ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

SANDRO FAEDO

**Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, tome 1, nº 1-4 (1949), p. 1-41

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1949_3_1_1-4_1_0>

# UN NUOVO METODO PER L'ANALISI ESISTENZIALE E QUANTITATIVA DEI PROBLEMI DI PROPAGAZIONE

di SANDRO FAEDO (Roma).

## INTRODUZIONE

1. — Per lo studio dei problemi di equilibrio della Fisica-Matematica sono di grande importanza due procedimenti di risoluzione approssimata, *il metodo di Ritz* [1] (1) e *quello delle minime potenze ponderate di M. Picone* [1]. In un recente lavoro (S. Faedo [5]) ho confrontato fra loro i due metodi, chiarendo lo stretto legame che li unisce e stabilendo anche per il metodo di Ritz delle formule di maggiorazione dell'errore del tutto analoghe a quelle date da M. Picone per il Suo metodo.

Entrambi i detti metodi consistono nel minimizzare un integrale del Calcolo delle Variazioni.

Se si ha un problema al contorno ben posto, nel caso del metodo di Ritz tale integrale riesce *regolare* (nel senso del Calcolo delle Variazioni) *qualunque sia il numero delle variabili indipendenti* che intervengono: questa è la ragione che ha permesso di stabilire larghi criteri di convergenza puntuale o almeno in media per il metodo di Ritz. Invece nel metodo delle minime potenze ponderate il corrispondente integrale è *regolare solo se dipende da funzioni di una sola variabile indipendente*, ossia se si integrano equazioni differenziali ordinarie, e solo in tal caso si possiedono effettivi criteri di convergenza.

Se dai problemi di equilibrio si passa a quelli di propagazione, il metodo delle minime potenze ponderate ne suggerisce naturalmente un altro, pure dovuto a M. Picone [2-3] e da Lui chiamato *metodo variazionale,* alla teoria del quale abbiamo dato ulteriori contributi B. Manià [1] ed io [1-4]. Anche il metodo variazionale consiste nel considerare un integrale multiplo $I(u)$ e nel costruire, con un procedimento ben determinato, una successione di funzioni minimizzante $I(u)$. Si ha però il grave inconveniente che l'integrale $I(u)$ è *sempre non regolare* e questa è la profonda ragione per cui non si conoscono ancora criteri di convergenza per il metodo variazionale.

(1) I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia, pag. 41.

Per aggirare tale difficoltà si presenta spontanea l'idea di sviluppare *un procedimento per l'analisi dei problemi di propagazione, che stia al metodo di Ritz come il metodo variazionale sta a quello delle minime potenze ponderate;* ed è lecito presumere che, come per quello di Ritz, anche per il nuovo si possano ottenere larghi criteri di convergenza.

Ciò verrà confermato dai risultati nel presente lavoro.

2. — Indipendentemente da un problema di Calcolo delle Variazioni il metodo di Ritz può essere così riassunto:

Si debba integrare una equazione lineare alle derivate parziali, autoaggiunta di tipo ellittico del $2^0$ ordine $L[u] = f$, con la condizione per la $u(P)$ di annullarsi sulla frontiera $FC$ del campo $C$. Scelto un opportuno sistema completo di funzioni $\{\varphi_i(P)\}$, definite in $C$ e tutte nulle su $FC$, e posto

$$u_n(P) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,n}\, \varphi_i(P)$$

si determinano le costanti $c_{i,n}$ in modo che sia verificato il sistema d'equazioni lineari

$$\int_C \{L[u_n] - f\}\, \varphi_i(P)\, d\,C = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

La funzione $u_n$ così determinata è l'$n^{ma}$ approssimazione del metodo di Ritz e per $n \to \infty$, sotto larghe condizioni, converge alla soluzione del problema.

Se si ha un problema di propagazione e quindi la $u$ dipende oltre che dal punto $P$ variabile in $C$ anche dal tempo $t$ e su $FC$ è $u = 0$ e per $t = 0$ $u(P, 0) = g(P)$, $u_t(P, 0) = g_1(P)$, allora porremo

$$u_n(P, t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,n}(t)\, \varphi_i(P),$$

determinando le $n$ funzioni $c_{i,n}(t)$ in modo che soddisfino al sistema differenziale ordinario

$$\int_C \{L[u_n] - f\}\, \varphi_i(P)\, d\,C = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

con le condizioni iniziali [se $\{\varphi_i(P)\}$ è ortogonale e normale in $C$]

$$\int_C g(P)\, \varphi_i(P)\, d\,C = c_{i,n}(0) \quad , \quad \int_C g_1(P)\, \varphi_i(P)\, d\,C = c'_{i,n}(0).$$

Tale procedimento, che chiameremo *metodo dei momenti* contiene come caso particolare uno di N. Kryloff e N. Bogoliouboff [1] (²), da loro chiamato analisi armonica generalizzata.

Il metodo dei momenti sta quindi a quello di Ritz come il metodo variazionale a quello delle minime potenze ponderate. Però non ha più senso un problema di Calcolo delle Variazioni che traduca il metodo dei momenti come invece accade per quello di Ritz. E ciò, se è ben naturale trattandosi di problemi a carattere squisitamente iperbolico, viene a costituire la principale difficoltà ed obbliga a battere nuove vie venendo a mancare il potente ausilio del Calcolo delle Variazioni. Il metodo, come vedremo, si presta non solo all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione, ma è anche un efficace strumento per ottenere teoremi di esistenza e per stabilire proprietà qualitative, anche di carattere asintotico, della soluzione.

3. — In questo primo lavoro sull'argomento studio il seguente generale *problema di propagazione:*

Sulla semistriscia $(S)$ del piano $x\,t$ definita da

$$0 \leq x \leq c \quad , \quad t \geq 0$$

è data l'equazione

$$L[u] = -u_{xx} + a_1 u_{xt} + a_2 u_{tt} + a_3 u_x + a_4 u_t + a_5 u = f, \tag{1}$$

dove *i coefficienti* $a_i$ *e il termine noto* $f$ *sono funzioni di* $x$ *e* $t$ *definite in* (S).

Diremo *classe* $C$ la totalità delle funzioni $u(x, t)$, continue in $(S)$ con le derivate prime e seconde.

Diremo *problema* I la ricerca delle funzioni della classe $C$ che soddisfano in $(S)$ alla (1) e inoltre verificano *le condizioni iniziali*

$$u(x, 0) = g(x) \qquad u_t(x, 0) = g_1(x), \qquad (0 \leq x \leq c) \tag{2}$$

e le *condizioni al contorno*

$$u(0, t) = f_1(t) \qquad u(c, t) = f_2(t), \qquad (t \geq 0). \tag{3}$$

Naturalmente perchè il problema I abbia senso occorre che le (1), (2), (3) siano compatibili e che i secondi membri delle (2) (3) possiedano le derivate richieste dalla (1).

