ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Leonida Tonelli

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 15, nº 1-4 (1950), p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_2_15_1-4_1_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LEONIDA TONELLI

La sera del 12 marzo 1946, quando ancora non aveva compiuto 61 anni, è mancato a causa di un brevissimo attacco renale LEONIDA TONELLI, Direttore di questi Annali, mentre era nel pieno della propria attività di illustre Scienziato e di fervido Maestro [1].

Nato, a motivo dell'impiego paterno, a Gallipoli (Lecce) il 19 aprile 1885 da famiglia veneta, il TONELLI aveva trascorso la fanciullezza a Gemona, Pavia, Pesaro, e in quest'ultima città aveva compiuto gli studi tecnici. Nell'autunno del 1902 si era iscritto all'Università di Bologna, ove Gli erano stati Maestri il PINCHERLE e l'ARZELÀ, l'ENRIQUES e il DONATI [2]. A causa di una violen-

---

[1] La figura di LEONIDA TONELLI è già stata ricordata da:

U. AMALDI (« Realtà » (28 marzo - 4 aprile 1946)).

L. GIULIANO: (« L'Ussero », A. I, n. 2, (7 aprile 1946)).

S. CINQUINI: (Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Parte generale Vol. LXXIX (1945-46), pp. 73-95).

L. CESARI: (Boll. Unione matem. italiana, A. I (1946), pp. 64-67).

G. SANSONE: (Annali di Matematica pura e applicata T. XXV (1946), pp. XIII-XVI).

S. FAEDO: (Rend. di matematica e delle sue applicazioni. Vol. VI (1947) pp. 217-225).

F. CECIONI: (Commemorazione tenuta all'Università di Pisa il 12 - III - 1947 e non ancora pubblicata).

G. SANSONE: *L'opera scientifica di Leonida Tonelli.* (Rend. Accademia Nazionale dei Lincei Vol. IV (1948), pp. 594-624).

Un ulteriore Necrologio, dovuto ad A. MAMBRIANI, verrà pubblicato nella Rivista di matematica della Università di Parma.

[2] Non voglio qui tacere, allo scopo di porre in luce il precocissimo senso critico della mente del TONELLI, un particolare che Egli mi ricordava, allorchè io, professore incaricato alle prime armi, accennavo al Maestro che in parecchi corsi di Teoria delle funzioni, alcuni dei quali dovuti a illustri luminari, il classico metodo di CAUCHY per ottenere lo sviluppo in serie di trascendenti con infiniti poli $\left(\operatorname{cotg} z, \frac{1}{\operatorname{sen} z}, \text{ecc.}\right)$ veniva presentato in modo non del tutto soddisfacente. Il TONELLI mi rispondeva che se ne era accorto fin da quando, studente, seguiva il corso di uno dei propri maestri, al quale Egli aveva chiesto spiegazioni alla fine della lezione; e di fronte all'insistenza con la quale, ben giustamente, l'Allievo mostrava la propria incomprensione per gli inefficaci schiarimenti del maestro, questi concludeva: si tratta della dimostrazione di CAUCHY! Quasi che questo nome fosse simbolo di infallibilità.

tissima infezione intestinale contratta durante un'escursione sull'Appennino bolognese, soltanto nel luglio 1907 Egli aveva concluso, a pieni voti assoluti e lode, la Sua brillantissima carriera di studente discutendo con l'ARZELÀ una tesi sui polinomi di approssimazione di Tchebychev pubblicata negli Annali di matematica [n. 4] (3), che rivelava la tempra del futuro scienziato: non è il tipico lavoretto che risente degli sforzi compiuti dall'esordiente per superare le primissime difficoltà della ricerca scientifica, ma è una poderosa Memoria di 73 pagine sulla quale ritorneremo, che molti anziani cattedratici ambirebbero di poter annoverare nella propria produzione scientifica, perchè essa, per l'importanza dei risultati raggiunti e per la varietà dei procedimenti seguiti, costituisce ancor oggi, alla distanza di oltre quaranta anni, una pubblicazione che fa testo.

Appena conseguita la laurea il TONELLI divenne assistente del PINCHERLE per l'Algebra e la Geometria analitica: questi si era assicurato *a priori* la collaborazione del futuro Laureato, mentre era ancora studente, con successivo grave disappunto dell'ARZELÀ, il quale avrebbe voluto avere come assistente il proprio Discepolo (è noto che i rapporti tra i due anziani analisti avrebbero potuto essere più cordiali). Ma quando qualche anno dopo l'ARZELÀ, a motivo dell'infermità da cui era stato colpito, non fu più in grado di svolgere la propria attività didattica e chiese al collega di cedergli l'Assistente (che aveva già superato in modo brillantissimo la fiducia dei suoi maestri), perchè avrebbe potuto tenere con la massima autorità non solo le lezioni di Analisi infinitesimale, ma anche quelle di Analisi superiore di cui l'ARZELÀ aveva l'incarico, il PINCHERLE non volle rinunciare alla preziosa collaborazione del TONELLI; e per accordo tra i due titolari il giovane Analista dovette sobbarcarsi le lezioni di due insegnamenti e tre corsi di esercitazioni. Nonostante questo gravoso carico didattico l'attività scientifica del TONELLI, che nel 1910 aveva conseguito la libera docenza in Analisi infinitesimale, continua a svilupparsi nel modo più ampio e più brillante.

Presentatosi al Concorso di Analisi infinitesimale per l'Università di Parma chiusosi nel 1911, vale a dire a quattro anni dalla Sua laurea, il TONELLI ne riuscì all'unanimità primo vincitore. Però fino da allora la fortuna Gli fu avversa, perchè non solo l'espletamento del citato concorso a causa di successivi rinvii, dovuti prima alla malattia poi alla morte dell'ARZELÀ, avvenne soltanto nello autunno del 1912, ma i successivi atti, sottoposti al Consiglio superiore nella sessione del giugno 1913, non vennero approvati. Il conseguente annullamento del concorso fu un torto gravissimo arrecato al TONELLI, perchè, come è ben noto, la ragione di tale verdetto poteva trovarsi soltanto nei riguardi degli

(3) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia.

ultimi due posti della terna. Ebbene questa sfortuna pose in maggior evidenza il grande valore scientifico del TONELLI.

Questi, presentatosi al concorso di Analisi algebrica per l'Università di Cagliari, ottenne anche in questa prova il primo posto, e così, finalmente, il 16 ottobre 1913 potè salire la cattedra dell'Ateneo cagliaritano.

Ribanditosi il concorso di Parma vi partecipò nuovamente, sia per far ritorno sul continente sia per quella naturale preferenza che abbiamo noi analisti per l'Analisi infinitesimale in confronto all'Analisi algebrica. Di nuovo riuscì, come nel concorso annullato, primo all'unanimità, e se le relazioni dei due precedenti concorsi avevano già posto in evidenza la potenza e la versalità del Suo ingegno forte ed equilibrato, questa ultima è veramente trionfale.

A Parma, ove ebbe per qualche anno l'incarico del corso di Meccanica razionale, il TONELLI insegnò per circa otto anni conseguendo il 1° luglio 1917 la promozione a ordinario. In questo periodo la Sua attività accademica venne interrotta dalla prima guerra mondiale alla quale volle partecipare da valoroso. Essendo stato dichiarato inabile al servizio militare, si sottopose di propria volontà ad un atto operatorio per essere idoneo alle fatiche di guerra. Iniziato il servizio militare nell'artiglieria da fortezza, volle passare a quella da montagna nella quale combattè dapprima per circa due anni in Macedonia, ove contrasse la malaria, nel settore di Monastir e a quota 1050. Successivamente fu alla VII armata che teneva il fronte dallo Stelvio al Garda, e la mattina del 4 novembre 1918 issava per primo la bandiera italiana su Mezzolombardo. Sempre rinunciò a congedi invernali che il Comando supremo Gli concedeva su richiesta del rettore della Sua università. Gli furono conferiti la croce al merito di guerra, due encomi, una medaglia di bronzo al valor militare per l'azione di Mezzolombardo e due promozioni per merito di guerra, in virtù delle quali il 1° gennaio 1940 raggiunse il grado di tenente colonnello di complemento. Il comandante l'artiglieria della VII armata così scrisse di Lui: « È un ufficiale di qualità veramente eccezionali: è capace di assolvere qualsiasi incarico con abilità, prontezza, decisione, è stato uno degli interpreti più intelligenti, completi della mia azione di comando. È poi un valoroso soldato, che ha degnamente onorato la cattedra ».

Nella primavera del 1922 il TONELLI venne chiamato alla cattedra di Analisi superiore dell'Università di Bologna, ove tenne assieme a questo insegnamento uno dei corsi di Analisi del primo biennio alternandosi con il PINCHERLE, fino a quando nell'autunno del 1928, collocato a riposo questo ultimo, il TONELLI passò a quella cattedra di Analisi infinitesimale che avevano successivamente ricoperta i Suoi due maestri.

È questo un periodo di somma attività scientifica del Maestro, il cui altissimo valore viene riconosciuto con la medaglia d'oro della Società dei XL, e dall'Accademia dei Lincei, la quale nel 1927 Gli conferì il Premio reale per la matematica dell'anno 1925; ma altrettanto fervida è la Sua attività didattica: oltre al corsi già citati, Egli tiene fino al 1927 insegnamenti di Analisi alla Università di Ferrara, e successivamente a Bologna anche il corso di matematica per gli studenti di Chimica e di Scienze naturali.

Tra il 1921 e 1923 pubblica i due volumi dei Suoi « Fondamenti di Calcolo delle variazioni » [n. 138-139] e nel 1928 le « Serie trigonometriche » [n. 140]: questa opera era apparsa precedentemente (1924-1925) in litografia [n. 145] preceduta da un'introduzione sull'integrale di Lebesgue che sviluppa in forma didattica il contenuto di una Memoria [n. 55] su cui ritorneremo e che costituisce anche oggi un corso preziosissimo per chi vuol impossessarsi rapidamente e senza alcuna fatica di quella teoria. Si tratta di volumi veramente suggestivi, perchè in essi ogni argomento con le ipotesi e la tesi, i procedimenti dimostrativi e le osservazioni complementari spiccano con quella stessa infallibile nitidezza, con cui, in una limpida mattina di settembre, da uno dei giganti alpini si dominano le valli con i fiumi e i laghi, le varie catene di montagne e la pianura che si estende sino all'Appennino. Chi ha forgiato la propria mente su tali volumi, di fronte ad altre opere pur ottime, ben difficilmente non risente la nostalgia della chiarezza e della precisione di quelle del TONELLI.

È dell'anno 1926-27 il manoscritto, fino da allora pronto per la pubblicazione e purtroppo ancora inedito [n. 150], di un corso sulle Equazioni integrali che, assieme ai due precedenti, formava oggetto per solito con alternativa triennale dell'insegnamento di Analisi superiore e nel quale tale teoria viene sviluppata in forma molto generale, usufruendo per la prima volta del concetto di integrale di Lebesgue.

Le lezioni di Analisi superiore del TONELLI esercitavano un'attrazione potentissima su di noi studenti, anche su chi aveva seguito nel primo biennio i corsi di Analisi del PINCHERLE, pure lui maestro di eccezionale efficacia didattica: il giovane Maestro ci apriva le vie della moderna teoria delle funzioni di variabile reale, presentando i concetti più delicati nella forma più limpida e piana tanto che noi non solo rimanevamo sorpresi di non incontrare quelle difficoltà che sono proprie di questo ramo meraviglioso della matematica, ma in noi sorgeva spontaneo e vivissimo il desiderio di raggiungere qualche modesto risultato. Quale più affascinante figura di Maestro è possibile imaginare?!

Pure in questo periodo la Sua figura di scienziato emergeva in congressi internazionali: a Toronto (1924) ove brillantemente illustrava i fondamenti del proprio metodo diretto del Calcolo delle variazioni in una comunicazione il cui testo fu pubblicato oltrechè in italiano [n. 84] anche in inglese [n. 64] e in francese [n. 65]; alle celebrazioni per il centenario dell'Accademia delle Scienze di Russia (1925) svoltesi a Leningrado e a Mosca; e a Bologna (1928) ove in una conferenza generale [n. 90], tenuta in questo primo congresso veramente internazionale, nel senso più ampio della parola, dopo la prima guerra mondiale, riassumeva gli importanti contributi apportati dagli analisti italiani alla teoria delle funzioni di variabile reale.

Nell'autunno del 1930, quando la figura scientifica del TONELLI era giunta all'apogeo, Egli veniva chiamato all'Università di Pisa, quale titolare di Analisi infinitesimale e incaricato di Analisi superiore, per far risorgere la gloriosa tradizione pisana. Non si deve tacere che tale chiamata venne inizialmente ostacolata da ragioni di natura politica: da otto anni vigeva in Italia un regime di governo, verso cui il TONELLI aveva apertamente manifestato la propria avversione aderendo, proprio nel primissimo gruppo di firmatari, al noto manifesto Croce, e nei confronti del quale il TONELLI in seguito nè mutò parere nè volle transigere nemmeno di fronte alla constatazione che il regime metteva sempre più in disparte i propri oppositori. Si deve all'intelligente iniziativa di GIOVANNI GENTILE, allora regio Commissario della Scuola Normale Superiore (e alla cui venerata Memoria io rendo il doveroso omaggio per quanto ha fatto per questa Scuola), se tali ostacoli politici poterono essere superati, e il TONELLI potè sviluppare in Pisa la parte senza dubbio più cospicua della sua attività di Maestro e di animatore.

