ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIA SOFIA ROMA

Integrazione del sistema di equazioni dell'elastostatica tridimensionale in un manicotto cilindrico illimitato

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 2, nº 1-4 (1950), p. 63-83

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_2_1-4_63_0>

INTEGRAZIONE DEL SISTEMA DI EQUAZIONI DELL'ELASTOSTATICA TRIDIMENSIONALE IN UN MANICOTTO CILINDRICO ILLIMITATO [1]

di MARIA SOFIA ROMA (Roma)

INTRODUZIONE

Oggetto di questo lavoro è lo studio delle deformazioni elastiche, in assenza di forze di massa, di un manicotto cilindrico C di lunghezza indefinita vincolato all'infinito, che nel suo stato naturale occupa la porzione di spazio compresa fra due cilindri circolari retti coassiali.

Vengono considerati i tre diversi problemi che consistono: il primo nell'assegnare sia sulla superficie interna Σ', sia su quella esterna Σ'' le componenti di spostamento; il secondo nell'assegnare le componenti delle forze superficiali che agiscono su Σ' e su Σ'' e infine il terzo in cui sono assegnati gli spostamenti su Σ' e le forze superficiali su Σ''.

Applicando il metodo della trasformata di FOURIER riconduco ciascuno dei sopradetti problemi ad un problema ai limiti per un sistema di equazioni differenziali di secondo ordine in tre funzioni incognite del tipo Fuchs.

L'applicazione degli ordinari procedimenti per dedurre l'integrale generale di un sistema del tipo anzidetto mi avrebbe condotta a dover superare non lievi difficoltà di carattere algoritmico, inerenti alla determinazione delle radici dell'equazione algebrica, di sesto grado, caratteristica del detto sistema. Ho potuto invece evitare ciò valendomi di note formule strutturali delle soluzioni delle equazioni dell'elasticità, per mezzo delle quali sono pervenuta ad esprimere l'anzidetto integrale generale in termini finiti mediante funzioni di BESSEL.

Ringrazio qui sentitamente il prof. FICHERA per i suggerimenti datimi nel corso di questo lavoro.

---

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

§ 1. — Trattazione del caso generale

1. *Posizione dei problemi e determinazione dei sistemi differenziali ordinari cui soddisfano le trasformate delle soluzioni.* — Si consideri il sistema delle equazioni dell'equilibrio di un corpo elastico isotropo, in coordinate cartesiane, nelle funzioni incognite u_x, u_y, u_z, componenti dello spostamento s, rispettivamente secondo gli assi x, y, z:

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_2 u_x + \lambda \dfrac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \\[2ex] \Delta_2 u_y + \lambda \dfrac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \\[2ex] \Delta_2 u_z + \lambda \dfrac{\partial \tau}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

e inoltre la condizione al contorno:

$$(2) \qquad c_1\, s(x, y, z) + c_2\, t(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{per} \quad x^2 + y^2 = r^2 \\ F(x, y, z) & \text{per} \quad x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

essendo $s(x, y, z)$ lo spostamento, $t(x, y, z)$ la forza superficiale unitaria corrispondente, c_1 e c_2 costanti che assumeranno successivamente le coppie di valori:

$$(3) \qquad \mathrm{I}^0 \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \qquad \mathrm{II}^0 \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \qquad \mathrm{III}^0 \begin{cases} \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases} & \text{per} \quad x^2 + y^2 = r^2 \\[2ex] \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} & \text{per} \quad x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

ed $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ vettori assegnati [2].

Operiamo un cambiamento di variabili e, precisamente, riferiamoci ad un sistema di coordinate cilindriche ϱ, θ, z. Introduciamo inoltre, come funzioni incognite, le funzioni u_ϱ, u_Θ, u_z, componenti dello spostamento

---

[2] Per una trattazione d'insieme dei problemi dell'elastostatica cfr. E. Trefftz, *Mathematische Elastizitätstheorie* [Handbuch der Physik, Bd VI, Spinger (Berlin) 1928]; R. Marcolongo, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici* [Hoepli (Milano) 1904].

secondo le linee coordinate ϱ, θ, z e, per comodità di scrittura, le indichiamo, con u, v, w.

Il sistema (1) diventa:

$$
(4) \quad \begin{cases}
(1+\lambda)\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}+\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial u}{\partial \varrho}-\dfrac{1}{\varrho^2}u\right]+\dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+ \\
\qquad +\lambda\left[\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varrho\, \partial \theta}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial \varrho\, \partial z}\right]-(2+\lambda)\dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}=0, \\
\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2}+\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial v}{\partial \varrho}-\dfrac{1}{\varrho^2}v+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(1+\lambda)\dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+ \\
\qquad +\lambda\left[\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varrho\, \partial \theta}+\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta\, \partial z}\right]+(2+\lambda)\dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=0, \\
\dfrac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2}+\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial w}{\partial \varrho}+\dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+ \\
\qquad +\lambda\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varrho\, \partial z}+\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta\, \partial z}\right]+(1+\lambda)\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0.
\end{cases}
$$

Noi supporremo che le funzioni incognite u, v, w, biregolari nel nostro dominio D, ammettano le trasformate di FOURIER:

$$
(5) \quad \begin{gathered}
u_n(\varrho, \alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z}\, dz \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} u \, d\theta ; \\
v_n(\varrho, \alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z}\, dz \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} v \, d\theta ; \qquad w_n(\varrho, \alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z}\, dz \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} w \, d\theta ,
\end{gathered}
$$

ed inoltre che esse e le loro derivate parziali del primo ordine siano infinitesime all'infinito, risultando tutte le derivate parziali rispetto a ϱ, che compaiono nel sistema di equazioni, uniformemente sommabili al variare di ϱ sulle superfici $\varrho = \text{cost.}$ In tali ipotesi dal sistema (4) si deduce per le trasformate u_n, v_n, w_n:

$$
(6) \quad \left\{
\begin{aligned}
&(1+\lambda)\left[\frac{d^2 u_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d u_n}{d\varrho} - \frac{1}{\varrho^2} u_n\right] - \\
&\qquad -\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + \alpha^2\right) u_n + i\left[\lambda \frac{n}{\varrho}\frac{d v_n}{d\varrho} - (2+\lambda)\frac{n}{\varrho^2} v_n + \lambda\alpha\frac{d w_n}{d\varrho}\right] = 0\,, \\
&\frac{d^2 v_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d v_n}{d\varrho} - \left(\frac{1}{\varrho^2} + \alpha^2\right) v_n - (1+\lambda)\frac{n^2}{\varrho^2} v_n + \\
&\qquad + i\left[\lambda \frac{n}{\varrho}\frac{d u_n}{d\varrho} + (2+\lambda)\frac{n}{\varrho^2} u_n\right] \quad \lambda\alpha\frac{n}{\varrho} w_n = 0\,, \\
&\frac{d^2 w_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d w_n}{d\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} w_n - (1+\lambda)\alpha^2 w_n + \\
&\qquad + i\lambda\alpha\left[\frac{d u_n}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho} u_n\right] - \lambda\alpha\frac{n}{\varrho} v_n = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Assumendo come variabile indipendente $\alpha\varrho$, che per semplicità di scrittura chiameremo ancora ϱ, il sistema (6) si scrive:

$$
(7) \quad \left\{
\begin{aligned}
&(1+\lambda)\left[\frac{d^2 u_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d u_n}{d\varrho} - \frac{1}{\varrho^2} u_n\right] - \\
&\qquad -\left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right) u_n + i\left[\lambda \frac{n}{\varrho}\frac{d v_n}{d\varrho} - (2+\lambda)\frac{n}{\varrho^2} v_n + \lambda\frac{d w_n}{d\varrho}\right] = 0\,, \\
&\frac{d^2 v_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d v_n}{d\varrho} - \left(\frac{1}{\varrho^2} + 1\right) v_n - \\
&\qquad - (1+\lambda)\frac{n^2}{\varrho^2} v_n + i\left[\lambda \frac{n}{\varrho}\frac{d u_n}{d\varrho} + (2+\lambda)\frac{n}{\varrho^2} u_n\right] - \lambda\frac{n}{\varrho} w_n = 0\,, \\
&\frac{d^2 w_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d w_n}{d\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} w_n - \\
&\qquad - (1+\lambda) w_n + i\lambda\left[\frac{d u_n}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho} u_n\right] - \lambda\frac{n}{\varrho} v_n = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

2. *Integrazione dei sistemi differenziali ordinari delle trasformate.* — Alcune osservazioni ci permettono di trovare l'integrale generale del sistema (7).