---

(²) Per tale procedimento gli A. A. non danno criteri di convergenza, ma se ne servono soltanto per stabilire un teorema di esistenza in un caso particolare del nostro Teorema II; l'equazione da loro considerata ha i coefficienti che non dipendono dal tempo e che inoltre soddisfano a ulteriori limitazioni.

Con il simbolo $(S_T)$ si indicherà il rettangolo

$$0 \leq x \leq c \quad , \quad 0 \leq t \leq T .$$

4. — Nel Cap. I si dimostra il

TEOREMA I (*di unicità*):

« *Se i coefficienti* $a_i$ *dell'equazione* (1) *del problema I sono funzioni continue in* (S) *con le derivate*

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial a_2}{\partial t}$$

*ed è in* (S)

$$a_2 > 0 , \tag{4}$$

*allora il problema I ha al più una sola soluzione* ».

Per i problemi di propagazione formulati nel modo più generale M. Picone ([4], pag. 716) ha dato un larghissimo teorema di unicità fondato sull'uso della trasformata di Laplace a intervallo finito da Lui introdotta. Il teorema I è però indipendente da quello di M. Picone perchè in questo si suppone che i coefficienti della (1) siano funzioni della sola $x$.

5. — Nel Cap. II è esposto il metodo dei momenti in generale e sono precisate le condizioni a cui deve soddisfare il sistema di funzioni $\{\varphi_i(x)\}$. Tali condizioni sono quelle già date da M. Picone [2] e da me [4] per il metodo variazionale, con una ulteriore condizione sul comportamento delle $\varphi_i(x)$ al contorno del campo. La teoria già svolta per il metodo variazionale si rivela qui di particolare utilità e offre come già risolta una questione che altrimenti sarebbe stata da porsi.

6. — Il metodo di Ritz si può considerare come un metodo diretto di Calcolo delle Variazioni (Courant-Hilbert [1] Cap. IV § 2) e, come tale, non solo dà un procedimento per il calcolo approssimato, ma può anche servire quale strumento per ottenere teoremi di esistenza per problemi al contorno per equazioni autoaggiunte di tipo ellittico.

Viene quindi naturale di chiedersi se col metodo dei momenti si possono pure ottenere teoremi di esistenza per i problemi di propagazione.

Poichè nel metodo dei momenti manca il significato variazionale che si ha in quello di Ritz, può apparire che tale possibilità sia preclusa.

D'altra parte il successo del metodo diretto di Calcolo delle Variazioni di L. Tonelli poggia sul concetto di semicontinuità e sui procedimenti di Giulio Ascoli e C. Arzelà; mentre la semicontinuità è precipua di problemi di massimo e minimo, questi ultimi hanno una portata assai più generale.

E appunto i procedimenti di Giulio Ascoli e C. Arzelà permettono di ottenere, mediante il metodo dei momenti, un teorema di esistenza per i problemi di propagazione.

Oltre a numerose difficoltà di carattere particolare che si incontrano per incanalare il problema sulla strada maestra del calcolo funzionale italiano, si presenta l'inconveniente che le classi di funzioni che si vengono a considerare e di cui occorre decidere se sono o no ugualmente continue non rientrano nei criteri noti.

Ciò mi ha obbligato a sviluppare, parallelamente a questa, un'altra ricerca volta alla conquista di criteri di uguale continuità di un nuovo tipo, che potranno servire anche per altri problemi di calcolo funzionale (S. Faedo [6]).

Ecco il teorema di esistenza che è dimostrato nel Cap. III:

TEOREMA II (*di esistenza*):

« *Se i coefficienti* $a_i$ *e il termine noto* f *dell'equazione* (1) *del problema I sono funzioni continue in* (S) *con le loro derivate prima e seconda rispetto a* t*; se esiste continua in* (S) *la* $\frac{\partial a_1}{\partial x}$ *mentre gli altri coefficienti* $a_i$ $(i = 2, \ldots, 5)$ *e il termine noto* f *hanno derivata prima continua rispetto ad* x *per* $t = 0$ *ed è in* (S)

$$a_2 > 0 ; \tag{4}$$

*se* $f_1(t)$ *e* $f_2(t)$ *sono continue per* $t \geq 0$ *con le loro derivate dei primi quattro ordini; se* $g(x)$ *e* $g_1(x)$ *sono continue in* $(0, c)$ *con le loro derivate rispettivamente fino al terzo e secondo ordine e sono verificate le condizioni di compatibilità nel punto* $x = 0$ , $t = 0$

$$f_1 = g \, , f'_1 = g_1 \, , - g'' + a_1 g'_1 + a_2 f''_1 + a_3 g' + a_4 f'_1 + a_5 f_1 = f$$

*e nel punto* $x = c$ , $t = 0$

$$f_2 = g \, , f'_2 = g_1 \, , - g'' + a_1 g'_1 + a_2 f''_2 + a_3 g' + a_4 f''_2 + a_5 f_2 = f ;$$

*allora il problema I ha una soluzione* $u(x, t)$, *che è unica per il teorema I.*

*Inoltre le derivate*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \; , \; \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial t}$$

*sono assolutamente continue secondo Tonelli in ogni* $(S_T)$ *e perciò esistono quasi ovunque in* (S) *e sono sommabili in ogni* $(S_T)$ *le derivate*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \; , \; \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \, \partial x} \; , \; \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \, \partial t} \text{ ».}$$

Se si suppone inoltre che i coefficienti e il termine noto della (1) siano derivabili rispetto ad $x$, dalla (1) segue che esiste quasi ovunque in $(S)$ anche la $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.

Sempre nel Cap. III sono dimostrati anche i due teoremi seguenti:

TEOREMA III:

« *Nelle ipotesi del teor. II e se si sceglie il sistema*

$$\varphi_i(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi i x}{c} \qquad (i = 1, 2, \ldots,),$$

*il metodo dei momenti fornisce una successione* $u_n(x, t)$ *che converge uniformemente in ogni* $(S_T)$, *insieme a*

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial t},$$

*verso la soluzione* $u(x, t)$ *e le corrispondenti derivate. Invece la successione* $\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ *converge in media in* $(0, c)$ *alla* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *per ogni* $t \geq 0$ ».

Questo teorema non solo offre un mezzo atto al calcolo numerico per approssimare la soluzione $u(x, t)$ del problema, ma *permette di approssimare simultaneamente le derivate della u* che esprimono grandezze (velocità, intensità di corrente, tensioni, sforzi, ecc.) che spesso hanno grandissima importanza nelle applicazioni tecniche.

