ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ALDO ANDREOTTI

Un'applicazione di un teorema di Cecioni ad un problema di rappresentazione conforme

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 2, nº 1-4 (1950), p. 99-103

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_2_1-4_99_0>

UN'APPLICAZIONE DI UN TEOREMA DI CECIONI AD UN PROBLEMA DI RAPPRESENTAZIONE CONFORME

di ALDO ANDREOTTI (a Pisa)

Si deve al CECIONI (1) il seguente notevole teorema (estensione di un risultato già noto dovuto allo SCHOTTKY):

Ogni dominio D *appartenente ad una superficie di* RIEMANN *il quale abbia genere* $\mathfrak{p}$ *e sia limitato da* $\varrho + 1$ *contorni* (formati con archi di linee analitiche) *può applicarsi in modo biunivoco e conforme sopra una delle due parti in cui la riemanniana di una curva reale ortosimmetrica* Γ, *di genere* $p = 2\mathfrak{p} + \varrho$, *con* $\varrho + 1$ *circuiti reali, è spezzata dalle sue* $\varrho + 1$ *linee d'incidenza* (2).

Come applicazione del teorema precedente, ci proponiamo di risolvere il seguente problema: *Assegnato il dominio* D *di cui sopra, fra i domini appartenenti a superficie di* RIEMANN *e applicabili in modo biunivoco e conforme su* D *è possibile trovarne qualcuno in cui i* $\varrho + 1$ *contorni sono costituiti da altrettante circonferenze* (semplici o multiple) *concentriche della superficie di* RIEMANN.

Questo problema, *nel caso che* D *abbia un sol contorno,* è stato risolto dal MATILDI (3) il quale si vale nella sua dimostrazione del teorema di esi-

(1) CECIONI, *Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti ad una superficie di* RIEMANN «Annali delle Università Toscane», 1928.

(2) Questo teorema può essere dedotto come applicazione immediata della nozione astratta di superficie di RIEMANN chiusa; del teorema fondamentale di esistenza di RIEMANN e di un noto teorema di KLEIN sulla caratterizzazione delle riemanniane delle curve algebriche reali (v. ad es KOEBE, *Allgemeine Theorie der Riemannchen Mannigfaltigkeiten*, «Acta Mathematica», t. L, 1927, pgg. 119 157; KLEIN, *Riemann'sche Flachen*, Göttingen, litografie. 2a ed., 1884, parte 2a, pg. 133). Ciò senza che occorra invocare i teoremi di esistenza delle funzioni armoniche, ma restando sempre nel campo complesso.

(3) MATILDI, *Sulla rappresentazione conforme di domini appartenenti a superficie di Riemann su domini di un tipo canonico assegnato,* «Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa», s. 2a, t. XIV, 1945, pgg. 81-90

stenza di una funzione armonica sopra un dato dominio di una superficie di RIEMANN, con assegnati valori al contorno ed assegnate periodicità.

Noi risolveremo il problema *in generale,* con mezzi algebrico-trascendenti che ci permetteranno di evitare il teorema suddetto e di rimanere così, costantemente, nel campo complesso.

1. — Veniamo alla dimostrazione. In sostanza si tratta di provare che è possibile definire su D una funzione analitica w ivi monodroma, la quale trasporti D sul piano (w) in modo che i contorni di D vadano in circonferenze di centro $w = 0$.

Per questo si consideri D come appartenente alla riemanniana di una curva algebrica Γ ortosimmetrica con $\varrho + 1$ circuiti reali corrispondenti ai $\varrho + 1$ contorni di D, e sia n l'ordine di Γ, la cui equazione si supporrà a coefficienti reali.

Il sistema lineare delle curve aggiunte a Γ di dato ordine, è mutato in sè dal coniugio sicchè avremo un sistema lineare reale ∞^p d'aggiunte a Γ reali, d'ordine $n - 3$; uno ∞^{p+n-2} d'aggiunte a Γ d'ordine $n - 2$ etc..

Conseguentemente esistono su Γ p integrali abeliani di 1ª specie linearmente indipendenti i cui integrandi sono funzioni razionali a coefficienti reali.

Così pure esistono su Γ quanti si vogliono integrali abeliani di 3ª specie Ξ_P^Z, i cui integrandi sono funzioni razionali a coefficienti reali, aventi due sole singolarità logaritmiche in due punti Z, P di Γ, immaginari coniugati, con periodi polari uguali a 2π e -2π rispettivamente.

