ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SANDRO FAEDO

Sulle condizioni di Legendre e di Weierstrass per gli integrali di Fubini-Tonelli

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 15, nº 1-4 (1950), p. 127-135

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_2_15_1-4_127_0>

SULLE CONDIZIONI DI LEGENDRE E DI WEIERSTRASS PER GLI INTEGRALI DI FUBINI - TONELLI

di SANDRO FAEDO (Roma).

1. – In alcuni miei recenti lavori (¹) ho iniziata la costruzione della teoria di un nuovo tipo di funzionali, seguendo il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni del mio compianto Maestro LEONIDA TONELLI. I funzionali da me studiati sono:

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f[x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z)]\, dxdz,$$

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)]\, dxdz,$$

dove $y=y(x)$, $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(z)$ sono funzioni assolutamente continue per x in (a, b) e z in (c, d).

Alcuni casi particolari dell'integrale $I(y)$ sono già stati incontrati da G. FUBINI (1913) e L. TONELLI (1939) nella risoluzione di alcuni problemi che concernono altri campi dell'Analisi Matematica; invece l'integrale più generale $I(y_1, y_2)$ è stato da me considerato nel primo lavoro citato in (¹) e al quale rinvio per la posizione dei problemi, le definizioni e la bibliografia.

Per onorare la memoria dei due grandi Analisti italiani chiamerò d'ora in poi, tanto l'integrale $I(y)$ che $I(y_1, y_2)$ *integrali di Fubini - Tonelli.*

In questo lavoro mi occuperò dell'integrale $I(y_1, y_2)$ e chiamerò curva la coppia di funzioni $y_1(x)$, $y_2(z)$. Affinchè $I(y_1, y_2)$ sia una funzione semicontinua inferiormente sopra ogni curva ordinaria è necessario (²) che sia

$$f_{y_1'y_1'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] \geqslant 0, \qquad f_{y_2'y_2'}[x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'] \geqslant 0,$$

(¹) S. FAEDO: *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali*, Annali di Matematica, T. XXIII, 1944, pp. 69-123; *Un nuovo tipo di funzionali continui*, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, S. V, Vol. IV, 1943, pp. 223-249.

(²) S. FAEDO. 1° lavoro cit. in (¹).

per ogni punto (x, z, y_1, y_2) del campo che si considera ed ogni valore finito di y_1' e y_2'. Per analogia con gli integrali che ordinariamente si considerano nel Calcolo delle Variazioni diremo queste le condizioni di LEGENDRE (per l'esistenza del minimo). A differenza di quanto accade per gli integrali doppi dipendenti da una superficie, per la semicontinuità di $I(y_1, y_2)$ non è però necessario che sussista la disuguaglianza

$$f_{y_1'y_1'} f_{y_2'y_2'} - f^2_{y_1'y_2'} \geqslant 0.$$

Qualora la funzione integranda $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ non possieda continue le $f_{y_1'y_1'}$, $f_{y_2'y_2'}$, si può esprimere la condizione necessaria per la semicontinuità inferiore nella forma della condizione di WEIERSTRASS (per l'esistenza del minimo), introducendo le funzioni $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ di WEIERSTRASS, così definite:

$$\mathcal{E}_1[x, z, y_1, y_2, y_2'; y_1', \overline{y}_1'] = f(x, z, y_1, y_2, \overline{y}_1', y_2') - f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - \\ - (\overline{y}_1' - y_1') f_{y_1'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'),$$

$$\mathcal{E}_2[x, z, y_1, y_2, y_1'; y_2', \overline{y}_2'] = f(x, z, y_1, y_2, y_1', \overline{y}_2') - \\ - f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - (\overline{y}_2' - y_2') f_{y_2'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2').$$

Le condizioni di WEIERSTRASS, necessarie per la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$ in tutto il campo, si esprimono con le disuguaglianze

$$\mathcal{E}_1[x, z, y_1, y_2, y_2'; y_1', \overline{y}_1'] \geqslant 0, \qquad \mathcal{E}_2[x, z, y_1, y_2, y_1'; y_2', \overline{y}_2'] \geqslant 0,$$

che debbono valere in ogni punto (x, z, y_1, y_2) che si considera ed ogni valore finito di y_1', y_2', $\overline{y}_1'$, $\overline{y}_2'$.