TEOREMA IV:

« *Nelle ipotesi del Teorema II la soluzione* $u(x, t)$ *del problema I e le sue derivate soddisfano in tutta* $(S)$ *alle disuguaglianze*

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&|u(x, t)| \leq |w(x, t)| + \sqrt{x(c-x)}\,\Gamma_1(t),\\
&|u_t(x, t)| \leq |w_t(x, t)| + \sqrt{x(c-x)}\,\Gamma_2(t),\\
&|u_{tt}(x, t)| \leq |w_{tt}(x, t)| + \sqrt{x(c-x)}\,\Gamma_3(t),\\
&|u_x(x, t)| \leq |w_x(x, t)| + \Gamma_4(t),\\
&|u_{xt}(x, t)| \leq |w_{xt}(x, t)| + \Gamma_5(t),\\
&|u_{xx}(x, t)| \leq |w_{xx}(x, t)| + \Gamma_6(t),
\end{aligned}\right.$$

*dove si è posto*

$$w(x,t) = [f_1(t) - f_1(0) - t f_1'(0)]\left(1 - \frac{x}{c}\right) +$$

$$+ [f_2(t) - f_2(0) - t f_2'(0)]\frac{x}{c} + g(x) + t\, g_1(x)$$

*e le* $\Gamma_i(\mathrm{t})$ *sono funzioni continue, non negative e non decrescenti, con* $\Gamma_1(0) = 0$, *definite per ogni* $\mathrm{t} \geq 0$, *che si esprimono direttamente con i coefficienti della (1)* ».

Si osservi che nelle prime tre disuguaglianze (5) vale l'uguaglianza per $x = 0$ e $x = c$ e, nella prima, anche per $t = 0$.

I secondi membri delle (5) si calcolano a priori indipendentemente dalla risoluzione del problema. Si ottengono così delle limitazioni per la soluzione e le sue derivate che, in taluni casi, potranno già dare una prima indicazione al tecnico sull'ordine di grandezza dei fenomeni, che può risultare preziosa specie dal punto di vista asintotico.

È infine da notare che nei Teoremi II-IV non si fa alcuna ipotesi sul comportamento dei coefficienti delle (1) e (3) per $t \to \infty$.

7. — Il Teorema III dà un criterio di convergenza per il metodo dei momenti nel quale si sia fissato il particolare sistema

$$\varphi_i(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi i x}{c}.$$

Nel Cap. IV viene studiata la convergenza, lasciando al calcolatore la scelta del sistema $\{\varphi_i(x)\}$, sotto ben determinate condizioni.

Nello studio del metodo variazionale M. Picone ed io abbiamo precisato le condizioni a cui deve soddisfare il sistema $\{\varphi_i(x)\}$ in modo che (nell'ipotesi che esista la soluzione) tenda a zero l'errore quadratico medio

$$I[u_n^*] = \int_0^T\!\!\int_0^c \{L[u_n^*] - f\}^2\, d\,x\, d\,t$$

per $n \to \infty$, $u_n^*$ essendo l'$n^{\text{ma}}$ approssimazione del metodo variazionale. Se $\{\varphi_i(x)\}$ soddisfa a quelle condizioni lo diremo *un sistema ammesso per il metodo variazionale.*

Nel Cap. IV si dimostra il

Teorema V:

« *Nelle ipotesi del teorema I di unicità e se inoltre si ammette che il problema I possieda la soluzione* $\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})$, *allora se* $\{\varphi_\mathrm{i}(\mathrm{x})\}$ *è un sistema am-*

*messo per il metodo variazionale e per cui è* $\varphi_i(0) = \varphi_i(c) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *si ha uniformemente in ogni* $(S_T)$

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x, t) = u(x, t),$$

*dove* $u_n$ *è l'*$n^{ma}$ *approssimazione fornita dal metodo dei momenti* ».

Questo teorema conferma la presunzione fatta nel n. 1.

Mentre, nell'ipotesi che esista la soluzione del problema I, il metodo variazionale ci assicura per ora soltanto che tende a zero l'errore quadratico medio $I(u_n^*)$, il metodo dei momenti dà (sotto larghissime condizioni) la convergenza uniforme delle approssimazioni alla soluzione.

Si osserva inoltre che con ulteriori ipotesi di derivabilità rispetto a $t$ dei coefficienti della (1) e ulteriori condizioni per il sistema $\{\varphi_i(x)\}$, si può ottenere che alcune delle derivate delle $u_n(x, t)$ convergano alle corrispondenti derivate della soluzione, come in particolare accade nel teorema III.

8. — Indipendentemente dal fatto che la teoria del nuovo metodo (almeno per il generale problema qui studiato) è già notevolmente più progredita di quella del metodo variazionale, si ha rispetto a questo un notevole vantaggio anche nella determinazione delle approssimazioni. Infatti per calcolare l'$n^{ma}$ approssimazione del metodo dei momenti basta integrare un sistema differenziale di $n$ equazioni del secondo ordine, in forma normale, con *condizioni di Cauchy;* invece nel metodo variazionale si ha un sistema di $n$ equazioni differenziali del quarto ordine, con due *condizioni al contorno* dell'intervallo di tempo; in particolare nel problema I si avrebbero condizioni asintotiche.

Inoltre se si studia il problema I sul campo $(S_T)$ col metodo dei momenti, l'$n^{ma}$ approssimazione è indipendente da $T$, mentre quella fornita dal metodo variazionale dipende esplicitamente da $T$.

Il metodo variazionale d'altro lato presenta il vantaggio di non porre condizioni per il sistema $\{\varphi_i(x)\}$ al contorno del campo. Devo infine notare che la teoria per esso già svolta mi è stata di grande utilità per il presente lavoro.

