Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Dario Del Pasqua

Risoluzione, con sole integrazioni, dell'equazione differenziale di tipo parabolico, con i dati di Cauchy su una curva assegnata

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 2, nº 1-4 (1950), p. 55-61

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_2_1-4_55_0>

RISOLUZIONE, CON SOLE INTEGRAZIONI, DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI TIPO PARABOLICO, CON I DATI DI CAUCHY SU UNA CURVA ASSEGNATA.

di DARIO DEL PASQUA (Roma)

Mi propongo di determinare, con sole integrazioni, la soluzione dell'equazione differenziale a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico (lineare, omogenea, a coefficienti costanti):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,, \tag{1}$$

quando le condizioni iniziali siano date su una curva Γ di equazione:

$$x = \psi(y)\,, \qquad [y = \overline{\psi}(x)] \tag{2}$$

e precisamente siano:

$$\begin{cases} z(\psi(y), y) = \varphi_0(y)\,, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x}_{(\psi(y),\, y)} = \varphi_1(y)\,. \end{cases} \tag{3}$$

Faccio uso del metodo del calcolo degli operatori funzionali del Prof. L. FANTAPPIÈ, da lui esposto quest'anno nel suo corso all'Istituto Nazionale di Alta Matematica e già applicato a risolvere la (1) e altre equazioni con i dati di Cauchy su una retta parallela all'asse y. [1]

---

[1] L. FANTAPPIÈ: a) *Soluzione con quadrature del problema di* CAUCHY-KOWALEWSKI *per le equazioni di tipo parabolico* (Rend Acc Naz Lincei, vol. XVII, 1° sem. 1933, p. 897); b) *Integrazione per quadrature dell'equazione parabolica generale, a coefficienti costanti* (Rend. Acc. Naz. Lincei, vol. XVIII, 2° sem. 1933, p. 266); c) *Intégration par quadratures de l'équation parabolique générale, à coefficientes costants sur les caractéristiques* (C. R. Ac. de France, t. 197, 1933, p. 969).

La curva Γ sia analitica regolare nel campo che ci interessa, e inoltre sia incontrata in un sol punto da ogni parallela all'asse x. Le funzioni $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$ e $\psi(y)$ siano analitiche in un certo campo $|y - y_0| < \varrho$.

Introduciamo l'operatore:

$$I f(x, y) = \int_{\psi(y)}^{x} f(t, y)\, d t .$$

In generale questo non è permutabile con l'operatore $\dfrac{\partial}{\partial y}$, poichè si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y} I f = I \frac{\partial f}{\partial y} - \psi'(y)\, f(\psi(y), y) .$$

Escludendo che sia $\psi'(y) = 0$ identicamente, e cioè che Γ sia una retta $x =$ cost. (caso già studiato nei lavori citati di L. FANTAPPIÉ), per la permutabilità occorre che sia $f(\psi(y), y) = 0$. Ciò però non si verifica in generale per la funzione $z(x, y)$ che dovrà risolvere la (1), a causa della prima delle (3). Effettuiamo allora la sostituzione:

$$z_1(x, y) = I z(x, y) = \int_{\psi(y)}^{x} z(t, y)\, d t , \tag{4}$$

dalla quale si ha:

$$z(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} z_1(x, y) . \tag{5}$$

Con tale sostituzione la (1) diviene:

$$\frac{\partial^3 z_1}{\partial x^3} - a \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = 0 , \tag{6}$$

e le condizioni cui deve soddisfare $z_1(x, y)$ sono:

$$\begin{cases} z_1(\psi(y), y) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{(\psi(y), y)} = \varphi_0(y) \\ \left.\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right|_{(\psi(y), y)} = \varphi_1(y) \end{cases} \tag{7}$$