Egli destò subito il massimo entusiasmo tra gli studenti, i quali seguivano le Sue lezioni in un « religioso silenzio »: « Le Sue lezioni erano meravigliose; Egli portava l'uditorio ad affrontare nel modo più naturale i problemi più difficili e sapeva rendere tanto fedelmente il Suo pensiero — con un linguaggio semplice e conciso — che quanto Egli diceva si sarebbe potuto senz'altro stampare! Alcune delle Sue lezioni sono rimaste indimenticabili per chi ebbe la ventura di udirle; e ciò non solo per quelle più elevate di Analisi superiore, ma anche per i corsi del primo biennio, durante i quali molti, come chi scrive, sentirono nel fascino della Sua parola il richiamo della Scienza e il bisogno di abbandonare altre vie per cui erano già incamminati per seguire il Maestro » (4).

« I concetti che esponeva con cristallina chiarezza unita a un profondo spirito di critica si trasformavano in materia viva di studio e di ricerca nella mente di chi lo ascoltava » (5).

Così si sono espressi diversi allievi del Maestro.

Ma la parte più originale della Sua attività didattica si svolgeva alla Scuola Normale, ove, oltre alle lezioni cattedratiche, Egli dirigeva due distinti seminari: uno a scopo didattico, l'altro con l'intento di informare l'uditorio sul contenuto di nuove pubblicazioni; e in queste ultime esposizioni la parola del Maestro,

(4) S. FAEDO, luogo cit. in (1), pag. 221.
(5) L. CESARI, luogo cit. in (1), pag. 67.

illuminata dalla Sua profonda cultura e dalla Sua finissima intuizione, si rivelava ben preziosa quando la pubblicazione in questione era piuttosto ermetica.

Nè la Sua opera di Maestro si esauriva nel tempo fissato dall'orario, perchè spesso Egli si indugiava all' Università a discutere sui problemi a cui la lezione aveva dato origine; e questa discussione si protraeva ancora, con i discepoli più anziani, sul Lungarno o per la Strada Vittorio Emanuele mentre il Maestro faceva ritorno alla propria dimora; e pure in quel Suo studio di imponente signorilità, il cui contenuto si è miracolosamente salvato dagli indiscriminati bombardamenti aerei, Egli talvolta trascorreva interi pomeriggi con i propri discepoli. Questo fervore con cui il Maestro spronava gli allievi alla ricerca scientifica ha portato a significativi risultati, perchè alcuni di essi hanno raggiunto la cattedra universitaria da molti anni, senza che mai, a motivo della Sua nota posizione politica, il Maestro entrasse una sola volta in una commissione di concorso universitario: dal 1926 sino alla Sua scomparsa, e cioè per 20 anni, il TONELLI non giudicò mai alcun concorso. E quella piramide di giovani, i quali alla scomparsa di Lui lavoravano alacremente sotto la Sua guida, ha proseguito con immutato fervore la strada tanto profondamente tracciata dal Maestro.

Quanti sono i Suoi discepoli, sia nel Calcolo delle variazioni, sia negli altri rami dell'Analisi? Sarebbe un po' difficile elencare, oltre i veri allievi, coloro che sotto la guida di Lui hanno raggiunto dei risultati scientifici, e quelli infine, che, pur non avendo lavorato proprio nell' indirizzo del TONELLI, sono stati influenzati dalla Sua figura di eminente Scienziato. Se poi si volessero enumerare tutti gli studiosi che nelle proprie ricerche hanno utilizzato o un concetto o un' idea o un procedimento del TONELLI, si andrebbe incontro a moltissime omissioni, tanto ampia e profonda è la Sua orma nei diversi campi dell'Analisi.

Ad un altro ramo dell' attività pisana del TONELLI dobbiamo ancora accennare. Appena chiamato all' Università di Pisa, e assunta la Direzione dell'Istituto di matematica che tenne ininterrottamente per circa 16 anni fino alla Sua scomparsa, Egli si interessò dell'effettiva organizzazione dell' Istituto stesso, anche dal punto di vista dei locali, sia per quanto riguarda la biblioteca sia per quanto si riferisce alle aule per le lezioni.

Ma la parte più cospicua di tale ramo della Sua attività è costituita da questi Annali della Scuola Normale Superiore che Egli ha veramente fondato (per quanto esistesse già una prima serie non molto nota) e curato con tanto intelletto d'amore per farne una delle più importanti riviste matematiche internazionali. In questi 15 volumi di cui consta queste seconda serie, che si chiude con il presente, sono contenuti oltre 240 articoli dovuti alla collaborazione di 126 autori, più della metà dei quali sono stranieri. Soltanto chi ha vissuto a fianco del Maestro può avere un' idea di quanto entusiasmo Egli abbia dedicato all'organizzazione e allo sviluppo di questi Annali e da quanto interno affanno Egli sia stato preso, ogniqualvolta il Suo lungimirante pensiero potesse prevedere qualche imprevisto; senza entrare in particolari, basta ricordare che a quell'epoca ogni pubblicazione anche scientifica era sottoposta a un controllo politico che poteva trasformarla in un facile bersaglio.

Quando nell'autunno 1939 il TONELLI venne chiamato all'Università di Roma, ove per un anno fu anche professore aggregato all'Istituto di Alta matematica, Egli, per non abbandonare i Suoi allievi, continuò a svolgere quasi tutta la propria attività pisana (con eccezione soltanto del corso di Analisi matematica), ma dopo aver tenuto per tre anni la cattedra dello *Studium urbis* volle ritornare a quella della *Sapienza* per dedicare nuovamente tutto se stesso a Pisa.

Alle Sue molteplici attività pisane è da aggiungere un corso di Calcolo delle probabilità con applicazioni tenuto, durante parecchi anni, per la Scuola di perfezionamento in Scienze assicurative, e inoltre, nell'ultimo triennio della Sua vita, un corso di Matematica generale per la sezione staccata, presso l'Università di Pisa, della Facoltà di Economia e commercio di Firenze.

Ma la prova suprema del proprio attaccamento alla Scuola Normale il Maestro la diede dopo l'8 settembre 1943: mentre la gloriosa Scuola era rimasta senza direzione e il magnifico palazzo dei Cavalieri era occupato dalle truppe tedesche, il TONELLI, a differenza di coloro che gridavano la loro ostilità ai nazifascisti per fuggire a nascondersi, non rifiutò la nomina a Direttore della Scuola, conferitagli a Sua insaputa dal Ministro della cosidetta repubblica sociale. Con la Sua intelligente e generosa opera Egli riuscì ad ottenere che nel dicembre 1943 la Scuola fosse sgombrata dalle truppe tedesche; e quando nell'estate 1944 la battaglia si svolgeva sulle opposte rive dell'Arno e la Scuola fu due volte invasa dai tedeschi, senza la Sua opera, coadiuvata da tre ardimentosi tra cui l'affezionato discepolo GIULIANO, tutte le suppellettili e la preziosa biblioteca sarebbero state saccheggiate o distrutte.

Inoltre durante l'occupazione tedesca la Sua azione patriottica non si limitò al campo accademico, perchè in tale periodo il grande Scienziato partecipò attivamente all'organizzazione e alla sovvenzione dei partigiani dei monti Pisani mentre la Sua villa, (ove si era ritirato con la Famiglia dopo la distruzione della Sua dimora in città) ai piedi di quelle selvagge alture, era luogo di riunioni clandestine e deposito di armi. Egli fu così, come è stato detto, una seconda volta « soldato della libertà ». Avvenuta la liberazione di Pisa il TONELLI, per quanto non iscritto ad alcun partito politico, venne nominato vicesindaco della città e presidente dell'Ente comunale di assistenza, cariche che lasciò dopo alcuni mesi per dedicare nuovamente tutta la Sua attività alla Scienza e alla Scuola.

Ma purtroppo questo ritorno è stato brevissimo. Per quanto la Sua alta e slanciata persona assieme al magnifico colorito, doti che raramente si trovano unite a una figura distintissima come la Sua, dessero l'impressione di una grande robustezza fisica, questa era stata intaccata dalle fatiche della prima guerra mondiale e dalle malattie che abbiamo già accennate e delle quali erano conseguenza anche i disturbi rivelatisi nella primavera del 1933: i continui disagi e le preoccupazioni degli ultimi anni di guerra assieme alle avversità di cui non abbiamo fatto parola contribuirono a privare la Scienza, la Scuola e la Famiglia di questo nostro « Maestro » di Scienza e di Vita.

Se tanto prestante era la sua figura fisica, altrettanto nobile era la Sua figura morale: la Sua grande rettitudine e la inflessibile fermezza del Suo carattere non ammettevano compromessi; e quando si è trovato di fronte a chi invidiava la Sua esemplare figura di Uomo, di Maestro e di Scienziato, Egli, sempre e anche nell'amarezza dell'ultimo periodo della Sua vita, ha riconfermato la superiorità del Suo animo di perfetto gentiluomo che, ben consapevole delle proprie giuste ragioni, mantiene una posizione conforme allo stile accademico. Il Suo alto sentimento del dovere si ispirava all'idea che il professore universitario manca al proprio dovere, se non contribuisce al progresso scientifico della nazione.

Altrettanto grandi erano la Sua bontà (sempre rivolta a valorizzare il bene secondo la più grande equità), la Sua cordialità verso i colleghi (che dopo la liberazione Lo elessero preside di Facoltà), la Sua signorilità verso gli studenti (mai durante gli esami un naturale scatto di impazienza verso qualche studente un po' impertinente) e sopra tutto la Sua simpatia verso i giovani che apprendevano da Lui la passione per la ricerca scientifica, con i quali era paterno di consigli e di incoraggiamenti ma dai quali giustamente richiedeva un'attività fervida, seria e sempre scrupolosa nelle citazioni bibliografiche.

Forse a chi non conosceva LEONIDA TONELLI potrebbe sorgere il dubbio che queste parole, al pari di quelle di altri discepoli, siano dovute alla nostra devota gratitudine di allievi, ma per rendersi conto dell'affetto e della stima, da cui era unanimamente circondato il nostro Maestro, basta ricordare quelle solenni onoranze, tributate dall'Università di Pisa alla di Lui Memoria nel primo annuale della Sua scomparsa, che culminarono nella devota, commossa, fraterna orazione di F. CECIONI: Università e Istituzioni scientifiche italiane e straniere, amici, colleghi, discepoli inviarono la loro spontanea entusiastica adesione o intervennero personalmente a Pisa. Il nome di LEONIDA TONELLI spicca sia ai profani che entrano nella Sapienza perchè a Lui è intitolato quell'Istituto matematico che Egli veramente organizzò e perchè una lapide collocata presso l'ingresso dell'Aula magna storica ne eternizza la figura di Scienziato, di Maestro e di Cittadino, sia ai turisti che, visitando quel famoso cimitero monumentale che chiude il lato nord della piazza dei Miracoli, trovano la Sua tomba accanto a quelle di altri grandi che resero illustre la città di Pisa.

A questo punto ricordiamo che dal 1942 LEONIDA TONELLI era membro della « Pontificia academia scientiarum ». Giovanissimo Egli era stato nominato socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei, della quale però non potè mai divenire socio nazionale, dapprima per le note ragioni politiche e poi perchè ancora una volta la sfortuna si accanì contro di Lui: ricostituita dopo la liberazione l'Accademia dei Lincei, questa avrebbe avuto l'onore di poter finalmente annoverare LEONIDA TONELLI tra i propri soci nazionali, ma quando, esaurite le lungaggini dei provvedimenti epurativi, l'Accademia si riunì per le nuove nomine, il TONELLI purtroppo era scomparso da circa un mese.

Egli era uno dei XL della Società italiana delle scienze, accademico benedettino dell'Accademia delle scienze di Bologna, socio corrispondente dell'Istituto Lombardo di scienze e lettere, dell'Accademia delle scienze di Torino, della Società dei naturalisti e matematici di Modena; era membro della Società matematica di Mosca e della « Calcutta mathematical society ».

Oltre alla Direzione di questi Annali Egli era membro del Consiglio direttivo del Circolo matematico di Palermo, del comitato di redazione degli Annali di matematica pura e applicata, della Commissione scientifica dell'Unione matematica italiana (alla quale aveva dato tanta attività e di cui era stato anche tesoriere), del Compositio mathematica di Amsterdam e del Consiglio nazionale delle ricerche.

Oltre ai già citati premi dell'Accademia dei Lincei e della Societa dei XL, Gli erano stati conferiti nel 1937 il premio internazionale Bressa dall'Accademia delle scienze di Torino e soltanto nel 1944 (e non prima a motivo delle note ragioni politiche) il premio dell'Accademia d'Italia.

Soggiungiamo che, dopo la Sua scomparsa, anche l'Università di Modena ha intitolato il proprio Istituto matematico al nome di LEONIDA TONELLI.

* * *

Le pubblicazioni che il TONELLI ha lasciato sono complessivamente 174. Prima di occuparci dei Suoi contributi scientifici che si possono ripartire nei seguenti argomenti: funzioni di variabile reale; funzioni analitiche e argomenti vari; equazioni differenziali ordinarie; equazioni integrali; calcolo delle variazioni, vogliamo accennare alle altre pubblicazioni di carattere didattico o divulgativo.