## Capitolo I.

## Unicità della soluzione

*Dimostrazione del Teorema I.*

Siano $u$ e $\bar{u}$ due distinte funzioni della classe $C$ che risolvono il problema I. Allora $v = u - \bar{u}$ è una funzione della classe $C$ che risolve il problema omogeneo

$$L[v] = 0 \qquad \text{in } (S), \tag{1'}$$

$$v(x, 0) = v_t(x, 0) = 0, \tag{2'}$$

$$v(0, t) = v(c, t) = 0. \tag{3'}$$

Da (1′) segue

$$\int_0^c L[v]\, v_t\, d t = 0. \tag{6}$$

Integrando per parti, tenendo conto delle (3′), si ha per ogni $t \geq 0$

$$-\int_0^c v_{xx}\, v_t\, d t = \int_0^c v_{xt}\, v_x\, d x = \frac{1}{2} \frac{d}{d t} \int_0^c v_x^2\, d x,$$

$$\int_0^c a_1\, v_{xt}\, v_t\, d x = \frac{1}{2} \int_0^c a_1\, (v_t^2)_x\, d x = -\frac{1}{2} \int_0^c \frac{\partial a_1}{\partial x}\, v_t^2\, d x,$$

$$\int_0^c a_2\, v_{tt}\, v_t\, d x = \frac{1}{2} \frac{d}{d t} \int_0^c a_2\, v_t^2\, d x - \frac{1}{2} \int_0^c \frac{\partial a_2}{\partial t}\, v_t^2\, d x.$$

Sostituendo nella (6) le espressioni trovate si ottiene che è per $t \geq 0$

$$\frac{1}{2} K'(t) + R(t) = 0, \tag{7}$$

dove si è posto

(8) $$K(t) = \int_0^c \{a_2 v_t^2 + v_x^2\} \, d\,x\,,$$

(9) $$R(t) = \int_0^c \left\{ \left[ a_4 - \frac{1}{2} \frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial t} \right] v_t^2 + a_3 v_t v_x + a_5 v v_t \right\} d\,x\,.$$

Dimostriamo che si può definire una funzione continua $\gamma(t)$ in modo che sia per $t \geq 0$

(10) $$| R(t) | \leq \gamma(t) K(t).$$

Per la (4) si può definire una funzione continua $A(t)$ tale che sia in $(S)$

$$a_2(x, t) \geq A(t) \quad \text{con} \quad 0 < A(t) \leq 1\,;$$

perciò è

$$K(t) \geq A(t) \int_0^c \{v_t^2 + v_x^2\} \, d\,x.$$

Per la (3′) si ha

$$v^2 = \left( \int_0^x v_x \, d\,x \right)^2 \leq c \int_0^c v_x^2 \, d\,x$$

e quindi

$$\left| \int_0^c a_5 v v_t dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^c | a_5 | (v^2 + v_t^2) dx \leq \frac{c}{2} \int_0^c | a_5 | \, dx \int_0^c v_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^c | a_5 | \, v_t^2 dx\,;$$

ne segue

$$| R(t) | \leq \int_0^c \left\{ \left( \left| a_4 - \frac{1}{2} \frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial t} \right| + \frac{1}{2} | a_5 | \right) v_t^2 + \right.$$

$$\left. + | a_3 | \, | v_t | \, | v_x | + \left( \frac{c}{2} \int_0^c | a_5 | \, d\,x \right) v_x^2 \right\} d\,x.$$

Detta $B(t)$ una funzione continua non inferiore in $(S)$ a

$$\left| a_4 - \frac{1}{2} \frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_2}{\partial t} \right| + \frac{1}{2} | a_5 |\,, \quad \frac{c}{2} \int_0^c | a_5 | \, d\,x, \quad \frac{1}{2} | a_3 |\,,$$

risulta

$$| R(t) | \leq 2 B(t) \int_0^c \{v_t^2 + v_x^2\} \, dx.$$

Perciò, posto $\gamma(t) = \dfrac{2 B(t)}{A(t)}$, la funzione $\gamma(t)$ è continua e soddisfa la (10). Definiamo la funzione

$$\theta(t) = \begin{cases} \dfrac{2 R(t)}{K(t)} & \text{per ogni } t \text{ in cui è } K(t) \neq 0 \\ 0 & \text{per ogni } t \text{ in cui è } K(t) = 0; \end{cases}$$

$\theta(t)$ è quasi-continua e limitata in ogni intervallo finito essendo per la (10) $| \theta(t) | \leq 2 \gamma(t)$. Per la (7) e le (2') è per ogni $t \geq 0$

$$\begin{cases} K'(t) + \theta(t) K(t) = 0 \\ K(0) = 0. \end{cases}$$

Ma tale problema ha la sola soluzione $K(t) \equiv 0$ e quindi è in $(S)$ $v_t = v_x = 0$; per le (2') [o le (3')] ne viene che è in $(S)$ $v = 0$ e così è dimostrato il teorema I.

Osservazione. — Dal ragionamento fatto segue che se si considera il problema I soltanto su $(S_T)$ [cioè se si esige che la (1) sia soddisfatta su $(S_T)$ e la (3) per $0 \leq t \leq T$], esso ha al più una sola soluzione nelle ipotesi del teorema I [limitando tali ipotesi al campo $(S_T)$.

## CAPITOLO II.

## Il metodo dei momenti

1. — Le funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ siano continue con le loro derivate prime e seconde; posto

$$z(x, t) = f_1(t)\left(1 - \frac{x}{c}\right) + f_2(t)\frac{x}{c},$$

risulta

$$z(0, t) = f_1(t), \qquad z(c, t) = f_2(t).$$

Se $u(x, t)$ è una soluzione del problema I col cambiamento di variabile $v = u - z$, il problema I si trasforma nell'equivalente

PROBLEMA II:

« *Ricerca delle funzioni* v(x, t) *della classe* C *che soddisfano in* (S) *alle equazioni*

$$(1'') \qquad L[v] = \bar{f}(x, t) = f(x, t) - L[z]$$

$$(2'') \qquad v(x, 0) = G(x) \qquad v_t(x, 0) = G_1(x)$$

$$(3'') \qquad v(0, t) = v(c, t) = 0,$$

*con*

$$G(x) = g(x) - z(x, 0), \qquad G_1(x) = g_1(x) - z_t(x, 0),$$

$$G(0) = G(c) = 0 \quad , \qquad G_1(0) = G_1(c) = 0 \text{ ».}$$

2. — Nel metodo dei momenti, come si è già detto, occorre scegliere un sistema di funzioni $\{\varphi_i(x)\}$ soddisfacente a opportune condizioni.