I[a] OSSERVAZIONE: È noto che, in assenza di forze di massa, la funzione τ riesce armonica e, in tal caso, le equazioni della elasticità possono mettersi nella forma:

$$(1')\qquad \left\{ \begin{aligned} & \Delta_2\left(u_x + \lambda\, x\, \frac{\tau}{2}\right) = 0 \\ & \Delta_2\left(u_y + \lambda\, y\, \frac{\tau}{2}\right) = 0 \\ & \Delta_2\left(u_z + \lambda\, z\, \frac{\tau}{2}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

e le componenti u_x, u_y, u_z dello spostamento sono del tipo:

$$(8)\qquad u_x = 2\,A + x\,T\,; \quad u_y = 2\,B + y\,T\,; \quad u_z = 2\,C^* + z\,T\,,$$

in cui A, B, C^*, T verificano le equazioni:

$$\Delta_2 A = 0\,; \qquad \Delta_2 B = 0\,; \qquad \Delta_2 C^* = 0\,; \qquad \Delta_2 T = 0\,.$$

Poichè si ha per le componenti cilindriche dello spostamento

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} u_\varrho &= u_x \cos\vartheta + u_y \operatorname{sen}\vartheta \\ u_\vartheta &= -\,u_x \operatorname{sen}\vartheta + u_y \cos\vartheta \\ u_z &= u_z \end{aligned} \right. ,$$

esse, per le (8), possono mettersi nella forma:

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} u_\varrho &= A\, e^{i\vartheta} + A\, e^{-i\vartheta} - i\, B\, e^{i\vartheta} + i\, B\, e^{-i\vartheta} + \varrho\, T \\ u_\vartheta &= i\, A\, e^{i\vartheta} - i\, A\, e^{-i\vartheta} + B\, e^{i\vartheta} + B\, e^{-i\vartheta} \\ u_z &= C^* + z\, T = C^* + \psi \end{aligned} \right.$$

La funzione ψ, biarmonica nel dominio D, normale rispetto al piano $x = \text{cost}$, si può porre nella forma:

$$(11)\qquad \psi = C' + 2\,x\,S\,,$$

verificando S l'equazione $\Delta_2 S = 0$.

Tenendo conto della (11), l'espressione di u_z, nelle (10), è sostituita dall'altra:

$$(12)\qquad u_z = C^* + C' + 2\,\varrho \cos\theta \,.\, S = C^* + C' + \varrho\, S\, e^{i\Theta} + \varrho\, S\, e^{-i\Theta} =$$
$$= C + \varrho\, S\, e^{i\Theta} + \varrho\, S\, e^{-i\Theta}$$

in cui

$$C = C^* + C'.$$

Indicando con

$$A_n(\varrho) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z}\, d\, z \int_0^{2\pi} e^{-in\Theta} A\, d\,\theta \ , \quad B_n(\varrho) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z}\, d\, z \int_0^{2\pi} e^{-in\Theta} B\, d\,\theta ,\ldots$$

le trasformate di ordine n, rispettivamente delle funzioni A, B, ... dalle prime due delle (10) e dalla (12), si ha:

$$(13) \qquad \begin{cases} u_n = A_{n-1} + A_{n+1} - i\, B_{n-1} + i\, B_{n+1} + \varrho\, T_n \\ v_n = i\, A_{n-1} - i\, A_{n+1} + B_{n-1} + B_{n+1} \\ w_n = C_n + \varrho\, S_{n-1} + \varrho\, S_{n+1} . \end{cases}$$

II^a **OSSERVAZIONE:** Se una funzione f, nelle ipotesi ammesse per le u, v, w, verifica l'equazione:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 ,$$

la sua trasformata:

$$(14) \qquad f_n(\varrho) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha z}\, d\, z \int_0^{2\pi} e^{-in\Theta} f(\varrho\,,\theta\,,z)\, d\,\theta$$

verifica l'equazione di BESSEL:

$$\frac{d^2 f_n}{d\,\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\, f_n}{d\,\varrho} - \left(\frac{n^2}{\varrho^2} + 1\right) f_n = 0$$

nella quale abbiamo chiamata ϱ la variabile indipendente $\alpha\,\varrho$. Essa può mettersi quindi nella forma:

$$(15) \qquad f_n(\varrho) = a\, I_{|n|} + b\, K_{|n|} \ (^1)$$

con a, b costanti arbitrarie e $I_{|n|}$ e $K_{|n|}$ funzioni di BESSEL. Poichè è subito verificato che A B, C, S, T verificano le ipotesi ammesse per u, v, w,

(1) Per una trattazione delle funzioni di Bessel, cfr. M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella (Napoli).

se ne deduce che:

$$
(16)\qquad \begin{cases} u_n = a_1\, I_{|n-1|} + a_2\, I_{|n+1|} + a_3\, \varrho\, I_{|n|} + b_1\, K_{|n-1|} + b_2\, K_{|n+1|} + b_3\, \varrho\, K_{|n|} \\ v_n = a_4\, I_{|n-1|} + a_5\, I_{|n+1|} + b_4\, K_{|n-1|} + b_5\, K_{|n+1|} \\ w_n = a_6\, I_{|n|} + a_7 \varrho I_{|n-1|} + a_8 \varrho I_{|n+1|} + b_6\, K_{|n|} + b_7 \varrho K_{|n-1|} + b_8\, \varrho\, K_{|n+1|} \end{cases}
$$

Imponendo alle (16) di soddisfare al sistema (7), si otterranno dieci equazioni lineari indipendenti che ci permetteranno di esprimere dieci delle incognite in funzione delle altre sei.

Nel caso del cilindro pieno che consideriamo in un primo momento osserviamo subito che, per la continuità delle funzioni di ϱ, è necessario che siano nulle le b_i, sicchè le (16) ridotte nella forma che segue:

$$
(17)\qquad \begin{cases} u_n = a_1\, I_{|n-1|} + a_2\, I_{|n+1|} + a_3\, \varrho\, I_{|n|} \\ v_n = a_4\, I_{|n-1|} + a_5\, I_{|n+1|} \\ w_n = a_6\, I_{|n|} + a_7\, \varrho\, I_{|n-1|} + a_8\, \varrho\, I_{|n+1|} \end{cases}
$$

devono soddisfare il sistema (7) che scriviamo nella forma:

$$
(7')\qquad \begin{cases} (1+\lambda)\left[D_n u_n - \dfrac{1}{\varrho^2}\, u_n\right] + \lambda\left(1 + \dfrac{n^2}{\varrho^2}\right) u_n + i\left[\dfrac{\lambda\, n}{\varrho}\,\dfrac{d\, v_n}{d\,\varrho} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \lambda\,\dfrac{d\, w_n}{d\,\varrho} - (2+\lambda)\,\dfrac{n}{\varrho^2}\, v_n\right] = 0 \\[2ex] D_n v_n - \dfrac{1}{\varrho^2}\,(1 + \lambda\, n^2)\, v_n - \lambda\,\dfrac{n}{\varrho}\, w_n + i\left[\lambda\,\dfrac{n}{\varrho}\,\dfrac{d\, u_n}{d\,\varrho} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + (2+\lambda)\,\dfrac{n}{\varrho^2}\, u_n\right] - \lambda\,\dfrac{n}{\varrho}\, w_n = 0 \\[2ex] D_n w_n - \lambda\, w_n - \lambda\,\dfrac{n}{\varrho}\, v_n + i\,\lambda\left[\dfrac{d\, u_n}{d\,\varrho} + \dfrac{1}{\varrho}\, u_n\right] = 0 \end{cases}
$$

in cui D_n è l'operatore di BESSEL:

$$
D_n f_n = \frac{d^2 f_n}{d\,\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\,\frac{d\, f_n}{d\,\varrho} - \left(1 + \frac{n^2}{\varrho^2}\right) f_n\,.
$$

