

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ROBERTO CONTI

Sul problema di Cauchy per le equazioni di tipo misto $y^k z_{xx} - x^k z_{yy} = 0$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 2, n° 1-4 (1950), p. 105-130

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_2_1-4_105_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUL PROBLEMA DI CAUCHY PER LE
EQUAZIONI DI TIPO MISTO $y^k z_{xx} - x^k z_{yy} = 0$ (*)**

di ROBERTO CONTI (Firenze)

INTRODUZIONE

Nella Memoria da cui ha avuto origine la teoria delle equazioni alle derivate parziali di tipo misto ⁽¹⁾ F. TRICOMI ha tra l'altro trattato il problema di CAUCHY per l'equazione (iperbolico-ellittica):

$$(1) \quad y z_{xx} + z_{yy} = 0$$

supponendo i dati assegnati in forma ordinaria $\vartheta(x)$, $\zeta(x)$ su di un intervallo $x_0 \leq x \leq x_1$ appartenente alla linea parabolica ($y = 0$).

Alla stessa questione per le equazioni (iperbolico-paraboliche)

$$(2) \quad y^k z_{xx} - z_{yy} = 0; \quad k \text{ intero, pari,}$$

è in parte dedicato uno dei primi lavori della Sig.ra CINQUINI-CIBRARIO ⁽²⁾.
Per maggior chiarezza poniamo ora alcune premesse.

(*) La presente ricerca comprende una parte della mia Tesi di Perfezionamento discussa nel luglio 1948 presso la Scuola Normale Superiore.

⁽¹⁾ Ved.: F. TRICOMI, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto*, Memorie Lincei (5) 14, pp. 133-247, (1923); in particolare ved. Cap. II, §§ 1, 2, 3. Per un'equazione più generale della (1) ved.: F. FRANKL, *Boll. Ac. Sc. URSS, Serie Mat.*, 8, pp. 195-224, (1944), (in russo), dove peraltro la trattazione è « in piccolo ».

⁽²⁾ Ved.: MARIA CIBRARIO, *Primi studi intorno alle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo misto iperbolico-paraboliche*, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, 56, pp. 385-418, (1932); in particolare i §§ 1, 2, 3, 4. Si veda anche: F. S. BERESIN, *Mat. Sbornik*, T. 24 (66) : 2, pp. 301-320, (marzo-aprile 1919; in russo) dove è considerata un'equazione lineare completa.

Osservato che per la (1) come per la (2) le linee caratteristiche nella regione iperbolica si ripartiscono in due distinti sistemi formanti « rete », si può chiamare « dominio caratteristico relativo all'intervallo $x_0 \leq x \leq x_1$ » il dominio appartenente alla regione iperbolica che ha per frontiera gli archi di linea caratteristica di sistemi diversi uscenti dai punti $(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$ ed incontrantisi nella regione iperbolica (nonchè, per la (1), il segmento di estremi $(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$).

Inoltre per *soluzione* della (1) o (2) (o, in generale, di una qualunque equazione del 2° ordine nella quale non compaia la derivata mista z_{xy}) in un qualunque dominio D (limitato o no) intenderemo qui una funzione $z(x, y)$ continua nell'insieme somma di D e della frontiera (al finito) di D , la quale funzione ammetta continue nei punti di D le derivate z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} , le due ultime verificando la (1) o (2) (o, in generale, l'equazione priva della z_{xy}).

Infine una soluzione di dette equazioni in un dominio D si dirà *regolare in un punto (al finito) della frontiera di D* se in tale punto esiste finito il limite (superficiale) per ciascuna delle derivate z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} e i due ultimi vi verificano l'equazione in discorso.

Dopo queste precisazioni il risultato principale relativo al problema di CAUCHY per la (2) può enunciarsi dicendo che se $\vartheta(x)$ e $\zeta(x)$ sono funzioni dotate di derivata seconda continua nell'intervallo $x_0 < x < x_1$, esiste ed è unica nel dominio caratteristico relativo a tale intervallo la soluzione della (2) che soddisfa le condizioni di CAUCHY

$$z(x, 0) = \vartheta(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1; \quad z_y(x, 0) = \zeta(x), \quad x_0 < x < x_1.$$

La stessa conclusione sussiste, sotto le medesime ipotesi, per la (1) ed inoltre si vede senza difficoltà che dette ipotesi assicurano la regolarità nei punti dal segmento parabolico di estremi $(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$.

Indirizzato in questo interessante campo di ricerche dal Prof. G. SANSONE, al quale esprimo volentieri il mio vivo ringraziamento, ho da qualche tempo preso a studiare equazioni di tipo misto dotate di linea parabolica spezzata nei due assi coordinati. La classe presa qui in esame è la

$$(A) \quad y^k z_{xx} - x^k z_{yy} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

costituita di equazioni che, applicando una terminologia ormai corrente, possono dirsi del secondo tipo misto, iperbolico-paraboliche (se k è pari) o iperbolico-ellittiche (se k è dispari). Il problema di cui ci occuperemo è ancora quello di CAUCHY con i dati assegnati sulla linea parabolica.

Adottando per le (A) le definizioni poste sopra di soluzione in un dominio e di soluzione regolare in un punto frontiera, mostreremo che i

risultati validi per la (1) e la (2) (delle quali le (Δ) sono in certo senso una generalizzazione) sussistono per le (A) nel caso in cui l'intervallo, finito o no, non contenga come punto interno l'origine O degli assi coordinati⁽³⁾. Se O risulta interno l'estensione non è in generale senz'altro possibile come mostra un semplice esempio (n. 9), nè ciò è del tutto inatteso, data la natura « doppiamente » singolare del punto O .

Il lavoro è diviso in due §§; nel § 1, attraverso uno studio preliminare della funzione di RIEMANN della (A) (nn. 1, 2) si giunge al teor. fondamentale (n. 3) ed al teor. di unicità (n. 4) che ne è conseguenza immediata. Si è cercato qui, come nel seguito, di ridurre al minimo i calcoli, in genere piuttosto laboriosi, fidando sulla notorietà del metodo di RIEMANN e sulla notevole analogia che lo studio della funzione omonima presenta con quello della funzione di RIEMANN delle (2); per rendere tale analogia anche più evidente si sono adattate al caso nostro quasi tutte le notazioni usate dalla Sig.ra CINQUINI-CIBRARIO per le (2). Ci siamo invece discostati dal procedimento usato da questo Autore per dimostrare il Suo teor. di unicità, quantunque tale procedimento si possa adattare al caso nostro, a parte la maggiore complicazione formale; la via seguita qui, permette di giungere alla formula risolutiva (formula (C); n. 3) in modo forse più evidente. Tale formula è analoga a quelle relative alla (1) e (2), ma notevolmente più complicata e ciò rende meno agevole la dimostrazione esistenziale (§ 2). La quale viene compiuta in due tempi (nn. 6, 7) e conduce ad un teor. (n. 8) enunciando il quale si è cercato di ridurre il più possibile le ipotesi. Si è preferito di non tralasciare del tutto i calcoli principalmente allo scopo di mettere in luce le conseguenze derivanti dalle singole ammissioni.

Infine lo studio del caso $x_0 < 0 < x_1$ (che come si è detto sopra è, per ora almeno, risolto in senso negativo, per quanto riguarda l'esistenza, dall'esempio del n. 9) fa parte di un altro lavoro in fase di elaborazione; per il momento basti l'aver accennato alla questione.

⁽³⁾ La Sig.ra CINQUINI-CIBRARIO, alla quale sottoposi una prima redazione del presente lavoro ed alla quale pure rivoigo il mio ringraziamento cordiale, mi ha fatto gentilmente rilevare che la trasformazione

$$X = x^{\varrho}/\varrho, \quad Y = y; \quad \varrho = k/2 + 1$$

muta la (A) nella

$$Y^k Z_{XX} - Z_{YY} + \frac{\varrho - 1}{\varrho} \frac{Y^k}{X} Z_X = 0$$

la quale non è che una lieve generalizzazione della (2) (o, per $k = 1$, della (1)). Essendo la trasformazione ora adottata, reale ed invertibile per $x \neq 0$ segue che risultati veramente « nuovi » sono da considerarsi soltanto quelli relativi al caso in cui l'origine O non sia esterna all'intervallo $x_0 \leq x \leq x_1$

§ 1. **Unicità della soluzione.**

1. — *Preliminari: la funzione* $u(X, Y; x, y)$ *di RIEMANN.*

È opportuno, per rendere più spedita in seguito la trattazione, premettere uno studio della funzione di RIEMANN della (A) e cioè della funzione di quattro variabili X, Y, x, y :

$$(B) \quad u(X, Y; x, y) = 2^{k\beta} D^{-\beta} F(\beta, \beta, 1; \sigma)$$

dove, posto

$$(1) \quad \varrho = k/2 + 1$$

è

$$(2) \quad \beta = \frac{\varrho - 1}{2\varrho} = \frac{k}{2(k+2)}$$

e posto, se $k = 2h$, ($h = 1, 2, \dots$), od anche se $k = 2h - 1$ ($h = 1, 2, \dots$), $X > 0$, $Y > 0$, $x > 0$, $y > 0$

$$(3) \quad A = X^\varrho - Y^\varrho, \quad B = X^\varrho + Y^\varrho$$

$$(4) \quad a = x^\varrho - y^\varrho, \quad b = x^\varrho + y^\varrho$$

ovvero, se $k = 2h - 1$ ($h = 1, 2, \dots$), $X < 0$, $Y < 0$, $x < 0$, $y < 0$:

$$(3') \quad A = (-X)^\varrho - (-Y)^\varrho; \quad B = (-X)^\varrho + (-Y)^\varrho$$

$$(4') \quad a = (-x)^\varrho - (-y)^\varrho; \quad b = (-x)^\varrho + (-y)^\varrho$$

è anche:

$$(5) \quad D = (B^2 - a^2)(b^2 - A^2)$$

$$(6) \quad \sigma = D^{-1}(A^2 - a^2)(b^2 - B^2).$$

Infine

$$(7) \quad F(\beta, \beta, 1; \sigma) = 1 + (\beta/1!)^2 \sigma + (\beta(\beta+1)/2!)^2 \sigma^2 + \dots$$

è la serie ipergeometrica di « elementi » $\beta, \beta, 1$ nella variabile σ .

