ed n finito, esiste un m'-complesso x non nullo pel quale si ha $\tau\, x_{-1} = 0$, quindi

$$\left(\frac{a}{c}\right)\tau\, x_{-1} = 0\,.$$

Perciò $m' > m$ colonne di A non sono mai linearmente indipendenti.

COR. *Una matrice non può avere infinite righe (colonne) indipendenti senza avere indipendenti anche infinite colonne (righe).*

Dopo questa quarta, la proposizione seconda può completarsi come appresso :

PROP. II bis. *Se un prodotto di due o più matrici ha un numero finito di righe e colonne linearmente indipendenti, questo numero non è maggiore di quello di ciascun fattore.*

Segue pure che il *cor.* I della proposizione seconda può enunciarsi nella forma seguente :

COR. *Un prodotto di due o più matrici non può avere infinite righe (e colonne) linearmente indipendenti, senza che altrettanto accada per tutti i suoi fattori.*

Così pure:

PROP. III bis. *Un prodotto di due fattori di cui uno a righe e colonne tutte linearmente indipendenti ha tante righe e colonne linearmente indipendenti quante ne ha l'altro fattore.*

§ 2. Matrici inverse.

6. Con I indicheremo una matrice identica, cioè una matrice avente tante righe quante colonne, eguali a zero tutti gli elementi non principali e questi tutti eguali all'unità (zero ed unità di C). Se A e B sono due matrici per le quali si ha :

$$AB = I, \tag{1.2}$$

si dirà che B è un'*inversa a destra* di A e che A è un'*inversa a sinistra* di B. In tal caso B, oltre ad avere tante righe quante sono le colonne di A, avrà tante colonne quante sono le righe di A. In particolare, se A è quadrata, anche B è quadrata e saranno entrambe di *ordine* finito o infinito, insieme ad I. In ogni caso, questa è dell'ordine delle righe di A (e delle colonne di B).

Se A possiede un'inversa a destra B o una a sinistra C e se A è rettangolare, cioè non ha tante colonne quante righe, si dovrà scrivere :

$$AB = I, \qquad CA = I'$$

e le due matrici identiche I ed I' saranno di ordine diverso.

Se si ha contemporaneamente

$$AB = I, \qquad BA = I'$$

si dirà che A e B sono *invertibili:* se A e B sono entrambe quadrate si avrà $I = I'$, cioè I ed I' rappresenteranno la stessa matrice identica [6].

TEOR. I. *Se la matrice* A *ammette un'inversa a destra (a sinistra), essa è a righe (a colonne) tutte linearmente indipendenti.*

Se infatti si ha:

$$AB = I, \tag{1.2}$$

non può aversi $xA = 0$, con x complesso orizzontale non nullo, perchè altrimenti si avrebbe:

$$xAB = 0 . B = 0,$$

mentre da (1.2) segue che:

$$xAB = x \neq 0 .$$

Analogamente, non può aversi $By_{-1} = 0$, con y_{-1} complesso verticale non nullo.

COR. I. *Un'inversa a destra (a sinistra) di* A, *se esiste, è necessariamente a colonne (a righe) tutte linearmente indipendenti.*

COR. II. *Se* A *è invertibile, essa è a righe e colonne linearmente indipendenti.*

TEOR. II. *Se la matrice* A *ammette un'inversa a destra (a sinistra) e se le sue colonne (le sue righe) sono linearmente indipendenti, si ha che:*

a) *la* A *ammette una sola inversa a destra (a sinistra);*

b) *la* A *è invertibile;*

c) *la* A *ammette anche un'inversa a sinistra (a destra) e questa è unica;*

d) *l'inversa a destra coincide con l'inversa a sinistra.*

a) Se si avesse contemporaneamente:

$$AB = I, \tag{1.2}$$

$$AB' = I, \tag{1.2)'$$

con $B' \neq B$, si avrebbe anche:

$$A(B - B') = 0,$$

---

(6) Le nozioni di inversa a destra e inversa a sinistra valgono anche per matrici rettangolari finite.

con $B - B' \neq 0$, il che è impossibile, quando A è a colonne linearmente indipendenti. Analogamente, se valessero le due relazioni :

$$B\,A = I' = B'\,A\,,$$

ed A fosse a righe indipendenti.

b) Dalla (1.2), moltiplicando a destra per A, si ha :

$$A \, . \, B\,A = I \, . \, A = A \, . \, I' = A\,, \tag{2.2}$$

dove I', come poco fa, è la matrice identica dell'ordine delle colonne di A. Da qui :

$$A\,(B\,A - I') = 0\,. \tag{3.2}$$

Poichè A è a colonne linearmente indipendenti, segue che è necessariamente :

$$B\,A = I'. \tag{4.2}$$

Se si parte da questa (4.2) e si suppone che A abbia righe tutte indipendenti, si arriva analogamente alla (1.2).

c) Poichè vale la (1.2), la matrice A è necessariamente a righe tutte indipendenti, onde la (4.2) non può esser soddisfatta che da un'unica determinazione di B.

d) è conseguenza delle parti *b*) - *c*).

COR. *Se* A *ammette inverse da ambo le parti, le inverse dalle due parti coincidono in un'unica matrice.*

Perciò, se A è invertibile, e allora soltanto, si potrà parlare di *inversa* di A e indicarla con A^{-1}.

7. Se il campo C cui appartiene A è quello complesso, con $\overline{A}$ si indicherà la matrice *coniugata,* ossia quella i cui elementi sono i complessi coniugati $\overline{a}_{rs}$ degli elementi corrispondenti a_{rs} di A. Cioè si ha :

$$A = \| a_{rs} \| \,, \qquad \overline{A} = \| \overline{a}_{rs} \| \,. \tag{5.2}$$

Il prodotto :

$$N = A\,\overline{A}_{-1}\,, \tag{6.2}$$

dove $\overline{A}_{-1}$ è la trasposta di $\overline{A}$, esiste sempre se il numero delle colonne di A è finito, ma può esistere anche se A è ad infinite colonne.