Le Sue « Lezioni di Analisi matematica » [n. 146-147] pubblicate in due volumi degli anni 1939-1940 [e precedute da due corsi pure litografati di Analisi algebrica (Cagliari, 1913) e di Analisi infinitesimale (Parma, 1914) di cui sappiamo soltanto l'esistenza] rispecchiano quell'importantissimo obbiettivo del professore di Analisi matematica che dalla cattedra il TONELLI mirabilmente realizzava: formare la mentalità scientifica non solo degli aspiranti alle lauree in matematica e fisica, ma anche dei futuri ingegneri. L'esposizione è chiara, piana ed efficace, evita l'eccessiva generalità e contempera pienamente l'ordine logico della materia e le necessità didattiche dei vari corsi che formano oggetto del nostro primo biennio universitario. Nel contenuto di questi volumi, la cui redazione è perfetta, sono da rilevare tra l'altro, la nuova forma nella quale il TONELLI ha posto la definizione di infinitesimi dello stesso ordine o di ordine diverso; il concetto di piano tangente a una superficie in base al quale l'esistenza del piano tangente alle superficie $z=z(x, y)$ è equivalente alla differenziabilità della funzione $z(x, y)$; la trattazione completa delle equazioni differenziali di D'Alembert-Lagrange e di Clairaut; il problema della quadratura delle superfici curve trattato con quel procedimento originale di TONELLI [cfr. n. 69] su cui ritorneremo.

Pregio comune a questi volumi di « Lezioni » e a quelli di « Esercizi » [n. 148-149] (pubblicati nel 1942) è che la trattazione della materia è fatta costantemente (a meno di una piccolissima digressione sulle formule di Stokes) senza far uso del calcolo vettoriale: per quanto concerne gli « Esercizi » è da soggiungere che si tratta di una raccolta molto utile agli studenti, perchè i problemi sono semplici e la loro risoluzione è fatta in modo rigorosissimo.

Tra le opere didattiche è da citare anche l'ottima collezione di testi per le scuole secondarie pubblicati, a partire dal 1941, in collaborazione con il Suo antico allievo E. LINDNER: mentre il corso per la Scuola media [n. 151-152-153] è uscito da alcuni anni, alla scomparsa del Maestro mancava il secondo volume dell'« Aritmetica e algebra » [n. 154] per i licei, ma l'opera è stata completata con senso di affettuosa devozione dal collaboratore.

Di natura più attinente al campo scientifico sono, oltre alla risposta [n. 155] a una Questione proposta sul Bollettino dell'Unione matematica italiana, 15 recensioni pubblicate tra il 1925 e il 1941 e che risentono della imparziale obbiettività e della penetrante cura con cui il Maestro esaminava le opere, 4 voci dell'Enciclopedia italiana (1932-1937) e due necrologie [n. 119-120] nella seconda delle quali il TONELLI ha rievocato con commosso accento di devoto allievo la vita e la figura scientifica del Suo maestro S. PINCHERLE.

* * *

La produzione scientifica del TONELLI ha avuto inizio nel 1907 con una Nota [n. 1] di Calcolo infinitesimale il cui contenuto aveva formato oggetto di una tesina. Considerata la successione dei valori che il rapporto incrementale di una funzione di variabile reale assume in corrispondenza a una successione di incrementi attribuiti alla variabile indipendente, l'Autore si è domandato sotto quali condizioni si può concludere che, dall'esistenza del limite della successione considerata, segue la derivabilità della funzione. Può sembrare a prima vista una questione del tutto semplice e elementare, ma per trattarla oltre 40 anni fa, in modo veramente rigoroso, raggiungendo quel complesso di notevoli risultati a cui l'Autore perviene, occorre quella acutezza di mente di cui il TONELLI dà prova fino da questa prima Nota. Tra i risultati raggiunti è particolarmente importante una condizione necessaria e sufficiente, affinchè una funzione derivata sia integrabile secondo Mengoli-Cauchy.

Segue nel 1908 la pubblicazione della tesi di laurea [n. 4] a cui abbiamo già accennato e nella quale l'Autore ha esteso il metodo di approssimazione di Tchebychev alle funzioni di due variabili, per le quali il TONELLI ha posto in luce, per primo, il fatto notevolissimo che a differenza dal caso delle funzioni di una variabile, non sussiste, per solito, l'unicità dei polinomi di approssimazione ed ha stabilito in modo originale la continuità della corrispondenza che intercede tra ogni funzione continua e il suo polinomio di approssimazione. La seconda parte della Memoria tratta della rappresentazione trigonometrica per le funzioni di due variabili, e nell'ultima l'Autore applica per primo il metodo in questione alle funzioni di variabile complessa e, nel caso dell'analiticità, arriva all'importante conclusione che tra tutte le serie di polinomi di grado successivamente crescente, uniformemente convergenti verso la funzione considerata, ce n'è sempre una e una sola che dà la massima convergenza. Due anni dopo P. MONTEL riportando questi risultati nelle proprie *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe* (6) scriveva: « J'ai utilisé ici le Mémoire de M. L. Tonelli ». Nè si deve tacere, per porre in luce oltre alla forza d'ingegno del giovane Laureando anche la finezza del Suo intuito, che la scelta dell'argomento delle tesi di laurea, per quanto concordata con l'Arzelà, era dovuta proprio all'iniziativa del TONELLI, come Egli un giorno ebbe occasione di accennarci.

Pure del 1908 è una Nota [n. 3] contenente alcune delicate osservazioni sui punti di discontinuità di 1ª specie; tra l'altro l'Autore, dopo aver rilevato che una classificazione degli insiemi contenuta in un volume pubblicato due anni prima da W. H. YOUNG è illusoria, perviene a una condizione necessaria e sufficiente affinchè un insieme di punti sia misurabile.

Un'altra interessantissima Nota [n. 2] dello stesso anno, nella quale il Discepolo dell'Arzelà, giovanissimo, fa uso dell'integrale di Lebesgue sorto da pochi anni è dedicata al problema della rettificazione delle curve, e in essa vengono raggiunti risultati di capitale importanza riportati nei trattati come teoremi di TONELLI: Egli dimostra innanzi tutto che la lunghezza di una curva è sempre non inferiore al valore del classico integrale e poi stabilisce che condizione necessaria e sufficiente affinchè valga l'uguaglianza è che la curva sia definita da funzioni assolutamente continue. In una Nota [n. 17] di quattro anni dopo il TONELLI è ritornato sui risultati ora citati che Egli, dotato di uno spiccato ed esemplare senso di autocritica, riteneva di aver raggiunti con dimostrazione

(6) Paris, Gauthier - Villars, 1910; pp. 66-71.

« un po' lunga e pesante » per ritrovarli in modo « più breve e agile » ; e tale Nota, oltre a raggiungere mirabilmente l'obbiettivo propostosi dall'Autore, contiene una notevole osservazione didattica (talvolta dimenticata negli ordinari corsi di Analisi infinitesimale) che pone in evidenza come nel TONELLI (che ancora non aveva salito la cattedra universitaria) si rivelasse oltre alla figura dello Scienziato quella del Maestro: la classica formula, che esprime la lunghezza della curva $y=f(x)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$ continua a essere valida anche quando la $f'(x)$ non è limitata nell'intorno di un punto (o più generalmente di un insieme riducibile di punti) di (a, b), se esiste il relativo integrale generalizzato.

Al problema della rettificazione delle curve è pure dedicata un'altra Nota [n. 42] del 1916 nella quale l'Autore perviene a un risultato magistrale, anche esso noto come teorema di TONELLI : per ogni curva rettificabile (quindi definita da funzioni anche non assolutamente continue) sussiste quasi dappertutto l'uguaglianza

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

La dimostrazione di tale risultato è basata su un procedimento originale di natura geometrica sviluppato dal TONELLI in altre due pubblicazioni [n. 39-40] per stabilire un teorema di derivazione per serie (sul quale è successivamente ritornato [n. 43]), da cui ha dedotto risultati importanti per il Calcolo delle variazioni e ha ritrovato, come caso particolare, un teorema dato l'anno prima da G. FUBINI.

Tale procedimento viene ripreso [n. 41] per risolvere il problema della ricerca delle funzioni primitive (già trattato con altri metodi da LEBESGUE e VITALI) per una via « più elementare e più intuitiva » che si giova dell'idea semplicissima di iscrivere in una curva continua $y=y(x)$ una successione di poligonali $y=y_n(x)$ e del fatto che nell'ipotesi che $y(x)$ sia a variazione limitata le $y_n'(x)$ danno una rappresentazione « quasi completa » della $y'(x)$.

Nel contenuto della nota [n. 42] sopra citata è contenuto un esempio, divenuto ormai classico nella teoria delle funzioni di variabile reale e famigliare a chi ha seguito il corso di TONELLI sull'integrale di LEBESGUE, di una curva $y=f(x)$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ avente lunghezza maggiore del classico integrale, la quale è definita da una funzione $f(x)$ continua e a variazione limitata ma non assolutamente continua introdotta in una precedente Nota [n. 27].

Oggetto di quest'ultima pubblicazione è la disuguaglianza, considerata inizialmente da E. ALMANSI,

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b f'^2(x)\,dx,$$

che il TONELLI stabilisce sotto condizioni più ampie e in modo diretto, supponendo soltanto che $f(x)$ sia assolutamente continua con $f(b)=f(a)$ e che $f'(x)$

sia a quadrato integrabile. Per la funzione $f(x)$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ che abbiamo citata poco sopra, la disuguaglianza in questione non è valida: questa Nota mette in piena luce uno dei pregi delle pubblicazioni del TONELLI, il quale si proponeva di stabilire i risultati delle proprie ricerche nelle più ampie condizioni di validità, avendo inoltre la cura di mostrare con acuti esempi che le ipotesi fatte erano veramente essenziali.

Un'importantissima Nota [n. 7] del 1909 contiene una formula di integrazione per parti per le funzioni di due variabili la cui dimostrazione è basata su due notevoli proposizioni, la prima delle quali, divenuta ormai classica, è nota sotto il nome di teorema di FUBINI-TONELLI, perchè inverte, nel caso delle funzioni non negative, il famoso teorema di sdoppiamento dato due anni prima da G. FUBINI; vogliamo qui riportarla, per scrupolosa fedeltà al pensiero dell'Autore, nei suoi termini originali: « una funzione $f(x, y)$ misurabile superficialmente in R, non negativa, e tale che esista

$$\int_a^x dx \int_c^y f(x, y)dy,$$

è integrabile superficialmente in R. Da ciò segue

$$\int_a^x dx \int_c^y f(x, y)dy = \iint_{a\,c}^{x\,y} f(x, y)dxdy = \int_c^y dy \int_a^x f(x, y)dx \text{ ».}$$

L'altra notevole proposizione contenuta nella Nota in questione e anche essa di uso frequentissimo afferma che « se $f(x, y)$ è una funzione integrabile superficialmente, la funzione uguale a

$$\int_a^x f(x, y)dx$$

nei punti ove quest'integrale lineare esiste e nulla altrove, è superficialmente integrabile ».

Alla collaborazione tra FUBINI e TONELLI, i due Grandi troppo presto scomparsi e la cui vicendevole amicizia fu pari al Loro valore, è dovuta una Nota [n. 37] di qualche anno dopo (1915) sulla derivata seconda mista di un integrale doppio.

Di argomento aderente a quello dei due ultimi lavori è una Nota [n. 9] del 1910 dedicata agli integrali dipendenti da un parametro e nella quale, con acutissima indagine, viene raggiunto un cospicuo gruppo di risultati, relativi alla continuità e alla derivabilità di tali integrali e valevoli sotto condizioni molto ampie.

Nello stesso 1910 ha inizio un gruppo di lavori di importanza capitale, dedicati alla rappresentazione di una funzione mediante serie di polinomi noti sotto il nome di STIELTJES, perchè traggono origine da una lettera di quest'ultimo autore a HERMITE e dei quali avevano già fatto uso LANDAU e DE LA VALLÉE POUSSIN per la rappresentazione delle funzioni di una sola variabile. In una prima Memoria [n. 13] il Discepolo dell'Arzelà si è occupato in tutta la generalità del caso delle funzioni di più variabili, alle quali ha esteso il risultato conseguito un anno prima da F. RIESZ per le funzioni di una sola variabile: sotto la sola ipotesi che la funzione $f(x, y)$ sia integrabile secondo Lebesgue la successione dei polinomi di Stieltjes $P_n(x, y)$ ad essa relativi converge quasi dappertutto verso $f(x, y)$. Due anni dopo, nel 1912, quando il giovane TONELLI attendeva ancora di salire la cattedra universitaria, il DE LA VALLÉE POUSSIN riportava tale proposizione nel proprio Cours d'Analyse (7) come « Théorème de M. L. Tonelli ». In tale poderosa Memoria la quale tratta anche dell'approssimazione delle derivate parziali di ordine qualunque della funzione $f(x, y)$ mediante le corrispondenti derivate parziali dei polinomi $P_n(x, y)$, l'Autore ha stabilito per primo il teorema di integrazione per serie nell'ipotesi che $f(x, y)$ sia limitata, dimostrando che la successione degli integrali dei polinomi di Stieltjes converge verso l'integrale di $f(x, y)$, (questione che anteriormente non era stata trattata nemmeno per le funzioni di una variabile). Infine nel lavoro in questione viene fatta una prima applicazione dei polinomi di Stieltjes al problema della rettificazione delle curve e a quello della quadratura delle superfici curve.