Omettiamo per brevità la ricerca completa della u di RIEMANN e ci limitiamo ad osservare che ad essa si giunge, con procedimento analogo a quello seguito per le equazioni (1) e (2) prima citate, cercando una funzione

di forma particolare che soddisfi la « ridotta iperbolica » della (A), vale a dire l'equazione nella quale si muta la (A) mediante l'introduzione di variabili « caratteristiche » ξ, η ⁽⁴⁾.

La serie (7) converge, com'è noto, per $|\sigma| < 1$ ed anche (essendo $1 - 2\beta > 0$) per $\sigma = 1$; in tal caso, introducendo la B euleriana si ha

$$(8) \quad F(\beta, \beta, 1; 1) = \varrho \gamma_2; \quad \gamma_2 = 1/B(1 - \beta, 1 - \beta).$$

Inoltre, essendo $F(\beta, \beta, 1; 0) = 1$, avremo

$$(9) \quad 1 \leq F(\beta, \beta, 1, \sigma) \leq \varrho \gamma_2; \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Interpretando ora le due coppie di variabili $(x, y), (X, Y)$ come coordinate di punti C e G rispettivamente, appartenenti ad uno stesso piano, fissiamo uno dei due punti, ad es. $C \equiv (x, y)$ e studieremo il comportamento della $u(G, C)$ al variare di $G \equiv (X, Y)$ e cioè ricercheremo per quali G la u risulti reale, finita e continua. L'osservare che è $u(C, G) = u(G, C)$ ci dispensa poi dallo studiare il caso di G fisso e C variabile.

Gli integrali dell'equazione differenziale

$$(10) \quad y^k dy^2 - x^k dx^2 = 0$$

cioè le « caratteristiche » della (A), si ripartiscono nella regione iperbolica in due sistemi di curve tali che per ogni punto di detta regione passa una ed una sola curva di ciascun sistema (o, come si dice brevemente, le caratteristiche formano « rete »). Ciò risulta anche da noti teor. validi per equazioni di tipo iperbolico tra le quali rientra la (A) sotto la condizione $(xy)^k > 0$, ma la proprietà sussiste, come è facile verificare, anche per i punti della linea parabolica (ad eccezione dell'origine O degli assi coordinati).

Fissato $C \equiv (x, y)$ nella regione iperbolica e chiamando X, Y le coordinate correnti, con le notazioni adottate, (ved. (3), (4); (3'), (4')) integrando la (10) risultano per le caratteristiche passanti per C le equazioni in forma implicita

$$(11) \quad A - a = 0; \quad B - b = 0$$

(4) Va rilevato esplicitamente però che mentre le equazioni ora dette danno luogo ad una « ridotta » di tipo noto e precisamente ad una equazione del tipo di EULERO-POISSON, ampiamente studiata da DARBOUX (*Surfaces*, 2^a ed., parte 2^a, libro IV, cap. III), l'equazione ridotta della (A) e cioè la

$$v_{\xi\eta} + \beta \frac{2\eta}{\xi^2 - \eta^2} v_{\xi} + \beta \frac{2\xi}{\xi^2 - \eta^2} v_{\eta} = 0$$

non appartiene al tipo suddetto, pur presentando con esso evidente analogia.

le quali rappresentano in ogni caso (cioè per k intero qualunque) delle curve di LAMÉ (o rami di tali curve se $k = 2h - 1$) ⁽⁵⁾.

Distinguiamo ora tre casi secondo la parità di k .

$$\text{I) } k = 2h - 1; \quad h = 1, 2, \dots$$

Il 2° e 4° quadrante ($XY < 0$) costituiscono per la (A) la regione ellittica che qui non interessa.

Per fissare le idee supponiamo $C \equiv (x, y)$ nel I° quadrante, ed anzi, detto Ω_1 il I° « ottante » ($0 \leq Y \leq X$), si può supporre addirittura che C faccia parte di Ω_1 , a causa della

$$(12) \quad u(X, Y; y, x) = u(X, Y; x, y)$$

Supposto dapprima $0 < y < x$ (cioè C interno ad Ω_1) risulta $a > 0$ e quindi per la Iª delle (11), $A > 0$. Dunque la $A - a = 0$ giace tutta in Ω_1 ;

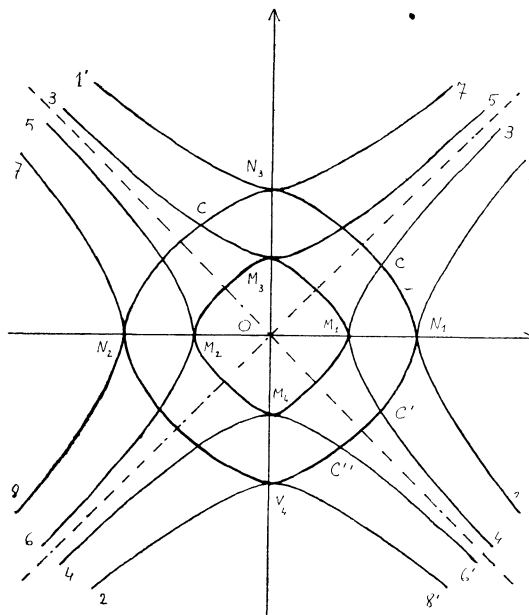


Fig. 1

essa incontra (ortogonalm.) l'asse X in $M_1 \equiv (a^2, 0)$, ha per asintoto la Iª bisettrice, $X = Y$, e non ha punti reali a sinistra della tangente in M_1 ⁽⁶⁾.

⁽⁵⁾ Ved. ad es.: G. LORIA, *Curve piane speciali*, Vol. I, Cap. V, p. 384

⁽⁶⁾ Da ora ed in tutta la discussione seguente ci riferiremo alla fig. 1 che può essere utilizzata, opportunamente interpretata, qualunque sia la parità di k .

La $B - b = 0$ incontra (ortogonalmente) l'asse X in $N_1 \equiv (b^{1/e}, 0)$, è simmetrica rispetto alla I^a bisettrice e non ha punti reali a destra della tangente in N_1 , incontra (ortogonalmente) anche l'asse Y in $N_3 \equiv (0, b^{1/e})$, rivolgendosi sempre la propria concavità verso l'asse X .

La $A - a = 0$ e la $B - b = 0$ sono rappresentate in fig. 1 rispettivamente dalla $3 C M_1$ e dalla $N_1 C N_3$; le $1 N_1$, $5 M_3$, $7 N_3$, $M_1 M_3$ rappresentano rispettivamente le $A - b = 0$, $A + a = 0$, $A + b = 0$, $B - a = 0$.

Essendo $\beta = (2h - 1) / 2(2h + 1)$ affinché $D^{-\beta}$ risulti reale e finita (e continua) deve essere $D > 0$; se ciò accade la condizione $|\sigma| \leq 1$ che assicura la convergenza della $F(\beta, \beta, 1; \sigma)$ equivale alla $(xyXY)^{h+1/2} > 0$, ossia alla $XY > 0$ che è senz'altro verificata finché $G \equiv (X, Y)$ resta nella regione iperbolica. D'altronde, essendo $B + a \geq 0$, la $D > 0$ può scriversi

$$(13) \quad (b^2 - A^2)(B - a) > 0$$

la quale è soddisfatta finché G fa parte dell'insieme I_1 costituito dai punti interni alla regione $1 N_1 M_1 M_3 N_3 7$ e dai punti interni ai segmenti $M_1 N_1$ ed $M_3 N_3$. In questi ultimi è $\sigma = 1$ e quindi, per la (B) e le (3), (8) avremo, ad es.:

$$(14) \quad u(X, 0; x, y) = 2^{4\beta} \varrho \gamma_2 (X^{2e} - a^2)^{-\beta} (b^2 - X^{2e})^{-\beta}.$$

La (13) non è soddisfatta sulle $1 N_1$, $M_1 M_3$, $7 N_3$ dove $D^{-\beta}$ diviene infinita e per di più nei punti N_1 , M_1 , M_3 , N_3 la σ e quindi la $F(\beta, \beta, 1; \sigma)$ è indeterminata. Nella regione $C M_1 N_1$ (esclusi i punti M_1 ed N_1) è sempre $0 \leq \sigma \leq 1$ e vale pertanto la (9); nei punti di $C M_1$ e $C N_1$ nei quali è $\sigma = 0$, la u si riduce a

$$(15) \quad u(X, Y; x, y) = (xyXY)^{-h/2}.$$

Quello che accade quando G varia nel 3^o quadrante non ha interesse per il seguito e neppure ciò che segue dall'ipotesi $0 = y < x$ ($0 < a = b$) o dalla $0 < y = x$ ($a = 0$)

$$II) \quad k = 2(2h - 1); \quad h = 1, 2, \dots$$

In questo caso non esiste una regione ellittica e C può essere un qualunque punto del piano, ma poichè insieme alla (12) valgono anche le

$$(12') \quad u(X, Y; -x, y) = u(X, Y; x, -y) = u(X, Y; x, y)$$

possiamo, senza restrizioni, supporre C in Ω_1 ; anche qui esamineremo in particolare solo il caso di C interno ad Ω_1 : $0 < y < x$.