Il prodotto (6.2), quando esiste, si dirà *norma destra* di A ; mentre per *norma sinistra* di A , se esiste, si intende il prodotto :

$$N' = \bar{A}_{-1} A \,. \tag{7.2}$$

Nel seguito supporremo sempre, di avere a che fare con matrici che, come le matrici finite e le matrici infinite dello spazio hilbertiano, ammettono sia la norma destra che la norma sinistra.

8. Una matrice si dice *unitaria a destra* (*a sinistra*) quando la sua norma destra (sinistra) è una matrice identica. Una matrice si dice *ortogonale a destra* (a sinistra) se è reale ed è unitaria dalla stessa parte.

Se A è unitaria, p. es. a destra, cioè se :

$$A \bar{A}_{-1} = I \tag{8.2}$$

con I matrice identica (dell'ordine delle righe di A), sappiamo, pel teor. I, che essa è a righe tutte linearmente indipendenti. Pel teor. II, sappiamo inoltre che se A ha le colonne pur esse tutte linearmente indipendenti, si ha anche :

$$\bar{A}_{-1} A = I', \tag{8.2$'$}$$

dove I' è la matrice identica dell'ordine delle colonne di A , onde A è invertibile ed ha per inversa la trasposta della sua coniugata.

Tenendo presente il teor. II, si ha dunque che :

affinchè una matrice unitaria da una parte sia unitaria anche dall'altra (*quindi sia invertibile*), *occorre e basta che abbia linearmente indipendenti sia tutte le righe che tutte le colonne* (una di queste due condizioni è conseguenza della ipotesi della unitarietà da una delle parti).

Questo enunciato, insieme al teor. II, ha interesse solo per le matrici ad infinite righe ed infinite colonne ; perchè le matrici quadrate finite o sono invertibili o non ammettono inversa da nessuna delle due parti. Le matrici *orizzontali,* cioè aventi più colonne che righe, se il numero delle righe è finito, pel teor. II, possono ammettere solo inverse a destra, quindi possono essere unitarie solo dalla destra. Analogamente, le matrici *verticali,* cioè con più righe che colonne, se il numero di queste ultime è finito, possono ammettere solo inverse a sinistra e quindi essere unitarie solo dalla sinistra.

Ciò posto, sia A una matrice ad infinite righe ed infinite colonne. Se essa ammette un'inversa B a destra, ogni matrice costituita da un numero qualsiasi, anche non finito, di sue righe ammette anch'essa una inversa a destra, che è quella delle corrispondenti colonne di B . Analogamente, se

A ha un'inversa a sinistra, anche ogni matrice costituita da un numero finito o infinito di sue colonne ammette un'inversa a sinistra, costituita dalle corrispondenti righe dell'inversa a sinistra di A.

Se A è invertibile, la matrice costituita da un gruppo infinito qualunque di sue righe (o di sue colonne) possiede un'inversa a destra (a sinistra) ma non ha necessariamente indipendenti tutte le sue colonne (tutte le sue righe) perchè esse non sono più quelle di A. Vedremo ora che è appunto così, cioè che quelle colonne (quelle righe) non sono indipendenti, quindi che quella matrice possiede un'inversa soltanto a destra (soltanto a sinistra).

Indichiamo infatti con A' un gruppo di infinite righe di A, con A'' la matrice delle rimanenti, sicchè potrà porsi, a meno dell'ordine delle righe:

$$A = \left(\frac{A'}{A''}\right).$$

Se B è un'inversa di A a destra, diciamo B' e B'' le matrici delle colonne di B corrispondenti alle righe di A' ed A''. Da:

$$(9.2) \qquad A\,B = \left(\frac{A'}{A''}\right)(B' \mid B'') = I = \left(\begin{array}{c|c} I' & 0 \\ \hline 0 & I'' \end{array}\right)$$

si ha:

$$(10.2) \qquad A'\,B' = I', \qquad A''\,B'' = I''$$

con I', I'' matrici identiche non coincidenti con I nè necessariamente tra loro, la prima delle quali è infinita.

Se A è invertibile, si ha pure:

$$(11.2) \qquad B\,A = (B' \mid B'')\left(\frac{A'}{A''}\right) = I^*$$

con I^*matrice identica dell'ordine delle righe di B, eventualmente distinta da I. Questa (11.2) si scrive:

$$(12.2) \qquad B'\,A' + B''\,A'' = I^*.$$

Se ora le colonne di A' fossero indipendenti, pel teor. II, dalla prima delle (10.2) si dedurrebbe:

$$(13.2) \qquad B'\,A' = I'''$$

con I''' matrice identica infinita. Due righe qualunque una di I^* una di I''', se di egual posto, provengono entrambe, causa le ultime due relazioni, dalla stessa riga di B'. Perciò I^* ed I''' coinciderebbero e si avrebbe necessariamente:

$$B'' A'' = 0 . \tag{14.2}$$

Orbene, la seconda delle (10.2) assicura che le righe di A'' sono indipendenti e che sono indipendenti le colonne di B''. Quindi nessuna colonna di B'' è nulla e se b è la trasposta di una colonna di B'', è necessariamente:

$$x = \bar{b} B'' \neq 0 , \tag{15.2}$$

perchè è certamente:

$$\bar{b}\, b_{-1} \neq 0 . \tag{16.2}$$

Dalla (14.2) si ha allora:

$$x A'' = \bar{b} B'' A'' = 0 ,$$

e le righe di A'' non sarebbero linearmente indipendenti. Dunque la (14.2) è incompatibile con la seconda delle (10.2), onde le colonne di A' non sono linearmente indipendenti e la (13.2) è incompatibile con la prima delle (10.2).

Ne segue, in particolare, che se A è una matrice infinita unitaria, ogni gruppo parziale anche infinito di sue righe (di sue colonne) dà una matrice unitaria soltanto a destra (soltanto a sinistra).