*Scegliamo il sistema* $\{\varphi_i(x)\}$ *in modo che sia*

$$(11) \qquad \varphi_i(0) = \varphi_i(c) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

*ed inoltre che* $\{\varphi_i(x)\}$ *sia fra i sistemi ammessi per risolvere il problema I col metodo variazionale.* Tali sistemi di funzioni sono stati precisati da M. Picone [2] e da me [4] e sulle loro proprietà si ritornerà nel Cap. IV a proposito della convergenza del procedimento. Per ora ricordiamo la seguente:

Per le funzioni $G(x)$ e $G_1(x)$, che si annullano agli estremi dell'intervallo $(0, c)$ e che possiedono in esso derivata continua, si possono determinare le costanti $G_{i,n}$ e $G'_{i,n}$ in modo che sia, con convergenza uniforme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} G_{i,n}\, \varphi_i(x) = G(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} G'_{i,n}\, \varphi_i(x) = G_1(x).$$

Un semplice esempio di sistema $\{\varphi_i(x)\}$ è dato da

$$\varphi_i(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi\, i\, x}{c} \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad \text{(S. Faedo [4], pag. 114).}$$

3. — Posto

$$v_n(x, t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,n}(t)\, \varphi_i(x), \tag{12}$$

si imponga alle funzioni $c_{i,n}(t)$ di soddisfare al sistema di $n$ equazioni differenziali lineari del secondo ordine

$$\int_0^c \{L[v_n] - \bar{f}\}\, \varphi_s(x)\, dx = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

con le condizioni iniziali

$$c_{i,n}(0) = G_{i,n} \quad , \quad c'_{i,n}(0) = G'_{i,n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

*La funzione* $v_n(x, t)$, *che così si viene a determinare, dicesi l'*$n^{ma}$ *approssimazione del metodo dei momenti per il problema II.*

4. — Ritornando al problema I si ha la successione

$$u_n(x, t) = z(x, t) + v_n(x, t)$$

che per ogni $n$ soddisfa le (3) e che dà l'$n^{ma}$ *approssimazione del metodo dei momenti per il problema I.*

*Se* $g(x)$ *e* $g_1(x)$ *possiedono derivate prima e seconda continue,* posto

$$w(x,t) = [f_1(t) - f_1(0) - t f'_1(0)]\left(1 - \frac{x}{c}\right) + [f_2(t) - f_2(0) - t f'_2(0)]\frac{x}{c} + g(x) + t g_1(x), \tag{15}$$

tenuto conto delle condizioni di compatibilità

$$f_1(0)=g(0)\,,\ f_1'(0)=g_1(0)\,,\ f_2(0)=g(c)\,,\ f_2'(0)=g_1(c)\,,$$

risulta

$$w(0\,,\ t)=f_1(t)\,,\ w(c\,,\ t)=f_2(t)\,,\ w(x\,,\ 0)=g(x)\,,\ w_t(x\,,\ 0)=g_1(x)$$

e col cambiamento di variabile $v=u-w$ il problema I si muta nel

Problema III:

« *Ricerca delle funzioni* v (x , t) *della classe* C *che soddisfano in* (S) *alle equazioni*

$$L[v]=F(x\,,\ t)=f(x\,,\ t)-L[w] \tag{1'''}$$

$$v(x\,,\ 0)=0 \qquad v_t(x\,,\ 0)=0\,, \tag{2'}$$

$$v(0\,,\ t)=v(c\,,\ t)=0 \text{ ».} \tag{3'}$$

Allora per determinare le $v_n(x\,,\ t)$ si ha ancora il sistema differenziale (13) (in cui a $\bar{f}$ si sostituisce $F$) con le condizioni iniziali

$$c_{i,n}(0)=0 \qquad c_{i,n}'(0)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{14'}$$

5. — Supponiamo che sia $a_2(x\,,\ t)>0$ e dimostriamo che in tal caso la $v_n(x\,,\ t)$ esiste ed è unica.

Dimostriamo che il sistema (13) si può ridurre a forma normale, cioè del tipo

$$c_{s,n}''=\sum_{i=1}^{n}\{A_{s,i}(t)\,c_{i,n}'+B_{s,i}(t)\,c_{i,n}\}+C_s(t) \qquad (s=1,2,\ldots,n). \tag{13'}$$

E infatti il coefficiente $\delta_{i,s}(t)$ di $c_{i,n}''$ nella $s^{ma}$ equazione (13) è dato da

$$\delta_{i,s}(t)=\int_0^c a_2(x\,,\ t)\,\varphi_i(x)\,\varphi_s(x)\,dx$$

ed il determinante $|\ \delta_{i,s}(t)\ |$ è diverso da zero; infatti esso è il determinante di Gram (Picone [4], pag. (511) delle funzioni di $x$ $\sqrt{a_2(x\,,\ t)}\,\varphi_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ linearmente indipendenti in $(0\,,\ c)$ per ogni $t$, essendolo le funzioni $\varphi_i(x)$ e $a_2(x\,,\ t)>0$.

Il sistema differenziale (13'), con le condizioni di Cauchy (14) possiede pertanto una e una sola soluzione e così, se è $a_2(x\,,\ t)>0$, è dimostrata l'esistenza e l'unicità delle approssimazioni $v_n(x\,,\ t)$.

CAPITOLO III.

# Il metodo dei momenti e l'esistenza della soluzione.

## § 1. - Proposizioni preliminari.

1. *Criterio di uguale continuità.* — Richiamiamo un criterio di uguale continuità per funzioni di due variabili (S. Faedo [6] (3) premettendo alcune definizioni.

Con $(\overline{S}_T)$ si indicherà il rettangolo $(\overline{S}_T)$ considerato aperto. Sia I un insieme di funzioni $u(x, t)$ definite in $(\overline{S}_T)$. Esse si dicono *ugualmente continue* nell'interno di $(\overline{S}_T)$ se, considerato un qualunque componente chiuso $E$ di $(\overline{S}_T)$ e fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può determinare $\delta > 0$ in modo che se $(x, t)$ e $(\bar{x}, \bar{t})$ sono due punti qualunque di $E$ con $(x - \bar{x})^2 + (t - \bar{t})^2 < \delta^2$ si abbia $| u(x, t) - u(\bar{x}, \bar{t}) | < \varepsilon$, qualunque sia la $u(x, t)$ di I.

Una funzione $u(x, t)$ si dice *assolutamente continua secondo Tonelli* in $(\overline{S}_T)$ se:

è continua in tutti i punti di $(\overline{S}_T)$;

per quasi tutti i valori di $\bar{t}$ e $\bar{x}$ $u(x, \bar{t})$ e $u(\bar{x}, t)$ sono funzioni rispettivamente di $x$ e $t$, assolutamente continue sugli intervalli aperti $(O, c)$ e $(O, T)$ -

le derivate parziali $u_x, u_t$, che esistono finite quasi ovunque in $(\overline{S}_T)$, sono sommabili in $(\overline{S}_T)$.