La $A - a = 0$ non taglia l'asse Y , ma incontra (ortogonalmente) l'asse X in M_1 ed in $M_2 \equiv (-a^{1/e}, 0)$: la curva si presenta come una « iperbole equilatera » avente per asintoti le bisettrici degli assi coordinati. La $B - b = 0$ si presenta invece come una « ellisse » che incontra (ortogonalmente) gli assi (i quali, insieme con le bisettrici dette, sono anche assi di simmetria) nei punti $N_1, N_2 \equiv (-b^{1/e}, 0), N_3$ ed $N_4 \equiv (0, -b^{1/e})$.

In fig. 1 le curve $A - a = 0, A + a = 0, A - b = 0, A + b = 0$ sono ora rappresentate rispettivamente dalle « iperboli » passanti per M_1 ed M_2, M_3 ed $M_4 \equiv (0, -a^{1/e}), N_1$ ed N_2, N_3 ed N_4 e quelle di equazioni $B - a = 0, B - b = 0$ dalle « ellissi » per M_1 ed N_1 rispettivamente.

Essendo $B + a \geq 0$ il segno di D è ancora quello di $(b^2 - A^2)(B - a)$ e pertanto è $D < 0$ (e quindi $D^{-\beta}$ immaginario) se $G \equiv (X, Y)$ risulta interno alla « ellisse » per M_1 od alla « iperbole » per N_1 ed N_2 od a quella per N_3 ed N_4 ; è $D = 0$ (e quindi $D^{-\beta}$ diventa infinita) su tali curve. Nella rimanente regione aperta che, oltre ad I_1 , comprende tra l'altro anche l'insieme $I_2 [I_4]$ ottenuto da I_1 per simmetria rispetto all'asse $Y [X]$ (nonchè l'insieme I_3 simmetrico di I_1 rispetto ad O) è $D > 0$ (e $D^{-\beta}$ reale, finita e continua). In $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ è sempre $\sigma < 1$ e quindi u è ivi reale finita e continua; avvicinandosi G alla frontiera di tale insieme, dall'interno, σ tende a $-\infty$, eccezion fatta per i punti $M_i, N_i (i = 1, 2, 3, 4)$ nei quali σ è indeterminata.

Valgono ancora le (9), (14), (15).

$$\text{III) } \quad k = 4h; \quad h = 1, 2, \dots$$

Anche qui, come nel caso precedente non esiste una regione ellittica, ma questa volta, pur sussistendo la (12), in luogo delle (12') si ha soltanto la

$$u(X, Y; -x, -y) = u(X, Y; x, y).$$

Comunque supponiamo ancora $0 < x < y$ ed esaminiamo l'andamento della $A - a = 0$ [della $B - b = 0$]. L'ordinata cresce [decrece] al crescere dell'ascissa. La curva ha per asse di simmetria la seconda [prima] bisettrice ed ha come unico asintoto reale l'altra bisettrice; la curva stessa consta di tre archi di cui uno contenuto nel 4° [1°] quadrante mentre gli altri due sono illimitati e situati nel 1° e 3° [2° e 4°] quadrante rispettivamente. Alle due intersezioni con gli assi vi sono due flessi (con tangente rispettivamente verticale ed orizzontale).

Le $A - a = 0, A + a = 0, A - b = 0, A + b = 0$ sono ora in fig. 1 rispettivamente le 3 $M_1 M_4$ 4, 5 $M_3 M_2$ 6, 1 $N_1 N_4$ 2, 7 $N_3 N_2$ 8; le $B - b = 0, B + b = 0, B - a = 0, B + a = 0$ sono rispettivamente le 1' $N_3 N_2$ 2', 7' $N_2 N_4$ 8', 3' $M_3 M_1$ 4', e 5' $M_2 M_4$ 6'.

Essendo $\beta = h / (2h + 1)$, sono da accettare anche valori $D < 0$; è facile verificare che è $D > 0$ nei punti interni alla regione $1 N_1 C' M_1 M_3 C'' N_3 7$, in quelli interni alla simmetrica di questa rispetto ad O , nei punti interni alle $4' C' C'' 6'$ ed in quelli della sua simmetrica rispetto ad O ; è $D = 0$ sulla frontiera di queste regioni. $D < 0$ altrove. Tuttavia per $D > 0$ è $\sigma \leq 1$ soltanto in $I_1 + I_3$ e per $D < 0$ si ha $\sigma \leq 1$ soltanto negli insiemi complementari di I_2 e I_4 (dotati della loro frontiera, al finito) relativamente al 2° e, rispettivamente, al 4° quadrante. La (14) e l'analoga per $Y = 0$ valgono su tutta la linea parabolica (eccettuati i punti M_i, N_i). Sussistono le (9) e (15).

Se poi C appartenesse al 4° quadrante, ad es., basterebbe osservare che è

$$u(X, -Y; x, -y) = u(X, Y; x, y).$$

Quello che importa mettere in evidenza di tutta la discussione precedente è che ad un C fissato corrisponde un insieme I_1 di punti G per cui $u(G, C)$ risulta reale, finita e continua; la continuità della u sussiste negli insiemi I_2 e I_4 (e quindi in $I_1 + I_2 + I_4$) nel solo caso II).

Infine si osservi che se α è un qualunque numero positivo si ha:

$$(16) \quad |D^{-\alpha}| < |(X^{2e} - a^2)^{-\alpha} (b^2 - X^{2e})^{-\alpha}|,$$

disuguaglianza di cui ci serviremo più oltre per maggiorare la u e le sue derivate u_X, u_Y che andiamo ora a studiare.

2. — Preliminari: le derivate della u .

Supponendo ancora $C \equiv (x, y)$ fisso (nella regione iperbolica) e $G \equiv (X, Y)$ variabile calcoliamo e studiamo le derivate della u rispetto ad X ed Y .

Anzitutto è

$$(17) \quad dF/d\sigma = \beta^2 F(1 + \beta, 1 + \beta, 2; \sigma) = \beta^2 (1 - \sigma)^{-2\beta} F(1 - \beta, 1 - \beta, 2; \sigma);$$

la $F(1 - \beta, 1 - \beta, 2; \sigma)$, essendo $2 - 2(1 - \beta) = 2\beta > 0$, converge anche per $\sigma = 1$ ed è

$$(18) \quad F(1 - \beta, 1 - \beta, 2; 1) = \gamma_1 / \beta^2; \quad \gamma_1 = 1 / B(\beta, \beta).$$

Inoltre, poichè $F(1 - \beta, 1 - \beta, 2; 0) = 1$, si ha

$$(19) \quad 1 \leq F(1 - \beta, 1 - \beta, 2; \sigma) \leq \gamma_1 / \beta^2; \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Derivando ora la u rispetto ad Y , per la (B) e la (17) è:

$$u_y = 2^{4\beta} \beta D^{-(1+\beta)} D_Y F(\beta, \beta, 1; \sigma) + 2^{4\beta} \beta^2 D^{-\beta} (1 - \sigma)^{-\beta} \sigma_Y F(1 - \beta, 1 - \beta, 2; \sigma)$$

Se escludiamo il caso $k = 2h - 1$, h intero, $X < 0$, $Y < 0$, che non interessa per il seguito, si ha d'altronde

$$D_Y = 2 \varrho Y^{k/2} [B(b^2 - A^2) + A(B^2 - a^2)]$$

$$\sigma_Y = -2 \varrho Y^{k/2} D^{-1} \{A(b^2 - B^2) + B(A^2 - a^2) + \sigma [B(b^2 - A^2) + A(B^2 - a^2)]\}$$

e poichè

$$1 - \sigma = 2^4 D^{-1} (x y X Y)^e$$

sarà, per la (2);

$$(1 - \sigma)^{-2\beta} = 2^{-8\beta} D^{2\beta} \varepsilon (x y X Y)^{-k/2}$$

dove $\varepsilon = 1$ se $k \neq 2(2h - 1)$, mentre se $k = 2(2h - 1)$ poniamo $\varepsilon = 1$ oppure $= -1$ secondochè $(x y X Y)$ è > 0 oppure < 0 .