Nelle (7'), alla seconda equazione sostituiamo la seguente che si ottiene sottraendo dalla 2ª moltiplicata per ϱ^2, la 3ª moltiplicata per $n\,\varrho$ e cioè:

$$
(18)\qquad \varrho^2\, D_n\, v_n - \varrho\, n\, D_n\, w_n + i\, 2\, n\, u_n - w_n = 0\,,
$$

Tenendo conto delle espressioni di u_n, v_n, w_n date dalle (17), si hanno le espressioni:

$$(19) \qquad \begin{cases} D_n\, v_n = a_4\left[\dfrac{1}{\varrho^3}\,(1-2n)2n\, I_{|n|} + \dfrac{1}{\varrho^2}\,(1-2n) I_{|n+1|}\right] + a_5\,\dfrac{1}{\varrho^2}\,(1+2n)\, I_{|n+1|} \\[2ex] D_n\, w_n = 2\,(a_7 + a_8)\,.\, I_{|n|} \end{cases}$$

che sostituite con le (17) nella (18) danno:

$$(20) \qquad \begin{aligned} & -i\,a_1\,(2\,n\,I_{|n|} + \varrho\, I_{|n+1|}) - i\,a_2\,\varrho\, I_{|n+1|} \quad i\,a_3\,\varrho^2\, I_{|n+1|} - i\,a_3\,\varrho^2\, I_{|n|} + \\ & + a_4\,(2\,n\,I_{|n|} + \varrho\, I_{|n+1|}) - a_5\,\varrho\, I_{|n+1|} + a_7\,\varrho^2\, I_{|n|} + a_8\,\varrho^2\, I_{|n|} = 0. \end{aligned}$$

Poichè

$$2\,n\,I_{|n|} + \varrho\, I_{|n+1|} = \varrho\, I_{|n-1|}$$

si ha:

$$(21) \qquad [-i a_1 + a_4]\,\varrho\, I_{|n-1|} + [-i\,a_3 + a_7 + a_8]\,\varrho^2\, I_{|n|} - [i\,a_2 + a_5]\,\varrho\, I_{|n+1|} = 0.$$

Sostituendo alle funzioni I i loro sviluppi in serie, si ottiene infine:

$$(22) \qquad \begin{aligned} & [-\,i\,a_1 + a_4]\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\varrho^{n+2h}}{2^{n+2h-1}\,.\,h\,!\,(n+h-1)\,!} + [-\,i\,a_3 + \\ & + a_7 + a_8]\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\varrho^{n+2h+2}}{2^{n+2h}\,h\,!\,(n+h)\,!} - [i a_2 + a_5]\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\varrho^{n+2h+2}}{2^{n+2h+1}\,h\,!\,(n+h+1)\,!} = 0 \end{aligned}$$

Cambiando opportunamente l'indice di sommazione nella 1ª sommatoria, la (22) si scrive:

$$(22') \qquad \begin{aligned} & [-\,i\,a_1 + a_4]\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\varrho^{n+2h+2}}{2^{n+2h+1}\,.\,(h+1)\,!\,(n+h)\,!} + [-\,i\,a_3 + \\ & + a_7 + a_8]\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\varrho^{n+2h+2}}{2^{n+2h}\,.\,h\,!\,(n+h)\,!} - [i a_2 + a_5]\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\varrho^{n+2h+2}}{2^{n+2h+1}\,.\,h\,!\,(n+h+1)\,!} = 0 \end{aligned}$$

da cui per $h = -1, 0, 1$ si hanno i valori:

$$(23) \qquad \begin{cases} a_4 = i\,a_1 \\ a_5 = -\,i\,a_2 \\ a_8 = i\,a_3 - a_7 \end{cases}$$

Inoltre dalla prima e dalla terza delle (7′) si ha:

$$a_7 = 0\,; \qquad a_6 = a_4 - a_5 + i\,a_3\left(n + 2 + \frac{2}{\lambda}\right) = \tag{24}$$
$$= i\,a_1 + i\,a_2 + i\,a_3\left(n + 2 + \frac{2}{\lambda}\right).$$

L'integrale generale del sistema (7), regolare per $\varrho = 0$, è perciò dato da:

$$u_n = a_1\, I_{|n-1|} + a_2\, I_{|n+1|} + a_3\, \varrho\, I_{|n|}$$
$$v_n = i\,a_1\, I_{|n-1|} - i\,a_2\, I_{|n+1|}$$
$$w_n = \left[i\,a_1 + i\,a_2 + i\,a_3\left(n + 2 + \frac{2}{\lambda}\right)\right] I_{|n|} + i\,a_3\,\varrho\, I_{|n+1|}\,.$$

Con procedimento analogo a quello seguito per il caso del cilindro pieno, si ottengono per b_i, nel caso del manicotto cilindrico, le relazioni:

$$\begin{cases} b_4 = i\,b_1 \\ b_5 = -\,i\,b_2 \\ b_6 = -\,i\,b_1 - i\,b_2 + i\,b_3\left(n + 2 + \dfrac{2}{\lambda}\right) \\ b_7 = 0 \\ b_8 = -\,i\,b_3 \end{cases}$$

Si deduce che l'integrale generale del sistema (7), prescindendo dalla sua regolarità per $\varrho = 0$, è dato da:

$$\begin{cases} u_n = a_1\, I_{|n-1|} + a_2 \,.\, I_{|n+1|} + a_3\,\varrho\, I_{|n|} + b_1 K_{|n-1|} + b_2\, K_{|n+1|} + b_3\,\varrho K_{|n|} \\ v_n = i\,a_1\, I_{|n-1|} - i\,a_2 \,.\, I_{|n+1|} + i\,b_1\, K_{|n-1|} - i\,b_2\, K_{|n+1|} \\ w_n = \left[i\,a_1 + i\,a_2 + i\,a_3\left(n + 2 + \dfrac{2}{\lambda}\right)\right] I_{|n|} + i\,a_3\,\varrho\, I_{|n+1|} + \\ \qquad + \left[-\,i\,b_1 - i\,b_2 + i\,b_3\left(n + 2 + \dfrac{2}{\lambda}\right)\right] K_{|n|} - i\,b_3\,\varrho\, K_{|n+1|}. \end{cases} \tag{26}$$