§ 3. Matrici simmetriche o antisimmetriche.

9. Una matrice A è *simmetrica* se coincide con la sua trasposta A_{-1}; è *antisimmetrica* se coincide con la coniugata della sua trasposta $\bar{A}_{-1}$.

Sia A simmetrica od antisimmetrica ed abbia linearmente indipendenti solo parte delle sue righe e quindi delle sue colonne. Indichiamo con B la matrice di un gruppo finito o infinito di righe di A tutte linearmente indipendenti e tali che ogni altra riga di A sia dipendente da esse.

Scrivendo, a meno dell'ordine delle righe:

$$A = \left(\frac{B}{B'}\right) = (B_{-1} \mid B'_{-1}), \tag{1.3}$$

oppure:

$$A = \left(\frac{B}{B'}\right) = (\bar{B}_{-1} \mid \bar{B}'_{-1}) ,$$

secondo che A è simmetrica od antisimmetrica, si avrà :

$$B' = \Lambda B \tag{2.3}$$

con Λ matrice opportuna univocamente determinata da questa relazione.

Estendendo in modo ovvio al caso delle matrici infinite la nozione di *minore principale*, si dimostra che :

TEOR. I. *Se nella matrice* A *non nulla simmetrica o antisimmetrica vi è un gruppo finito o infinito di righe* (*un gruppo finito o infinito di colonne*) *linearmente indipendenti mentre le rimanenti righe* (*colonne*) *di* A *sono combinazioni lineari di esse, il minore principale di* A *appartenente a quel gruppo risulta a righe e colonne tutte linearmente indipendenti.*

Diciamo a questo minore principale, che sarà una matrice simmetrica o antisimmetrica, contemporaneamente ad A, e B il gruppo di righe cui a appartiene.

In B esisterà una matrice a' con le colonne tutte linearmente indipendenti tale che ogni altra colonna di B è combinazione lineare di quelle di a', sicchè si avrà :

$$B = a' \cdot H , \tag{3.3}$$

con H matrice opportuna, univocamente individuata da B e da a'. Tanto a' che H saranno matrici non nulle, altrimenti sarebbe nulla anche B.

Poichè B ha linearmente indipendenti tutte le righe, per la prop. IV del § 1, le sue colonne indipendenti sono quante le righe; quindi a' ha tante colonne quante sono le righe di B, ossia a' è una matrice quadrata dello stesso ordine di a.

Diciamo D la matrice costituita dalle colonne di A di cui fanno parte quelle di a'. Per l'ipotesi del teorema si avrà, se A è simmetrica :

$$D = B_{-1}\, \mu , \tag{4.3}$$

con μ matrice sempre ben determinata e quindi :

$$a' = a\, \mu . \tag{5.3}$$

Se A è antisimmetrica la (4.3) si muterà nella

$$D = \overline{B}_{-1}\, \mu \tag*{(4.3)'}$$

mentre sarà ancora :

$$a' = \overline{a}_{-1}\, \mu = a\, \mu . \tag*{(5.3)'}$$

Supponiamo ora che a non sia a righe e quindi a colonne tutte indipendenti. Esisterà allora un complesso orizzontale x non nullo pel quale si avrà:

$$x\, a = 0 . \tag{6.3}$$

Moltiplicando ambo i membri della (5.3) per x, si ha:

$$x\, a' - x\, a\, \mu = 0\, \mu = 0 , \tag{7.3}$$

e allora dalla (3.3) si ha:

$$x\, B = x\, a'\, H = 0\, H = 0 , \tag{8.3}$$

cioè le righe di B, contrariamente all'ipotesi, non sarebbero tutte linearmente indipendenti.

10. TEOR. II. *Se una matrice* A (*finita o infinita*) *simmetrica o antisimmetrica ha i minori principali di ordine finito tutti a righe* (*o a colonne*) *linearmente dipendenti e sono contemporaneamente zero tutti gli elementi principali, essa è nulla.*

Consideriamo la riga e la colonna che si incrociano nell'elemento principale a_{nn} qualsiasi di A. Esse sono l'una trasposta o trasposta coniugata dell'altra. Se sono nulli tutti gli elementi principali e sono a righe (o colonne) dipendenti tutti i minori principali di A, si avrà:

$$a_{nn} = 0 , \quad n = 1 , 2 , 3 \ldots$$

e saranno eguali a zero i determinanti dei minori principali di second'ordine aventi elementi in quelle righe o colonne, cioè si avrà:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{rn} \\ a_{nr} & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

qualunque sia l'indice r. Poichè:

$$a_{rn} = a_{nr} , \quad \text{oppure} \quad a_{rn} = \bar{a}_{nr} ,$$

segue necessariamente che:

$$a_{rn} = 0 , \quad r = 1 , 2 , \ldots , n , \ldots ,$$

ossia che quella riga e quella colonna sono nulle. Essendo n qualunque, sarà nulla anche A.

COR. *Se una matrice simmetrica o antisimmetrica non è nulla, essa non può avere contemporaneamente eguali a zero gli elementi principali ed i determinanti di tutti i minori principali di second'ordine.*

OSSERVAZIONE. I due teoremi sopra dimostrati valgono anche per matrici emisimmetriche e per matrici *antiemisimmetriche*, cioè per matrici A tali che si abbia (7):

$$A_{-1} = -A\,, \quad \text{oppure} \quad A_{-1} = -A\,.$$

11. TEOR. III. *La norma destra (sinistra) di una matrice* A *ha tutte le righe e le colonne linearmente indipendenti, quando sono tali tutte le righe (le colonne) di* A. *Oppure ha tante, anche infinite, righe e colonne linearmente indipendenti quante sono le righe (le colonne) linearmente indipendenti di* A.

Supponiamo, in primo luogo, che A sia a righe tutte indipendenti, sicchè la relazione:

$$x\,A = 0 \tag{9.3}$$

è impossibile per x complesso orizzontale non nullo.