Dopo ciò mediante le espressioni di D_Y , σ_Y e $(1 - \sigma)^{-2\beta}$ ora trovate la u_y si scriverà

$$(20) \quad u_Y(X, Y; x, y) = -2^{4\beta-1} k Y^{k/2} [B(b^2 - A^2) + A(B^2 - a^2)] D^{-(1+\beta)} F(\beta, \beta, 1; \sigma) - \varepsilon 2^{1-4\beta} \varrho \beta^2 (x y)^{-k/2} X^{-k/2} \{A(b^2 - B^2) + B(A^2 - a^2) + \sigma [B(b^2 - A^2) + A(B^2 - a^2)]\} D^{-(1-\beta)} F(1-\beta, 1-\beta, 2; \sigma)$$

In modo analogo si calcola

$$(21) \quad u_X(X, Y; x, y) = -2^{4\beta-1} k X^{k/2} [B(b^2 - A^2) - A(B^2 - a^2)] D^{-(1+\beta)} F(\beta, \beta, 1; \sigma) + \varepsilon 2^{1-4\beta} \varrho \beta^2 (x y)^{-k/2} Y^{k/2} \{A(B^2 - b^2) - B(A^2 - a^2) - \sigma [B(b^2 - A^2) - A(B^2 - a^2)]\} D^{-(1-\beta)} F(1-\beta, 1-\beta, 2; \sigma)$$

Da un semplice esame delle u_Y , u_X ora calcolate risulta la loro continuità nei punti $G \equiv (X, Y)$ interni all'insieme I_1 . Se G , restando interno ad I_1 tende verso un punto $G_0 \equiv (X, 0)$ interno al segmento $M_1 N_1$, mentre la u_X risulta infinita di ordine $k/2$ con $1/Y$, la u_Y tende ad un limite finito che assumiamo per definire $u_Y(G_0, C)$:

$$(20') \quad u_Y(X, 0; x, y) = -2^{4-4\beta} \varrho \gamma_1 x y X (X^{2e} - a^2)^{-(1-\beta)} (b^2 - X^{2e})^{-(1-\beta)}$$

In tal modo se T indica l'insieme dei punti appartenenti al trilatero CM_1N_1 (insieme che conviene porre in evidenza per il seguito) e $T = M_1 - N_1$

indica l'insieme T privato dei punti M_1 ed N_1 , si ha che la u_Y definita dalle (20) e (20') è funzione continua in $T - M_1 - N_1$ (7).

Per il seguito introduciamo due funzioni $P(X, Y)$ e $Q(X, Y)$ definite in $T - M_1 - N_1$ come segue. Sia $z(X, Y)$ una funzione dotata di derivate prime in $T - M_1 - N_1$ e si ponga

$$(22) \quad P(X, Y) = Y^k (u_{z_X} - u_X z); \quad Q(X, Y) = -X^k (u_{z_Y} - u_Y z)$$

nei punti G distinti da G_0 e, avendo presenti la (14) e la (20') si ponga:

$$(22') \quad P(X, 0) = 0; \quad Q(X, 0) = -X^k [u(X, 0; x, y) z_Y(X, 0) - u_Y(X, 0; x, y) z(X, 0)]$$

nei punti G_0 . In tal modo, se z, z_Y sono continue in $T - M_1 - N_1$ e la z_X è continua anche soltanto nei punti di $T - M_1 - N_1$ che non appartengono al segmento $M_1 N_1$, ma è limitata, la P e la Q risultano funzioni continue in tutto $T - M_1 - N_1$, mentre nei punti M_1 ed N_1 a causa dell'indeterminatezza di σ , non è possibile definirle con continuità.

Per quanto riguarda poi le u_{XX}, u_{YY} , effettuando il calcolo, notevolmente complesso e che qui tralasciamo, si ricava che la u risulta soluzione della (A) nell'insieme dei punti interni ad I_1 (almeno); ciò del resto si potrebbe anche far discendere dal modo col quale si perviene a costruire la u .

3. — Teorema fondamentale.

Dimostriamo ora il seguente

TEOR. I — Una qualunque soluzione $z(x, y)$ in Ω_1 della (A) per la quale la z_y risulti continua nei punti $(x, 0)$ e la z_x sia limitata in Ω_1 , può rappresentarsi in tutto $\Omega_1 - O$ nella forma

$$(C) \quad z(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 (t^2 - t)^{(1-\beta)} z(X(x, y, t), 0) dt + \\ + x y \gamma_2 \int_0^1 (t^2 - t)^{\beta} \frac{z_y(X(x, y, t), 0)}{X(x, y, t)} dt$$

con

$$(23) \quad X(x, y, t) = [a^2 + (b^2 - a^2)t]^{1/2e} = [(x^e - y^e)^2 + 4x^e y^e t]^{1/2e}; \quad 0 \leq t \leq 1$$

(7) È da rilevare tuttavia che quando G tende a G_0 restando, anzichè in I_1 , in un intorno di G_0 appartenente al semipiano $Y < 0$, la u_Y ha limite finito solo nel caso II ($k = 2(2h - 1)$) e tale limite è rappresentato dal 2° membro della (20') col segno +. Dunque u_Y (e u_X a maggior ragione) ha in tal caso una discontinuità nell'attraversare l'asse $Y = 0$.

Se è $C \equiv (x, 0)$, con $0 < x$, la cosa è evidente. Se invece $C \equiv (x, y)$ è un qualunque punto di Ω_1 , con $y > 0$, applicando ripetutamente il Teor. del DINI alle (11), ciascuna delle due caratteristiche passanti per C può rappresentarsi (fino alle rispettive intersezioni $M_1 \equiv (a^{1/e}, 0)$ ed $N_1 \equiv (b^{1/e}, 0)$ con l'asse $Y = 0$) nella forma ordinaria $Y = \varphi(X)$, $Y = \psi(X)$, con φ, ψ funzioni continue insieme con le derivate di qualunque ordine in tutto l'intervallo in cui sono definite.

Indichiamo con Γ l'insieme costituito dai due archi $CM_1: Y = \varphi(X)$ e $CN_1: Y = \psi(X)$, ora detti, e dal segmento $M_1N_1: Y = 0$, $a^{1/e} \leq X \leq b^{1/e}$ vale a dire la frontiera dell'insieme che abbiamo prima chiamato T .

Nonostante l'accertata « regolarità » di tale frontiera i criteri usuali (8)

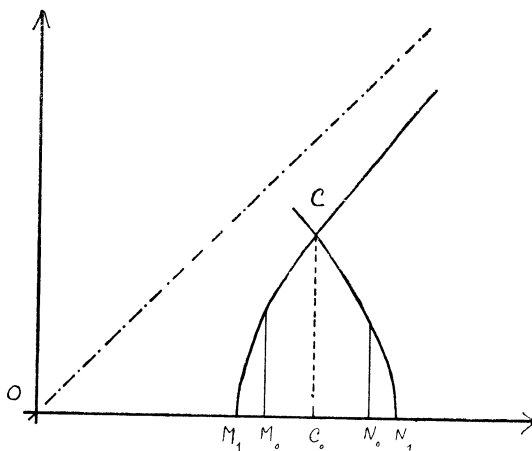


Fig. 2

non consentono di affermare l'esistenza dell'integrale (curvilineo) esteso a Γ del differenziale $P dY - Q dX$, e ciò perchè P e Q non possono definirsi con continuità in tutto T , come si è osservato prima.

A maggior ragione, nonostante che si abbia (almeno nei punti interni a T):

$$(24) \quad P_X + Q_Y = u(Y^k z_{XX} - X^k z_{YY}) - z(Y^k u_{XX} - X^k u_{YY}) = 0$$

non è dato affermare che l'integrale ora detto sia nullo. Ciò equivale a dire che, diversamente da quanto accadrebbe se Γ fosse completamente interno alla regione iperbolica, non è possibile avere senz'altro una relazione che legghi il valore $z(x, y)$ della z in C con quelli che essa e le sue derivate prime assumono nei punti del segmento M_1N_1 . Per giungere ad una tale relazione procediamo allora nel seguente modo.

(8) Ved. ad es. L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, vol. I^o, pp. 192-195, Bologna, 1922

Da un punto M qualunque dell'arco $CM_1|N$, dell'arco $CN_1|$ si conduca la perpendicolare $MM_0[N_0N_0]$ all'asse $Y=0$ e sia Γ' la curva costituita dai due archi di caratteristica CM, CN e dai tre segmenti rettilinei MM_0, M_0N_0, N_0N .