Non rimane quindi che la determinazione delle costanti arbitrarie che compaiono nella (26), tenendo conto delle (2), successivamente nei tre casi riportati nelle (3). Supponendo i vettori assegnati f e F dotati delle solite trasformate e considerando delle componenti la tensione:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_\varrho &= h\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho u)}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]+2k\frac{\partial u}{\partial \varrho}\\ \tau_{\varrho\Theta} &= k\left[\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}-v\right)+\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right]\\ \tau_{\varrho z} &= k\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial \varrho}\right]\end{aligned}\right.$$

le loro trasformate

$$\begin{aligned} \sigma_\varrho^n &= h\frac{1}{\varrho}\frac{d(\varrho u_n)}{d\varrho}+2k\frac{d u_n}{d\varrho}+ih\left(\frac{n}{\varrho}v_n+w_n\right)\\ \tau^n_{\varrho\Theta} &= k\left[\frac{d v_n}{d\varrho}-\frac{1}{\varrho}v_n+i\frac{n}{\varrho}u_n\right]\\ \tau^n_{\varrho z} &= k\left[\frac{d w_n}{d\varrho}+i u_n\right]\end{aligned}$$

la (2) dà luogo alle equazioni:

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned} &c_1\Big[a_1 I_{|n-1|}(r)+a_2 I_{|n+1|}(r)+a_3 r I_{|n|}(r)+b_1 K_{|n-1|}(r)+b_2 K_{|n+1|}(r)+\\ &+b_3 r K_{|n|}(r)\Big]+k c_2\Big[a_1(I_{|n-2|}(r)+I_{|n|}(r))+a_2(I_{|n|}(r)+I_{|n+2|}(r))+\\ &+a_3\left\{2\left(n+\frac{1}{\lambda}\right)I_{|n|}(r)+2rI_{|n+1|}(r)\right\}-b_1K_{|n-2|}(r)-b_2(K_{|n+2|}(r)+\\ &+K_{|n|}(r))+b_3\left\{2\left(n+\frac{1}{\lambda}\right)K_{|n|}(r)-2rK_{|n+1|}(r)\right\}\Big]=f^{(n)}_\varrho\\ &c_1 i\Big[a_1I_{|n-1|}(r)-a_2I_{|n+1|}(r)+b_1K_{|n-1|}(r)-b_2K_{|n+1|}(r)\Big]+c_2ik\Big[a_1I_{|n-2|}(r)+\\ &+a_2I_{|n|}(r)+a_3nI_{|n|}(r)-b_1K_{|n-2|}(r)+b_2K_{|n+2|}(r)+b_3nK_{|n|}(r)\Big]=f^{(n)}_\Theta\\ &c_1 i\Big[a_1I_{|n|}(r)+a_2I_n(r)+a_3\left\{\left(n+2+\frac{2}{\lambda}\right)I_{|n|}(r)+rI_{|n+1|}(r)\right\}-\\ &-b_1K_{|n|}(r)-b_2K_{|n|}(r)+b_3\left\{\left(n+2+\frac{2}{\lambda}\right)K_{|n|}(r)-rK_{|n+1|}(r)\right\}\Big]+\\ &+c_2ik\frac{1}{r}\Big[a_1(2rI_{|n-1|}(r)-nI_{|n|}(r)+a_2(nI_{|n|}(r)+2rI_{|n+1|}(r))+\\ &+a_3\left(\left\{n\left(n+2+\frac{2}{\lambda}\right)+2r^2\right\}I_{|n|}+\left(2+\frac{2}{\lambda}\right)rI_{|n+1|}(r)\right)+\\ &+b_1(2rK_{|n-1|}(r)+nK_{|n|}(r))+b_2(-nK_{|n|}(r)+2rK_{|n+1|}(r))+\\ &+b_3\left(\left\{n\left(n+2+\frac{2}{\lambda}\right)+2r^2\right\}K_{|n|}-\left(2+\frac{2}{\lambda}\right)rK_{|n+1|}\right)\Big]=f^{(n)}_z\end{aligned}\right.$$

ed altre tre analoghe calcolate in $\varrho = R$.

Il problema si riduce così alla discussione del sistema di equazioni lineari algebriche nelle costanti $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$.

3. *Teorema di unicità.* — Per dimostrare il teorema di unicità per ciascuno dei problemi considerati nel n⁰. 1, basta far vedere che il determinante $D_n(\alpha, r, R)$ del sistema algebrico (27) cui il problema stesso dà luogo è, per ogni n, diverso da zero, fissati r ed R, qualunque sia α.

Supponiamo, per assurdo, che in uno qualsiasi dei tre problemi al contorno, per qualche α e qualche n sia $D_n(\alpha, r, R) = 0$. Diciamo $s_n^0(P)$ il vettore le cui componenti sono definite dalle (26), dove le a_i e b_i sono un'autosoluzione del sistema omogeneo associato. Si considerino i vettori

$$s'_n = \Re\, s_n^0(\varrho) \cdot e^{i\alpha z} \cdot e^{in\Theta}, \quad s''_n = \Im\, s_n^0\, e^{i\alpha z} \cdot e^{in\Theta}. \quad (^1)$$

Indicata con $T[s]$ la forza superficiale che corrisponde allo spostamento s, si ha che i vettori $T[s'_n]$ e $T[s''_n]$ sono del tipo seguente

$$T[s'_n] = t'_1(\varrho)\cos(\alpha z + n\theta) + t'_2(\varrho)\cdot \operatorname{sen}(\alpha z + n\theta),$$

$$T[s''_n] = t''_1(\varrho)\cos(\alpha z + n\theta) + t''_2(\varrho)\cdot \operatorname{sen}(\alpha z + n\theta),$$

con $t'_i(\varrho)$ e $t''_i(\varrho)$ ben determinati vettori funzioni di ϱ. Diciamo $\Pi[s]$ il potenziale della deformazione elastica corrispondente allo spostamento s che, com'è noto, è una forma quadratica definita positiva nelle componenti di deformazione. Fissato $Z > 0$, sia A_Z il dominio cilindrico definito dalle limitazioni

$$r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \qquad -Z \leq z \leq Z.$$

Sussiste la relazione:

$$\int_{A_Z} \Pi(s)\, d\,T + \frac{1}{2} \cdot \int_{FA_Z} [s \times T(s)]\, d\,\sigma = 0,$$

che per il vettore s'_n diventa una relazione del tipo:

$$\int_{A_Z} \Pi(s'_n)\, d\,T = A\cos 2\alpha Z + B \operatorname{sen} 2\alpha Z,$$

(1) Se è un vettore a componenti complesse, con $\Re s$ ed $\Im s$ indico rispettivamente i due vettori aventi per componenti le parti reali e i coefficienti degli immaginari delle componenti di s.

con A e B determinate costanti, e analogamente per s''_n. Ma il primo membro è una funzione monotona di Z, per cui deve essere $A = B = 0$. Ne segue $\Pi(s'_n) \equiv 0$ e analogamente $\Pi(s''_n) \equiv 0$.

Pertanto s'_n ed s''_n devono rappresentare spostamenti rigidi, ma ciò è assurdo ove si pensi alla definizione del vettore $s^0_n(\varrho)\, e^{i\alpha z}\, e^{in\Theta}$ le cui componenti non sono certo funzioni lineari di x, y, z.