Se la norma destra $A\,\bar{A}_{-1}$ non avesse le sue righe tutte indipendenti, esisterebbe un complesso orizzontale x non nullo pel quale si avrebbe:

$$x\,A\,\bar{A}_{-1} = 0\,,$$

quindi anche:

$$x\,A\,\bar{A}_{-1}\,\bar{x}_{-1} = 0\,. \tag{10.3}$$

Ossia, posto:

$$x\,A = y\,, \tag{11.3}$$

sarebbe:

$$y\,\bar{y}_{-1} = 0\,, \tag{12.3}$$

mentre, essendo $y \neq 0$, è certamente $y\,\bar{y}_{-1} \neq 0$.

Analogamente, non si potrà avere:

$$\bar{A}_{-1}\,A\,x_{-1} = 0\,,$$

quindi:

$$x\,\bar{A}_{-1}\,A\,x_{-1} = 0\,, \tag{13.3}$$

se non è $A\,x_{-1} = 0$, cioè senza che A sia a colonne non tutte indipendenti.

---

(7) Basta osservare per queste ultime, che moltiplicando una matrice antiemisimmetrica per l'unità immaginaria i essa diventa antisimmetrica.

Supponiamo ora che solo una parte, in numero finito o infinito, delle righe di A, il cui insieme costituisce la matrice B, siano indipendenti, mentre le rimanenti sono loro combinazioni lineari. Allora può porsi, a meno dell'ordine delle righe:

$$A = \left(\begin{array}{c} B \\ \hline \mu B \end{array}\right), \tag{14.3}$$

con μ matrice opportuna. Si avrà, sempre a meno dell'ordine delle righe e delle corrispondenti colonne:

$$A \bar{A}_{-1} = \left(\begin{array}{c} B \\ \hline \mu B \end{array}\right) (\bar{B}_{-1} \mid \bar{B}_{-1} \bar{\mu}_{-1}), \tag{15.3}$$

ossia

$$A \bar{A}_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B \bar{B}_{-1} & B \bar{B}_{-1} \bar{\mu}_{-1} \\ \hline \mu B B_{-1} & \mu B \bar{B}_{-1} \mu_{-1} \end{array}\right). \tag{16.3}$$

Poichè, per la prima parte già dimostrata, si ha che la norma destra $B \bar{B}_{-1}$ di B ha le righe tutte indipendenti, questa (16.3) ci mostra che in $A \bar{A}_{-1}$ sono indipendenti le righe che contengono $B \bar{B}_{-1}$ mentre le rimanenti righe sono combinazioni lineari di esse.

Analogamente, se in A sono linearmente indipendenti solo una parte delle colonne, il cui insieme costituisce la matrice F, mentre le rimanenti sono combinazioni lineari di esse, si potrà scrivere, a meno dell'ordine delle colonne:

$$A = (F \mid F \nu) \tag{17.3}$$

con ν matrice opportuna e si avrà, con lo stesso scambio nell'ordine delle colonne e delle corrispondenti righe:

$$\bar{A}_{-1} A = \left(\begin{array}{c} \bar{F}_{-1} \\ \hline \bar{\nu}_{-1} \bar{F}_{-1} \end{array}\right) (F \mid F \nu), \tag{18.3}$$

ossia:

$$\bar{A}_{-1} A = \left(\begin{array}{c|c} \bar{F}_{-1} F & \bar{F}_{-1} F \cdot \nu \\ \hline \bar{\nu}_{-1} \bar{F}_{-1} F & \bar{\nu}_{-1} \bar{F}_{-1} F \nu \end{array}\right). \tag{19.3}$$

Per la prima parte, $\bar{F}_{-1} F$ è a colonne tutte linearmente indipendenti: le rimanenti colonne di $\bar{A}_{-1} A$ sono invece combinazioni lineari di quelle contenenti la norma sinistra di F: onde, etc.

OSSERVAZIONE. La dimostrazione fatta ci dice anche che le righe (le colonne) indipendenti della norma destra (sinistra) di A sono quelle che occupano gli stessi posti delle righe (delle colonne) indipendenti di A e che le rimanenti si ottengono da esse con la stessa combinazione lineare con la quale le rimanenti righe (colonne) di A si ottengono da quelle indipendenti.

§ 1. Diagonalizzazione delle matrici antisimmetriche infinite.

12. Sia A una matrice antisimmetrica infinita non nulla, nè diagonale, quindi avente almeno un minore principale di ordine finito, ad es. a, non degenere.

Cambiando opportunamente l'ordine delle righe e allo stesso modo quello delle colonne, si potrà scrivere:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline \bar{b}_{-1} & d \end{array}\right) \tag{1.4}$$

e sarà

$$a = \bar{a}_{-1}, \qquad d = \bar{d}_{-1}. \tag{2.4}$$

Poichè a è una matrice quadrata finita e non degenere, vi è una matrice λ e una sola per la quale si ha:

$$b = a\,\lambda, \tag{3.4}$$

cioè $\lambda = a^{-1}\,b$. Consideriamo allora la matrice:

$$H = \left(\begin{array}{c|c} I' & \lambda \\ \hline 0 & I'' \end{array}\right) \tag{4.4}$$

ove I' è la matrice identica dell'ordine, finito, di a ed I'' è quella identica dell'ordine, infinito, di d. Questa matrice H la consideriamo a meno degli stessi scambi nell'ordine delle righe e delle colonne che ci hanno fatto scrivere A sotto la forma (1.4). Sempre a meno degli stessi scambi, potremo scrivere:

$$A^* = \bar{H}_{-1}\,A\,H = \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & d^* \end{array}\right) \tag{5.4}$$

dove [8]

$$d^* = d - \bar{\lambda}_{-1}\,a\,\lambda = \bar{d}^*_{-1}. \tag{6.4}$$

---

[8] Il prodotto $\bar{\lambda}_{-1}\,a\,\lambda$ esiste ed è associativo qualunque siano λ ed a, perchè $\bar{\lambda}_{-1}\,a$ è una matrice ad infinite righe e un numero finito di colonne e λ è ad un numero finito di righe ed infinite colonne.