Quanto alle condizioni perchè gli integrali di FUBINI - TONELLI siano semicontinui sopra una curva assegnata è noto [3] che essi possono essere semicontinui sopra una curva senza esserlo sopra archi di questa; perciò, ho dato condizioni affinchè tali funzionali siano semicontinui sopra una curva data oppure sopra tutti gli archi di una curva data.

Supponiamo che $\overline{C}$ $(\overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z))$ sia una curva di classe 1, ossia che $\overline{y}_1(x)$ e $\overline{y}_2(z)$ possiedano derivate prime continue per $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant z \leqslant d$; allora le condizioni necessarie (di LEGENDRE) per la semicontinuità inferiore su C sono [3]

$$(1) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_c^d f_{y_1'y_1'}[x, z, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z), \overline{y}_1'(x), \overline{y}_2(z)]\, dz \geqslant 0 & \text{per ogni } x \text{ in } (a, b), \\ \displaystyle\int_a^b f_{y_2'y_2'}[x, z, \overline{y}_1(x), \overline{y}_2(z), \overline{y}_1'(x), \overline{y}_2(z)]\, dx \geqslant 0 & \text{per ogni } z \text{ in } (c, d), \end{cases}$$

(3) S. FAEDO, 1° lavoro cit. in (1).

mentre le corrispondenti condizioni di WEIERSTRASS sono

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_c^d \mathcal{E}_1[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_2'(z)\,;\ \bar{y}_1'(x), y_1']\,dz \geqslant 0 & \text{per ogni } x \text{ in } (a, b), \\ \displaystyle\int_a^b \mathcal{E}_2[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \bar{y}_1'(x)\,;\ \bar{y}_2'(z), y_2']\,dx \geqslant 0 & \text{per ogni } z \text{ in } (c, d), \end{cases}$$

per ogni valore finito di y_1' e y_2'.

2. – Richiamiamo quanto accade per gli integrali curvilinei in forma ordinaria del Calcolo delle Variazioni

$$\mathfrak{J}(C) = \int_C F[x, y(x), y'(x)]\,dx.$$

La condizione necessaria per la semicontinuità inferiore di $\mathfrak{J}(C)$ sopra una curva $\bar{C}$ di equazione $y = \bar{y}(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, con $y'(x)$ continua (curva di classe 1) è che per ogni x in (a, b) sia

$$(3)\qquad F_{y'y'}[x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)] \geqslant 0 \quad \text{(condizione di LEGENDRE)}$$

oppure, nella forma di WEIERSTRASS, che sia per ogni x in (a, b) e ogni valore di y'

$$(4)\qquad \mathcal{E}(x, \bar{y}(x)\,;\ \bar{y}'(x), y') \geqslant 0,$$

essendo

$$\mathcal{E}(x, y, y', \bar{y}') = F(x, y, \bar{y}') - F(x, y, y') - (\bar{y}' - y')F_{y'}(x, y, y').$$

È noto ([4]) che se la $F\ (x, y, y')$ possiede la $F_{y'y'}$ continua [per ogni punto (x, y) del campo considerato e ogni valore finito di y'], allora se è verificata la condizione di WEIERSTRASS (4) di conseguenza sussiste pure quella di LEGENDRE (3).

Inoltre se la curva $\bar{C}$ su cui $\mathfrak{J}(C)$ è semicontinuo inferiormente non è di classe 1 [cioè se $y(x)$ è assolutamente continua in (a, b) e $\mathfrak{J}(C)$ esiste finito], allora le condizioni (3) e (4) debbono essere necessariamente verificate non più per ogni x di (a, b) ma soltanto per quasi tutti gli x di (a, b).

3. – Un problema di notevole interesse è quello di studiare come vadano modificate le condizioni (3) e (4) quando la curva $\bar{C}[(\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)]$ non sia di classe 1, cioè quando si supponga solo che $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(z)$ siano assolutamente continue per $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant z \leqslant d$ e tali da dare valore finito a $I\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$.

([4]) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, pp. 350, 370, 380.

Questo problema presenta notevoli difficoltà e lo scopo di questa Nota è di mostrare come a questo riguardo gli integrali di FUBINI - TONELLI si comportino in modo assai diverso dall'integrale curvilineo $\mathfrak{I}(C)$ che normalmente si studia nel Calcolo delle Variazioni.