---

(3) Faccio qui notare che nella dimostrazione del teorema VI del lavoro [6] è implicitamente ammesso che l'intersezione del campo $D$ con le parallele agli assi $x$ e $y$ sia sempre un intervallo Il ragionamento fatto, con un lieve complemento, vale però in generale. Infatti il campo aperto e limitato $D$ può sempre pensarsi come somma di al più una infinità numerabile di quadrati $Q_n$ a lati paralleli agli assi. Il ragionamento fatto prova che su ognuno di questi (e perciò su ogni $D_m = \sum_{n=1}^{m} Q_n$) $\varphi(x, y)$ è assolutamente continua e, poichè gli integrali di $| \varphi_x |$ e $| \varphi_y |$ su $D_m$ vengono maggiorati da numeri che non dipendono da $m$, essi esistono finiti in $D$.

Avverto inoltre che nella formula (15) a pag 195 invece di $\leq$ deve leggersi $\geq$.

*Criterio di uguale continuità*:

« *Se le funzioni* u (x , t) *dell'insieme* I *sono assolutamente continue secondo Tonelli in* ($\overline{\mathrm{S}}_\mathrm{T}$) *ed esiste una costante* H *in modo che sia*

$$\int_0^c \{u_x^2 + u_t^2\}\, d\, x \leq H\,,$$

*allora le funzioni di* I *sono ugualmente continue nell'interno di* ($\overline{\mathrm{S}}_\mathrm{T}$) ».

Dato l'insieme I di funzioni continue in ($\overline{S}_T$) si dice che $U(x\,,\,t)$ è *funzione di accumulazione di* I *in* ($\overline{S}_T$) se, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, esistono sempre infinite funzioni $u(x\,,\,t)$ di I per cui è in ($\overline{S}_T$)

$$|\ U(x\,,\,t) - u(x\,,\,t)\ | < \varepsilon\,.$$

Per un teorema di L. Tonelli [1] nelle ipotesi del criterio di uguale continuità ora detto ogni eventuale funzione di accumulazione di I è assolutamente continua secondo Tonelli in ($\overline{S}_T$).

2. — Per dimostrare i teoremi II, III e IV si applicherà il metodo dei momenti al problema III scegliendo il sistema

$$\varphi_i(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi i x}{c} \qquad\qquad (i = 1\,,\,2\,,\ldots).$$

Per le ipotesi fatte nei teoremi suddetti e per la (15) [Cap. II, n. 4] il termine noto $F(x\,,\,t)$ della equazione 1''') del problema III è una funzione continua con $F_t\,,\,F_{tt}$ e $F_x(x\,,\,0)$; inoltre le condizioni di compatibilità nei punti $x = t = 0$ e $x = c$ $t = 0$ si traducono [per le (2') e (3')] in

$$F(0\,,\,0) = 0 \quad , \quad F(c\,,\,0) = 0\,.$$

Posto

$$v_n(x\,,\,t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,n}(t) \operatorname{sen}\frac{\pi i x}{c}\,, \tag{12}$$

imponiamo alle $c_{i,n}(t)$ di soddisfare al sistema differenziale

$$\int_0^c \{L[v_n] - F\} \operatorname{sen}\frac{s\,\pi\,x}{c}\, d\,x = 0 \qquad\qquad (s = 1\,,\,2\,,\ldots,\,n)\,, \tag{13''}$$

con le condizioni iniziali

$$c_{i,n}(0) = c'_{i,n}(0) = 0 . \tag{14'}$$

Poichè nei teoremi II, III, IV si suppone sempre $a_2 > 0$ in $(S)$, le $v_n(x, t)$ esistono e sono univocamente determinate (Cap. II, n. 5).

3. — Lemma I:

« *Se sono soddisfatte le ipotesi del teorema II, si possono costruire le funzioni continue* $C_1(t)$, $C_2(t)$, *non negative e non decrescenti, tali che sia per* $t \geq 0$

$$\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 d x \leq C_1(t) \tag{16}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

$$\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 d x \leq C_2(t); \tag{17}$$

*l'espressione esplicita di* $C_1(t)$ *e* $C_2(t)$ *è data dalle* (16') *e* (17') ».

Moltiplicando la (13'') per $c'_{s,n}(t)$ e sommando per $s = 1, \ldots n$ si ha

$$\int_0^c \{L[v_n] - F\} \frac{\partial v_n}{\partial t} d x = 0 . \tag{18}$$

Posto

$$K_n(t) = \int_0^c \left\{ a_2 \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 \right\} d x$$

e ragionando sulla (18) come si è fatto nel Cap. I sulla (6), si ottiene che la funzione continua $K_n(t)$ soddisfa all'equazione differenziale

$$K'_n(t) + \theta_n(t) K_n(t) = 2 F_n(t)$$

dove è

$$F_n(t) = \int_0^c F \frac{\partial v_n}{\partial t} d x ;$$

la funzione $\theta_n(t)$ è quasi continua e qualunque sia l'intero $n$ soddisfa alla limitazione $| \theta_n(t) | \leq 2 \gamma(t)$, dove $\gamma(t)$ è la funzione continua indipendente da $n$ definita nel Cap. I.

La $\theta_n(t)$ si definisce come la $\theta(t)$ del Cap. I. Si pone

$$\theta_n(t) = \begin{cases} \dfrac{2\,R_n(t)}{K_n(t)} & \text{per ogni } t \text{ in cui } K_n(t) \neq 0\,, \\ 0 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad K_n(t) = 0\,, \end{cases}$$

essendo $R_n(t)$ l'espressione che si ottiene sostituendo nella (9) del Cap. I a $v$, $v_x$, $v_t$ rispettivamente $v_n$, $\dfrac{\partial v_n}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v_n}{\partial t}$.

Per le (14') è inoltre $K_n(0) = 0$; integrando si ottiene

$$K_n(t) = 2\int_0^t F_n(\tau)\, e^{-\int_\tau^t \theta_n(t)dt}\, d\tau$$

e quindi

$$0 \leq K_n(t) \leq 2\, e^{2\int_0^t \gamma(t)dt} \int_0^t |\, F_n(t)\, |\, d\,t.$$

Consideriamo un qualunque valore positivo di $t$ che indichiamo con $t_0$; se $\bar{t}$, con $0 \leq \bar{t} \leq t_0$, è un punto di massimo assoluto in $(0, t_0)$ della funzione continua $\displaystyle\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 d\,x$, essendo per la disuguaglianza di Schwarz

$$|\, F_n(t)\, | \leq \sqrt{\int_0^c F^2\, d\,x}\; \sqrt{\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2_{t=\bar{t}} d\,x} \qquad (0 \leq t \leq t_0)\,,$$

risulta

$$0 \leq K_n(\bar{t}) \leq 2\, e^{2\int_0^{\bar{t}} \gamma(t)dt} \sqrt{\bar{t} \int_0^{\bar{t}}\int_0^c F^2\, d\,x\, d\,t}\; \sqrt{\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2_{t=\bar{t}} d\,x}\,. \tag{19}$$