Operando su d^*, se non è nulla nè diagonale, come si è operato su A, si otterrà :

$$H^*_1\, d^*\, H^* = d^{**} = d^{**}_1 , \tag{7.4}$$

ove H^* è una matrice analoga ad H e d^{**} una come A^*.

Ponendo allora :

$$K = \left(\begin{array}{c|c} I' & 0 \\ \hline 0 & H^* \end{array}\right), \tag{8.4}$$

si avrà :

$$A^{**} = K_1\, A^*\, K = (H\,K)_1\, A\,(H\,K) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d^{**} \end{pmatrix}. \tag{9.4}$$

Analogamente si opererà su d^{**} e sulla matrice A^{**}. Così continuando, dopo un certo numero, eventualmente infinito, di operazioni la data matrice si trasforma in una composta con infinite matrici antisimmetriche tutte di ordine finito, parte delle quali possono essere nulle : quelle che non lo sono possono supporsi tutte di ordine non superiore a due.

Queste operazioni, ciascuna costituita da non più di due trasformazioni per anticogredienza di A effettuate con matrici come H e K, si succedono in un ordine che il procedimento esposto determina pienamente. Necessita però assegnare anche una legge con la quale si sceglie il minore principale a, di ordine ≤ 2 (o finito) che permette di trovare la H e, analogamente, le successive matrici H^* e K. Basterà fare così : si considerino la prima riga, le prime due righe, le prime tre righe.... di A ; si calcolino i minori principali di primo e secondo ordine in esse contenute fermandosi al primo di essi che è non degenere. La ricerca consta di un numero finito di operazioni, perchè altrimenti, considerando un numero finito comunque grande di righe di A in esse non si incontrerebbe alcun minore principale nè di primo nè di secondo ordine non degenere e ciò varrebbe a dire che in A non vi è alcun minore principale di primo o di secondo ordine non degenere, quindi che A è nulla.

13. Quel che ora si è visto significa che A si può pensare ridotta alla forma :

$$A' = \left\|\begin{array}{c|c|c|c} a' & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & a'' & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & a''' & \cdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right\| \tag{10.4}$$

dove $a', a'', a''' \ldots$ sono tutte matrici di ordine non maggiore di due. Cioè a dire, considerato un numero finito qualunque di operazioni come quelle sopra indicate, la trasformata risulta composta di un numero finito di matrici di ordine non superiore a due e di una matrice antisimmetrica infinita sulla quale può operarsi ancora allo stesso modo; e così di seguito. È ovvio che, riducendo ciascuna matrice componente di second'ordine non nulla a forma diagonale, anche A vien ridotta a forma diagonale.

Trattandosi di infinite operazioni, bisogna anche qui determinare l'ordine col quale esse si succedono. Basterà cominciare dal primo minore di second'ordine non nullo a partire dall'alto. Sia esso a' e sia h la matrice di secondo ordine che riduce a' alla forma diagonale. Si prenderà allora:

$$H' = \left(\begin{array}{c|c} h & 0 \\ \hline 0 & I^* \end{array}\right) \tag{11.4}$$

ove I^* è una matrice identica di ordine infinito e si otterrà:

$$\bar{H}'_{-1} A' H' = \begin{array}{c|c|c|c} d' & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \hline 0 & a'' & 0 & \ldots 0 \ldots \\ \hline 0 & 0 & a''' & \ldots 0 \ldots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 \cdot & 0 \cdot & \cdot 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \tag{12.4}$$

dove:

$$d' = \bar{h}_{-1}\, a\, h \tag{13.4}$$

è una matrice diagonale di second'ordine. Si considererà poi a'', e via di seguito, tralasciando solo le a^{r} nulle o di prim'ordine.

Vi è da osservare che se le matrici $a', a'', a''', \ldots$ non nulle di second'ordine hanno tutte almeno un elemento diagonale diverso da zero, allora le h sono ancora analoghe alla H di poco fa. Infatti, supponendo che l'elemento diagonale non nullo sia il primo (come può sempre farsi scambiando eventualmente le righe e le colonne) si ha, ad es.:

$$a' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & -\varrho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = \varrho\, a_{11}. \tag{14.4}$$

Se invece almeno una delle $a', a'', a''', \ldots$ non nulle e di second'ordine ha entrambi gli elementi principali eguali a zero, la relativa h riesce diversa da quella ora detta e sarà necessario far intervenire le radici caratteristiche di a'. Allora h, quindi H', potrà prendersi unitaria, come si è visto, nella Nota cit. 1), per A finita.

14. Il procedimento del n. prec. si può riassumere scrivendo:

$$A' = \overline{P}_{-1}\, A\, P\,,$$

ove P indica il prodotto di infinite matrici come H e K, succedentisi in ordine determinato. Ciascuno di questi fattori, quindi anche il prodotto di un numero qualunque di essi, ha gli elementi al di sotto della diagonale principale tutti zero e quelli della diagonale principale tutti eguali ad uno; per la solita definizione di determinante di una matrice infinita, essi hanno dunque tutti determinanti eguali ad uno, insieme al prodotto di un numero qualunque di essi.

Lo stesso accade anche quando si passa da A' alla forma diagonale D, purchè le matrici a', a'', a''', ... che risultano di secondo ordine e non nulle siano tutte ad elementi principali non entrambi zero.

Questo caso si presenta certamente quando A è matrice discriminante di una forma hermitiana definita, cioè quando si ha:

$$x\, A\, \overline{x}_{-1} \neq 0 \tag{15.4}$$

qualunque sia il complesso orizzontale x non nullo. Tanto perchè, essendo le trasformate di A per anticogredienza ancora matrici discriminanti di forme hermitiane definite, gli elementi principali rimangono sempre tutti diversi da zero. Anzi nel caso ora detto, i minori principali di qualsiasi ordine (finito) sono tutti non degeneri, perchè matrici discriminanti di forme hermitiane definite; perciò non occorre neppure pensare effettuato alcuno scambio preliminare nell'ordine delle righe e delle colonne di A.