Una prima difficoltà da me già rilevata [5] consiste nel fatto che può accadere che gli integrali (1) possono non essere mai finiti; ho dato anzi un esempio in cui, per ogni x in (a, b) il primo integrale (1) è sempre $= +\infty$; ma si comprende che tale difficoltà si può facilmente superare come caso limite, in quanto che si deve intendere che le (1) siano ugualmente verificate.

Nel caso che $\overline{y}_2'(z)$ sia continua in (c, d) mentre $\overline{y}_1(x)$ è supposta soltanto assolutamente continua in (a, b), ho dimostrato che la prima delle (1) [e così pure la prima delle (2)] deve essere verificata per quasi-tutti gli x di (a, b).

Per analogia con quanto accade per l'integrale $\mathfrak{I}(C)$, ciò indurrebbe a ritenere che per la semicontinuità inferiore di $I(y_1, y_2)$ sulla curva C debbano essere verificate le condizioni (1) per quasi tutti gli x di (a, b) e gli z di (c, d).

Invece questo fatto non è vero.

Si dà infatti un esempio (nn. 5-6) di un integrale $I(y_1, y_2)$ che è semicontinuo inferiormente su una curva C non di classe 1 e per cui il primo integrale (1) è costantemente uguale a -1, per ogni valore di x in (a, b).

Rispetto a tale questione *il comportamento degli integrali di Fubini - Tonelli è quindi assai diverso da quello dell'integrale* $\mathfrak{I}(C)$.

Un'altra notevole differenza, di carattere fondamentale per gli ulteriori sviluppi della teoria, viene pure messa in evidenza dal suddetto esempio, e cioè:

Anche se la funzione integranda $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ *possiede continue le* $f_{y_1'y_1'}$, $f_{y_2'y_2'}$, *se su una curva* (*non di classe* 1) *sono verificate le condizioni* (2) (*di Weierstrass*), *può accadere che non siano verificate le condizioni* (1) (*di Legendre*).

La natura di questo profondo divario fra gli integrali $I(y_1, y_2)$ e $\mathfrak{I}(C)$ sta nel fatto che per dedurre dalla condizione di WEIERSTRASS quella di LEGENDRE occorre fare un passaggio al limite; dalla (4) alla (3) ciò si può sempre fare purchè sia continua la $F_{y'y'}$, mentre nel nostro caso per passare dalle (2) alle (1) bisogna operare sotto il segno di integrale e può accadere che l'integrale del limite non sia il limite dell'integrale.

Nell'esempio considerato si ha la semicontinuità inferiore su C e non sono verificate le (1), mentre lo sono invece le (2); ciò costituisce una sicura indicazione per la ricerca delle condizioni necessarie per la semicontinuità sopra una curva non di classe 1.

Le differenze di comportamento ora rilevate fra gli integrali di FUBINI - TONELLI e quelli curvilinei del Calcolo delle Variazioni — insieme a quelle già messe

---

(5) S. FAEDO, 1° lavoro cit. in (1).

in luce nelle mie precedenti ricerche — mostrano le difficoltà e l'interesse di questa teoria, che riuscirà di grande utilità per lo studio di numerosi problemi, fra cui sopratutto quello della risoluzione delle equazioni integro-differenziali (v. 1° lavoro cit. in (1) e le Memorie ivi citate di G. FUBINI e L. TONELLI).

4. – Premettiamo alcune considerazioni sulla funzione

$$f(x, y) = e^{x^2 y^2}.$$

Sviluppando questa funzione, rispetto alla variabile x, con la formula di TAYLOR arrestata al secondo termine si ottiene

$$e^{x^2 y^2} = 1 + x^2 y^2 e^{\xi^2 y^2}[1 + 2\xi^2 y^2], \tag{5}$$

con $0 < \xi^2 < x^2$.

Fissato x, ξ^2 è funzione univoca di y perchè per ogni $y \neq 0$

$$f_{xx} = 2y^2 e^{x^2 y^2}[1 + 2x^2 y^2]$$

è funzione crescente di x^2; per $y = 0$ si ponga $\xi^2 = \frac{x^2}{6}$.