Di importanza anche maggiore è la seconda Memoria [n. 38] del 1916, nella quale il TONELLI riprende lo studio dei polinomi di Stieltjes relativi a funzioni di una sola variabile, ponendo sotto forma più ampia proprietà già note e stabilendone delle nuove. Il teorema d'integrazione per serie viene posto sotto forma più generale, dimostrando che, sotto la sola ipotesi che la funzione $f(x)$ sia integrabile nel senso del Lebesgue, l'integrale del polinomio di Stieltjes (relativo a $f(x)$) esteso a un insieme di punti misurabile tende all'integrale della funzione $f(x)$ esteso allo stesso insieme: di questa proposizione l'Autore dà due diverse dimostrazioni; la prima, usufruendo del teorema di integrazione per serie di VITALI, si basa su un'altra importantissima proprietà stabilita nella Memoria in questione: l'equiassoluta continuità degli integrali dei polinomi di Stieltjes; la seconda su un lemma fondamentale, contenuto nella Memoria stessa e in virtù del quale l'integrale

$$\int_E f(x+t)dx$$

esteso a un insieme misurabile E è una funzione continua di t sotto la sola ipotesi che $f(x)$ sia integrabile secondo Lebesgue. Del tutto nuova è la proprietà che nell'ipotesi che $f(x)$ sia assolutamente continua, la successione dei

(7) Vedi II edizione (1912) Tomo II, p. 135

relativi polinomi di Stieltjes è equiassolutamente continua. Infine, tra le varie applicazioni che formano oggetto di questa seconda Memoria, ci limitiamo a citare la seguente, che spicca per la sua generalità: se $f(x)$ è a variazione limitata e resta sempre compresa tra $f(x-0)$ e $f(x+0)$, allora le lunghezze delle curve definite dai polinomi di Stieltjes che approssimano la $f(x)$ tendono alla lunghezza della curva $y=f(x)$.

Dei polinomi di Stieltjes il TONELLI stesso e anche i Suoi discepoli hanno ripetutamente fatto uso nel problema della quadratura delle superfici come rileveremo più avanti, in questioni di Calcolo delle variazioni e anche in ricerche sulla teoria delle equazioni differenziali. Vogliamo qui citare una fecondissima Memoria [n. 96] del 1930 relativa all'integrale di Dirichlet e che ha dato origine a un gruppo di nostre ricerche sul problema dell'approssimazione delle funzioni; in essa il Maestro prova sotto condizioni del tutto generali che se $f(x, y)$ è una funzione assolutamente continua in D e tale che esista finito lo integrale

$$I_D[f]=\iint\limits_D \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 \right\} dxdy,$$

la successione $P_n(x, y)$, $(n=1,2, \ldots.)$ dei polinomi di Stieltjes relalivi a $f(x, y)$ è tale che gli integrali $I_D[P_n]$ tendono a $I_D[f]$.

Una Nota [n. 29], presentata all'Accademia delle Scienze di Torino verso la fine del 1913, e nella quale il noto teorema di ASCOLI-ARZELÀ sull'esistenza di almeno una funzione di accumulazione in ogni varietà di funzioni ugualmente limitate e ugualmente continue viene stabilito in modo del tutto indipendente dal postulato di Zermelo, rivela quella che è stata una delle direttive fondamentali seguite dal TONELLI non solo nella teoria delle funzioni di variabile reale ma anche nel Calcolo delle variazioni: evitare l'uso del principio delle infinite scelte arbitrarie senza rinunciare alla generalità dei risultati che si vogliono raggiungere.

Questa direttiva alla quale si ispira completamente la Sua duplice trattazione della teoria dell'integrale di Lebesgue di cui passiamo a riferire, pone in luce quella analogia tra la mentalità del TONELLI e quella del DINI che F. CECIONI ha tratteggiato con tanto fervore (nella Commemorazione citata in (1)) rilevando che entrambi i « sommi analisti » hanno avuto in altissimo grado sia la forza di intuizione della loro mentalità costruttiva sia quell'atteggiamento critico in virtù del quale le loro dimostrazioni sono sempre perfette.

Secondo tale direttiva è redatta anche tutta la prima parte del Vol. I dei « Fondamenti di Calcolo delle variazioni » [n. 138] dedicata alla teoria delle funzioni di variabile reale e nella quale sono contenute sia precedenti ricerche del TONELLI stesso (in parte da noi già citate) sia nuovi contributi originali che non avevano formato oggetto di precedenti pubblicazioni. Tra questi emerge, per importanza, la nuova trattazione dell'integrale di Lebesgue, sviluppata in modo del tutto indipendente dal postulato di Zermelo, introducendo (al posto degli insiemi misurabili e delle funzioni misurabili di Lebesgue) il concetto di « pseudointervallo » e quello di funzione « quasi continua », il quale, quando si ammetta il postulato di Zermelo, viene a coincidere con quello di funzione misurabile: la definizione di integrale per le funzioni limitate viene data secondo l'ordine di idee di W. H. YOUNG, mentre quella per le funzioni illimitate si attiene al procedimento di DE LA VALLÉE POUSSIN.

Di importanza anche maggiore è la successiva trattazione dell'integrale di Lebesgue che forma oggetto di una Memoria [n. 55] del 1924, da noi già citata. Questa, come un giorno accennava il Maestro, trae origine da una conferenza nella quale Egli, tra i preliminari del Suo dire, doveva dare anche un cenno rapido ed elementare dell'integrale di Lebesgue; l'idea sorta nella poderosa mente dello Scienziato a scopo puramente divulgativo dava origine a quella Memoria che l'Autore, con quella modestia che caratterizza l'ingegno dei Grandi, ha presentato nei seguenti termini: « Il presente lavoro è un tentativo per rendere più semplice, dirò così più elementare, e quindi più facilmente accettabile da tutti, la teoria dell'integrale del Lebesgue, liberandola completamente dalla teoria della misura dei gruppi di punti ».

Questa nuova e originale trattazione che presenta l'integrale di Lebesgue come naturale e immediata estensione dell'integrale di Mengoli-Cauchy è basata sulla nozione di « plurintervallo » (numero finito o infinità numerabile di intervalli non sovrapponentisi) e di funzione « quasi continua » e sulla considerazione delle funzioni « associate », ciascuna delle quali risulta continua e differisce dalla funzione quasi continua a cui è associata soltanto nei punti di un plurintervallo aperto la cui lunghezza può farsi piccola ad arbitrio. L'integrale per le funzioni quasi continue limitate viene definito come limite degli integrali delle funzioni associate al tendere a zero della lunghezza del plurintervallo associato; invece, nel caso delle funzioni quasi continue illimitate, il TONELLI si è attenuto ancora al procedimento di DE LA VALLÉE POUSSIN. Questa trattazione che si è rivelata di un'efficacia didattica eccezionale, ha un'importanza scientifica di primo piano ed è stata chiamata dall'HOBSON [8] « Tonelli's teory of integrations ».

In una breve Nota [n. 135] del 1942, nella quale ha affermato il proprio punto di vista circa il modo di introdurre l'integrale di Lebesgue, il TONELLI ha avuto occasione di indicare in qual modo la teoria che aveva precedentemente sviluppato per le funzioni di una sola variabile si estenda in maniera semplicissima a quella di più variabili.

---

[8] E. W. HOBSON. *The theory of functions on a real variable* ecc. (Cambridge, 1926) vol. II, pp. 380-382.

Un altro contributo all'integrale di Lebesgue che presenta particolare interesse anche per lo studio delle equazioni integrali a nucleo illimitato è raggiunto in una Nota [n. 78] del 1927 nella quale viene dimostrata l'integrabilità (secondo Lebesgue) rispetto a x per quasi tutti i valori di x_1 e per tutti gli α con $0<\alpha<1$ della funzione $f(x): | x_1-x |^\alpha$, nell'ipotesi che $f(x)$ sia integrabile secondo Lebesgue.

Pure alla teoria dell'integrale di Denjoy il TONELLI ha arrecato il proprio magistrale contributo sviluppando una trattazione originale (cioè indipendente delle lunghe Memorie di Denjoy), molto rapida e semplice, con la quale ha risolto il problema della ricerca delle funzioni primitive sotto condizioni più ampie di quelle di Denjoy. In un gruppo di note lincee [n. 45-46-47] del 1920 ha precisato l'impostazione del problema ed è giunto al seguente risultato: Condizione necessaria e sufficiente, affinchè una funzione continua sia determinata a meno di una costante additiva da un suo numero derivato, è che:

1°) questo numero derivato sia conosciuto quasi dappertutto.

2°) nessuno dei due insiemi di punti in cui esso assume i valori $+\infty$, $-\infty$ contenga un insieme perfetto.

Una successiva Nota [n. 59] contiene qualche altro contributo, e infine in un lavoro [n. 79] del 1927 viene data una nuova semplicissima costruzione per determinare la funzione primitiva quando siano soddisfatte le condizioni ora riportate.

La trattazione dell'integrale di Denjoy sviluppata inizialmente dal TONELLI si giova di considerazioni sugli insiemi aventi la potenza del continuo contenute in una Nota [n. 44], nella quale viene dimostrata in modo più semplice una proposizione di BOREL e ne vengono stabilite due generalizzazioni.

Allo stesso ordine di idee dell'integrale di Denjoy appartiene una pubblicazione [n. 99] del 1931, nella quale con una rapidità del tutto sorprendente viene ridimostrata una proposizione rilevata da G. GOLDOWSKY, e che in condizioni meno ampie era stata precedentemente stabilita per successivi gradi da parecchi autorevoli autori: una funzione continua in un intervallo e avente una derivata, finita o no, nulla quasi dappertutto, è costante in tutto l'intervallo.

Nel 1926 il TONELLI ha affrontato il problema della quadratura delle superfici curve in forma ordinaria

$$S: \qquad z=z(x, y), \qquad (0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$$

quando si assuma come definizione di area quella di LEBESGUE; e se in altre Sue ricerche ammiriamo la potenza costruttiva del Suo forte ingegno e la Sua finissima intuizione, in questo problema Egli appare un dominatore della Scienza, tanto rapido (si tratta di quattro Note lincee!) e semplice è il modo nel quale perviene a un complesso di magnifici risultati che formarono oggetto anche di una comunicazione all'Académie des Sciences de Paris [n. 70].

Bisogna anzitutto ricordare che nel caso delle funzioni di una sola variabile i due concetti di funzione a variazione limitata e di funzione assolutamente continua, su cui si impernia il problema dell' esistenza della derivata e quello della ricerca della funzione primitiva, avevano altresì servito a risolvere in modo completo il problema della rettificazione delle curve (teorema di JORDAN e teorema di TONELLI già citato); per le funzioni di due variabili erano stati dati, tra l' altro da G. VITALI, due concetti del tutto analoghi a quelli citati per la trattazione dei problemi del Calcolo infinitesimale corrispondenti a quelli sopra ricordati. Il primo merito del TONELLI è stato quello di rendersi conto che i due concetti del VITALI (e nemmeno quelli dovuti ad altri autori) non potevano riuscire efficaci nel problema della quadratura delle superfici curve, perchè i concetti del VITALI implicano la considerazione degli elementi differenziali del secondo ordine, mentre nel problema della quadratura delle superfici intervengono soltanto le derivate parziali del primo ordine. Pertanto il nostro Maestro ha dato per le funzioni di due variabili due nuovi concetti di funzione a variazione limitata e di funzioue assolutamente continua, i quali si sono rivelati di somma efficacia non solo nel problema in questione, ma anche negli studi sulle serie doppie di Fourier e sugli integrali doppi del Calcolo delle variazioni. Il primo di questi concetti fornisce [n. 67] una condizione necessaria e sufficiente, perchè la superficie S sia ad area finita. Successivamente [n. 68] il TONELLI ha rilevato che, per ogni superficie ad area finita, il valore del classico integrale è non superiore all' area della superficie; e infine [n. 69], mediante il secondo dei nuovi concetti, ha dato una condizione necessaria e sufficiente, perchè il classico integrale esprima proprio l' area della superficie. La dimostrazione della sufficienza di questa ultima condizione diede molto da pensare allo Scienziato (come Egli diceva, rievocando alla distanza di anni, tale difficoltà assieme ad alcuni particolari della Sua vita in quel giorno in cui trovò il modo di superarla): nel caso particolare in cui $z(x, y)$ è finita e continua assieme alle proprie derivate parziali del primo ordine il TONELLI raggiunse l' obbiettivo mediante un procedimento elementare, semplice e suggestivo (sviluppato anche nelle Sue lezioni di Analisi matematica [n. 147]) che consiste nell' iscrivere nella superficie S una successione di superfici poliedriche a facce triangolari; invece nel caso generale, in cui cioè si supponga soltanto che $z(x, y)$ sia assolutamente continua, il grande Analista fece appello [n. 71] ai già citati polinomi di Stieltjes.

In una successiva Nota [n. 77] Egli ha mostrato che indipendentemente dall'assoluta continuità della funzione $z(x, y)$, l'area di ogni superficie S ad area finita si può ottenere come limite delle aree delle superfici definite dai polinomi di Stieltjes che approssimano la funzione $z(x, y)$.

Si deve qui soggiungere che il problema della quadratura delle superfici in forma parametrica, quando si assuma come definizione di area quella di Lebesgue, è stato affrontato e risolto in tutta la Sua generalità da L. CESARI, discepolo del TONELLI.

Alla importantissima ricerca di cui abbiamo parlato fino ad ora si collegano altri cinque lavori [n. 85-92-110-131-135], tra i quali si è rivelato di magistrale importanza il primo [n. 85], perchè il TONELLI, per mostrare che la definizione di funzione di due variabili a variazione limitata dovuta a G. ANDREOLI e P. NALLI è un caso particolare della propria, ha introdotto una classe di funzioni definite da una media integrale, le quali si sono rivelate efficacissime nelle ricerche (da noi compiute) sul problema dell'approssimazione delle funzioni. Tra i lavori citati emerge la Nota [n. 92] dell'Accademia delle Scienze di Bologna, in cui viene provato che nel passaggio dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari una funzione $z(x, y)$ assolutamente continua mantiene tale proprietà anche rispetto alle variabili polari, se il polo è esterno al quadrato Q in cui $z(x, y)$ viene considerata; mentre nel caso in cui il polo sia interno a Q l'Autore conclude che tale fatto è assicurato (senza alcuna ipotesi supplementare) tranne, al più, quando il polo si trovi in un insieme di punti di Q avente misura superficiale nulla.