I criteri prima ricordati assicurano l'esistenza dell'integrale di $PdY - QdX$ esteso a Γ' ed inoltre, avuta presente la (24) si può concludere ⁽⁹⁾ con la

$$(25) \quad \int_{\Gamma'} P dY - Q dX = 0.$$

Facendo tendere M verso M_1 lungo CM_1 e (simultaneamente ed indipendentemente) N verso N_1 lungo CN_1 , determiniamo il limite dell'integrale scritto; tale limite (rappresenti esso o non l'integrale esteso a Γ') eguagliato a zero fornisce la relazione cercata. Per ridurre ad integrali lineari il 1° membro della (25) diciamo m, n le ascisse di M ed N rispettivamente, cosicchè sarà: $M \equiv (m, \varphi(m)), N \equiv (n, \psi(n)), M_0 \equiv (m, 0), N_0 \equiv (n, 0)$ e la (25) si scriverà:

$$(26) \quad \int_x^m [P(X, \varphi) \varphi' - Q(X, \varphi)] dX + \int_{\varphi(m)}^0 P(m, Y) dY - \int_m^n Q(X, 0) dX + \\ + \int_0^{\psi(n)} P(n, Y) dY + \int_n^x [P(X, \psi) \psi' - Q(X, \psi)] dX = 0.$$

Osservando che è per la (10): $\varphi^k \varphi' = (X\varphi)^{k/2}$ e $X^k = (X\varphi)^{k/2} \varphi'$ il 1° integrale della (26) si può scrivere

$$\int_x^m (X\varphi)^{k/2} [u z' - u' z]_{Y=\varphi(X)} dX$$

dove z', u' rappresentano le derivate di $z(X, \varphi(X))$ e di $u(X, \varphi(X); x, y)$ rispetto ad X . Da questo, integrando per parti si ha:

$$(m\varphi(m))^{k/2} u(m, \varphi(m); x, y) z(m, \varphi(m)) - (xy)^{k/2} u(x, y; x, y) z(x, y) - \\ - 2 \int_x^m (X\varphi)^{k/2} z(X, \varphi) \left[u' + \frac{k}{4} \frac{(X\varphi)'}{X\varphi} u \right]_{Y=\varphi(X)} dX$$

⁽⁹⁾ Vedi ad es.: L. TONELLI, *Sul teorema di Green*. Rend. Acc. Lincei, (6) I, pp 482-488 (1925)

ed infine, per la (15)

$$(27') \quad \int_x^m [P(X, \varphi) \varphi' - Q(X, \varphi)] dX = \left(\frac{m \varphi(m)}{xy} \right)^{k/4} z(m, \varphi(m)) - z(x, y)$$

In modo analogo si calcola

$$(27'') \quad \int_n^x [P(X, \psi) \psi' - Q(X, \psi)] dX = \left(\frac{n \psi(n)}{xy} \right)^{k/4} z(n, \psi(n)) - z(x, y).$$

D'altronde per le (22'), (14) e (20') è:

$$(27''') \quad \begin{aligned} - \int_m^n Q(X, 0) dX &= 2^{4\beta} \varrho \gamma_2 \int_m^n X^k (X^{2e} - a^2)^{-\beta} (b^2 - X^{2e})^{-\beta} z_Y(X, 0) dX + \\ &+ 2^{4-4\beta} \varrho \gamma_1 x y \int_m^n X^{k+1} (X^{2e} - a^2)^{-(1-\beta)} (b^2 - X^{2e})^{-(1-\beta)} z(X, 0) dX. \end{aligned}$$

Si ha poi, indicando con μ_1 e μ_2 due numeri positivi tali che sia in T : $|z| < \mu_1$, $|z_x| < \mu_2$, ed avendo presenti le (22) e (22'):

$$\int_0^{\varphi(m)} |P(m, Y) dY| < \mu_1 \varphi^k \int_0^{\varphi(m)} |u(m, Y; x, y)| dY + \mu_2 \varphi^k \int_0^{\varphi(m)} |u_X(m, Y; x, y)| dY$$

(dove φ^k sta per $[\varphi(m)]^k$). La somma ora scritta, avendo presenti la (B) la (21) e le (9), (19) e (16) ed indicando inoltre con μ_3 il massimo in T di $|B(b^2 - A^2) - A(B^2 - a^2)|$ e con μ_4 quello di $|A(B^2 - b^2) - B(A^2 - a^2)|$ risulta a sua volta minore di

$$\begin{aligned} &2^{4\beta} \varrho \gamma_2 \mu_1 (m^e + a)^{-\beta} (b^2 - m^{2e})^{-\beta} \varphi^{k+1} (m^e - a)^{-\beta} + \\ &+ 2^{4\beta-1} k \varrho \gamma_2 \mu_2 \mu_3 m^{k/2} (m^e + a)^{-(1+\beta)} (b^2 - m^{2e})^{-(1+\beta)} \varphi^{k+1} (m^e - a)^{-(1+\beta)} + \\ &+ 2^{1-4\beta} \varrho \gamma_1 \mu_2 (\mu_3 + \mu_4) (x, y)^{-k/2} (m^e + a)^{-(1-\beta)} (b^2 - m^{2e})^{-(1-\beta)} \varphi^e (m^e - a)^{-(1-\beta)} \end{aligned}$$

e quindi, essendo $m^e - a = \varphi^e$ ed avendo presenti le (1) (2), $\int_0^{\varphi(m)} \dots$ risulta

infinitesimo con $\varphi(m)$ dell'ordine $k/4$ almeno; analogo risultato vale per

$$\int_0^{\varphi(n)} \dots \Big|.$$

Da ciò e dalle (26), (27'), (27''), (27'''), al tendere di M verso M_1 e di N verso N_1 (cioè per $\varphi(m) \rightarrow 0$, $\varphi(n) \rightarrow 0$) risulta

$$-2z(x, y) - \lim_{m, n \rightarrow 0} \int_m^n Q(X, 0) dX = 0$$

e poichè $0 < \beta < 1/2$ ($1/2 < 1 - \beta < 1$), esiste l'integrale di $Q(X, 0)$ esteso all'intervallo $(a^{1/e}, b^{1/e})$ e la relazione precedente diviene

$$z(x, y) = 2^{4\beta-1} \varrho \gamma_2 \int_{a^{1/e}}^{b^{1/e}} X^k (X^{2e} - a^2)^{-\beta} (b^2 - X^{2e})^{-\beta} z_X(X, 0) dX +$$

$$+ 2^{3-4\beta} \varrho \gamma_1 x y \int_{a^{1/e}}^{b^{1/e}} X^{k+1} (X^{2e} - a^2)^{-(1-\beta)} (b^2 - X^{2e})^{-(1-\beta)} z(X, 0) dX$$

e da questa, con la sostituzione (23), segue la (C).

4. — Teorema di unicità.

Dal teor. I, stante la linearità della (A), segue subito il

TEOR. II — Se esiste una soluzione z in Ω_1 dotata di derivate prime z_x, z_y continue nei punti $(x, 0)$, con $x > 0$, la quale verifichi le condizioni di Cauchy

$$(28) \quad z(x, 0) = \vartheta(x), \quad 0 \leq x; \quad z_y(x, 0) = \zeta(x), \quad 0 < x$$

essendo ϑ e ζ funzioni assegnate continue per $x \geq 0$ e $x > 0$ rispettivamente, tale soluzione è unica ed è rappresentata da $z(0, 0) = \vartheta(0)$ e dalla

$$(C') \quad z(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \vartheta(X) dt + \gamma_2 x y \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \frac{\zeta(X)}{X} dt$$

essendo $X = X(x, y, t)$ espressa dalle (23).

Di questo teor., come si è avvertito nell'Introduzione, si può dare anche un'altra dimostrazione basata su di un procedimento che ripete in sostanza quello seguito dalla Sig.ra CINQUINI-CIBRARIO per dimostrare il Suo teor. di unicità.

Dal teor. II segue in particolare l'unicità della soluzione in Ω_1 che verifica le (28) ed è regolare nei punti $(x, 0)$, $0 < x$; poichè entrambe le dimostrazioni di tale teor. sussistono, a parte modificazioni formali, per ciascuno degli ottanti $(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_8)$, procedendo nel senso antiorario) di cui si compone la regione iperbolica, si ha il

COR. I — *Se k è pari la soluzione in $\Omega_1 + \Omega_8$ che verifica le (28) è unica ed è rappresentata dalla (C').*

§ 2. Esistenza della soluzione.

5. — *Considerazioni generali.*

Lo scopo di questo § è quello di giungere ad accertare l'esistenza, sotto opportune ipotesi circa i dati, della soluzione di cui è stata provata l'unicità nel teor. II.

Nei nn. 6, 7, 8, mostreremo che la funzione rappresentata dalla (C'), con la posizione (23) dà effettivamente, sotto certe condizioni, la soluzione richiesta. La verifica non è immediata, a causa della singolarità degli integrali che entrano nella formula risolutiva, ma è resa più agevole dall'osservare che se $z(\vartheta; x, y)$ indica la soluzione corrispondente al caso in cui nelle (28) la ζ è identicamente nulla e $z(\zeta; x, y)$ quella corrispondente a $\vartheta \equiv 0$, la funzione $z(\vartheta; x, y) + z(\zeta; x, y)$ rappresenta, per la linearità della (A), la soluzione nel caso generale. Pertanto potremo studiare separatamente i due termini di cui si compone il 2° membro della (C').

Prima di proseguire riesce opportuno distinguere esplicitamente alcuni insiemi di punti che ricorreranno tra breve. Anzitutto i sottoinsiemi di Ω_1 : $\Omega_1 - O$, cioè Ω_1 privato del punto O ; Ω'_1 cioè Ω_1 privato dei punti (x, y) per cui è $0 < y = x$; $\Omega''_1 - O$, cioè Ω'_1 privato del punto O .

Nello spazio (x, y, t) definiremo poi l'insieme

$$C: \quad (x, y) \text{ in } \Omega_1; \quad 0 \leq t \leq 1$$

ed i sottoinsiemi di C : $C - s$, $C - (s + s_1)$, $C - \alpha$, $C - (\alpha + s_1)$, avendo indicato rispettivamente: con s la semiretta (aperta) $0 < y = x, t = 0$; con s_1 il segmento (chiuso) $x = y = 0, 0 \leq t \leq 1$, e con α la somma dei due angoli retti $0 < y < x, t = 0$ e $0 < y \leq x, t = 1$.