L'operatore I applicato a $z_1(x, y)$ è ora permutabile con l'operatore $\frac{\partial}{\partial y}$. Applichiamolo alla (6). Siccome, tenendo conto delle (7), si ha:

$$I \frac{\partial^3 z_1}{\partial x^3} = \left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right]_{\psi(y)}^{x} = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - \varphi_1(y),$$

$$(8) \quad I \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \, \partial y} = \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|_{\psi(y)}^{x} = \left|\int_{\psi(y)}^{x} \frac{\partial z}{\partial y} \, d t - z(\psi(y), y) \psi'(y)\right|_{\psi(y)}^{x} = \frac{\partial z_1}{\partial y} + \varphi_0(y) \psi'(y),$$

la (6) diviene:

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - a \frac{\partial z_1}{\partial y} = \varphi_1(y) + a \varphi_0(y) \psi'(y).$$

Applicando ancora I, si ottiene:

$$(10) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x} - a I \frac{\partial z_1}{\partial y} = I \varphi_1(y) + a I \varphi_0(y) \psi'(y) + \varphi_0(y).$$

Consideriamo ora l'equazione che si ottiene da questa sostituendo formalmente un parametro λ all'operatore I:

$$(11) \qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - a \lambda \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial y} = \lambda \varphi_1(y) + a \lambda \varphi_0(y) \psi'(y) + \varphi_0(y),$$

con la condizione:

$$(12) \qquad \bar{z}(\psi(y), y, \lambda) = 0.$$

La soluzione di questa equazione è l'integrale del secondo membro lungo la retta uscente da $P(x, y)$ con coefficiente angolare $-a\lambda$, fra i punti Q (intersezione della retta con la curva Γ) e P. Occorre perciò determinare l'ascissa ξ di Q. La retta lungo cui dobbiamo integrare ha equazione:

$$\eta - y = - a \lambda (\xi - x),$$

con ξ e η coordinate correnti. Formando sistema con l'equazione di Γ:

$$\eta = \bar{\psi}(\xi),$$

si ottiene l'equazione:

$$(13) \qquad \bar{\psi}(\xi) - y = - a \lambda \xi + a \lambda x.$$

e risolvendo in ξ:

$$\xi = \xi(x, y, \lambda).$$

Riguardo a questa funzione $\xi(x, y, \lambda)$ sono da notare le due seguenti proprietà:

1) per $\lambda = 0$ risulta:

$$\xi_{\lambda=0} = \psi(y),$$

perchè la retta PQ è parallela all'asse x;

2) per $x = \psi(y)$ è:

$$\xi_{x=\psi(y)} = \psi(y),$$

perchè il punto P si trova su Γ e quindi Q coincide con esso.

La soluzione della (11) soddisfacente la (12) è data da:

$$(14) \qquad \bar{z}(x,y,\lambda) = \int_{\xi(x,y,\lambda)}^{x} \lambda\varphi_1(y + a\lambda(x-t))dt + \int_{\xi(x,y,\lambda)}^{x} \{a\lambda\psi'(y + a\lambda(x-t)) + 1\}\varphi_0(y + a\lambda(x-t))dt.$$

Siccome nella equazione (11) il parametro λ compare analiticamente, la $\bar{z}(x, y, \lambda)$ risulta funzione analitica di λ almeno in un intorno conveniente di $\lambda = 0$, e come tale ammette uno sviluppo in serie di potenze:

$$(14') \qquad \bar{z}(x, y, \lambda) = \sum_{0}^{\infty}{}_n \lambda^n \bar{z}_n(x, y)$$

convergente uniformemente in un cerchio di centro $\lambda = 0$.

Sostituendo a λ l'operatore I, otteniamo ancora una serie totalmente convergente, che rappresenta una funzione $z_1(x, y)$:

$$(15) \qquad z_1(x, y) = \{\bar{z}(x, y, \lambda)\}_{\lambda=I} = \sum_{0}^{\infty}{}_n I^n z_n(x, y).$$

Proviamo che questa funzione soddisfa l'equazione (10).