Del 1936 è una Nota [n. 110] che si riferisce a una estensione del concetto di funzione a variazione limitata (estensione introdotta da altro autore e chiamata dal TONELLI funzione generalmente a variazione limitata) e che fornisce un esempio di quella finissima abilità mentale con cui il Maestro sapeva adattare, con opportuni accorgimenti, un proprio precedente procedimento per ritrovare in modo molto rapido un risultato raggiunto per altra via.

Infine del 1939 e del 1942 sono due conferenze [n. 131-134] in cui vengono esaminate in « mirabile sintesi geometrico-analitica » (come ha detto G. SANSONE) le relazioni che intercedono tra i concetti di integrale definito, di funzione a variazione limitata e di funzione assolutamente continua in una e in due variabili e i problemi della quadratura delle superfici piane, della ricerca delle funzioni primitive, della rettificazione delle curve e della quadratura delle superfici curve.

Tra gli ulteriori risultati relativi alla teoria delle funzioni di variabile reale emerge un teorema di derivazione per serie [n. 98] del 1931 che contiene, come casi particolari, due proposizioni dovute ad altri autori e dal quale hanno tratto origine alcune ricerche di discepoli.

Un'altra Nota lincea [n. 111] del 1936 forma oggetto di un' interessantissima proposizione che generalizza il noto teorema di PINCHERLE-BOREL, e della quale viene mostrata l'efficacia per stabilire rapidamente il classico teorema integrale di Cauchy per le funzioni monogene: a proposito del citato teorema di PINCHERLE-BOREL spetta a TONELLI il merito di aver posto in luce (facendone applicazione nella dimostrazione di un teorema esistenziale di Calcolo delle variazioni [n. 52]) la priorità del PINCHERLE.

Un'altra questione di priorità cui è dedicata una brevissima Nota [n. 56], nella quale si fa presente come un ragionamento, fatto anteriormente da

C. SEVERINI in un caso particolare, permette di ottenere il teorema generale dato da TH. EGOROFF per le successioni di funzioni misurabili, ci dà occasione di rilevare un'altra dote della figura esemplare del nostro Maestro, il quale non solo giudicava molto severamente coloro che cercano di far apparire come propri dei risultati precedentemente raggiunti da altri, ma teneva a precisare ogni priorità specialmente quando ciò contribuiva a porre bene in luce l'opera dei matematici italiani.

Al confine tra la teoria delle funzioni di variabile reale e quella delle funzioni analitiche stanno due Note lincee. La prima di queste [n. 8] è un interessante lavoro giovanile del TONELLI, nel quale viene data una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche (che generalizza un teorema di E. E. LEVI) e viene rilevata l'armonicità della funzione limite di una successione di funzioni armoniche ugualmente limitate. Ad una questione che ha formato oggetto di ricerche prolungatesi per parecchi anni e al cui progresso il TONELLI ha arrecato un notevole contributo è rivolta l'altra Nota [n. 60] del 1925, nella quale viene data una generalizzazione di un teorema di Loomann e ne viene fatta applicazione per estendere le condizioni di validità della nota formula di Green e per dare un'ulteriore generalizzazione del teorema di Morera.

Di fronte a questo imponente complesso di risultati è naturale il rimpianto che il sommo cultore della teoria delle funzioni di variabile reale non abbia potuto raccogliere, come pensava, tutti questi Suoi contributi in un'opera dedicata esclusivamente ad essi: la Sua immatura dipartita glielo ha impedito!

* * *

Un gruppo di lavori, pubblicati quasi tutti tra il 1909 e il 1911, ha come oggetto argomenti vari tra cui la teoria delle funzioni analitiche.

Una Nota [n. 5] di carattere algebrico contiene un'originale dimostrazione del teorema di Hadamard sul valore maggiorante di un determinante: supposto dapprima che tutti gli elementi del determinante siano numeri reali, il TONELLI espone una nuova dimostrazione algebrica della quale dà un'elegantissima interpretazione geometrica, rilevando che un determinante di ordine n rappresenta il volume di un parallelepipedo a n dimensioni costruito sugli n vettori aventi come componenti gli elementi delle successive linee del determinante; infine mostra che la dimostrazione stessa si estende al caso generale in cui gli elementi del determinante siano numeri complessi.

In due lavori [n. 11-12] dedicati all'iterazione l'Autore stabilisce la convergenza di una vasta classe di algoritmi, e ne fa applicazione per generalizzare le medie aritmetico-geometrica, armonico-geometrica, e aritmetico-armonica.

Una Nota [n. 6] sulle serie di Dirichlet contiene una condizione sufficiente per la convergenza in un semipiano di una serie di Dirichlet, dalla quale viene dedotta, come corollario, la seguente estensione di una nota proprietà delle serie di potenze: Se per $x=x_0$ il modulo del termine generale $a_n x_0{}^n$ della serie di potenze $\Sigma a_n x^n$ tende all'infinito di un certo ordine rispetto ad n, allora la serie di potenze è convergente per ogni x con $|x|<|x_0|$.

Alla teoria delle funzioni analitiche appartengono (oltre ai risultati contenuti nella tesi di laurea [n. 4] di cui abbiamo già parlato) una ricerca [n. 10] relativa agli zeri della funzione limite di una successione convergente di funzioni analitiche regolari monodrome, e un'ampia Memoria [n. 16] che, al pari di alcuni dei precedenti lavori, risente dell'influenza del PINCHERLE di cui il TONELLI era assistente, e nella quale vengono stabilite alcune condizioni sufficienti che assicurano l'esistenza di una stella, nell'interno della quale la serie

$$(*) \qquad \Sigma\, a_n(x) x^n,$$

ove $a_n(x)$ sono funzioni analitiche, rappresenta un ramo monodromo di funzione analitica; in questa stessa Memoria viene studiato il problema della sviluppabilità di una qualsiasi funzione analitica regolare nell'interno del punto x_0 in serie della forma

$$\Sigma\, c_n a_n(x)(x-x_0)^n$$

(ove i coefficienti c_n sono costanti), rilevando sotto quali condizioni si può assicurare che quest'ultima serie fornisce la continuazione analitica della funzione (*) considerata nella sua stella di convergenza.

Di argomento del tutto diverso è un articolo [n. 142] del 1939 a carattere didattico, contenente una dimostrazione elementare del noto teorema di Bernoulli del Calcolo delle probabilità sulla legge dei grandi numeri.

* * *

La teoria delle serie trigonometriche è una delle parti dell'Analisi nella quale la poderosa mente di LEONIDA TONELLI ha lasciato profonde tracce.

Senza ritornare sui contributi raggiunti per i polinomi trigonometrici in due variabili nella tesi di laurea [n. 4] e già citati, per quanto riguarda le serie semplici emergono per importanza due Note lincee [n. 61-62] del 1925, nelle quali vengono stabiliti rispettivamente i criteri, divenuti ormai classici, per la convergenza semplice (in punti singolari isolati) e per la convergenza assoluta delle serie di FOURIER. In una Memoria [n. 72] del 1926, breve quanto efficace, viene stabilita in modo diretto e del tutto elementare la convergenza delle formule di interpolazione trigonometrica.

Una Nota [n. 93] del 1930 è dedicata a un complemento alla dimostrazione di un teorema di convergenza in quasi tutto $(0,2\pi)$ per le serie trigonometriche, mentre due altre del 1927 contengono due finissime osservazioni l'una [n. 81] relativa al teorema di derivazione delle serie trigonometriche, l'altra [n. 82] sulla chiusura del sistema di funzioni di Fourier, che il TONELLI stabilisce in modo semplice e diretto, usufruendo di un' idea che era già stata utilizzata da C. SEVERINI per dimostrare la chiusura del sistema 1, x, x^2,..., x^n,....

Di data più recente (1939) è una Nota [n. 126] a carattere didattico, nella quale il Maestro dà una nuova dimostrazione del noto criterio di convergenza di Dirichlet-Jordan indipendente dal secondo teorema della media e che è basata sull' idea di esprimere una funzione a variazione limitata come differenza di due funzioni non crescenti (anzichè non decrescenti).

Ma il capitolo che è dovuto veramente all' ingegno del grande Scienziato è costituito dalle serie doppie di Fourier, alle quali ha dedicato un' ampia Memoria [n. 80] del 1927, nella quale, usufruendo del proprio concetto di funzione di due variabili a variazione limitata, ha raggiunto un complesso di risultati fondamentali, comunicati anche all'Académie des Sciences de Paris [n. 73] e tra i quali spiccano criteri di convergenza semplice, di convergenza uniforme, di sommabilità per righe e per colonne. Altri risultati sulla convergenza delle serie doppie di Fourier sono contenuti in una Nota [n. 121] del 1937, mentre in un importante lavoro [n. 63] del 1925 viene stabilita, sotto condizioni del tutto generali, la formula di Parseval per le serie doppie di Fourier : il completo successo del TONELLI in questa ricerca, nella quale W. W. KÜSTERMANN aveva raggiunto un risultato parziale, è dovuto all' idea di utilizzare un integrale introdotto da DE LA VALLÉE POUSSIN per le funzioni di una variabile ed esteso da F. SIBIRANI a quelle di due variabili; per questo integrale il TONELLI stabilisce un teorema generale di convergenza analogo a quello che aveva dato nel 1910 [n. 13] per i polinomi di Stieltjes.

Quasi tutti i precedenti risultati sono contenuti nel volume dedicato nel 1928 alle serie trigonometriche [n. 140], il cui contenuto aveva formato oggetto di una conferenza [n. 97]. Questa opera (preceduta dalla già citata edizione litografica [n. 145] e), contenente sia la parte classica della teoria sia le ricerche che a quella data erano recentissime, si è presentata del tutto originale per il fatto che in essa, per la prima volta, la teoria delle serie trigonometriche generali precede quella delle serie di Fourier. Essa ha avuto un' influenza notevolissima sugli ulteriori sviluppi della teoria: le nuove e importanti considerazioni sui polinomi trigonometrici di Fejér in due variabili contenute nell' ultimo capitolo hanno dato origine a quel complesso di notevoli ricerche dovute alla collaborazione di alcuni matematici polacchi, e ciò per tacere di contributi dovuti a discepoli (di L. CESARI, di S. FAEDO, e anche nostri).

* * *

Nel campo delle equazioni differenziali ordinarie il TONELLI ha raggiunto un complesso di magistrali risultati.

Prendendo occasione da una Nota di E. BOMPIANI, il Maestro ha pubblicato [n. 58] nel 1925 un teorema di unicità, al quale hanno fatto seguito numerosi risultati di altri autori valevoli non soltanto nel caso di una sola equazione differenziale, ma anche per sistemi di tali equazioni.

Una Nota [n. 83] del 1927, breve quanto interessante, estende il classico teorema di Sturm sulla separazione degli zeri degli integrali delle equazioni lineari del secondo ordine, al caso di equazioni anche non lineari, purchè omogenee nel complesso delle y, y', y''.

Due altre brevissime Note risentono dell'eccezionale acutezza del TONELLI: una [n. 74] del 1926 rileva l'inefficacia di una dimostrazione di altro autore; l'altra [n. 118] del 1936 completa in poche righe un teorema di stabilità di G. ARMELLINI, raggiungendo un risultato ottenuto per altra via, indipendentemente e contemporaneamente da G. SANSONE.

Infine in un lavoro [n. 127] del 1939, dedicato ai problemi di valori al contorno per equazioni del secondo ordine anche non lineari e che si proponeva di semplificare una delicata e lunga dimostrazione di G. SCORZA DRAGONI, il TONELLI, attenendosi al metodo della Scuola di Arzelà basato sul procedimento di approssimazione di SEVERINI, non solo ha raggiunto mirabilmente l'obbiettivo da cui era partito dimostrando in modo più semplice ed elementare un teorema più generale di quello di SCORZA DRAGONI, ma è pervenuto ad un complesso di risultati che si sono rivelati fecondissimi.

* * *

Nel campo delle equazioni integrali, oltre al corso già citato [n. 150] e purtroppo inedito, è da rilevare innanzi tutto una Memoria [n. 87] del 1928 che contiene una trattazione rigorosa ed esauriente del problema di Abel, rivolta sia a giustificare, nel procedimento che si segue per integrare l'equazione relativa a tale problema, le inversioni nell'ordine delle integrazioni in integrali multipli dipendenti da funzioni integrande illimitate, sia ad assicurare che l'integrale di tale equazione fornisce effettivamente una soluzione del problema di Abel.

Ad un lavoro [n. 86] dello stesso anno, nel quale viene esteso alle equazioni integrali di Volterra, anche non lineari, il metodo usato da CAUCHY per stabilire i teoremi esistenziali per le equazioni differenziali ordinarie, fa seguito quella celebre Memoria [n. 94], pubblicata nel volume commemorativo di Calcutta e dedicata a una classe molto ampia di equazioni funzionali (tra le quali sono contenute sia le equazioni integrali di Volterra anche non lineari, sia le equazioni differenziali ordinarie), nella quale l'Autore sviluppa un procedimento, tanto originale quanto semplice ed efficace, successivamente seguito da altri autori in ricerche varie relative ad equazioni differenziali e integro-differenziali e anche da D. GRAFFI in una questione di Fisica matematica.