§ 2 — Un notevole caso particolare

1. *Cilindro sottoposto a pressione dotata di simmetria assiale.* Si consideri il cilindro C di raggio r definito dalla limitazione:

$$0 \leq \varrho \leq r.$$

Ci proponiamo di studiare la deformazione di C quando esso sia sottoposto a pressione dotata di simmetria assiale. È evidente che in tal caso la componente v dello spostamento è nulla e il sistema di equazioni di equilibrio si riduce a:

$$(1)\qquad \begin{cases} (1+\lambda)\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial u}{\partial \varrho} - \dfrac{1}{\varrho^2}\, u\right] + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda\, \dfrac{\partial^2 w}{\partial \varrho\, \partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial w}{\partial \varrho} + (1+\lambda)\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \lambda\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varrho\, \partial z} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial u}{\partial z}\right] = 0. \end{cases}$$

Ammettendo le funzioni u e w e le loro derivate parziali prime rispetto a ϱ e a z e tutte le altre che compaiono nelle (1) in valore assoluto non superiori ad una prescritta funzione positiva $f(z)$ infinitesima con z infinitamente grande e sommabile, introdotte le trasformate di u e w:

$$(2)\qquad u^* = \int_{-\infty}^{+\infty} u\, e^{-i\alpha z}\, dz \quad , \qquad w^* = \int_{-\infty}^{+\infty} w\, e^{-i\alpha z}\, dz$$

il sistema diventa:

$$(3)\qquad \begin{cases} (1+\lambda)\left[\dfrac{d^2 u^*}{d \varrho^2} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{d u^*}{d \varrho} - \dfrac{1}{\varrho^2}\, u^*\right] - \alpha^2 u^* + i\,\alpha\,\lambda\, \dfrac{d w^*}{d \varrho} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2 w^*}{d \varrho^2} + \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{d w^*}{d \varrho} - (1+\lambda)\,\alpha^2 w^* + i\,\lambda\,\alpha\left[\dfrac{d u^*}{d \varrho} + \dfrac{1}{\varrho}\, u^*\right] = 0. \end{cases}$$

L'integrale generale di questo sistema è del tipo:

$$(4)\qquad \begin{cases} u^* = c_1\, I_1(\alpha\, \varrho) + c_2\, \alpha\, \varrho\, I_0(\alpha\, \varrho) \\ w^* = i \left[c_1 + 2\, c_2 \left(1 + \dfrac{1}{\lambda}\right)\right] I_0(\alpha\, \varrho) + i\, c_2\, \alpha\, \varrho\, I_1(\alpha\, \varrho) \end{cases}$$

in cui c_1 e c_2 sono costanti arbitrarie che passiamo a determinare. Se $e^{-p|z|}$ è la pressione assegnata sulla superficie $\varrho = r$, le condizioni di equilibrio sulla superficie cilindrica si esprimono come segue:

$$(5)\qquad \begin{cases} [\sigma_\varrho]_{\varrho=r} = (\lambda - 1)\left[\dfrac{1}{r}\, u + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right]_{\varrho=r} + (\lambda + 1)\left[\dfrac{\partial u}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=r} = e^{-p|z|}, \\ [\tau_{\varrho z}]_{\varrho=r} = \left[\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=r} = 0 \,. \end{cases}$$

Applicando le (2) nel sistema (5), si ha:

$$(6)\qquad \begin{cases} (\lambda - 1)\left[\dfrac{1}{\varrho}\, u^* + i\, \alpha\, w^*\right] + (\lambda + 1)\, \dfrac{d\, u^*}{d\, \varrho} = \dfrac{2\, p}{p^2 + \alpha^2} \\ i\, \alpha\, u^* + \dfrac{d\, w^*}{d\, \varrho} = 0 \end{cases} \qquad \text{per } \varrho = r$$

e sostituendo le (4) nelle (6):

$$(7)\qquad \begin{cases} \left(I_0(\alpha\, r) - \dfrac{1}{\alpha\, r}\, I_1(\alpha r)\right) . c_1 + \left(\alpha r\, I_1(\alpha r) + \dfrac{1}{\lambda}\, I_0(\alpha\, r)\right) c_2 = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{p}{p^2 + \alpha^2}, \\ I_1(\alpha\, r) . c_1 + \left[\alpha\, r\, I_0(\alpha\, r) + \left(1 + \dfrac{1}{\lambda}\right) I_1(\alpha\, r)\right] . c_2 = 0, \end{cases}$$

da cui:

$$c_1 = \frac{p}{\alpha(p^2 + \alpha^2)} \cdot \frac{\alpha\, r\, I_0(\alpha\, r) + \dfrac{3}{2}\, I_1(\alpha\, r)}{\alpha\, r \left[I_0^2(\alpha\, r) - \left\{ \dfrac{3}{2}\, \dfrac{1}{\alpha^2 r^2} + 1 \right\} I_1^2(\alpha\, r)\right]}$$

$$c_2 = - \frac{p}{\alpha(p^2 + \alpha^2)}\; \frac{I_1(\alpha\, r)}{\alpha\, r \left[I_0^2(\alpha\, r) - \left\{ \dfrac{3}{2}\, \dfrac{1}{\alpha^2\, r^2} + 1 \right\} I_1^2(\alpha\, r)\right]} \,.$$

Si ottengono pertanto le seguenti formule risolutive del problema:

$$
(12)\quad
\begin{cases}
u = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^* e^{i\alpha z}\, d\alpha = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [c_1 I_1(\alpha\varrho) + c_2\, \alpha\varrho\, I_0(\alpha\varrho)]\, e^{i\alpha z}\, d\alpha = \\[2ex]
= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{p\,.\,e^{i\alpha z}}{\alpha(p^2+\alpha^2)} \cdot \dfrac{\left[\alpha r I_0(\alpha r) + \frac{3}{2} I_1(\alpha r)\right] . I_1(\alpha\varrho) - \alpha\varrho I_0(\alpha\varrho) . I_1(\alpha r)}{\alpha r\left[I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha^2 r^2} + 1\right\} . I_1^2(\alpha r)\right]}\, d\alpha \\[3ex]
w = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} w^* e^{i\alpha z} d\alpha = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [(c_1 + 3c_2) I_0(\alpha\varrho) + c_2\, \alpha\varrho\, I_1(\alpha\varrho)]\, e^{i\alpha z}\, d\alpha = \\[2ex]
= \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{p}{\alpha(p^2+\alpha^2)} \cdot \dfrac{\left[\alpha r I_0(\alpha r) - \frac{3}{2} I_1(\alpha r)\right] I_0(\alpha\varrho) - \alpha\varrho I_1(\alpha r) I_1(\alpha\varrho)}{\alpha r\left[I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha^2 r^2} + 1\right\} I_1^2(\alpha r)\right]}\, e^{i\alpha z}\, d\alpha .
\end{cases}
$$

Posto

$$
\begin{cases}
\Phi_1 = \dfrac{p}{\alpha(p^2+\alpha^2)}\, \dfrac{\left[I_0(\alpha r) + \frac{3}{2\alpha r} I_1(\alpha r)\right] I_1(\alpha\varrho) - \frac{\varrho}{r} I_0(\alpha\varrho) I_1(\alpha r)}{I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha^2 r^2} + 1\right\} I_1^2(\alpha r)} \\[3ex]
\Phi_2 = \dfrac{p}{\alpha(p^2+\alpha^2)}\, \dfrac{\left[I_0(\alpha r) - \frac{3}{2\alpha r} . I_1(\alpha r)\right] I_0(\alpha\varrho) - \frac{\varrho}{r} . I_1(\alpha r) I_1(\alpha\varrho)}{I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2}\frac{1}{\alpha^2 r^2} + 1\right\} . I_1^2(\alpha r)}
\end{cases}
$$

e osservando che Φ_1 è funzione pari di α, mentre Φ_2 è funzione dispari di α, si ha:

$$
(13)\qquad u = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \Phi_1 \cos\alpha z\, d\alpha\,, \qquad w = -\int_0^{\infty} \Phi_2\, \mathrm{sen}\, \alpha z\, d\alpha\,.
$$

2. *Preliminari alla dimostrazione del teorema di esistenza per il problema del n. precedente.* — Dimostriamo ora che le funzioni u e v, espresse dalle (13), verificano le ipotesi ammesse nel § 1, n. 1.