Intanto si ha:

$$(16) \qquad \frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}_0(x, y)}{\partial x} + \sum_{1}^{\infty}{}_n I^{n-1} \bar{z}_n(x, y).$$

Siccome poi la $\bar{z}(x, y, \lambda)$ soddisfa la (12), e perciò per $x = \psi(y)$ sono nulli tutti i coefficienti dello sviluppo (14'), gli operatori I e $\frac{\partial}{\partial x}$ applicati ai coefficienti $\bar{z}_n(x, y)$ sono permutabili, e quindi:

$$\left\{\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\right\}_{\lambda=I} = \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial x} + \left\{\sum_1^{\infty}{}_n \lambda^n \frac{\partial \bar{z}_n}{\partial x}\right\}_{\lambda=I} = \frac{\partial \bar{z}_0}{\partial x} + \sum_1^{\infty}{}_n I^{n-1} \bar{z}_n ,$$

e confrontando con la (16) ricaviamo:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \left\{\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\right\}_{\lambda=y} .$$

Similmente, data la permutabilità, nel nostro caso, di I con $\frac{\partial}{\partial y}$, abbiamo:

$$I \frac{\partial z_1}{\partial y} = \left\{\lambda \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right\}_{\lambda=I} .$$

Sottraendo membro a membro quest'ultima relazione moltiplicata per a dalla precedente, si ha:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} - a I \frac{\partial z_1}{\partial y} = \left\{\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\right\}_{\lambda=I} - a \left\{\lambda \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right\}_{\lambda=I} = \left\{\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} - a \lambda \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}\right\}_{\lambda=I} ,$$

ed anche, poichè $\bar{z}(x, y, \lambda)$ soddisfa la (11):

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} - a I \frac{\partial z_1}{\partial y} = \{\lambda \varphi_1(y) + a \lambda \varphi_0(y) \psi'(y) + \varphi_0(y)\}_{\lambda=I} =$$
$$= I \varphi_1(y) + a I \varphi_0(y) \psi'(y) + \varphi_0(y) ,$$

cioè: la funzione $z_1(x, y)$ definita dalla (15) è soluzione dell'equazione (10).

È poi evidente che soddisfa alla condizione di annullarsi su Γ, poichè per $\bar{z}(x, y, \lambda)$ vale la (12).

Derivando membro a membro la (10) rispetto a x, si ottiene la (9), che così risulta verificata dalla funzione $z_1(x, y)$; e infine, derivando ancora rispetto a x, risulta soddisfatta anche la (6), la quale non è altro che la (1), quando vi si ponga $z(x, y) = \frac{\partial z_1(x, y)}{\partial x}$.

Riguardo alle condizioni (7), abbiamo già verificato la prima. La verifica della seconda si fa direttamente sulla (10), ed è immediata, poichè per $x = \psi(y)$ si annullano tutti i termini dove compare l'operatore I, e perciò rimane:

$$\left.\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{(\psi(y), y)} = \varphi_0(y) ,$$

come deve essere. La verifica della terza condizione si ottiene ponendo $x = \psi(y)$ nella (9); dalla (8) risulta:

$$\left.\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|_{(\psi(y),\,y)} = -\varphi_0(y)\,\psi'(y)\,,$$

ed allora la (9) ci dà:

$$\left.\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right|_{(\psi(y),\,y)} = \varphi_1(y) + a\,\varphi_0(y)\,\psi'(y) - a\,\varphi_0(y)\,\psi'(y) = \varphi_1(y)$$

La espressione di $z_1(x\,,y)$ si ottiene da quella di $\bar{z}(x\,,y\,,\lambda)$ mediante la formula [2]:

$$z_1(x\,,y) = \{\bar{z}(x\,,y\,,\lambda)\}_{\lambda \to 1} = \bar{z}(x\,,y\,,0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\int_{\psi(y)}^{x} e^{\frac{x-\tau}{\lambda}}\,\bar{z}(\tau\,,y\,,\lambda)\,d\tau\,,$$

dove C_0 è una curva chiusa comunque piccola del piano complesso λ, racchiudente all'interno il solo punto singolare $\lambda = 0$. Dalla (11), tenendo conto che $\xi(x\,,y\,,0) = \psi(y)$, si ha:

$$z(x\,,y\,,0) = \int_{\psi(y)}^{x}\varphi_0(y)\,dt = \varphi_0(y)\,|x - \psi(y)|\,.$$