Vogliamo dimostrare che sussiste, qualunque sia y^2, la limitazione

$$\xi^2 \geqslant \frac{x^2}{6}. \tag{6}$$

Per $x^2 > 0$ fissato, consideriamo la funzione

$$\frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2y^2} = 1 + \frac{x^2y^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}y^{2n}}{(n+1)!} + \ldots \tag{7}$$

e questa serie converge per ogni valore di x^2y^2, essendo maggiorata dalla serie esponenziale

$$e^{x^2 y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}y^{2n}}{n!}.$$

La serie

$$e^{\frac{x^2y^2}{6}}\left[1 + \frac{x^2 y^2}{3}\right] = 1 + \frac{x^2y^2}{2} + \ldots + \frac{1+2n}{6^n n!} x^{2n} y^{2n} + \ldots$$

è maggiorata dalla (7); infatti è

$$6^n \geqslant (1 + 2n)(n + 1) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

perchè l'uguaglianza vale solo per $n = 0, 1$ e il primo membro cresce d'ordine esponenziale e ne segue subito

$$\frac{1}{(n+1)!} \geqslant \frac{1+2n}{6^n n!}.$$

Perciò, per la (5), è per $y \neq 0$

$$e^{\xi^2 y^2}(1+2\xi^2 y^2) = \frac{e^{x^2y^2}-1}{x^2y^2} > e^{\frac{x^2y^2}{6}}\left[1+\frac{x^2y^2}{3}\right];$$

poichè

$$e^{\xi^2 y^2}(1+2\xi^2 y^2)$$

è una funzione crescente di ξ^2, ne segue immediatamente la (6).

5. – Posto

$$f[y_1', y_2'] = e^{y_1'^2 y_2'^2} - y_1'^2,$$

consideriamo il funzionale

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b\int_c^d f[y_1'(x), y_2'(z)]\,dxdz,$$

dove le funzioni $y_1(x)$, $y_2(z)$ sono assolutamente continue per $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant z \leqslant d$ e tali da rendere finito $I(y_1, y_2)$. Una tale coppia di funzioni si dirà una curva ordinaria per $I(y_1, y_2)$ e si indicherà con $C(y_1, y_2)$.

Dimostriamo che $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferiormente sulla curva ordinaria $\overline{C}(\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ con

$$(8)\qquad \begin{cases} \overline{y}_1(x) \equiv 0 & (0 \leqslant x \leqslant 1). \\ \overline{y}_2(z) = \frac{2}{3}\sqrt[4]{z^3} & (0 \leqslant z \leqslant 1). \end{cases}$$

Si ha immediatamente

$$(9)\qquad I(\overline{y}_1, \overline{y}_2) = 1.$$

Si fissi ε con $0 < \varepsilon \leqslant 4$. L'integrale

$$\mathfrak{J}(y_2) = \int_c^d y_2'^2(z)\, e^{\varepsilon/48\; y_2'^2(z)}\, dz$$

è regolare positivo e sulla curva $y_2 = \overline{y}_2(z)$ è $\mathfrak{J}(\overline{y}_2) = +\infty$ e perciò (6) si può determinare ϱ con $0 < \varrho < \frac{\varepsilon}{8}$ tale che se $y_2(z)$ appartiene propriamente (7) all'intorno (ϱ) di $y_2(z)$ sia

$$\mathfrak{J}(y_2) \geqslant 1 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sia ora $C[y_1(x), y_2(z)]$, $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant z \leqslant d$, una curva ordinaria per $I(y_1, y_2)$ con $y_2(z)$ appartenente propriamente all' intorno (ϱ) di $\overline{y}_2(z)$ e $y_1(x)$ all'intorno $\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$ di $\overline{y}_1$.

---

(6) L. TONELLI, loc. cit. in (3), p. 443.

(7) L. TONELLI, loc. cit. in (3), p. 71.

Sviluppando $f(y_1', y_2')$ con la formula di TAYLOR rispetto a y_1' si ottiene

$$e^{y_1'^2 y_2'^2} - y_1'^2 = 1 + y_1'^2 \left[y_2'^2 e^{\widetilde{y_1'^2 y_2'^2}} (1 + 2\widetilde{y}_1'^2 y_2'^2) - 1 \right]$$

e, per quanto è dimostrato nel n. 4, è

$$\frac{y_1'^2}{6} \leqslant \widetilde{y}_1'^2 < y_1'^2,$$

e quindi

$$e^{y_1'^2 y_2'^2} - y_1'^2 > 1 + y_1'^2 \left[y_2'^2 \, e^{\frac{y_1'^2}{6} y_2'^2} - 1 \right];$$

integrando segue

$$I(y_1, y_2) \geqslant (b-a)(d-c) + \int_a^b \int_c^d y_1'^2(x) \left[y_2'^2(z) \, e^{\frac{y_1'^2(x)}{6} y_2'^2(z)} - 1 \right] dx dz. \tag{10}$$