Indicando (come nel Cap. I) con $A(t)$ una funzione continua, positiva e non crescente tale che sia in $(S)$

$$a_2(x, t) \geq A(t) > 0\,,$$

risulta

$$K_n(\bar{t}) \geq A(\bar{t}) \int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2_{t=\bar{t}} d\,x\,;$$

perciò, posto

$$\alpha^2 = \int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2_{t=\bar{t}} d\,x\,,$$

segue

(20) $$A\,(\bar{t})\,\alpha^2 \leq 2\,e^{2\int_0^{\bar{t}} \gamma(t)dt} \sqrt{\bar{t}\int_0^{\bar{t}}\int_0^c F^2\,d\,x\,d\,t}\,.\,\alpha$$

da cui

$$\alpha \leq \frac{2}{A\,(t_0)}\,e^{2\int_0^{t_0} \gamma(t)dt} \sqrt{t_0\int_0^{t_0}\int_0^c F^2\,d\,x\,d\,t}$$

essendo $t_0 \geq \bar{t}$. Avendosi

$$\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2_{t=t_0} d\,x \leq \alpha^2,$$

posto

(16′) $$C_1\,(t) = \frac{4\,t}{A^2\,(t)}\,e^{4\int_0^{t} \gamma(t)dt} \int_0^t\int_0^c F^2\,d\,x\,d\,t\,,$$

è dimostrata la (16).

Inoltre, posto

(17′) $$C_2\,(t) = A\,(t)\,C_1\,(t)$$

essendo $K_n\,(t) \geq \int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 d\,x$ e per le (19) e (16) è dimostrata la (17).

4. — Lemma II.

« *Nelle ipotesi del Teorema II si possono costruire le funzioni continue* $C_3\,(t)$, $C_4\,(t)$ *non negative e non decrescenti, tali che sia per* $t \geq 0$

(21) $$\int_0^c \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 d\,x \leq C_3\,(t),$$

$$(n = 1\,,2\,,\ldots)$$

(22) $$\int_0^c \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial t}\right)^2 d\,x \leq C_4\,(t)\text{ ».}$$

Consideriamo l'operatore differenziale

$$L'[v] = \frac{\partial a_1}{\partial t} v_{xt} + \frac{\partial a_2}{\partial t} v_{tt} + \frac{\partial a_3}{\partial t} v_x + \frac{\partial a_4}{\partial t} v_t + \frac{\partial a_5}{\partial t} v .$$

Derivando il sistema (13″) rispetto a $t$ si ottiene

$$(23) \qquad \int_0^c \left\{ L\left[\frac{\partial v_n}{\partial t}\right] + L'[v_n] \right\} \operatorname{sen} \frac{s\pi x}{c}\, d x = \int_0^c F_t \operatorname{sen} \frac{s\pi x}{c}\, d x$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Questo è un sistema di $n$ equazioni differenziali lineari del 3° ordine nelle funzioni incognite $c_{i,n}(t)$; per queste si hanno le condizioni iniziali (14′) ed inoltre sono assegnati i valori di

$$c''_{i,n}(0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Per ottenere tali valori basta sostituire, per $t = 0$, le (14′) nelle (13″); essi sono univocamente determinati in virtù dell'ipotesi $a_2 > 0$ (Cap. II, n. 5).

Moltiplicando le (23) per $c''_{s,n}(t)$ e sommando per $s = 1, 2, \ldots, n$ si ottiene

$$(23') \qquad \int_0^c \left\{ L\left[\frac{\partial v_n}{\partial t}\right] + L'[v_n] \right\} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\, d x = \int_0^c F_t \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\, d x .$$

Posto

$$K_n(t) = \int_0^c \left\{ a_2 \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t}\right)^2 \right\} d x ,$$

$$R_n(t) = \int_0^c \left\{ \left(a_4 - \frac{1}{2}\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_2}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(a_3 + \frac{\partial a_1}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t} + a_5 \frac{\partial v_n}{\partial t} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right\} d x ,$$

$$\lambda_n(t) = \int_0^c \left\{ F_t - \left( \frac{\partial a_3}{\partial t}\frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial a_4}{\partial t}\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial a_5}{\partial t} v_n \right) \right\} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\, d x ,$$

con le stesse trasformazioni fatte sulla (6) del Cap. I la (23′) diviene

$$\frac{1}{2} K'_n(t) + R_n(t) = \lambda_n(t) .$$

Considerata la funzione continua $\gamma(t) = \frac{B(t)}{A(t)}$, dove $A(t)$ è ancora quella del Cap. I, n. 3 mentre $B(t)$ è una funzione continua non inferiore in $(S)$ a

$$\left| a_4 - \frac{1}{2}\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial a_2}{\partial t}\right| + \frac{1}{2}\,|\,a_5\,|\,, \quad \frac{c}{2}\int_0^c |\,a_5\,|\,d\,x\,, \quad \frac{1}{2}\left|a_3 + \frac{\partial a_1}{\partial t}\right|,$$

può ancora porsi

$$2\,R_n(t) = \theta_n(t)\,K_n(t)$$

dove $\theta_n(t)$ è una funzione quasi continua con $|\,\theta_n(t)\,| \leq 2\,\gamma(t)$. La funzione $K_n(t)$ soddisfa così all'equazione differenziale

$$K_n'(t) + \theta_n(t)\,K_n(t) = 2\,\lambda_n(t)\,. \tag{24}$$

Calcoliamo una maggiorazione indipendente da $n$ per

$$\Lambda_n(t) = \int_0^c \left\{F_t - \left(\frac{\partial a_3}{\partial t}\frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial a_4}{\partial t}\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial a_5}{\partial t}\,v_n\right)\right\}^2 d\,x\,.$$

Indicata con $N(t)$ una funzione continua non minore in $(S)$ di

$$\left(\frac{\partial a_3}{\partial t}\right)^2, \left(\frac{\partial a_4}{\partial t}\right)^2, \left(\frac{\partial a_5}{\partial t}\right)^2$$

si ha

$$\Lambda_n(t) \leq 4\int_0^c F_t^2\,d\,x + 4\,N(t)\int_0^c \left\{\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial t}\right)^2 + v_n^2\right\} d\,x\,;$$

essendo (cfr. Cap. I)

$$v_n^2 \leq c\int_0^c \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 d\,x$$

per il lemma I si ottiene la cercata maggiorazione

$$\Lambda_n(t) \leq 4\int_0^c F_t^2\,d\,x + 4\,N(t)\,[C_1(t) + (1 + c^2)\,C_2(t)]\,. \tag{25}$$