6. — La funzione $z(\vartheta; x, y)$

Studiamo le proprietà della funzione di (x, y)

$$(29) \quad z(\vartheta; x, y) = \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} \vartheta(X) dt$$

supponendo la $X = X(x, y, t)$ definita dalla (23) nell'insieme C ed essendo $\vartheta(\xi)$ definita per $\xi \geq 0$; intanto è $z(\vartheta; x, 0) = \vartheta(x)$, $0 \leq x$.

Affinchè $z(\vartheta; x, y)$ risulti continua in Ω_1 è sufficiente (oltre che necessario) supporre $\vartheta(\xi)$ continua per $\xi \geq 0$ (come si vede senza difficoltà ricorrendo al teor. di HEINE) e ciò malgrado che la funzione integranda, che indichiamo con $V(x, y, t)$, sia definita soltanto in $C - \alpha$.

Dobbiamo ora stabilire la possibilità di calcolare le derivate della $z(\vartheta; x, y)$ mediante derivazione sotto il segno di integrale.

Nei punti di $C - (s + s_1)$ è $X > 0$, esiste la derivata X_y , espressa per la (23) da

$$(30) \quad X_y(x, y, t) = y^{e-1} (-a + 2tx^e) X^{1-2e}$$

e continua in $C - (s + s_1)$; dal rapporto incrementale risulta invece che il simbolo $X_y(x, x, 0)$ non può indicare una quantità finita se $0 < x$.

Se esiste, per $\xi > 0$, la derivata $\vartheta'(\xi)$ di $\vartheta(\xi)$ la V è in $C - (\alpha + s_1)$ derivabile rispetto ad y con

$$(31) \quad V_y(x, y, t) = (t - t^2)^{-(1-\beta)} \vartheta'(X) X_y(x, y, t)$$

e se la ϑ' è continua per $\xi > 0$ la funzione

$$(32) \quad I_1(\vartheta; x, y) = \gamma_1 \int_0^1 V_y(x, y, t) dt$$

è definita in $\Omega_1 - O$; ciò risulta dalla (30) se (x, y) appartiene ad $\Omega_1 - O$ mentre quando appartiene ad $\Omega_1 - \Omega'_1$ basta osservare che è

$$V_y(x, x, t) = 2^{-2\beta} t^{-1/2} (1 - t)^{-(1-\beta)} \vartheta'(2^{1/e} x t^{1/2e}); \quad 0 < t < 1.$$

La $I_1(\vartheta; x, y)$ è inoltre continua in $\Omega'_1 - O$, come si prova facilmente e, sempre in $\Omega'_1 - O$ si ha

$$(33) \quad I_1(\vartheta; x, y) = z_y(\vartheta; x, y).$$

Quest'ultima uguaglianza può provarsi come segue. Fissato $x > 0$, la X e la V dipendono unicamente dal punto (y, t) variabile nel rettangolo $0 \leq y \leq x, 0 \leq t \leq 1$; fissato anche $(0 \leq) y < x$, e quindi il punto (x, y) di $\Omega'_1 - O$ sia y_0 interno all'intervallo di estremi y ed x e sia δ un numero tale da aversi $0 \leq y + \delta \leq y_0$. Per ogni t diverso da 0 e da 1, al rapporto incrementale della V da (x, y, t) a $(x, y + \delta, t)$ si può applicare il teorema del valor medio, cosicchè, detto $\bar{y} [\bar{y} = \bar{y}(t)]$ un opportuno valore compreso tra y fissato ed $y + \delta$, si potrà scrivere per le (31) e (32):

$$\begin{aligned} & \left| \frac{z(\vartheta; x, y + \delta) - z(\vartheta; x, y)}{\delta} - I_1(\vartheta; x, y) \right| \leq \\ (34) \quad & \leq \gamma_1 \int_0^1 |V_y(x, \bar{y}, t) - V_y(x, y, t)| dt = \\ & = \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-1-\beta} |\vartheta'(X(x, \bar{y}, t)) X_y(x, \bar{y}, t) - \vartheta'(X(x, y, t)) X_y(x, y, t)| dt. \end{aligned}$$

Essendo nel rettangolo $0 \leq y \leq y_0, 0 \leq t \leq 1$ la $X(x, y, t)$ sempre positiva e continua essa vi ammette un minimo assoluto positivo e pertanto la $\vartheta'(X) X_y$ è ivi uniformemente continua e dalla (34) segue la (33).

Dalla (33) si ha subito $z_y(\vartheta; x, 0) = 0, 0 < x$.

Nei punti di $C - (s + s_1)$ esiste anche la X_x :

$$(35) \quad X_x(x, y, t) = x^{\varrho-1} (a + 2t y^{\varrho}) X^{1-2\varrho}$$

e nell'ipotesi fatta della continuità di ϑ' per $\xi > 0$ la V risulta derivabile in $C - (s + s_1)$ con

$$(36) \quad V_x(x, y, t) = (t - t^2)^{-(1-\beta)} \vartheta'(X) X_x(x, y, t);$$

indicando con $I_2(\vartheta; x, y)$ l'integrale di $\gamma_1 V_x$ rispetto a t tra 0 ed 1, tale funzione è definita in $\Omega_1 - O$, continua in $\Omega'_1 - O$ (almeno) ed ivi verifica la

$$(37) \quad I_2(\vartheta; x, y) = z_x(\vartheta; x, y)$$

Consideriamo ora le derivate seconde. Mediante le (30) e (35) si calcolano in $C - (s + s_1)$ le X_{yy}, X_{xx} che ivi risultano continue, essendo

$$\begin{aligned} (38) \quad X_{yy}(x, y, t) &= (2\varrho - 1) y^{\varrho} X^{1-2\varrho} - (\varrho - 1)(1 - 2t) y^{-2} (x y)^{\varrho} X^{1-2\varrho} - \\ & - (2\varrho - 1) y^{\varrho-1} (-a + 2t x^{\varrho}) X^{-2\varrho} X_y \end{aligned}$$

$$(39) \quad \begin{aligned} X_{xx}(x, y, t) = & (2 \varrho - 1) x^k \lambda^{1-2e} - (\varrho - 1) (1 - 2t) x^{-2} (xy)^e \lambda^{1-2e} - \\ & - (2 \varrho - 1) x^{e-1} (a + 2t y^e) \lambda^{-2e} X_x \end{aligned}$$

X_{xx} ed X_{yy} non esistono nei punti di s (nei quali X_x ed X_y sono infinite), ma le funzioni $(t - t^2)^{-(1-\beta)} X_{xx}$, $(t - t^2)^{-(1-\beta)} X_{yy}$ sono integrabili ugualmente, rispetto a t , da 0 ad 1, in ogni punto di $\Omega_1 - O$.

Ammissa l'esistenza e la continuità della derivata seconda $\vartheta''(\xi)$ della ϑ per ogni $\xi > 0$, la V_x e la V_y sono derivabili in $C - (\alpha + s_1)$ e per le (31) e (36) si ha

$$(40) \quad V_{yy}(x, y, t) = (t - t^2)^{-(1-\beta)} [\vartheta'' X_y^2 + \vartheta' X_{yy}]$$

$$(41) \quad V_{xx}(x, y, t) = (t - t^2)^{-(1-\beta)} [\vartheta'' X_x^2 + \vartheta' X_{xx}]$$

e tali funzioni risultano integrabili rispetto a t da 0 ad 1 per ogni (x, y) di $\Omega'_1 - O$ ma non, in generale, di $\Omega_1 - O$. Gli integrali di $\gamma_1 V_{yy}$ e $\gamma_1 V_{xx}$, che potremo indicare rispettivamente con $I_3(\vartheta; x, y)$ e $I_4(\vartheta; x, y)$ sono funzioni continue per ogni (x, y) di $\Omega'_1 - O$ e tali che

$$(42) \quad I_3(\vartheta; x, y) = z_{yy}(\vartheta; x, y); \quad I_4(\vartheta; x, y) = z_{xx}(\vartheta; x, y)$$

Mostriamo infine che, sempre in $\Omega'_1 - O$, è soddisfatta la (A). Intanto dalle (40), (41) e (42) si ha: $z_{xx}(\vartheta; x, 0) = \vartheta''(x)$, $z_{yy}(\vartheta; x, 0) = 0$, $0 < x$.