Un nuovo campo di indagine è stato aperto da una Memoria [n. 130] del 1939, nella quale LEONIDA TONELLI, applicando i propri metodi diretti del Calcolo delle variazioni allo studio di funzionali che interessano la teoria delle equazioni integrali, ha stabilito notevoli risultati per i nuclei delle equazioni di Fredholm e in particolare per i nuclei simmetrici.

* * *

Veniamo ora all'opera più grandiosa e originale dello Scienziato: il Calcolo delle variazioni; su questo argomento, in proporzione, ci soffermeremo forse meno che su gli altri, non soltanto perchè l'omogeneità della materia permette una maggiore concisione, ma anche perchè la Sua figura di sommo Variazionista è a tutti troppo nota (9). Però prima di entrare in argomento vogliamo rilevare che per quanto il Calcolo delle variazioni sia la costruzione più famosa del Suo grande ingegno, basterebbe il complesso di risultati, di concetti e di metodi che si trovano negli altri campi dell'Analisi e in particolar modo nella teoria delle funzioni di variabile reale, per poter affermare che LEONIDA TONELLI è stato un matematico di valore eccezionale.

Le Sue ricerche variazionali hanno avuto inizio nel 1911 con una Nota [n. 14], nella quale l'Autore stabilisce che condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'integrale curvilineo

$$\mathfrak{J}_C = \int_C F(x(t), y(t), x'(t), y'(t))dt$$

non cambi valore al variare della rappresentazione parametrica della curva

C: $$x = x(t),\ y = y(t),$$

è che le funzioni $x(t)$, $y(t)$ siano assolutamente continue.

A questa Nota introduttiva fa seguito una Memoria [n. 15], presentata al Circolo matematico di Palermo il 12 marzo 1911, quando il TONELLI non aveva

(9) Disse J. HADAMARD nel 1926 all'Académie des Sciences de Paris (C. R. A. S. P. 182, p. 679): « Le service rendu à la science par la découverte de la semicontinuité que l'on doit à M. TONELLI est capital ».

Ha scritto C. CARATHÉODORY nel 1935 nel suo volume *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung* (pag. 398): « Ausserordentlich exakt und originell ist die Behandlung der ebenen Variationsrechnung bei TONELLI. In neuerer Zeit wurden diese Untersuchungen von TONELLI selbst und seinen Schülern CINQUINI, DEL CHIARO und MANIÀ weitergeführt ».

Si legge nella: *Théorie générale des fonctionnelles* (p. 110) di V. VOLTERRA e J. PÉRÈS: « Ce fut M. TONELLI qui, usant systématiquement de l'Analyse fonctionnelle, mit à la base directe des problèmes de maximum et minimum le concept de semi-continuité et est ainsi le veritable fondateur des méthodes nouvelles ».

ancora compiuto 26 anni, la quale segna veramente l'inizio della teoria: in essa viene stabilito un teorema di esistenza del minimo assoluto per gli integrali (in forma parametrica) regolari (tali cioè, secondo la terminologia di HILBERT, che l'invariante F_1 sia positivo), al quale l'Autore perviene in modo diretto basandosi su una proprietà (che forma oggetto del § VI del lavoro in questione) la quale, per quanto il TONELLI non faccia uso del vocabolo, è la semicontinuità dell'integrale $\mathfrak{J}_C$; inoltre viene utilizzato il concetto di integrale di Weierstrass e il fatto che, sotto opportune condizioni, tale integrale coincide con quello di Lebesgue. Nell'ultima parte della Memoria viene rilevato che, in casi particolari, la curva estremante soddisfa all'equazione differenziale di Eulero. Si vede, già in questo primo lavoro, la linea del metodo diretto.

Del precedente risultato il giovane Variazionista fece subito (1912) applicazione [n. 18-19] al problema delle orbite periodiche, per il quale si aveva soltanto un teorema di E. T. Whittaker insoddisfacente dal punto di vista del rigore, e conseguì risultati raggiunti anche da A. SIGNORINI in modo altrettanto rigoroso.

Pure del 1912 sono tre altre Note lincee [n. 20-21-22] nelle quali viene approfondito il concetto di integrale di Weierstrass e la sua relazione con quello di Lebesgue e vengono stabiliti teoremi di convergenza dell'integrale $\mathfrak{J}_C$ al variare della curva C e teoremi di confronto relativi a due diverse funzioni F che compaiono nell'integrale $\mathfrak{J}_C$, i quali sono tuttora di capitale importanza.

Ma il lavoro veramente fondamentale è una Memoria [n. 23], pubblicata nel 1913 nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo e nella quale compare il vocabolo semicontinuità, usato per la prima volta nel campo funzionale. In questa pubblicazione la semicontinuità forma oggetto di una propria trattazione, considerando sia il caso in cui la funzione F possa anche annullarsi, sia quello in cui possa annullarsi l'invariante F_1, e vengono dati teoremi di esistenza del minimo più generali di quelli contenuti nella precedente Memoria [n. 15] valevoli anche quando, sempre per $F>0$, sia $F_1 \geqslant 0$. Inoltre nel lavoro [n. 23] è dato il concetto, oggi di uso corrente, di *curva appartenente propriamente all'intorno* (ϱ) di un'altra. In una Nota [n. 25] dello stesso anno vengono stabiliti teoremi di esistenza del minimo valevoli nel caso in cui F si annulli o in quello in cui divenga infinita.

Sempre del 1913 sono i primi risultati [n. 24-26] sul problema degli isoperimetri considerato nei suoi due classici aspetti; a tali risultati ha fatto seguito un altro più generale [n. 32] dell'anno successivo. Due altri lavori sui problemi isoperimetrici sono del 1923: in uno di essi [n. 53] viene rilevata la inesattezza di un'affermazione di J. HADAMARD, mentre nell'altro [n. 54] è indicata una costruzione molto semplice la quale, assieme al campo isoperimetrico di A. Kneser, permette di stabilire nella sua completa generalità un risultato raggiunto da tale autore in casi molto particolari.

Fondamentale è una Nota [n. 28] del 1914, nella quale è posta in piena luce l'importanza della semicontinuità, perchè il TONELLI stabilisce che, se lo integrale $\mathfrak{J}_C$ è continuo, necessariamente la funzione $F(x, y, x', y')$ deve essere lineare nel complesso delle x' e y'.

Due successive interessantissime Memorie sono dedicate a due applicazioni: il problema della stabilità di una massa liquida sottoposta alle sole forze molecolari [n. 33], e la classica proprietà di minimo della sfera [n. 36] che viene stabilita in tutta la sua generalità con metodo essenzialmente geometrico, usufruendo sia del procedimento di arrotondamento di SCHWARZ sia di considerazioni svolte da STEINER e STUDY per stabilire l'analoga proprietà di minimo della circonferenza.

Nel 1915 è apparsa in lingua francese nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo un'altra Memoria [n. 34], i cui risultati avevano formato oggetto nell'anno precedente di due comunicazioni [n. 30-31] all'Académie des Sciences de Paris: essa è dedicata agli integrali (in forma ordinaria)

$$I_C = \int_C f(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

L'Autore stabilisce teoremi di semicontinuità, per mezzo dei quali perviene ai teoremi di esistenza dell'estremo assoluto; infine viene stabilito che le curve estremanti soddisfano all'equazione differenziale di Eulero. Ormai (dal 1911 al 1915 sono trascorsi soltanto quattro anni!) quello che è oggi il metodo della Scuola italiana del Calcolo delle variazioni è fondato in tutta la sua generalità, perchè in questa Memoria, a differenza dalle precedenti [n. 15-23], l'esistenza del minimo è stabilita in modo indipendente dalla condizione che il problema sia risolto « im Kleinen », a proposito della quale il TONELLI si esprime nei seguenti termini: « Il nous est possible, à present, de vaincre cette difficultè et d'exposer la méthode sur sa forme definitive. Il faut partir de cette remarque fondamentale, due a M. BAIRE: « Ce qui permet d'affirmer la veritè de l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty)$$

ce n'est pas toute la continuité, mais une seule des deux parties, dans lesquelles elle peut se partager, c'est à dire la semi-continuité inférieure». Or l'obstacle le plus difficile à vaincre pour atteindre notre but c'est que les intégrales du Calcul des Variations ne sont pas, généralement, des fonctions continues des éléments sur lesquels elles agissent. Cet obstacle vient en partie à disparaître, si nous remplaçons la continuité par la semi-continuité inférieure ». È inoltre da far presente che la costruzione della successione minimizzante viene fatta in modo indipendente dal postulalo di Zermelo, attenendosi a quel metodo delle successioni di insiemi che aveva formato oggetto di una pubblicazione [n. 29] dell' anno precedente, da noi già citata, e al quale nel seguito si è costantemente attenuto.

In una Nota [n. 35] dello stesso 1915 il TONELLI ritrova con il metodo sviluppato nella Memoria ora citata [n. 34] e in forma anche più generale alcuni risultati sulle soluzioni periodiche a cui era pervenuto, circa un anno prima, L. LICHTENSTEIN mediante gli sviluppi in serie di Fourier usufruendo della formula di Parseval.

La ripresa dell' attività scientifica dopo la fine della prima guerra mondiale è costituita, per quanto riguarda il Calcolo delle variazioni, oltrechè da tre Note [n. 48-50-51], dedicate ad estensioni della condizione di Weierstrass relative ai punti angolosi e di alcune proposizioni di J. W. LINDBERG e E. E. LEVI, da due altre basilari Memorie.

Nella prima di queste [n. 49], apparsa nel 1920 anche essa nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, viene rielaborata tutta la teoria della semicontinuità sia nella forma ordinaria sia in quella parametrica (che viene anche essa liberata sia dalla condizione che il problema fosse preliminarmente risolto in piccolo, sia dall' uso dell' integrale di Weierstrass) e non solo per quanto riguarda le condizioni sufficienti, ma anche per quelle necessarie, ponendo in luce il significato delle classiche condizioni di Legendre e di Weierstrass per l' esistenza dell' estremo: esse traducono in disuguaglianze il fatto che sulla curva estremante l' integrale gode della semicontinuità.

L' ulteriore poderosa Memoria [n. 52], pubblicata nel 1921 negli Annali di matematica, è dedicata a teoremi di esistenza del minimo per diverse classi di integrali in forma parametrica, designati con quella terminologia che viene introdotta in questo lavoro e che è oggi di uso comune (classi complete di curve; integrali quasi regolari, semidefiniti, normali ecc.).

Della fine dello stesso 1921 e del 1923 sono i due volumi dei « Fondamenti di Calcolo delle variazioni » [n. 138-139]. Il trattato contiene, oltre alla parte introduttoria dedicata alle funzioni di variabile reale e in particolar modo all' integrale di Lebesgue su cui ci siamo già soffermati, non solo quasi tutti i risultati raggiunti a quella data, ma parecchi altri sviluppi della teoria, per esempio, il concetto di estremaloide, numerose proprietà delle estremali, un intero capitolo dedicato ad applicazioni, e l' ultima parte del Vol. II che tratta degli estremi relativi sia liberi che condizionati.

La pubblicazione dei « Fondamenti » e la comunicazione [n. 64-65-84], tenuta al congresso internazionale di Toronto del 1924 e da noi già citata, non solo hanno contribuito a far conoscere la somma opera dello Scienziato, ma hanno creato in tutte le parti del mondo cultori del Suo metodo diretto, i quali, come Egli scriveva in una relazione [n. 132] redatta nel giugno 1939 « vanno dall' eminente matematico francese É. GOURSAT — purtroppo già scomparso — che mi fece l'onore di occuparsi del mio metodo sin dai miei primi lavori, agli italiani CINQUINI, MANIÀ, DEL CHIARO (10), ai tedeschi HAHN, e DAMKÖHLER, agli ungheresi HAAR e RADÒ, agli americani GRAVES, MC SHANE, DOUGLAS, MORREY, ai russi LAVRENTIEFF e BOGOLIOUBOFF, al giapponese NAGUMO ».

Noi non possiamo qui parlare nè dei contributi dei collaboratori stranieri nè di quelli dei discepoli. Dobbiamo, invece, riferire sui risultati raggiunti dal Maestro dopo la pubblicazione dei « Fondamenti », perchè per quanto Egli parlasse spesso della prosecuzione di tale trattato, altri rami della Sua attività scientifica glielo avevano sempre impedito e purtroppo la Sua Opera è rimasta incompiuta.

Di natura del tutto opposta a quanti sono naturalmente portati a ritornare più volte su quello che hanno già fatto per rilevare una piccola osservazione o un progresso minimo, il grande ingegno del TONELLI sentiva l'evidente necessità di spaziare: basta scorrere la bibliografia per constatare che, subito dopo la pubblicazione dei « Fondamenti », la parte preponderante della Sua attività è stata rivolta ad altri capitoli dell'Analisi, sui quali abbiamo già riferito.

Nel 1924 il Maestro è ritornato sul problema delle orbite periodiche per dare una nuova semplice dimostrazione [n. 57] di un teorema di Birkhoff sull'esistenza di orbite irreversibili (a differenza da quelle di Whittaker che sono reversibili). Questa dimostrazione ha posto in evidenza un principio generale relativo al fatto che quando un'estremale non dà il minimo assoluto nella classe generale delle curve a cui essa appartiene, la stessa estremale può diventare minimante assoluta in una opportuna sottoclasse, la quale permette di stabilire le proprietà analitiche dell'estremale. Di tale principio ha fatto uso W. DAMKÖHLER per dare un ampio criterio successivamente esteso (1936) [n. 109] dal nostro Maestro.