Otteniamo allora per $z_1(x\,,y)$ l'espressione:

$$z_1(x\,,y) = \varphi_0(y)\,|x - \psi(y)| + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_{\psi(y)}^{x} d\tau\int_{\xi(\tau,y,\lambda)}^{\tau} e^{\frac{x-t}{\lambda}}\,\varphi_1(y + a\lambda(\tau - t))\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\int_{\psi(y)}^{x} d\tau\int_{\xi(\tau,y\,\lambda)}^{\tau} e^{\frac{x-\tau}{\lambda}}\,\{a\lambda\,\psi'(y + a\lambda(\tau - t)) + 1\}\,\varphi_0(y + a\lambda(\tau - t))\,dt\,.$$

Da questa espressione infine, per la (5), ricaviamo la funzione $z(x\,,y)$ che risolve il problema:

$$z(x\,,y) = \frac{\partial z_1(x\,,y)}{\partial x} = \varphi_0(y) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_{\xi(x\,y,\lambda)}^{x}\varphi_1(y + a\lambda(x - t))\,dt +$$

(2) Cfr. L. FANTAPPIÈ, nota citata in (1), a).

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\int\limits_{\psi(y)}^{x}d\tau\int\limits_{\xi(\tau,y,\lambda)}^{\tau}e^{\frac{x-\tau}{\lambda}}\varphi_1(y+a\lambda(\tau-t))\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\int\limits_{\xi(x,y,\lambda)}^{x}\{a\lambda\psi'(y+a\lambda(x-t))+1\}\varphi_0(y+a\lambda(x-t))\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\int\limits_{\psi(y)}^{x}d\tau\int\limits_{\xi(\tau,y,\lambda)}^{\tau}e^{\frac{x-\tau}{\lambda}}\{a\lambda\psi'(y+a\lambda(\tau-t))+1\}\varphi_0(y+a\lambda(\tau-t))\,dt\,.$$

A questa espressione possiamo dare una forma più semplice calcolando i residui dei termini dove non compare l'esponenziale, e si trova:

$$z(x,y)=\varphi_0(y)+\varphi_1(y)[x-\psi(y)]+\frac{1}{2}a\varphi_0'(y)[x-\psi(y)]^2+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{d\lambda}{\lambda^2}\int\limits_{\psi(y)}^{x}d\tau\int\limits_{\xi(\tau,y,\lambda)}^{\tau}e^{\frac{x-\tau}{\lambda}}\varphi_1(y+a\lambda(\tau-t))\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{d\lambda}{\lambda^3}\int\limits_{\psi(y)}^{x}d\tau\int\limits_{\xi(\tau,y,\lambda)}^{\tau}e^{\frac{x-\tau}{\lambda}}\{a\lambda\psi'(y+a\lambda(\tau-t))+1\}\varphi_0(y+a\lambda(\tau-t))\,dt\,.$$

NOTA. — Il procedimento qui seguito può applicarsi invariato al caso dell'equazione non omogenea:

$$\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2}-a\frac{\partial z^*}{\partial y}=f(x,y)\,.$$

($f(x,y)$ funzione analitica in y e almeno integrabile in x), ancora con le condizioni (2). Nei risultati compariranno anche dei termini derivanti dalla $f(x,y)$. Precisamente si trova che:

$$z^*(x,y)=z(x,y)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0}\frac{d\lambda}{\lambda}\int\limits_{\psi(y)}^{x}d\tau\int\limits_{\xi(\tau,y,\lambda)}^{\tau}e^{\frac{x-\tau}{\lambda}}f(t,y+a\lambda(\tau-t))\,dt\,,$$

dove $z(x,y)$ è la soluzione, sopra trovata, dell'equazione omogenea.

[*Pervenuto alla Redazione il 4 giugno 1949*]