Introduciamo poi le X_t, X_{tt} ; per la (23) si ha in $C - (s + s_1)$

$$(43) \quad X_t(x, y, t) = 2 \varrho^{-1} (xy)^e \lambda^{1-2e}$$

(mentre X_t , se $0 < y = x$, è infinita) e quindi per le (30) e (35) se $y > 0$

$$(44) \quad X_x = \frac{\varrho}{2} \frac{a + 2t y^e}{x y^e} X_t; \quad X_y = \frac{\varrho}{2} \frac{-a + 2t x^e}{x^e y} X_t$$

da cui segue in $C - (\alpha + s_1)$, se $y > 0$, l'identità

$$(45) \quad (t - t^2)^{-(1-\beta)} (y^k X_x^2 - x^k X_y^2) = \varrho^2 (xy)^{-2} (x^{2e} - y^{2e}) (t - t^2)^\beta X_t^2.$$

In $C - (s + s_1)$ dalla (43) segue l'esistenza di X_{tt} e, se è anche $y > 0$, la

$$(46) \quad (2 \varrho - 1) \frac{X_t}{\lambda^{2e}} = \frac{\varrho}{2} \frac{1}{(xy)^e} X_{tt}.$$

Di qui e dalle (23), (43), (44), le (38) e (39) possono scriversi, per $y > 0$, con qualche riduzione

$$(38') \quad \begin{aligned} X_{yy} &= (2\varrho - 1) y^k X^{1-2\varrho} - \varrho(\varrho - 1/2) x^{-\varrho} y^{-2} y^e X_t \\ &\quad - \varrho^2 y^{-2} [\beta(1 - 2t) X_t + (t - t^2) X_{tt}] \end{aligned}$$

$$(39') \quad \begin{aligned} X_{xx} &= (2\varrho - 1) x^k X^{1-2\varrho} - \varrho(\varrho - 1/2) x^e x^{-2} y^e X_t - \\ &\quad - \varrho^2 x^{-2} [\beta(1 - 2t) X_t + (t - t^2) X_{tt}] \end{aligned}$$

e da queste segue subito l'identità

$$(47) \quad (t - t^2)^{-(1-\beta)} (y^k X_{xx} - x^k X_{yy}) = \varrho^2 \frac{x^{2\varrho} - y^{2\varrho}}{(xy)^2} \frac{d[(t - t^2)^\beta X_t]}{dt}.$$

A causa delle (42), (40) e (41), (45) e (47) avremo nell'insieme dei punti interni ad Ω_1

$$\begin{aligned} y^k z_{xx}(\vartheta; x, y) - x^k z_{yy}(\vartheta; x, y) &= \gamma_1 \int_0^1 (y^k V_{xx} - x^k V_{yy}) dt = \\ &= \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} [y^k X_x^2 - x^k X_y^2] \vartheta'' dt + \\ &\quad + \gamma_1 \int_0^1 (t - t^2)^{-(1-\beta)} [y^k X_{xx} - x^k X_{yy}] \vartheta' dt = \\ &= \varrho^2 \frac{x^{2\varrho} - y^{2\varrho}}{(xy)^2} \gamma_1 \left[\int_0^1 (t - t^2)^\beta X_t^2 \vartheta'' dt + \int_0^1 \frac{d[(t - t^2)^\beta X_t]}{dt} \vartheta' dt \right] \end{aligned}$$

e poichè $\vartheta'' X_t = d(\vartheta')/dt$ sostituendo la somma scritta risulta nulla.

Riassumendo: se ϑ è continua per $\xi \geq 0$ ed ammette derivata seconda continua per $\xi > 0$, la $z(\vartheta; x, y)$ definita dalle (29) e (23) è in Ω_1 soluzione della (A), la quale verifica le condizioni

$$z(\vartheta; x, 0) = \vartheta(x), \quad 0 \leq x; \quad z_y(\vartheta; x, 0) = 0, \quad 0 < x$$

è regolare nei punti $0 = y < x$ e vi soddisfa la (A).

7. — *La funzione $z(\zeta; x, y)$.*

Dobbiamo ora studiare la funzione definita in Ω_1 da

$$(48) \quad z(\zeta; x, y) = xy \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \frac{\zeta(X)}{X} dt; \quad z(\zeta; 0, 0) = 0$$

con X data dalla (23) in C ed essendo $\zeta(x)$ definita per $\xi > 0$

Evidentemente è $z(\zeta; x, 0) = 0$ per $0 \leq x$.

Se ζ è continua, per $\xi > 0$, la $z(\zeta; x, y)$ risulta continua in tutto $\Omega_1 - O$ (ciò che si prova facilmente mediante il teor. di HEINE), ma non in generale, in tutto Ω_1 come mostrano semplici esempi ⁽¹⁰⁾. Per avere la continuità in tutto Ω_1 è sufficiente che ζ sia anche limitata almeno in ogni intervallo finito avente lo zero come estremo sinistro.

Per dimostrarlo osserviamo intanto che la $z(x, y) = y$ è evidentemente una soluzione in Ω_1 della (A) continua con (tutte) le derivate per $0 < y = x$ e quindi (Teor. I) può rappresentarsi nella forma (C'); poichè per essa è $\vartheta = 0$, $\zeta = 1$ avremo

$$(49) \quad xy\gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \frac{1}{X} dt = y.$$

Osserviamo poi che, per qualunque (x, y) è $0 < a^{1/e} < X \leq b^{1/e}$ perciò se (x, y) è un qualunque punto di $\Omega_1 - O$ sarà

$$(50) \quad |z(\zeta; x, y)| \leq xy\gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \frac{|\zeta(X)|}{X} dt \leq \max_{0, b^{1/e}} |\zeta(\xi)| \cdot y$$

e da ciò segue la continuità nel punto O .

Detto \bar{x} un qualunque numero > 0 sia (x, y) un punto appartenente ad un certo intorno I (chiuso) di (\bar{x}, \bar{x}) ; posto $\bar{X} = X(\bar{x}, \bar{x}, t)$ avremo:

$$\begin{aligned} z(\zeta; x, y) - z(\zeta; \bar{x}, \bar{x}) &= (xy - \bar{x})\gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \frac{\zeta(X)}{X} dt + \\ &+ \bar{x}^2\gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \left[\frac{\zeta(X)}{X} - \frac{\zeta(\bar{X})}{\bar{X}} \right] dt. \end{aligned}$$

Indicando allora con τ , ($0 < \tau < 1$), un numero da determinarsi e con L un numero > 0 tale che in I si abbia $|\zeta(X)| < L$, per la (49) avremo

$$|z(\zeta; x, y) - z(\zeta; \bar{x}, \bar{x})| < \frac{|xy - \bar{x}^2|}{x} L +$$

⁽¹⁰⁾ Ad esempio la $z(x, y) = y/(x^{-e} - y^{2e})$ è in Ω_1 la $z(\zeta; x, y)$ corrispondente a, $\zeta = x^{-2e}$ e diventa infinita nei punti $0 \leq y < x$.

$$\begin{aligned}
& + \bar{x}^2 \gamma_2 \int_0^\tau (t - t^2)^{-\beta} \left[\frac{|\zeta(X)|}{X} + \frac{|\zeta(\bar{X})|}{\bar{X}} \right] dt + \\
& + \bar{x}^2 \gamma_2 \int_\tau^1 (t - t^2)^{-\beta} \left| \frac{\zeta(X)}{X} - \frac{\zeta(\bar{X})}{\bar{X}} \right| dt.
\end{aligned}$$

Ora essendo per la (23):

$$X \geq [4(x y)^e t]^{1/2e} \geq 2^{1/2e} x t^{1/2e}; \quad \bar{X} = 2^{1/e} \bar{x} t^{1/2e},$$

segue

$$\begin{aligned}
& \bar{x}^2 \gamma_2 \int_0^\tau (t - t^2)^{-\beta} \left[\frac{|\zeta(X)|}{X} + \frac{|\zeta(\bar{X})|}{\bar{X}} \right] dt \leq \\
& \leq 2^{-1/e} L \left(\frac{\bar{x}^2}{x} + \bar{x} \right) \gamma_2 \int_0^\tau (1 - t)^{-\beta} t^{-1/2} dt
\end{aligned}$$

e poichè è lecito supporre il punto O esterno ad I e d'altronde scegliendo opportunamente τ l'ultimo integrale si può rendere piccolo a piacere, lo stesso può dirsi del 1° membro della disuguaglianza ora scritta. Fissato in tal modo τ anche

$$\bar{x}^2 \gamma_2 \int_\tau^1 (t - t^2)^{-\beta} \left| \frac{\zeta(X)}{X} - \frac{\zeta(\bar{X})}{\bar{X}} \right| dt$$

si può rendere piccolo a piacere poichè nell'insieme dei punti (x, y, t) che si ottiene al variare di (x, y) in I , con $\tau \leq t \leq 1$, la $X(x, y, t)$ ha un minimo assoluto positivo X_0 e la $\zeta(X)/X$ risulta uniformemente continua in qualunque intorno destro di X_0 .

Passiamo ora ad esaminare le derivate.

Se ζ ammette per $\xi > 0$ derivata prima continua la

$$W(x, y, t) = (t - t^2)^{-\beta} x y \zeta^*(X)$$

risulta in $C - (\alpha + s_1)$ derivabile rispetto ad x ed y con

$$W_x = (t - t^2)^{-\beta} [y \zeta^* + x y \zeta^{*'} X_x]; \quad W_y = (t - t^2)^{-\beta} [x \zeta^* + x y \zeta^{*'} X_y]$$

avendo posto per brevità

$$(51) \quad \zeta(X)/X = \zeta^*(X).$$

Le

$$J_1(\zeta; x, y) = \gamma_2 \int_0^1 W_y(x, y, t) dt; \quad J_2(\zeta; x, y) = \gamma_2 \int_0^1 W_x(x, y, t) dt$$

sono definite in $\Omega_1 - O$; in $\Omega_1 - O$ sono continue ed uguagliano rispettivamente le derivate $z_y(\zeta; x, y)$ e $z_x(\zeta; x, y)$; si noti esplicitamente che è $z_y(\zeta; x, 0) = \zeta(x)$, $0 < x$.