Poichè C appartiene propriamente all' intorno $\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)$ di $\overline{C}$ è

$$b - a \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4}, \qquad d - c \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{4},$$

da cui

$$(b-a)(d-c) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2};$$

da (9) e (10) segue

$$I(y_1, y_2) > I(\overline{y}_1, \overline{y}_2) + \int_a^b y_1'^2(x) dx \int_c^d \left[y_2'^2(z) \, e^{\frac{y_1'^2(x)}{6} y_2'^2(z)} - 1 \right] dz - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Indichiamo con E_1 l'insieme dei punti di (a, b) in cui esiste $y_1'(x)$ ed è $y_1'^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{8}$ e con E_2 l' insieme dei punti di (a, b) in cui esiste $y_1'(x)$ ed è $y'^2(x) > \frac{\varepsilon}{8}$. Posto

$$I_1(y_1, y_2) = \int_{E_1} y_1'^2(x) dx \int_c^d [y_2'^2(z) \, e^{y_1'^2/6 \cdot y_2'^2} - 1] \, dz + \int_{E_2} y_1'^2 dx \int_c^d [y_2'^2 \, e^{y_1'^2/6 \cdot y_2^2} - 1] \, dz,$$

è

$$\int_{E_1} y_1'^2(x) \, dx \int_c^d [y_2'^2(z) \, e^{y_1'^2/6 \, y_2'^2} - 1] \, dz > - \int_{E_1} \int_c^d y_1'^2(x) dx dz > - \frac{\varepsilon}{8} m(E_1)(d-c) >$$
$$> - \frac{\varepsilon}{8} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 > - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_{E_2} y_1'^2(x) dx \int_c^d [y_2'^2(z) \, e^{y_1'^2(x)/6 \cdot y_2'^2(z)} - 1] \, dz > \int_{E_2} y_1'^2(x) \, dx \int_c^d [y_2'^2 \, e^{\varepsilon/48 \cdot y_2'^2} - 1] \, dz \geqslant 0,$$

essendo

$$\int^d y_2'(z) \, e^{\varepsilon/48 \, y_2'^2(z)} dz \geqslant 1 + \frac{\varepsilon}{4} \geqslant d - c.$$

Pertanto è

$$I_1(y_1, y_2) > -\frac{\varepsilon}{2},$$

e dalla (11) segue

$$I(y_1, y_2) > I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) - \varepsilon,$$

qualunque sia la curva ordinaria $C(y_1, y_2)$ purchè appartenga propriamente all'intorno già determinato di $\bar{C}$. È così provato che su $\bar{C}$ $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferiormente.

6. – La curva $\bar{C}$ considerata nel n. 5 non è di classe 1; infatti la funzione $\bar{y}_2(z) = \frac{2}{3}\sqrt[4]{z}$, non ha derivata continua per $z=0$.

L' integrale $I(y_1, y_2)$ del n. 5 è definito da

$$\int_a^b \int_c^d f[y_1'(x), y_2'(z)]\, dxdz \quad \text{con} \quad f(y_1', y_2') = e^{y_1'^2 y_2'^2} - y_1'^2,$$

ed è

$$f_{y_1' y_1'} = 2y_2'^2\, e^{y_1'^2 y_2'^2}\, [1 + 2y_1'^2 y_2'^2] - 2,$$

e questa espressione sulla curva $\bar{C}$ definita dalle (8) diviene

$$f_{y_1' y_1'}[\bar{y}_1', \bar{y}_2'] = 2[\bar{y}_2'^2(z) - 1] = 2\left[\frac{1}{4\sqrt{z}} - 1\right].$$

Consideriamo la prima delle condizioni di Legendre (1) sulla curva $\bar{C}$; è

$$\int_0^1 f_{y_1' y_1'}(\bar{y}_1', \bar{y}_2')\, dz = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{4\sqrt{z}} - 1\right) dz = -1,$$

qualunque sia la x *in* (0, 1).