Consideriamo lo sviluppo asintotico di $I_0(\alpha\varrho)$ e $I_1(\alpha\varrho)$ dato da:

$$(14)\quad \begin{cases} I_0(\alpha\varrho) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\varrho}}\cdot e^{\alpha\varrho}\cdot\left\{1+\dfrac{1}{8\alpha\varrho}+\dfrac{9}{2(8\alpha\varrho)^2}+0\left(\dfrac{1}{\alpha^3}\right)\right\} \\ I_1(\alpha\varrho) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\varrho}}\cdot e^{\alpha\varrho}\cdot\left\{1-\dfrac{3}{8\alpha\varrho}-\dfrac{15}{2(8\alpha\varrho)^2}+0\left(\dfrac{1}{\alpha^3}\right)\right\} \end{cases} \quad (^1)$$

per cui

$$\Phi_1 = \frac{p}{\alpha(p^2+\alpha^2)}\cdot\frac{1}{e^{\alpha(r-\varrho)}}\cdot\sqrt{\frac{r}{\varrho}}\;\frac{1-\dfrac{\varrho}{r}+\dfrac{3}{8\alpha r}\left(4-\dfrac{r}{\varrho}+\dfrac{\varrho}{r}\right)+0\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)}{8\left[\dfrac{1}{8\alpha r}-\dfrac{10}{(8\alpha r)^2}\right]+0\left(\dfrac{1}{\alpha^3}\right)}$$

$$\Phi_2 = \frac{p}{\alpha(p^2+\alpha^2)}\cdot\frac{1}{e^{\alpha(r-\varrho)}}\sqrt{\frac{r}{\varrho}}\cdot\frac{1-\dfrac{\varrho}{r}-\dfrac{1}{8\alpha r}\left(8-\dfrac{r}{\varrho}-3\dfrac{\varrho}{r}\right)+0\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)}{8\left[\dfrac{1}{8\alpha r}-\dfrac{10}{(8\alpha r)^2}\right]+0\left(\dfrac{1}{\alpha^3}\right)}.$$

Per $\alpha \neq 0$, $\varrho = 0$ è $I_0(0) = 1$, $I_1(0) = 0$, per cui:

$\Phi_1 = 0$

$$\Phi_2 = \frac{p}{\alpha(p^2+\alpha^2)}\;\frac{I_0(\alpha r)-\dfrac{3}{2\alpha r}\cdot I_1(\alpha r)}{I_0^2(\alpha r)\quad\left\{\dfrac{3}{2\alpha^2 r^2}+1\right\}I_1^2(\alpha r)} =$$

$$= \frac{p}{p^2+\alpha^2}\sqrt{\frac{2\pi r}{\alpha}}\cdot\frac{1}{e^{\alpha r}}\cdot\frac{1-\dfrac{11}{8\alpha r}+0\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)}{8\left[\dfrac{1}{8\alpha r}-\dfrac{10}{(8\alpha r)^2}\right]+0\left(\dfrac{1}{\alpha^3}\right)}.$$

Possiamo quindi affermare la sommabilità delle funzioni nell'intervallo $(0,\infty)$. Consideriamo ora le derivate parziali prime di Φ_1 e Φ_2. Si ha:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varrho} = \frac{p}{p^2+\alpha^2}\cdot$$

$$\frac{\left[I_0(\alpha r)+\dfrac{1}{2\alpha r}\cdot I_1(\alpha r)\right].I_1'(\alpha\varrho)\quad\dfrac{1}{r}.I_1(\alpha r).I_0(\alpha\varrho)-\dfrac{\varrho}{r}.I_0'(\alpha\varrho).I_1(\alpha r)}{I_0^2(\alpha r)-\left\{\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\alpha^2 r^2}+1\right\}.I_1^2(\alpha r)}.$$

(1) Cfr WHITTAKER and WATSON, *Modern Analysis*, Cambridge 1935, pag. 368.

Poichè

$$I_1'(0) = \frac{1}{2} \;,\; I_0'(0) = 0 \quad ; \quad I_0(0) = 1 \quad ; \quad I_1(0) = 0$$

è:

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=0} = \frac{p}{p^2+\alpha^2} \, \frac{\frac{1}{2}\left[I_0(\alpha r) + \frac{3}{2\,\alpha\, r} \,.\, I_1(\alpha r)\right] - \frac{1}{r} I_1(\alpha r)}{I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2\,\alpha^2\, r^2} + 1\right\} I_1^2(\alpha r)} \,.$$

Si ha inoltre

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=r} = \frac{p}{p^2+\alpha^2} \, \frac{I_0^2(\alpha r) - \frac{1}{2\,\alpha\, r} \,.\, I_0(\alpha r) \,.\, I_1(\alpha r) - \left(\frac{3}{2\,\alpha^2\, r^2} + 1\right) I_1^2(\alpha r)}{I_0^2(\alpha r) - \left(\frac{3}{2}\,\frac{1}{\alpha^2\, r^2} + 1\right) I_1^2(\alpha r)} =$$

$$= \frac{p}{p^2+\alpha^2}\left\{1 - \frac{I_0(\alpha r)\, I_1(\alpha r)}{2\,\alpha\, r\left[I_0^2(\alpha r) - \left(\frac{3}{2\,\alpha^2\, r^2}+1\right) I_1^2(\alpha r)\right]}\right\}$$

mentre, per $0 < \varrho < r$:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} = \frac{p}{p^2+\alpha^2}\sqrt{\frac{r}{\varrho}} \,.\, \frac{1}{e^{\alpha(r-\varrho)}} \, \frac{1 - \frac{\varrho}{r} + \frac{1}{8\,\alpha\, r}\left(8 - 7\,\frac{r}{\varrho} + 3\,\frac{\varrho}{r}\right) + 0\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{8\left[\frac{1}{8\,\alpha\, r} - \frac{10}{(8\,\alpha\, r)^2}\right] + 0\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)} .$$

(14)

$$= \frac{p}{p^2+\alpha^2}\sqrt{\frac{r}{\varrho}}\,\frac{1}{e^{\alpha(r-\varrho)}}\left[\frac{\alpha\, r\left(1-\frac{\varrho}{r}\right)}{1+0\left(\frac{1}{\alpha}\right)} + 0\,(1)\right].$$

Risulta da ciò evidente la sommabilità della funzione. Dimostriamo ora la convergenza dell'integrale: $\int_0^\infty \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} \cos \alpha\, z \,.\, d\, z$; per la qual cosa basta limitarsi a considerare della $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho}$ il primo termine chè è maggiorato da $\frac{\cos \alpha\, z}{\alpha\, e^{\alpha(r-\varrho)}}$.

Infatti, per $0 < \varrho \leq r$, la funzione $\frac{1}{\alpha\, e^{\alpha(r-\varrho)}}$ risulta decrescente; per il 2° teorema della media si ha allora:

(15) $$\left|\int_{M_1}^{M_2} \frac{\cos \alpha\, z}{\alpha\, e^{\alpha(r-\varrho)}}\, d\, \alpha\right| = \left|\frac{1}{M_1\, e^{M_1(r-\varrho)}} \int_{\xi}^{M_2} \cos \alpha\, z\, d\, \alpha\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{M_1\, e^{M_1(r-\varrho)}} \,.\, \frac{1}{z}\,(\text{sen}\, z\, M_1 - \text{sen}\, z\, \xi)\right| < \frac{2}{M_1\, e^{M_1(r-\varrho)}} \,.\, \frac{1}{z}$$

essendo $0 < M_1 \leq \alpha \leq M_2$ e ξ un punto dell'intervallo $(M_1\,, M_2)$.