Supponiamo ora che esista continua per $\xi > 0$ la derivata seconda $\zeta''(\xi)$ di $\zeta(\xi)$; W_x e W_y saranno allora derivabili in $C - (\alpha + s_1)$ e le

$$(52) \quad W_{xx} = (t - t^2)^{-\beta} [\zeta^{*'}(2yX_x + xyX_{xx}) + \zeta^{*''}xyX_x^2]$$

$$(52') \quad W_{yy} = (t - t^2)^{-\beta} [\zeta^{*'}(2xX_y + xyX_{yy}) + \zeta^{*''}xyX_y^2]$$

sono integrabili rispetto a t da 0 ad 1 in $\Omega_1 - O$ e gli integrali

$$J_3(\zeta; x, y) = \gamma_2 \int_0^1 W_{yy}(x, y, t) dt; \quad J_4(\zeta; x, y) = \gamma_2 \int_0^1 W_{xx}(x, y, t) dt$$

sono continui in $\Omega_1 - O$ e verificano ivi le

$$(53) \quad J_3(\zeta; x, y) = z_{yy}(\zeta; x, y); \quad J_4(\zeta; x, y) = z_{xx}(\zeta; x, y).$$

Poichè è $z_{xx}(\zeta; x, 0) = z_{yy}(\zeta; x, 0) = 0$, $0 < x$, resta da vedere se la (A) è soddisfatta nei punti interni ad Ω_1 . La verifica che per brevità tralasciamo si fa seguendo una via analoga a quella tenuta nel caso della $z(\vartheta; x, y)$. Ci limitiamo ad osservare che per le (51), (52) e (52'), (53), nei punti interni ad Ω_1 è

$$\begin{aligned} y^k z_{xx}(\zeta; x, y) - x^k z_{yy}(\zeta; x, y) &= \gamma_2 \int_0^1 (y^k W_{xx} - x^k W_{yy}) dt = \\ &= \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \zeta^{*'} [y^k (2yX_x + xyX_{xx}) - x^k (2xX_y + xyX_{yy})] dt + \\ &\quad + \gamma_2 \int_0^1 (t - t^2)^{-\beta} \zeta^{*''} [y^k xyX_x^2 - x^k xyX_y^2] dt \end{aligned}$$

ed avendo poi presenti le (44), (38') e (39') ed avendosi $\zeta^{*''} X_t = d(\zeta^{*'})/dt$ si trova senza difficoltà che la somma scritta è nulla.

Possiamo riassumere dicendo che se ζ è continua per $\xi > 0$ ed inoltre limitata in qualunque intervallo avente zero come estremo sinistro e se, di più, ζ ammette derivata seconda continua (per $\xi > 0$), la $z(\zeta; x; y)$ definita dalle (48) è in Ω_1 soluzione della (A) che verifica le condizioni

$$z(\zeta; x, 0) = 0, \quad 0 \leq x; \quad z_y(\zeta; x, 0) = \zeta(x), \quad 0 < x$$

è regolare nei punti $0 = y < x$ e vi soddisfa la (A).

8. -- *Esistenza della soluzione del problema di CAUCHY.*

Riunendo i risultati dei due nn. precedenti si ha il

TEOR. III — *Affinchè esista una soluzione z in Ω_1 della (A) che verifica le condizioni di CAUCHY (28) è sufficiente che ϑ sia continua per $\xi \geq 0$, che ζ lo sia anche soltanto per $\xi > 0$, ma sia limitata in ogni intorno destro dello zero, ed inoltre che ϑ e ζ ammettano entrambe derivata seconda continua per $\xi > 0$.*

Tale soluzione risulta regolare nei punti $(x, 0)$ in cui è $0 < x$ ed è rappresentata in tutto Ω_1 dalla (C').

Osserviamo ora che se k è pari il 2° membro della (C') definisce una funzione del punto (x, y) anche quando questo varia in Ω_8 ; supposte verificate le ipotesi del teor. precedente, tale funzione, che indicheremo ancora con z , risulta continua in Ω_8 ed in $\Omega'_8 - O$ (l'analogo di $\Omega'_1 - O$) sono continue le sue derivate z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} e le due ultime verificano la (A). Segue il

COR. II — *Se k è pari, nelle ipotesi del teor. III, esiste in $\Omega_1 + \Omega_8$ la soluzione verificante le (28).*

Qualunque sia la parità di k , se ϑ e ζ anzichè per $\xi \geq 0$ sono assegnate nell'intervallo finito $0 \leq x_0 \leq \xi \leq x_1$ la X resterà soggetta alle limitazioni $x_0 \leq X \leq x_1$ e da ciò segue subito il

COR. III — *(Qualunque sia k) la soluzione verificante le*

$$(28') \quad z(x, 0) = \vartheta(x), \quad 0 \leq x_0 \leq x \leq x_1; \quad z_y(x, 0) = \zeta(x), \quad 0 \leq x_0 \leq x < x_1$$

se ϑ e ζ ammettono derivate seconde continue per $x_0 \leq x \leq x_1$ esiste in tutto il dominio caratteristico relativo all'intervallo $x_0 \leq x \leq x_1$.

Precisamente: se k è dispari tale dominio è quello che ha per frontiera il segmento di retta compreso tra i due punti $(x_0, 0)$ e $(x_1, 0)$ e le due caratteristiche di equazioni $a = x_0^e, b = x_1^e$; se $k = 2(2h - 1)$, h intero, la frontiera è costituita dalle due caratteristiche $a = x_0^e, b = x_1^e$; se infine $k = 4h$, h intero, le caratteristiche che limitano il dominio di esistenza sono quelle di equazioni $a = x_0^e, b = x_0^e, a = x_1^e, b = x_1^e$.

Oss. — Va rilevato che le ipotesi del teor. III, sufficienti ad assicurare la regolarità della soluzione nei punti $0 = y < x$, non bastano da sole a garantire la regolarità in O ; basta osservare che è

$$z_x(x, 0) = \vartheta'(x), \quad z_{xx}(x, 0) = \vartheta''(x); \quad z_y(x, 0) = \zeta(x); \quad 0 < x.$$

9. - Un esempio.

In tutto quel che precede abbiamo supposto i dati di CAUCHY assegnati su di un intervallo appartenente alla linea parabolica, finito o no, ma in ogni caso non contenente l'origine O come punto interno. Cosa può dirsi quando l'intervallo contiene O all'interno? Riserbandolo, come si è detto nell'Introduzione, ad altro lavoro una risposta esauriente, ci limiteremo qui ad alcune considerazioni.

Per semplificare sia k pari e siano ϑ e ζ assegnate per tutti i valori reali della variabile. Le condizioni

$$z(x, 0) = \vartheta(x), \quad z_y(x, 0) = \zeta(x); \quad x \text{ reale}$$

determinano univocamente una soluzione in tutto il piano⁽¹⁾. Tuttavia affinché tale soluzione esista non basta supporre ϑ e ζ continue insieme con la derivata seconda per ogni x reale; ciò è messo in evidenza dal seguente esempio nel quale è addirittura $\vartheta(x) = x^2$; $\zeta(x) = 0$.

Avendo supposto (k pari e quindi) q intero la funzione

$$(54) \quad z(x, y) = (x^{2q} - y^{2q})^{1/2} + 2y \int_0^y \frac{\eta^{2q-2}}{(x^{2q} - \eta^{2q})^{1-1/2}} d\eta; \quad z(0, 0) = 0,$$

è continua insieme con le derivate prime

$$z_x(x, y) = 2 \frac{(x^{2q} - y^{2q})^{1/2}}{x} + 2 \frac{y}{x} \int_0^y \frac{\eta^{2q-2}}{(x^{2q} - \eta^{2q})^{1-1/2}} d\eta;$$

$$z_y(x, y) = 2 \int_0^y \frac{\eta^{2q-2}}{(x^{2q} - \eta^{2q})^{1-1/2}} d\eta$$

⁽¹⁾ Infatti tali condizioni individuano i valori che l'eventuale soluzione in $\Omega_1 + \Omega_8 + \Omega_4 + \Omega_5$ assume sulla frontiera di tale regione, cioè sulle bisettrici ed è poi facile vedere che quei valori determinano univocamente a loro volta l'eventuale soluzione in $\Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_6 + \Omega_7$.

in tutta la regione $\Omega_1 + \Omega_8 + \Omega_4 + \Omega_5$ e si ha $z(x, 0) = x^2$, $z_y(x, 0) = 0$. Si verifica poi facilmente che nell'insieme dei punti interni a tale regione è:

$$y^{2e-2} z_{xx} = x^{2e-2} z_{yy} = 2(x^{2e} - y^{2e})^{1/e-1} (x y)^{2e-2}$$

cosicchè la z è in $\Omega_1 + \Omega_8 + \Omega_4 + \Omega_5$ soluzione della (A), ma le sue derivate seconde diventano infinite sulla frontiera. Pertanto, qualunque possa essere il « prolungamento » della (54) nella regione $\Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_6 + \Omega_7$ la funzione che ne risulta non può dirsi soluzione della (A) in tutto il piano.

[*Pervenuto alla Redazione il 30-9-1949*]