Ciò posto, è senz'altro manifesto che in questo caso può ripetersi l'osservazione di cui al n. 7 della nostra Nota cit. 1) ed enunciare che:

effettuando, con matrici H *e* K, *la riduzione a forma diagonale della matrice discriminante di una forma hermitiana definita i determinanti dei minori principali contenuti nelle prime* n *righe* (n *arbitrario, finito*) *restano invariati* (9).

Questa proposizione va intesa nel senso che, fissato un numero naturale n comunque grande, il procedimento di riduzione permette di ottenere una matrice nelle cui prime n righe sono diversi da zero solo gli elementi principali e tale che il prodotto di questi elementi principali è eguale al determinante del minore principale corrispondente della matrice A di partenza.

(9) Una proposizione analoga vale per ogni matrice antisimmetrica. Occorre pero tener conto dell'eventuale scambio preliminare delle righe di A, cio che rende meno semplice l'enunciato.

Si può inoltre osservare che anche la proposizione b) del n. 7 della Nota cit. 1) si estende in modo ovvio e dà la condizione necessaria e sufficiente perchè una forma hermitiana su infinite variabili sia definita.

15. Poichè i minori principali della matrice discriminante di una forma hermitiana definita positiva sono anch'essi matrici discriminanti di forme hermitiane definite dello stesso segno di quella di partenza, la relazione (6.4) ci assicura che se A dà una forma definita gli elementi principali di d^* sono in valore assoluto non maggiori dei corrispondenti elementi principali di d. Gli elementi principali di A^* sono dunque tutti dello stesso segno e ciascuno di valore assoluto non maggiore del corrispondente di A: e così di seguito. Si ha dunque che:

a) *se* A *è matrice discriminante di una forma hermitiana definita, i suoi elementi principali sono tutti del segno della forma ed in valore assoluto ciascuno non minore del corrispondente elemento (tutti ancora di quel segno) della matrice diagonale* D *che si ottiene da* A *trasformando con matrici* H *e* K.

Se si tiene presente che, secondo la definizione solita, per determinante di una matrice infinita A si intende il limite della successione dei determinanti dei minori principali estratti dalla prima riga, dalle prime due righe, ... dalle prime n righe, ... di A, confrontando con la proposizione ora enunciata e con quella del n. prec., si deduce senz'altro che:

b) *il determinante della matrice discriminante* A *di una forma hermitiana definita positiva su infinite variabili (se esiste) non supera il prodotto dei propri elementi principali; quindi converge certamente quando converge il prodotto degli elementi principali.*

Poichè dalla (6.4), sempre nel caso considerato, segue che gli elementi principali di A^* eguagliano quelli di A solo se $\lambda = 0$, ossia se $b = 0$, si ha pure che:

c) *il determinante di cui alla proposizione precedente eguaglia il prodotto dei propri elementi principali allora e solo che* A *è diagonale.*

§ 5. Matrici pluri-infinite.

16. Date quattro matrici ad infinite righe ed infinite colonne:

$$A = \| a_{rs} \|, \ B = \| b_{rs} \|, \ C = \| c_{rs} \|, \ D = \| d_{rs} \|. \tag{1.5}$$

diremo *matrice bi-infinita* la matrice:

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \tag{2.5}$$

avente per quadranti le matrici (1.5) le quali si diranno rispettivamente primo, secondo, terzo e quarto *quadrante* di $\mathfrak{A}$. Gli elementi principali del primo e quarto quadrante costituiscono quelli *principali* di $\mathfrak{A}$; gli elementi principali del secondo e terzo quadrante si diranno elementi principali di $\mathfrak{A}$ nel secondo e terzo quadrante.

Analogamente, la matrice:

$$(3.5) \qquad \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline B_1 & B_2 & B_3 \\ \hline C_1 & C_2 & C_3 \end{array}\right)$$

si dice *matrice tri infinita* quando le nove matrici $A_r, B_r, C_r, r = 1, 2, 3$, sono tutte a infinite righe ed infinite colonne. Così continuando, si possono considerare matrici *quadri-infinite*, ..., *n infinite*, ...

Per matrici *uni-infinite* s'intendono le matrici ad infinite righe e colonne considerate nei §§ precedenti.

Gli elementi principali della matrice tri-infinita (3.5) sono quelli delle matrici A_1, B_2, C_3 che diremo occupanti i *quadranti principali* della matrice; e via di seguito.

Per *minori principali* della matrice bi-infinita $\mathfrak{A}$ s'intendono le matrici del tipo:

$$(4.5) \qquad \left(\begin{array}{c|c} \varDelta' & \varDelta'' \\ \hline \varDelta''' & \varDelta^{\mathrm{IV}} \end{array}\right)$$

ove $\varDelta', \varDelta'', \varDelta''', \varDelta^{\mathrm{IV}}$ sono rispettivamente minori principali dei quadranti A, B, C, D ottenuti come intersezioni di righe e colonne aventi gli stessi posti in ciascuno dei quadranti. Diremo allora anche che $\varDelta', \varDelta'', \varDelta''', \varDelta^{\mathrm{IV}}$ sono minori principali *corrispondenti* nei quattro quadranti, ovvero occupanti in essi ***gli stessi posti*** o ***posti corrispondenti*** e che essi sono i *quadranti di un minore principale* di $\mathfrak{A}$.