Basta quindi scegliere M_1 tale che per $M_2 > M_1$ risulti

$$\left| \int_{M_1}^{M_2} \frac{\cos \alpha z}{\alpha\, e^{\alpha(r-\varrho)}}\, d\alpha \right| < \varepsilon .$$

Allo stesso modo procede la dimostrazione per le altre derivate date rispettivamente da

$$\frac{\partial (\Phi_1 \cos \alpha z)}{\partial z} = -\alpha\, \Phi_1 \operatorname{sen} \alpha z = -\frac{p}{p^2+\alpha^2}\, \frac{1}{e^{\alpha(r-\varrho)}} \sqrt{\frac{r}{\varrho}} \,.$$

$$\cdot \left[\frac{\left(1-\frac{\varrho}{r}\right)\alpha}{1+0\left(\frac{1}{\alpha}\right)} + 0\,(1) \right] \operatorname{sen} \alpha z \,;$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho} = \frac{p}{p^2+\alpha^2} \cdot \frac{I_0(\alpha r)\,.\,I_1(\alpha\varrho) - \frac{3}{2\alpha r}\,.\,I_1(\alpha r)\, I_1(\alpha\varrho) - \frac{\varrho}{r}\, I_1(\alpha r)\, I_0(\alpha\varrho)}{I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2\alpha^2 r^2} + 1\right\} I_1^2(\alpha r)} =$$

$$= \frac{p}{p^2+\alpha^2} \sqrt{\frac{r}{\varrho}}\, \frac{1}{e^{\alpha(r-\varrho)}} \cdot \frac{1-\frac{\varrho}{r} - \frac{1}{8\alpha r}\left(\frac{3r}{\varrho} - \frac{3\varrho}{r} + 12\right) + 0\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{8\left[\frac{1}{8\alpha r} - \frac{10}{(8\alpha r)^2}\right] + 0\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)} =$$

$$= \frac{p}{p^2+\alpha^2} \sqrt{\frac{r}{\varrho}}\, \frac{1}{e^{\alpha(r-\varrho)}} \left[\frac{\alpha r\left(1-\frac{\varrho}{r}\right)}{1+0\left(\frac{1}{\alpha}\right)} + 0\,(1) \right].$$

Inoltre è:

$$\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=0} = 0$$

e

$$\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=r} = -\frac{p}{p^2+\alpha^2}\, \frac{\frac{3}{2\alpha r}\,.\,I_1^2(\alpha r)}{I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2\alpha^2 r^2}+1\right\} I_1^2(\alpha r)} =$$

$$-\frac{p}{p^2+\alpha^2}\, \frac{3\left(1-\frac{6}{8\alpha r}\right) + 0\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{16\,\alpha r\left[\frac{1}{8\alpha r} - \frac{10}{(8\alpha r)^2}\right] + 0\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)} \,;$$

analogo sviluppo e dimostrazione vale per $\dfrac{\partial (\Phi_2 \operatorname{sen} \alpha z)}{\partial z} = \alpha\, \Phi_2 \cos \alpha z$.

Osservando che, nelle derivate seconde, per ϱ vale la limitazione $0 < \varrho < r$, sussiste ancora la dimostrazione fatta per le derivate prime. La loro espressione è data da:

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varrho^2} = \frac{p}{p^2+\alpha^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(\alpha + \frac{2}{\alpha \varrho^2}\right) I_0(\alpha r) I_1(\alpha \varrho) + \left[\frac{1}{2r} + \frac{3}{\alpha^2 r \varrho^2}\right] I_1(\alpha r) I_1(\alpha \varrho) - \left(\frac{3}{2\alpha r \varrho} + \frac{\varrho}{r}\alpha\right) I_0(\alpha \varrho) I_1(\alpha r) - \frac{1}{\varrho} I_0(\alpha r) I_0(\alpha \varrho)}{I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2\alpha^2 r^2} + 1\right\} I_1^2(\alpha r)} =$$

$$= \frac{p}{p^2+\alpha^2} \sqrt{\frac{r}{\varrho}} \frac{1}{e^{\alpha(r-\varrho)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\alpha\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) + \left(\frac{9}{8r} - \frac{19}{8\varrho}\right) + \frac{1}{8\alpha r}\left(\frac{9}{16r} - \frac{247}{16\varrho} + \frac{3\varrho}{r} + \frac{15\varrho}{16r^2} + \frac{15r}{\varrho^2}\right) + 0\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{8\left[\frac{1}{8\alpha r} - \frac{10}{(8\alpha r)^2}\right] + 0\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)};$$

$$\frac{\partial^2 (\Phi_1 \cos \alpha z)}{\partial \varrho \, \partial z} = -\alpha \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} \operatorname{sen} \alpha z = -\frac{p}{p^2+\alpha^2} \sqrt{\frac{r}{\varrho}} \frac{1}{e^{\alpha(r-\varrho)}} \left[\frac{\alpha^2 r \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)}{1 + 0\left(\frac{1}{\alpha}\right)} + 0(1)\right] \operatorname{sen} \alpha z;$$

$$\frac{\partial^2 (\Phi_1 \cos \alpha z)}{\partial z^2} = -\alpha^2 \Phi_1 \cos \alpha z;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varrho^2} = \frac{p}{p^2+\alpha^2} \cdot \frac{\alpha I_0(\alpha r) I_0(\alpha \varrho) - \frac{5}{2r} I_0(\alpha \varrho) I_1(\alpha r) - \frac{1}{\varrho} I_0(\alpha r) I_1(\alpha \varrho) + \left(\frac{3}{2\alpha r \varrho} - \frac{\alpha \varrho}{r}\right) . I_1(\alpha r) I_1(\alpha \varrho)}{I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2\alpha^2 r^2} + 1\right\} I_1^2(\alpha r)};$$

$$\frac{\partial^2 (\Phi_2 \operatorname{sen} \alpha z)}{\partial \varrho \, \partial z} = \alpha \cos \alpha z \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho} \quad ; \quad \frac{\partial^2 (\Phi_2 \operatorname{sen} \alpha z)}{\partial z^2} = -\alpha^2 \Phi_2 \operatorname{sen} \alpha z .$$

3. *Teorema di esistenza.* — *a*) Verifica delle equazioni.

1ª *Equazione.*

$$(1 + \lambda) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^2} u\right] + \frac{\partial u}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho \, \partial z} = 0.$$

Posto $\lambda = 2$ e sostituendo le espressioni di u e w date dalle (13), si ha:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{3\left[\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varrho}-\frac{1}{\varrho^2}\Phi_1\right]-2\alpha\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varrho}-\alpha^2\Phi_1\right\}\cos\alpha z\,d\alpha=0.$$