Scegliamo un sistema (a_h, b_h), $(h = 1, \ldots, \mathfrak{p})$ di retrosezioni in D; indichiamo con $(\bar{a}_h . \bar{b}_h)$, $(h = 1, \ldots, \mathfrak{p})$ il sistema simmetrico sull'altra mezza riemanniana $\bar{D}$ di Γ. Possiamo, sottraendo da Ξ_P^Z una conveniente combinazione lineare, a coefficienti reali, dei p integrali di 1ª specie suindicati, fare in modo che siano nulli i periodi di Ξ_P^Z, lungo i cicli $a_h, \bar{a}_h$ $(h = 1, \ldots, \mathfrak{p})$ e lungo ϱ, $L_1, \ldots, L_\varrho$, delle $\varrho + 1$ linee d'incidenza L_0, $L_1, \ldots, L_\varrho$.

2. — Ciò premesso, consideriamo la somma di un certo numero k di integrali di 3ª specie siffatti $\Xi_{P_s}^{Z_s}, (s = 1, \ldots, k) : I_{L_0} = \sum_1^k{}_s\, \Xi_{P_s}^{Z_s}$. Vogliamo provare che per opportuna scelta delle coppie di punti Z_s, P_s, si può fare in modo che I_{L_0} abbia nulli anche i periodi lungo i cicli $b_h, (\bar{b}_h)$, $(h = 1, \ldots, \mathfrak{p})$.

Sia, invero, $j_1, j_2, \ldots, j_{\mathfrak{p}}$ un sistema di $\mathfrak{p}$ integrali abeliani di 1ª specie, aventi lungo i cicli $a_h, \bar{a}_h$, $(h = 1, \ldots, \mathfrak{p})$, $L_1, \ldots, L_\varrho$ i periodi tutti nulli ad eccezione, per ciascun integrale j_h, di quello lungo a_h $(h = 1, \ldots, \mathfrak{p})$ che porremo uguale a 2π.

Se ω_{sh} è il periodo di $\Xi_{P_s}^{Z_s}$ lungo b_h, si ha, com'è noto:

$$\omega_{sh} = j_h(Z_s) - j_h(P_s),$$

e quindi il periodo ω_h di I_{L_0} lungo lo stesso ciclo è dato da:

$$\omega_h = \sum_1^k {}_s \{ j_h(Z_s) - j_h(P_s) \} = \sum_1^k {}_s\, j_h(Z_s) - \sum_1^k {}_s\, j_h(P_s),$$

intendendo sempre di scegliere opportunamente i cammini d'integrazione che uniscono a coppie i punti Z_s, P_s.

Prendiamo ora su L_0, k punti, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ distinti e tali da formare un gruppo *totale* di livello, p. es. di livello nullo, di una funzione razionale $\vartheta(P)$ del punto P corrente su Γ, a coefficienti reali.

Una tal funzione esiste certamente appena che sia k sufficientemente elevato; precisamente $k > p$.

Ciò si può stabilire sia osservando che la serie lineare completa $| Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k |$ è infinita e si può sempre pensare segata su Γ da un sistema lineare di curve mutato in sè dal coniugio, e quindi contenente almeno un sistema lineare reale ∞^1 (almeno) di curve reali staccante su Γ una g_k^1 che contiene $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k$; sia anche costruendo quella funzione con un sistema di k integrali di 2^a specie, aventi integrandi a coefficienti reali. e presentanti un unico polo in uno Q_i $(i = 1, \ldots, k)$ dei punti dati, mediante una opportuna loro combinazione lineare a coefficienti reali.

Sulla riemanniana R di Γ, potremo allora trovare k intorni circolari dei punti $Q_1, \ldots, Q_k$ [4], i quali vengono trasformati dalla $\vartheta(P)$ in modo biunivoco e conforme in altrettanti intorni di $\vartheta = 0$ sul piano ove si distende la variabile ϑ. Poichè ϑ ha coefficienti reali, gli archi di L_0 contenuti in quegli intorni vengono mutati in segmenti dell'asse reale cosicchè ad una coppia di valori non reali ed immaginari coniugati di ϑ, prossimi a $\vartheta = 0$ corrispondono su R due gruppi di k punti $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$; $P_1, P_2, \ldots, P_k$ a coppie $Z_s\, P_s$ immaginari coniugati e contenuti in quegli intorni.

Scegliendo i punti Z_s, P_s $(s = 1, \ldots, k)$, che sopra indicammo colle stesse lettere, in questi ultimi, si ha, in virtù del teorema di Abel, $\omega_h = 0$, $(h = 1, \ldots, \mathfrak{p})$, dato che portando ϑ dal livello $\vartheta(Z_s)$ al livello $\vartheta(P_s)$ con un cammino contenuto in un conveniente intorno di $\vartheta = 0$, i punti Z_s si portano nei punti P_s seguendo k cammini interni ai k intorni considerati.