Di notevole importanza è una pubblicazione [n. 75] del 1926, contenente condizioni sufficienti, affinchè non abbia luogo il fenomeno di Lavrentieff, così chiamato dal TONELLI, perchè rilevato dal matematico russo in una pubblicazione che ha avuto origine da una questione proposta dal TONELLI stesso nel Bollettino dell'Unione matematica italiana.

Ma il contributo più importante è costituito da due poderose Memorie (il cui contenuto aveva formato oggetto di due comunicazioni [n. 91-102] tenute ai congressi internazionali di Bologna e di Zurigo), nelle quali il Maestro, usufruendo del proprio concetto di funzione di due variabili assolutamente continua, ha esteso il metodo diretto ai problemi variazionali che dipendono da integrali doppi in forma ordinaria. Il primo di questi lavori [n. 89] pubblicato in lingua

(10) Numerosissimi altri sono i discepoli che dopo il 1939 hanno arrecato significativi contributi al Calcolo delle variazioni e la cui attività scientifica sino a quella data era stata rivolta ad altri argomenti o non aveva ancora avuto inizio.

francese nel 1929 negli Acta mathematica contiene condizioni sufficienti per la semicontinuità, mediante le quali l'Autore è pervenuto ai teoremi di esistenza dell'estremo assoluto in una Memoria [n. 103] del 1933 che, per il valore dei risultati raggiunti e per la ricchezza dei procedimenti seguiti, costituisce una pubblicazione di importanza capitale. Altri teoremi di esistenza sono contenuti in una Nota [n. 128] del 1939.

Un ampio e notevole gruppo di lavori pubblicati tra il 1932 e il 1935 [n. 100-104-105-107-108] (oltre a una Nota [n. 106] nella quale viene ritrovato molto rapidamente un risultato rilevato da altro autore) è dedicato agli integrali curvilinei in forma ordinaria, la cui teoria viene rielaborata e posta sotto forma definitiva, sia per quanto riguarda la semicontinuità e l'esistenza dell'estremo (stabilendo nuove proposizioni e rilevando l'equivalenza di quelle di NAGUMO e di MC SHANE), sia per quanto si riferisce all'equazione di Eulero e alle sue proprietà, introducendo il nuovo concetto di pseudoestremaloide.

Un contributo agli integrali curvilinei in forma parametrica è contenuto in una Nota [n. 101] del 1932, nella quale vengono stabilite due generalizzazioni di due teoremi di HAHN e di CARATHÉODORY, le quali, quando sia soddisfatta una condizione larghissima, risultano equivalenti.

In una nota [n. 117] del 1936 il TONELLI è ritornato sugli integrali curvilinei dello spazio. Tale argomento di cui il Maestro si era brevemente occupato, per quanto concerne la forma parametrica, in alcuni dei Suoi primi lavori [n. 15-23] aveva formato oggetto di ricerche di GRAVES e di MC SHANE. Il lavoro in questione contiene una condizione necessaria per la semicontinuità degli integrali curvilinei dello spazio in forma ordinaria, mentre delle condizioni sufficienti si è successivamente occupato il Suo discepolo L. GIULIANO.

Ai problemi di Lagrange e di Mayer, per i quali il compianto discepolo B. MANIÀ, tragicamente scomparso nel 1939, aveva conseguito per primo risultati fondamentali, sono dedicate alcune Note [n. 112-113-116-125] degli anni 1936-1938, nelle quali il Maestro dà nuovi più ampi teoremi di semicontinuità e ritrova in modo più semplice e più rapido le equazioni delle estremanti. A tali ricerche hanno fatto seguito quelle di un altro discepolo, E. BAIADA, sui problemi isoperimetrici di Mayer.

Una Nota [n. 129] del 1939 contiene una ulteriore estensione del noto lemma di Darboux relativo agli integrali inferiore e superiore del quale viene fatta applicazione all' integrale di Weierstrass (di cui il Maestro aveva fatto uso all'inizio della teoria variazionale). A proposito di questo integrale dobbiamo rilevare che esso ha permesso a K. MENGER (assieme a N. ARONSZAJN e C. PAUC) di estendere il Calcolo delle variazioni agli spazi astratti.

Di una memoria [n. 130] dello stesso anno ci siamo già occupati, perchè i risultati in essa raggiunti interessano la teoria delle equazioni integrali; dobbiamo qui soggiungere che essa si è rivelata già ben feconda, inquantochè ne ha tratto origine lo studio, compiuto dal discepolo S. FAEDO, degli integrali

$$\int_a^b\int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))dxdz, \qquad \int_a^b\int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))dxdz,$$

i quali appartengono ad un tipo, per così dire intermedio, tra gli integrali I_C e gli integrali doppi in forma ordinaria.

Dobbiamo ancora rilevare che nel già citato volume di VOLTERRA e PÉRÈS, apparso nel 1936, è contenuto un paragrafo in cui [n. 141] il TONELLI stesso ha dato un prezioso saggio del proprio metodo diretto.

Di carattere un po' diverso sono altre due pubblicazioni: la prima di esse [n. 124] è una conferenza del 1937 nella quale il Maestro ha riassunto tutti i risultati reggiunti da Lui e da altri Autori dopo la pubblicazione dei « Fondamenti » e sino a quella data, la seconda [n. 132] è una profonda relazione scientifica, già citata, apparsa nel 1944, e nella quale vengono esposte le ragioni per le quali era sorto il metodo diretto della Scuola italiana, il suo successivo svilupparsi e le questioni di attualità.

Per quanto concerne le applicazioni del Calcolo delle variazioni è da rilevare innanzi tutto una ricerca [n. 95] del 1930 sul problema di Lord Rayleigh della determinazione, tra le membrane omogenee ugualmente tese della medesima area, di quella che dà il suono fondamentale più basso. Il TONELLI, usufruendo nuovamente del procedimento di arrotondamento di Schwarz, ha trasformato la questione (che nella sua forma analitica iniziale si presenta come un problema isoperimetrico relativo a un integrale doppio) in un problema isoperimetrico relativo a un integrale curvilineo, stabilendo, con i propri metodi e sotto condizioni del tutto generali, l'esistenza della soluzione e la formula per il calcolo numerico di questa.

Un gruppo di lavori degli anni 1936-1937 è rivolto al problema di Plateau e a quello della minima area. Del primo di essi il TONELLI [n. 114-115] ha dato una soluzione indipendente dal teorema di Schwarz sulla rappresentazione conforme, in senso generalizzato, delle superfici poliedriche, impostandolo come un problema di minimo per un integrale doppio in forma ordinaria che ha risolto con il proprio metodo diretto. Successivamente [n. 122] ha stabilito un criterio di uguale continuità in virtù del quale il problema di Plateau, quando sia risolto per un contorno costituito da una poligonale chiusa e semplice, risulta risolto anche per un contorno dato da una qualunque curva di Jordan chiusa e semplice. Per quanto riguarda il problema della minima area, il Maestro ha stabilito [n. 123] che anche la sua risoluzione può rendersi indipendente dallo stesso teorema di Schwarz, quando sia considerato in forma ordinaria e il contorno si proietti ortogonalmente sul piano (x, y) senza duplicazioni in una curva convessa.

Da una questione di alta tecnica, la cui risoluzione dipendeva da un problema di minimo relativo a un integrale curvilineo in forma ordinaria che non rientrava in alcuno dei tipi precedentemente considerati, trae origine una Memoria [n. 133] del 1941, nella quale il TONELLI, passando dalla forma ordinaria a quella parametrica, stabilisce un teorema di esistenza del minimo. Ad essa si collega l'ultima ricerca dello Scienziato, il quale, dopo il periodo cospirativo e quello della riorganizzazione della città di Pisa, era ritornato alla Sua vita di studioso. In calce all'introduzione al manoscritto [n. 137] che, a prescindere da una Nota preliminare [n. 136] presentata alla risorta Accademia dei Lincei, è ancora inedito, e nel quale viene evitato il passaggio alla forma parametrica, il Maestro aveva scritto: « *Dopo un periodo dedicato ai miei doveri verso la patria, riprendo ora la mia attività scientifica, con la certezza che l'Italia, superando con animo forte questi tristissimi anni manterrà nella scienza quel posto onorevole che seppe conquistarsi* ».

Questo estremo voto, che il destino crudele ha impedito a LEONIDA TONELLI di realizzare, sia la fiaccola che guidi i discepoli nel percorrere, fraternamente uniti, la via tracciata da Chi è stato per essi, più che Maestro, Padre.

SILVIO CINQUINI

BIBLIOGRAFIA (11)

PARTE I

1907

1. *Sulle funzioni derivate*. R. R. I. L., 40, pp. 1172-1178.

1908

2. *Sulla rettificazione delle curve*. A. R. A. S. T., 43, pp. 783-800.
3. *Discontinuità di 1ª specie e gruppi di punti*. R. R. I. L., 41, pp. 773-778.
4. *I polinomi di approssimazione di Tchébychev*. A. M. P. A., 15, pp. 47-119.

(11) *Abbreviazioni:*
A. M. P. A. - Annali di Matematica pura e applicata.
A. R. A. S. T. - Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.
A. R. S. N. S. P. - Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.
B. A. M. S. - Bullettin of the American Mathematical Society.
B. U. M. I. - Bollettino dell'Unione Matematica Italiana.
C. R. A. S. P. - Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.
G. M. B. - Giornale di Matematiche di Battaglini.
M. R. A. S. B. - Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.
P. M. - Periodico di matematiche.
R. Ç. M. P. - Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.
R. R. A. L. - Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei.
R. R. I. L. - Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

1909

5. *Sul teorema di Hadamard relativo al valor maggiorante di un determinante.* G. M. B., 47, pp. 212-218.
6. *Sulla serie di Dirichlet.* R. R. A. L., 18^1, pp. 233-238.
7. *Sull'integrazione per parti.* R. R. A. L., 18^2, pp. 246-253.
8. *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche.* R. R. A. L., 18^1 pp. 577-582.

1910

9. *Su la continuità e la derivabilità di un integrale rispetto a un parametro.* R. R. A. L., 19^1, pp. 84-89.
10. *Su gli zeri del limite di una successione di funzioni analitiche.* R. R. A. L., 19^1, pp. 5-10.
11. *Sull'iterazione.* R. R. A. L., 19^1, pp. 676-681.
12. *Sull'iterazione.* G. M. B., 48, pp. 341-373.
13. *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali.* R. C. M. P., 29, pp. 1-36.

1911

14. *Sugli integrali curvilinei.* R. R. A. L., 20^1, pp. 229-235.
15. *Sui massimi e minimi assoluti del calcolo delle variazioni.* R. C. M. P., 32, pp. 297-337.
16. *Sulle serie di funzioni analitiche della forma* $\sum a_n(x)\, x^n$. A. M. P. A., 18, pp. 99-133.

1912

17. *Sulla lunghezza di una curva.* A. R. A. S. T., 47, pp. 1067-1085.
18-19. *Sulle orbite periodiche.* R. R. A. L., 21^1, pp. 251-258, pp. 332-334.
20. a 22. *Sugli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni.* R. R. A. L., 21^1, pp. 448-453, pp. 554-559; 21^2, pp. 132-137.

1913

23. *Sul caso regolare nel calcolo delle variazioni.* R. C. M. P., 35, pp. 49-73.
24. *Sul problema degli isoperimetri.* R. R. A. L., 22, pp. 424-430.
25. *Sull'esistenza delle soluzioni in problemi di calcolo delle variazioni.* R. R. A. L., 22^1, pp. 860-866.
26. *Sui problemi isoperimetrici.* R. C. M. P., 36, pp. 333-344.

1914

27. *Su una proposizione dell'Almansi.* R. R. A. L., 23^1, pp. 676-682.
28. *Sulle funzioni di linee.* R. R. A. L., 23^1, pp. 28-33.
29. *Sul valore di un certo ragionamento.* A. R. A. S. T., 49, pp. 4-14.
30-31. *Sur une méthode directe du calcul des variations.* C. R. A. S. P., 158, pp. 1776-1778, pp. 1983-1985.
32. *Sul problema degli isoperimetri.* R. R. A. L., 23^2, pp. 572-577.
33. *Sulla stabilità dell'equilibrio di una certa massa liquida sottomessa alle sole forze molecolari.* A. M. P. A., 23, pp. 61-106.

1915

34. *Sur une méthode directe du calcul des variations.* R. C. M. P., 39, pp. 233-264.
35. *Sulle soluzioni periodiche nel calcolo delle variazioni.* R. R. A. L., 24^2, pp. 317-324.
36. *Sulle proprietà di minimo della sfera.* R. C. M. P., 39, pp. 109-138.
37. (In collaborazione con G. FUBINI). *Sulla derivata mista di un integrale doppio.* R. C. M. P., 40, pp. 295-298.

1916

38. *Sopra alcuni polinomi approssimativi.* A. M. P. A., 25, pp. 275-316.
39-40. *Successioni di curve e derivazione per serie.* R. R. A. L., 25^1, pp. 22-30, pp. 85-91.
41. *Sulla ricerca delle funzioni primitive.* R. R. A. L., 25^1, pp. 163-170.
42. *Sul differenziale dell'arco di curva.* R. R. A. L., 25^1, pp. 207-213.

1919

43. *A proposito di una nota del sig. A. Vergerio.* R. R. A. L., 28^1, pp. 117-119.
44. *Sulla potenza di alcuni insiemi.* G. M. B., 57, pp. 219-236.

1920

45 a 47. *Sulla ricerca delle funzioni primitive.* R. R. A. L., 29^1, pp. 44-48, pp. 106-110, pp. 186-191.
48. *Su alcuni punti di calcolo delle variazioni.* R. R. A. L., 29^1, pp. 305-309.
49. *La semicontinuità nel calcolo delle variazioni.* R. C. M. P., 44, pp. 167-249.