Tenendo conto delle (12) risulta infatti nulla la funzione integranda, essendo:

$$3\left[\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varrho}-\frac{1}{\varrho^2}\Phi_1\right]-2\alpha\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varrho}-\alpha^2\Phi_1=$$

$$=\frac{p}{p^2+\alpha^2}\,\frac{1}{I_0^2(\alpha r)-\left\{\frac{3}{2\alpha^2 r^2}+1\right\}I_1^2(\alpha r)}\cdot\Bigg\{3\Bigg[\left(\overset{1}{\alpha}+\overset{2}{\frac{2}{\alpha\varrho^2}}\right)I_0(\alpha r)\,I_1(\alpha\varrho)+$$

$$+\left(\overset{3}{\frac{1}{2r}}+\overset{4}{\frac{3}{\alpha^2 r\varrho^2}}\right)I_1(\alpha r)\,I_1(\alpha\varrho)-\left(\overset{5}{\frac{3}{2\alpha r\varrho}}+\overset{6}{\frac{\varrho\alpha}{r}}\right)\cdot I_0(\alpha\varrho)\,I_1(\alpha r)-$$

$$-\frac{1}{\varrho}I_0(\overset{7}{\alpha r})\,I_0(\alpha\varrho)+\frac{1}{\varrho}I_0(\alpha r)\,\overset{7}{I_0}(\alpha\varrho)+\frac{1}{2\alpha r\varrho}\cdot I_0(\overset{5}{\alpha\varrho})\,I_1(\alpha r)-$$

$$-\frac{1}{\alpha\varrho^2}\overset{2}{I_0}(\alpha r)\,I_1(\alpha\varrho)\quad\left(\overset{4}{\frac{3}{2\alpha^2 r\varrho^2}}+\overset{3}{\frac{1}{r}}\right)\cdot I_1(\alpha r)\,I_1(\alpha\varrho)-\frac{1}{\alpha\varrho^2}\overset{2}{I_0}(\alpha r)\,I_1(\alpha\varrho)-$$

$$-\frac{3}{2\alpha^2 r\varrho}I_1(\overset{4}{\alpha r})\,I_1(\alpha\varrho)+\frac{1}{\alpha r\varrho}I_0(\overset{5}{\alpha\varrho})\,I_1(\alpha r)\Bigg]-$$

$$-2\left[\alpha I_0(\alpha r)\,\overset{1}{I_1}(\alpha\varrho)-\frac{3}{2r}I_1(\overset{3}{\alpha r})\cdot I_1(\alpha\varrho)-\frac{\alpha\varrho}{r}I_1(\overset{6}{\alpha r})\,I_0(\alpha\varrho)\right]-$$

$$-\alpha I_0(\alpha r)\,\overset{1}{I_1}(\alpha\varrho)-\frac{3}{2r}I_1(\overset{3}{\alpha r})\,I_1(\alpha\varrho)+\frac{\alpha\varrho}{r}I_0(\alpha\varrho)\,I_1(\alpha r)\Bigg\}=0$$

2ª *Equazione*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial\varrho}+(1+\lambda)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\lambda\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho\,\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\right]=0.$$

Posto $\lambda = 2$ e per le (13):

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varrho}-3\alpha^2\Phi_2+2\alpha\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varrho}+\frac{2\alpha}{\varrho}\Phi_1\right\}\operatorname{sen}\alpha z\,d\alpha=0$$

mentre per le (12) si ha:

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho} - 3\alpha^2 \Phi_2 + 2\alpha \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} + \frac{2\alpha}{\varrho}\Phi_1 =$$

$$= \frac{p}{p^2+\alpha^2}\cdot\frac{1}{I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2\alpha^2 r^2}+1\right\} I_1^2(\alpha r)}\cdot\Big\{\alpha I_0(\alpha \overset{1}{r}) I_0(\alpha\varrho) - \frac{5}{2r} I_1(\alpha \overset{2}{r}) I_0(\alpha\varrho) -$$

$$-\overset{3)}{\frac{1}{\varrho} I_0(\alpha r) I_1(\alpha\varrho)} + \left(\overset{(4)}{\frac{3}{2\alpha r\varrho}} - \overset{5}{\frac{\alpha\varrho}{r}}\right) I_1(\alpha r) I_1(\alpha\varrho) + \overset{3}{\frac{1}{\varrho} I_0(\alpha r) I_1(\alpha\varrho)} -$$

$$\frac{3}{2\alpha r\varrho} I_1(\alpha \overset{4}{r}) I_1(\alpha\varrho) - \frac{1}{r} I_1(\alpha \overset{2}{r}) I_0(\alpha\varrho) \quad 3\alpha I_0(\alpha \overset{1}{r}) I_0(\alpha\varrho) +$$

$$+\frac{9}{2r} I_1(\alpha \overset{2}{r}) I_0(\alpha\varrho) + \frac{3\alpha\varrho}{r} I_1(\alpha \overset{5}{r}) I_1(\alpha\varrho) + 2\alpha I_0(\alpha \overset{1}{r}) I_0(\alpha\varrho) +$$

$$+\overset{2}{\frac{1}{r} I_1(\alpha r) I_0(\alpha\varrho)} - \overset{6}{\frac{2}{\varrho} I_0(\alpha r) I_1(\alpha\varrho)} - \left(\overset{7}{\frac{3}{\alpha r\varrho}} + \overset{5}{\frac{2\alpha\varrho}{r}}\right) I_1(\alpha r) I_1(\alpha\varrho) +$$

$$+\frac{2}{\varrho} I_0(\alpha \overset{(6)}{r}) I_1(\alpha\varrho) + \frac{3}{\alpha r\varrho} I_1(\alpha \overset{(7)}{r}) I_1(\alpha\varrho) - \frac{2}{r} I_1(\alpha \overset{(2)}{r}) I_0(\alpha\varrho)\Big\} = 0.$$

b) **Verifica delle condizioni al contorno.**

Per la seconda condizione si ha:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=r} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \alpha\,\Phi_1 \operatorname{sen}\alpha z\, d\alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho}\operatorname{sen}\alpha z\, d\alpha = 0.$$

Infatti è:

$$\alpha\,\Phi_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho} = 0.$$

Per la prima, posto $\lambda = 2$, si ha:

$$\left[\frac{1}{r}u + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right]_{\varrho=r} + 3\left[\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right]_{\varrho=r} = e^{-p|z|}.$$

Il primo membro, per le (13) e (12), è dato da:

$$\int_0^\infty \left|\frac{1}{r}\,\Phi_1 \cos\alpha z - \alpha\,\Phi_2 \cos\alpha z\right|_{\varrho=r} d\,\alpha + 3\int_0^\infty \left|\frac{\partial\,\Phi_1}{\partial\,\varrho}\right|_{\varrho=r} \cos\alpha z d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{p\cos\alpha\, z}{p^2+\alpha^2}\,\cdot$$

$$\frac{\frac{3}{\alpha^2 r^2} I_1'(\alpha r) - I_0^2(\alpha r) + \frac{3}{2\alpha r} I_0(\alpha r) I_1(\alpha r) + I_1^2(\alpha r) + 3 I_0^2(\alpha r) \quad \frac{3}{2\alpha r} I_0(\alpha r) I_1(\alpha r) - \frac{9}{2\alpha^2 r^2} I_1^2(\alpha r) - 3 I_1^2(\alpha r)}{I_1^2(\alpha\, r) - \left\{\frac{3}{2\,\alpha^2\,r^2}+1\right\} I_1^2(\alpha\, r)}\, d\,\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{p\cos\alpha z}{p^2+\alpha^2}\cdot\frac{2\left[I_0'(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2\alpha^2 r^2}+1\right\} I_1^2(\alpha\, r)\right]}{I_0^2(\alpha r) - \left\{\frac{3}{2\alpha^2 r^2}+1\right\} I_1^2(\alpha\, r)}\, d\alpha - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p\cos\alpha z}{p^2+\alpha^2}\, d\,\alpha$$

per cui deve essere:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p\cos\alpha\, z}{p^2+\alpha^2}\, d\,\alpha = e^{-p|z|}\,.$$

Posto $x = \dfrac{\alpha}{p}$ e $n = p\, z$.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\cos n\, x\, d\, x = e^{-n}; \tag{16}$$

osservando che

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\cdot e^{-n}\, d\, x = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-n}$$

la (16) si può scrivere:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}(\cos n\, x - e^{-n})\, dx = 0.$$

Si ha infatti che al limite per $n \to 0$ la funzione integranda è nulla.

[*Pervenuto alla Redazione il 29 luglio 1949*]