---

(4) che supponiamo distinti dagli eventuali punti di diramazione di R su L_0.

3. Scegliamo k dispari. Allora tra i punti $Z_s\,(P_s)$, $(s = 1, \ldots, k)$ un certo numero cade su D ed un numero diverso su $\overline{D}$.

Osserviamo d'altra parte che L_0 è omologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi degli altri ϱ contorni, cosicchè, senza traversare i punti Z_s, P_s che si trovano in D, esso può ridursi a questi e a k cerchietti tracciati in D con centro in quei punti e percorsi nel medesimo verso. Essendo k dispari, il periodo di I_{L_0} lungo L_0 è uguale quindi ad un multiplo (positivo o negativo) *non nullo* di 2π.

Scambiando l'ufficio di L_0 con quello di $L_1, L_2, \ldots, L_\varrho$ successivamente costruiremo altri ϱ integrali $I_{L_1}, \ldots, I_{L_\varrho}$ analoghi ad I_{L_0}.

Con questi integrali I_{L_r} possiamo formare una combinazione lineare a coefficienti interi μ_r, $\chi = \Sigma\, \mu_r\, I_{L_r}$, la quale, considerata come funzione su D:

1°) ha la parte immaginaria costante lungo $L_0, L_1, \ldots, L_\varrho$;

2°) ha periodi ciclici nulli lungo a_h, b_h, $(h = 1, \ldots, \mathbf{p})$; ha, per opportuna scelta degli interi μ_r, periodi reali uguali a multipli non nulli di 2π lungo $L_0, L_1, \ldots, L_\varrho$

3°) ha un certo numero di periodi polari uguali a multipli di 2π.

Allora la funzione $w = e^{i\chi}$ è monodroma in D ed effettua la rappresentazione richiesta.

OSSERVAZIONE 1ª Da quanto precede appare che tutti i periodi ciclici di χ su R sono riducibili ai periodi polari. Ciò prova che $w = w(P)$ è una funzione razionale su R (5) e quindi D viene dalla funzione w disteso sulla riemanniana di una curva algebrica birazionalmente equivalente a Γ (la cui equazione si ottiene trasformando la Γ colle $w = w(P)$, $u = u(P)$, essendo $u(P)$ una funzione razionale generica su Γ; la riemanniana su cui viene disteso D è quella della funzione algebrica $u(w)$ definita dalle relazioni precedenti.

OSSERVAZIONE 2ª Noti i punti di D che nella rappresentazione indicata debbonsi proiettare nei punti $w = 0$, $w = \infty$ (ciascun punto contato colla debita molteplicità) nonchè il numero dei giri in verso positivo o negativo, che compie il contorno circolare omologo di L_r $(r = 0, \ldots, \varrho)$, la rappresentazione è individuata a meno di un'omotetia e di una rotazione del piano (w) di centro $w = 0$.

---

(5) Così p. es. nel caso banalissimo di un dominio semplicemente connesso rappresentato sulla mezza riemanniana della retta $y = x$, si può porre $\chi = \int \frac{2}{x^2+1}\, dx = - \operatorname{Log} \frac{x-i}{x+i}$, e allora risulta $w = e^{i\chi} = \frac{x-i}{x+i}$ che è appunto una funzione razionale di x.

Invero se w_1, w_2 sono due funzioni come w, che soddisfano ai medesimi requisiti di cui sopra, Log $\frac{w_1}{w_2}$ è limitata in D, ivi monodroma e con parte reale costante sui contorni epperò si deve ridurre ad una costante.

OSSERVAZIONE 3ª La condizione che i contorni di D siano formati con archi di linee analitiche non è necessaria. Basta supporre che tutti i punti dei contorni siano *accessibili* (6) dall'interno di D perchè la rappresentazione di D sulla mezza riemanniana di Γ, e quindi anche sul dominio limitato da circonferenze sopra considerato, sia continua anche al contorno (non però necessariamente conforme come accade invece, eccetto al più in un numero finito di punti se i contorni di D sono formati con archi di linee analitiche). Basta ad esempio che i contorni di D siano linee chiuse di JORDAN.

Ciò consegue direttamente dalla dimostrazione del teorema di SCHOTTKY-CECIONI accennata in nota al n. 1, od anche modificando opportunamente la dimostrazione originale del CECIONI.

---

(6) « Erreichbaren Randpunkte » : cfr. BIEBERBACH, *Lehrbuch der Functionentheorie*, Teubner, Leipzig, 1927, t II, pag. 17 e sgg.

[*Pervenuto alla Redazione il 10-10-1949*]