Analogamente, minore principale della matrice tri-infinita (3.5) è una matrice del tipo:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \varDelta'_1 & \varDelta'_2 & \varDelta'_3 \\ \hline \varDelta''_1 & \varDelta''_2 & \varDelta''_3 \\ \hline \varDelta'''_1 & \varDelta'''_2 & \varDelta'''_3 \end{array}\right)$$

dove i $\varDelta'_r, r = 1, 2, 3$, sono minori principali di $A_r, r = 1, 2, 3$, occupanti in essi gli stessi posti; $\varDelta''_r$ sono i minori principali di $B_r, r = 1, 2, 3$, occupanti in essi gli stessi posti che $\varDelta'_r$ occupa in A_r; così i $\varDelta'''_r$ rispetto alle C_r. Analogamente si definiscono i minori principali delle matrici pluri-infinite.

Dopo di ciò, per *determinante* di una matrice pluri-infinita s'intenderà, quando esiste, il limite della successione dei determinanti dei minori principali costruiti con quelli che negli r^2 quadranti sono contenuti nella prima riga, nelle prime due righe, ..., nelle prime n righe, ... ([10]).

Dalla definizione risulta senz'altro che una matrice pluri-infinita che ha nulli tutti i quadranti da una parte di quelli principali, quando questi sono tutti occupati da matrici a determinante convergente, ha per determinante il prodotto dei determinanti delle matrici (dei quadranti) principali.

17. Le matrici pluri-infinite godono le stesse proprietà delle matrici finite che ricevono estensione al caso delle matrici uni-infinite. In questo paragrafo utilizzeremo solo alcune di esse, quali quella che matrici trasposte hanno egual determinante, che lo scambio di due linee parallele fa cambiar segno al determinante, che questo resta invariato quando ad una linea si aggiunge una combinazione lineare di linee parallele. Quest'ultima proprietà vale anche se si aggiunge una combinazione lineare di infinite linee parallele, purchè siano convergenti tutte le serie cui dà luogo la combinazione.

18. Ciò posto, è facile dimostrare che:
il determinante del prodotto di due o più matrici a determinanti esistenti è eguale al prodotto dei determinanti dei fattori.

Basta dimostrare il teorema per due soli fattori. Siano questi A e B: supponiamo che esista il prodotto $C = A . B$ e scriviamo la matrice bi-infinita:

$$P = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline -I & B \end{array}\right). \tag{6.5}$$

Poichè esiste il prodotto $A . B$, sono verificate le condizioni di convergenza, cui abbiamo accennato poco fa, che permettono di aggiungere alle colonne del secondo e quarto quadrante una dopo l'altra tutte le colonne dei quadranti primo e terzo moltiplicate ordinatamente per gli elementi di una colonna di B. Come nel caso delle matrici finite, ciò fa passare dalla matrice P all'altra:

$$P' = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline -I & O \end{array}\right) \tag{7.5}$$

([10]) La definizione può estendersi al caso in cui i quadranti siano in numero infinito, ma esige, in primo luogo, che esistano e siano convergenti i determinanti di tutti i minori principali, che risultano tutti matrici infinite. Matrici come queste potrebbero dirsi *superinfinite*.

dove $C = A\,B$ e ci assicura che:

$$| P' | = | P | = | A | \,.\, | B | \,.$$

Si scambino ora, nella (7.5) le colonne dei quadranti di posto pari con le corrispondenti dei quadranti di posto dispari mutando il segno dell'elemento principale di I che capita nella colonna spostata. In tal modo, pur trattandosi di infiniti scambi di linee parallele, non si ha indeterminazione di segno nel determinante, perchè ogni scambio di colonne vien compensato dal cambiamento di segno di una riga.

Si ha, in definitiva, che il determinante di P è eguale a quello della matrice:

$$P'' = \left(\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline O & I \end{array}\right). \tag{8.5}$$

Perciò, esiste il determinante di C e si ha:

$$| A | \,.\, | B | = | P | = | P'' | = | C | \,. \tag{9.5}$$

Come corollario si ha che:
se esistono entrambi i prodotti A B *e* B A *i loro determinanti sono eguali.*

19. In modo analogo, ma senza intervento di matrici bi-infinite, si estende il teorema di SYLVESTER sul prodotto di due matrici rettangolari. Basta considerare la matrice uni-infinita:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} O & A \\ \hline -B & I \end{array}\right) \tag{10.5}$$

dove A è una matrice a p righe (p finito) ed infinite colonne, B una od infinite righe e p colonne, I la matrice identica dell'ordine delle righe di A e delle colonne di B. Se esiste il prodotto $A\,B$, il determinante di Q, se esiste, è eguale a quello della matrice:

$$Q' = \left(\begin{array}{c|c} A\,B & A \\ \hline O & I \end{array}\right) \tag{11.5}$$

che si ottiene dalla (10.5) aggiungendo alle sue prime p colonne ordinatamente le combinazioni lineari delle colonne che contengono A fatte con coefficienti gli elementi delle successive colonne di B. Quindi è:

$$| A\,B | = | Q' | = | Q | \,. \tag{12.5}$$

Il determinante del minore principale di Q che è nelle prime sue $n \geq 2p$ righe, come facilmente si vede sviluppando secondo i minori delle prime p righe, tende, al crescere di n, alla serie dei prodotti dei determinanti dei minori di ordine p corrispondentisi nelle matrici A e B. Onde etc..

È ovvio che cosa avviene, di conseguenza, nel caso dei minori principali delle norme sinistra e destra di una matrice ad infinite righe e colonne.

§ 6. Estensione del teorema di Sylvester-Hadamard.