1921

50-51. *Su due proposizioni di J. W. Lindberg e E. E. Levi nel calcolo delle variazioni.* R. R. A. L., 30^1, pp. 19-22, pp. 110-112.
52. *Criteri per l'esistenza della soluzione in problemi di calcolo delle variazioni.* A. M. P. A., 30, pp. 159-221.

1923

53. *Sulla costante isoperimetrica.* R. R. A. L., 32^1, pp. 587-590.
54. *Sul problema isoperimetrico con un punto terminale mobile.* M. R. A. S. B., 10. pp. 11-15.

1924

55. *Sulla nozione d'integrale.* A. M. P. A., 1, pp. 105-145.
56. *Su una proposizione fondamentale dell'analisi.* B. U. M. I., 3, pp. 103-104.
57. *Sulle orbite periodiche irreversibili.* M. R. A. S. B., 1, pp. 21-25.

1925

58. *Sull'unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale.* R. R. A. L., 1, pp. 272-277.
59. *Sul problema delle funzioni primitive.* R. R. A. L., 1, pp. 349-353.
60. *Sul teorema di Green.* R. R. A L., 1, pp. 482-488.
61. *Sulla convergenza delle serie di Fourier.* R. R. A. L., 2, pp. 85-91.
62. *Sulla convergenza assoluta delle serie di Fourier.* R. R. A. L., 2, pp. 145-149.
63. *La formula di Parseval per le serie doppie di Fourier.* M. R. A. S. B., 2, pp. 21-28.
64. *The calculus of variations.* B. A. M. S., 31, pp. 163-172.
65. *Sur le Calcul des variations.* Matematisk Tidsskrift, 19, pp. 49-58.

1926

66. *Sur l'intégration des suites de fonctions sommables.* C. R. A. S. P., 182, pp. 838-839.
67 a 69. *Sulla quadratura delle superficie.* R. R. A. L., 3, pp. 357-362, pp. 445-450, pp. 633-638.
70. *Sur la quadrature des surfaces.* C. R. A. S. P., 182, pp. 1198-1200.
71. *Sopra alcune proprietà di un polinomio di approssimazione.* R. R. A. L., 3, pp. 714-719.
72. *Sull'interpolazione trigonometrica.* M. R. A. S. B., 3, pp. 3-9.
73. *Sur le séries doubles de Fourier.* C. R. A. S. P., 185, pp. 645-647.
74. *Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie.* B. U. M. I., 5, pp. 1-2.
75. *Sur une question du calcul des variations.* Rec. Math. Moscou, 33, pp. 87-98.
76. *Sur la méthode d'adjonction dans le calcul des variations.* C. R. A. S. P., 182, pp. 678-679.

1927

77. *Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie.* R. R. A. L., 5, pp. 313-318.
78. *Una proprietà delle funzioni integrabili.* R. R. A. L., 5, pp. 533-536.
79. *Sul problema fondamentale del calcolo integrale.* M. R. A. S. B., 4, pp. 21-28.
80. *Sulla convergenza delle serie doppie di Fourier.* A. M. P. A., 4, pp. 29-72.
81. *Un'osservazione sulla derivazione per serie,* R. R. A. L., 6, pp. 365-367.
82. *Sulla chiusura del sistema di funzioni di Fourier.* B. U. M. I., 6, pp. 123-126.
83. *Un'osservazione su un teorema di Sturm.* B. U. M. I., 6, pp. 126-128.

1928

84. *Sul calcolo delle variazioni.* Proc. Congress Toronto, 1, pp. 555-560.
85. *Sulla definizione di funzione di due variabili a variazione limitata.* R. R. A. L., 7, pp. 358-363.
86. *Sulle equazioni integrali di Volterra.* M. R. A. S. B., 5, pp. 17-22.
87. *Su un problema di Abel.* Math. Annalen, 99, pp. 183-199.

1929

88. *Report on the 1928 international congress of mathematicians.* B. A. M. S., 35, pp. 201-204.
89. *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du calcul des variations.* Acta Math. 53, pp. 325-346.
90. *Il contributo italiano alla teoria delle funzioni di variabili reali.* Atti Congresso internaz. dei matematici di Bologna, 1, pp. 247-254.
91. *Sulla semicontinuità degli integrali doppi.* Ibidem, 3, pp. 65-67.
92. *Sulle funzioni di due variabili assolutamente continue.* M. R. A. S. B., 6, pp. 81-88.

1930

93. *Un'osservazione sulle serie.* B. U. M. I., 9, pp. 57-59.
94. *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra.* Bulletin of the Calcutta Math. Soc. 20, pp. 31-48.
95. *Sur un problème de Lord Rayleigh.* Monatshefte für Math. 37, pp. 253-280.
96. *Su l'integrale di Dirichlet.* M. R. A. S. B., 7, pp. 3-10.
97. *Serie trigonometriche.* Rend. Seminario Matematico Roma, 6, pp. 26-42.

1931

98. *Un teorema sulla derivazione delle serie.* R. R. A. L., 13, pp. 163-168.
99. *Sulle derivate esatte.* M. R. A. S. B., 8, pp. 13-15.

1932

100. *Un teorema di calcolo delle variazioni.* R. R. A. L., 15, pp. 417-423.
101. *Sull'esistenza del minimo in problemi di calcolo delle variazioni.* A. R. S. N. S. P., 1, pp. 89-99.
102. *Sul calcolo delle variazioni.* Ver. Kongress Zürich, 2, pp. 102-103.

1933

103. *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* A. R. S. N. S. P., 2, pp. 89-130.

1934

104. *Sulle proprietà delle estremanti.* A. R. S. N. S. P., 3, pp. 213-237.
105. *Su gli integrali del calcolo delle variazioni in forma ordinaria.* A. R. S. N. S. P., 3, pp. 401-450.
106. *Su una particolare questione di calcolo delle variazioni.* B. U. M. I., 13, pp. 205-209.

1935

107. *Sulle estremaloidi del calcolo delle variazioni.* R. R. A. L., 21, pp. 289-293.
108. *Sulle equazioni di Eulero nel calcolo delle variazioni.* A. R. S. N. S. P., 4, pp. 191-216.

1936

109. *Sulle estremali complete.* A. R. S. N. S. P., 5, pp. 159-168.
110. *Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata.* A. R. S. N. S. P., 5, pp. 315-320.
111. *Su una proposizione fondamentale dell'analisi matematica.* R. R. A. L., 23, pp. 161-165.
112. *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Mayer.* R. R. A. L., 24, pp. 180-187.
113. *Sulle equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange.* R. R. A. L., 24, pp. 239-245.
114-115. *Sul problema di Plateau.* R. R. A. L., 24, pp. 333-339, pp. 393-398.
116. *Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange.* R. R. A. L., 24, pp. 399-404,
117. *Su gli integrali continui del calcolo delle variazioni.* Scritti mat. offerti a L. Berzolari, pp. 283-289.
118. *Estratto di lettera al prof. Giovanni Sansone.* Ibidem, pp. 404-405.

1937

119. *Andrea Razmadzé.* Travaux de l'Institut math. de Tbilissi, 1, pp. 11-16.
120. SALVATORE PINCHERLE. A. R. S. N. S. P., 6, pp. 1-10.
121. *Sulle serie doppie di Fourier.* A. R. S. N. S. P., 6, pp. 315-326.
122. *Sopra alcuni criteri di uguale continuità* R. R. I. L., 70, pp. 107-116.
123. *Sul problema della superficie limitata da un dato contorno ed avente la minima area.* A. R. A. S. T., 72, pp. 225-233.

1938

124. *Il calcolo delle variazioni secondo la scuola italiana ed i suoi più recenti risultati.* Atti I Congresso Unione mat. Italiana, pp. 26-39.
125. *Un teorema di semicontinuità per i problemi di Mayer.* ibidem, pp. 127.132.
126. *Su un teorema relativo alle serie di Fourier.* A. R. S. N. S. P., 7, pp. 329-331.

1939

127. *Sull'equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$.* A. R. S. N. S. P., 1, pp. 75-88.
128. *Su l'esistenza delle estremanti assolute per gli integrali doppi.* A. R. S. N. S. P., 8, pp. 161-165.
129. *Sulle funzioni di intervallo.* A. R. S. N. S. P., 8, pp. 309-321.
130. *Su alcuni funzionali.* A. M. P. A., 18, pp. 1-21.
131. *Integrale, lunghezza, area.* Rend. Seminario mat. e fis. di Milano, 13, pp. 1-14.

1940

132. *L'analisi funzionale nel calcolo delle variazioni.* A.R.S.N.S.P., 9, pp. 289-302.

1941

133. *Su un nuovo tipo di problemi di calcolo delle variazioni.* A. R. S. N. S. P., 10, pp. 167-198.

1942

134. *Su alcuni concetti dell'analisi moderna.* A. R. S. N. S. P., 11, pp. 107-118.
135. *Sull'integrazione delle funzioni.* A. R. S. N. S. P., 11, pp. 234-240.

1946

136. *Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di calcolo delle variazioni.* R. R. A.L., 1, pp. 247-250.
137. *Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di calcolo delle variazioni* (in corso di stampa).

PARTE II

138-139. *Fondamenti di calcolo delle variazioni.* Vol. I e II, (Zanichelli, Bologna, 1921-23, pp. VIII+466; VIII+660).
140. *Serie trigonometriche* (Zanichelli, Bologna, 1928, pp. VIII+526).
141. *Méthode directe pour l'étude du maximum ou du minimum d'une intégrale simple.* (V. VOLTERRA, J. PÉRÈS. *Théorie générale des fonctionnelles* (Paris, Gauthier-Villars, 1936), T. I, Cap. V, § II, pp. 111-128).
142. *Sulla legge dei grandi numeri.* (Saggi in Scienze assicurative pubblicati nella R. Università di Pisa 3 (1939), pp. 1-11).
143. *Lezioni di Analisi algebrica* (Cagliari, 1913).
144. *Lezioni di Analisi infinitesimale* (Parma, 1914).
145. *Integrale di Lebesgue e Serie trigonometriche.* (Lezioni dettate nella R. Università di Bologna e raccolte da G. Lampariello nell'anno 1924-25) pp. 1-359.
146-147. *Lezioni di Analisi matematica.* Vol. I e II (Litografia Tacchi, Pisa, 1939-40, pp. 355; 416).
148-149. *Esercizi di Analisi matematica.* Vol. I e II (Litografia Pioda, Roma, Litografia Tacchi, Pisa; 1942; pp. 228; 241).
150. *Equazioni integrali* (manoscritto inedito).
151 a 153. (In collaborazione con E. LINDNER) *Corso di matematica per la Scuola media.* Vol. I, II e III. (Sansoni, Firenze 1941-42; pp. VIII+294; 210; 334).
154. (In collaborazione con E. LINDNER) *Aritmetica e algebra.* Vol. I. (Sansoni, Firenze, 1946, pp. IV+378).
155. *Risposta alla Questione 34.* (B. U. M. I., 7, (1928), pp. 162-163).
156. *Contributo allo studio pisano al progresso delle Scienze matematiche.* (Relazione inedita per il VI centenario dell'Universita di Pisa (1943)).
157. *Il Calcolo delle variazioni.* (Annuario scientifico industriale, 1920).
158. *Calcolo differenziale.* (Enciclopedia Italiana, XII (1931), pp. 792-796).
159. *Funzione.* (Ibidem, XVI (1932), pp. 185-193).
160. *Fourier.* (Ibidem, XV (1933), pp. 823-824).
161. *Calcolo integrale.* (Ibidem, XIX (1933), pp. 364-367).
162. *Calcolo delle variazioni.* (Ibidem, XXXIV (1937), pp. 1001-1005).

Recensioni delle opere:

163. L. LICHTENSTEIN. *Neuere Entwicklung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von elliptischem Typus;* E. HIBB und M. RIESZ. *Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen;* G. A. BLISS. *Calculus of Variations.* (B. U. M. I. 4 (1925), pp. 132-134).
164. M. FRÉCHET. *Les espaces abstraits et leur théorie considerée comme introduction à l'Analyse générale.* E. PICARD. *Leçons sur quelques équations fonctionnelles avec des applications à divers problèmes d'Analyse.* (P. M. 9 (1929), pp. 45-48).

165. T. BONNESEN. *Les problèmes des isopérimètres et des isopiphanes.* (P. M., 10 (1930), pp. 177-178).
166. F. ENRIQUES, O. CHISINI. *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* Vol. IV. (P. M., 14 (1934), pp. 323-325).
167. E. LANDAU. *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung.* (P. M. 15 (1935), pp. 67-68).
168. A. ZYGMUND. *Trigonometrical series.* (P. M. 15 (1935), pp. 193-194).
169. L. GALVANI. *Introduzione matematica allo studio del metodo statistico.* (P. M. 15 (1935), pp. 255-257).
170. G. VITALI, G. SANSONE. *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* (P. M. 16 (1936), pp. 121-123).
171. V. VOLTERRA, J. PÉRÈS. *Théorie générale des fonctionnelles.* (P. M. 18, (1938), pp. 120-128).
172. M. PICONE. *Appunti di Analisi superiore.* (B. U. M. I. 3 (1941), pp. 402-405).
173. D. HILBERT, P. BERNAYS. *Grundlagen der Mathematik.* (Scientia, LXIX (1941), p. 86).
174. O. PERRON. *Irrationalzahlen.* (Ibidem, LXIX (1941), p. 87).