Questo esempio prova quanto si era affermato nel n. 3 e cioè che *passando dalle curve di classe* 1 *a quelle ordinarie non è vero* [come accade per l'analogo problema per gli integrali curvilinei $\mathfrak{J}(C)$] *che le* (1) *debbano essere verificate per quasi-tutti gli* x *di* (a, b) *e gli* z *di* (c, d).

7. – Esaminiamo ora se l'esempio precedentemente considerato soddisfa alle condizioni (2) di WEIERSTRASS. La seconda di tali condizioni è ovviamente verificata. Quanto alla prima, si ha

$$\mathcal{E}_1[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z)\ \bar{y}_2'(z);\ \bar{y}_1'(x), y_1'] = f(y_1', \bar{y}_2') - f(\bar{y}_1', \bar{y}_2') -$$
$$- (y_1' - \bar{y}_1')\, f_{y_1'}(\bar{y}_1', \bar{y}_2') = \frac{1}{2}\,(y_1' - \bar{y}_1')^2 f_{y_1' y_1'}(\tilde{y}_1', y_2'),$$

con $\tilde{y}_1$ compreso fra y_1' e $\bar{y}_1'$, e per le (8)

$$\mathcal{E}_1[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_2'(z)\,;\ \bar{y}_1'(x), y_1'] = y_1'^2 \left[\bar{y}_2'^2(z)\, e^{\tilde{y}_1'^2 \bar{y}_2'^2(z)}(1 + 2\tilde{y}_1'^2\, y_2'^2(z)) - 1\right].$$

Questa espressione è nulla per $y_1' = 0$ (in tal caso è anche $\tilde{y}_1' = 0$ essendo $\bar{y}_1' = 0$) e per $y_1' \neq 0$ è $\tilde{y}_1' \neq 0$ e la prima delle (2) diviene

$$\int_0^1 \mathcal{E}_1[x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2\,;\ \bar{y}_1', y_1']\, dz = y_1'^2 \int_0^1 \left[\bar{y}_2'^2(z)\, e^{\tilde{y}_1'^2 \bar{y}_2'^2(z)}(1 + 2\tilde{y}_1' \bar{y}_2'^2(z)) - 1\right] dz = +\infty$$

per ogni x in $(0, 1)$, poichè $\bar{y}_2'^2(z)$ diventa infinita per $z \to +0$. Quindi, per ogni valore di y_1' e per ogni x in $(0, 1)$ è verificata la prima delle (2).

Nell'esempio considerato *sono quindi verificate le condizioni di Weierstrass e pur avendosi le $f_{y_1'y_1'}$, $f_{y_2'y_2'}$ continue non sono verificate le condizioni di Legendre contrariamente a quanto accade per gli integrali curvilinei che ordinariamente si considerano nel Calcolo delle Variazioni.*

La ragione di tale anomalia consiste in ciò : Se esiste continua la $f_{y_1'y_1'}$ è

$$f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') = 2 \lim_{y' \to \bar{y}'} \frac{\mathcal{E}_1[x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_2'\,;\ \bar{y}_1', \bar{y}_1']}{(y_1' - \bar{y}_1')^2},$$

e quindi le condizioni (1) di LEGENDRE si ricavano da quelle (2) di WEIERSTRASS cercando il limite

$$\lim_{y_1' \to \bar{y}_1'} \frac{2}{[y_1' - \bar{y}_1'(z)]} \int_c^d \mathcal{E}_1[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_2'(z)\,;\ \bar{y}_1'(x), y_1']\, dz\,;$$

qualora si possano invertire l'operazione di limite con quella d'integrazione il limite precedente coincide con la prima delle (1) e quindi dalla condizione di WEIERSTRASS segue quella di LEGENDRE ; ma ciò non è vero in generale come mostra l'esempio che abbiamo considerato nei nn. 5 - 7.

Questo esempio mostra altresì che non si possono avere condizioni necessarie per la semicontinuità sopra una curva ordinaria C assegnata (non di classe 1) con relazioni che dipendono solo dai valori su C della funzione integranda $f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')$ e delle sue derivate rispetto a y_1', y_2'; queste relazioni involgono necessariamente tutto l'intorno di C, almeno per quanto riguarda le variabili y_1' e y_2' e quindi potranno essere espresse sotto la forma di WEIERSTRASS.

EZIO DELLA MONICA - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 7 Giugno 1950.