20. Sia A una matrice infinita *a righe e colonne tutte indipendenti*, a determinante convergente e possedente almeno una delle norme, ad es. quella destra $A \cdot \bar{A}_{-1}$. Pel teorema dimostrato poco fa si ha:

$$| A \cdot \bar{A}_{-1} | = | A | \cdot | \bar{A} | = (\text{mod} \mid A \mid)^2 . \tag{1.6}$$

Poichè $A \cdot \bar{A}_{-1}$ è matrice discriminante di una forma hermitiana definita positiva, ad essa può applicarsi il procedimento di diagonalizzazione con matrici H e K indicato al § 4 ottenendo una matrice diagonale D per la quale si avrà:

$$| A \cdot \bar{A}_{-1} | = | D | . \tag{2.6}$$

Per la b) del n. 15 si ha pure che il determinante ora scritto non supera il prodotto degli elementi principali:

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{rs} \bar{a}_{rs} \qquad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.6}$$

della norma $A \bar{A}_{-1}$ di A. Questi elementi sono le *norme* delle righe di A, dunque si ha che:

a) *se una matrice infinita* A *a righe e colonne tutte linearmente indipendenti ed a determinante convergente possiede la norma destra* (*la norma sinistra*), *il quadrato del modulo del suo determinante non supera il prodotto delle norme delle sue righe* (*delle sue colonne*).

b) *se* A *possiede la norma destra* (*la norma sinistra*) *e se esiste il determinante di* A, *convergendo il prodotto delle norme delle righe* (*delle colonne*) *di* A *converge anche il suo determinante.*

La c) dello stesso n. 15 ci dice anche che:

c) *il quadrato del modulo del determinante di* A, *quando converge, eguaglia il prodotto delle norme delle righe* (*delle colonne*) *di* A *allora e solo che la norma destra* (*sinistra*) *di* A *è diagonale.*

Da questa seguono i due corollari seguenti:

d) *se la matrice* A *è normale* (cioè ha norme coincidenti), *il quadrato del modulo del suo determinante, se converge, è eguale al prodotto delle norme delle sue righe* (*o colonne*) *quando e solo quando la sua norma è diagonale;*

e) *se le norme delle righe di* A *sono eguali a quelle delle sue colonne* (11), *le due norme di* A *sono entrambe diagonali* (*e coincidenti*) *o entrambe non diagonali, secondo che il quadrato del modulo del determinante di* A, *supposto convergente, raggiunge oppur no il suo confine superiore.*

21. Sia A una matrice ad infinite righe ed infinite colonne tale che se x è un complesso orizzontale infinito *qualunque* pel quale converge la norma $x \bar{x}_{-1}$, i complessi, rispettivamente orizzontale e verticale:

$$x A \,, \quad A x_{-1} \tag{4.6}$$

hanno anch'essi norme convergenti. Le matrici che godono questa proprietà le diremo *hilbertiane,* perchè danno luogo a trasformazioni lineari dello spazio hilbertiano.

Le matrici hilbertiane godono di una notevole proprietà (12) secondo la quale esiste un numero *positivo* M_A, detto *limite,* di A, tale che, qualunque sia il complesso x a norma convergente, si ha:

$$x A \bar{A}_{-1} \bar{x}_{-1} \leq M_A^2 \, x \bar{x}_{-1} \,, \tag{5.6}$$

$$\bar{x} \bar{A}_{-1} A x_{-1} \leq M_A^2 \, \bar{x} x_{-1} \,. \tag{6.6}$$

Preso x con un elemento eguale ad 1 e gli altri tutti zero, si ha che le righe e le colonne delle matrici hilbertiane hanno norme non solo convergenti ma anche non maggiori di M_A^2; inoltre esistono (13) entrambe le norme di A, sono hilbertiane come A e sono matrici discriminanti di forme hermitiane definite positive non appena sia le righe che le colonne di A sono tutte indipendenti.

Come conseguenza delle proposizioni dimostrate al n. precedente e di quelle del n. 14 si ha che:

---

(11) Ciò che accade, ad es., quando A è simmetrica, anche non normale.

(12) HELLINGER e TOEPLITZ: *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen* [Math. Ann. LXIX]. Vedi anche F. RIESZ: *Les systèmes d'équations lineaires à une infinité d'inconnues* [Paris, Gauthier-Villars (1913)] Cap. IV, n. 58, ove è osservato che il limite di A coincide con quello di A_{-1}.

(13) Più in generale, il prodotto, in qualsiasi ordine, di due matrici hilbertiane è ancora hilbertiano

a) *la successione dei moduli dei determinanti dei minori principali di ordini* $1, 2, \ldots, n, \ldots$ *e ciascuno contenuto sul successivo estratti dalle norme di una matrice hilbertiana* A *di limite* M_A *è maggiorata dalla successione delle potenze di* M_A ; *quindi, se esiste il determinante di* A , *il suo modulo non supera :*

$$\lim_{n \to \infty} M_A^n . \tag{7.6}$$

b) *se* $M_A \leq 1$ *il determinante di* A , *se esiste, è convergente* ; *se* $M_A < 1$, *detto determinante converge a zero.*

Segue che se una matrice infinita unitaria, quindi hilbertiana e normale, ammette (14) determinante, questo è eguale a ± 1.

c) *affinchè, convergendo il determinante di* A , *il suo modulo raggiunga il massimo* (7.6), *occorre e basta che una delle norme di* A *coincida con la matrice scalare* $M_A^2\, I$; *dopo di che, se la* A *è a righe ed a colonne tutte linearmente indipendenti, anche l'altra norma coinciderà con* $M_A^2\, I$, *quindi* A *è normale.*

Osserviamo inoltre che :

d) *una matrice hilbertiana con determinante convergente e con una norma scalare è necessariamente normale ed a determinante di modulo massimo, purchè sia a righe ed a colonne tutte linearmente indipendenti.*

Infatti, se ad es., con M positivo, si ha:

$$A\, \overline{A}_{-1} = M^2 I , \tag{8.6}$$

si avrà, qualunque sia il complesso x non nullo:

$$x\, A\, \overline{A}_{-1}\, \overline{x}_{-1} = M^2\, x\, \overline{x}_{-1} . \tag{9.6}$$

Perciò M è il limite di A e si rientra nella c).

[*Pervenuto alla Redazione il 29-12-1949*]

---

(14) Potrebbe non ammetterlo, come accade per la matrice $-I$ e per quella che ha gli elementi principali alternativamente eguali a $+1$ e -1 e gli altri zero.