Maggioriamo inoltre

$$K_n(0) = \int_0^c a_2(x, 0) \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)_{t=0} d\,x\,.$$

Le (13″) del n. 2 danno per $t = 0$, tenuto conto delle (2′),

$$(13''') \quad \int_0^c a_2(x, 0)\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)_{t=0} \operatorname{sen}\frac{s\,\pi\,x}{c}\,d\,x = \int_0^c F(x, 0) \operatorname{sen}\frac{s\,\pi\,x}{c}\,d\,x \quad (s=1, 2, \dots, n);$$

perciò per la disuguaglianza di Bessel è

$$(26) \qquad K_n(0) \leq \int_0^c \frac{F^2(x, 0)}{a_2(x, 0)}\,d\,x \ (^4)\,.$$

Integrando la (24) si ha

$$0 \leq K_n(t) = K_n(0)\, e^{-\int_0^t \Theta_n(t)dt} + 2\int_0^t \lambda_n(\tau)\, e^{-\int_\tau^t \Theta_n(t)dt}\, d\,\tau \leq$$

$$\leq e^{2\int_0^t \gamma(t)dt} \left[K_n(0) + 2\int_0^t |\,\lambda_n(t)\,|\,d\,t\right].$$

---

(4) Osservando che è

$$\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \sum_{i=1}^n c''_{i,n}(0) \operatorname{sen}\frac{\pi\,i\,x}{c}$$

e quindi per le (13‴)

$$\int_0^c F(x, 0)\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t}\right)_{t=0} d\,x = \sum_{i=1}^n c''_{i,n}(0) \int_0^c F(x, 0) \operatorname{sen}\frac{\pi\,i\,x}{c}\,d\,x =$$

$$= \sum_{i=1}^n c''_{i,n}(0) \int_0^c a_2(x, 0)\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)_{t=0} \operatorname{sen}\frac{\pi\,i\,x}{c}\,d\,x = \int_0^c a_2(x, 0)\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)^2_{t=0} d\,x\,,$$

segue subito la (26) dalla disuguaglianza

$$\int_0^c \left\{\frac{F(x, 0)}{\sqrt{a_2(x, 0)}} - \sqrt{a_2(x, 0)}\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)_{t=0}\right\}^2 d\,x \geq 0\,.$$

Essendo per la disuguaglianza di Schwarz

$$|\lambda_n(t)| \leq \left\{ A_n(t) \int_0^c \left( \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx \right\}^{1/2},$$

indicato ora con $\alpha^2$ il massimo in $(0, t_0)$ di $\int_0^c \left( \frac{\partial v_n}{\partial t^2} \right)^2 dx$, conseguito per $t = \bar{t}$ risulta analogamente alla (20) del n. 3

$$A(\bar{t})\, \alpha^2 \leq e^{2\int_0^{\bar{t}} \gamma(t)dt} \left\{ K_n(0) + 2\alpha \left( \bar{t} \int_0^{\bar{t}} A_n(t)\, dt \right)^{1/2} \right\}$$

da cui segue

$$\alpha \leq \frac{e^{\int_0^{\bar{t}} \gamma(t)dt}}{A(\bar{t})} \left\{ \left| \bar{t} \int_0^{\bar{t}} A_n(t)\, dt \right|^{1/2} + \left[ \bar{t} \int_0^{\bar{t}} A_n(t)\, dt + A(\bar{t})\, K_n(0)\, e^{-2\int_0^{\bar{t}} \gamma(t)dt} \right]^{1/2} \right\} \leq$$

$$\leq \frac{e^{2\int_0^{t_0} \gamma(t)dt}}{A(t_0)} \left\{ \left| t_0 \int_0^{t_0} A_n(t)\, dt \right|^{1/2} + \left[ t_0 \int_0^{t_0} A_n(t)\, dt + A(0)\, K_n(0) \right]^{1/2} \right\}$$

e quindi

$$\alpha^2 \leq \frac{2\, e^{4\int_0^{t_0} \gamma(t)dt}}{A^2(t_0)} \left\{ 2\, t_0 \int_0^{t_0} A_n(t)\, dt + A(0)\, K_n(0) \right\}$$

dalla quale per le (25) e (26) si ha la (21); l'espressione esplicita della $C_3(t)$ si ha immediatamente maggiorando il secondo membro dell'ultima disuguaglianza trovata con le (25) e (26).

La (22) si deduce subito dalla (21), come nel Lemma I si era dedotta la (17) dalla (16). Il Lemma II è così dimostrato.

5. — LEMMA III.

« *Nelle ipotesi del teorema II, si può costruire una funzione continua non negativa e non decrescente* $C_5(t)$ *tale che sia per* $t \geq 0$

$$\int_0^c \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)^2 d\,x \leq C_5\,(t) \qquad (n = 1\,, 2\,, \ldots) ». \tag{27}$$

Moltiplicando le (13″) per $-\left(\frac{s\,\pi}{c}\right)^2 c_{s,n}(t)$ e sommando si ottiene

$$\int_0^c \{L\,[v_n] - F\}\,\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\,d\,x = 0\,, \tag{28}$$

ossia

$$\int_0^c \left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)^2 d\,x = \int_0^c \Phi\,(v_n)\,\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\,d\,x \tag{29}$$

con

$$\Phi\,(v) = a_1\,v_{xt} + a_2\,v_{tt} + a_3\,v_x + a_4\,v_t + a_5\,v - F. \tag{30}$$

Per i lemmi I e II ed essendo, come si è già visto,

$$v_n^2\,(x,\,t) \leq c \int_0^c \left(\frac{\partial\,v_n}{\partial\,x}\right)^2 d\,x$$

si può costruire una funzione $C_5\,(t)$ non decrescente e indipendente da $n$ tale che sia per $t \geq 0$

$$\int_0^c \Phi^2\,(v_n)\,dx \leq C_5\,(t) \tag{31}$$

e per la (29) è provato il lemma III.

6. — LEMMA IV:

« *Nelle ipotesi del Teorema II, si possono costruire le funzioni continue non negative e non decrescenti* $C_6(t)$, $C_7(t)$, $C_8(t)$ *in modo che sia per* $t \geq 0$

$$\int_0^c \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial\,t^3}\right)^2 d\,x \leq C_6\,(t), \tag{32}$$

$$(33)\qquad \int_0^c \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\, \partial t^2}\right)^2 d\,x \leq C_7\,(t), \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$(34)\qquad \int_0^c \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t\, \partial x^2}\right)^2 d\,x \leq C_8\,(t)\text{»}.$$

Consideriamo ora l'operatore

$$L''\,[v] = \frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2}\, v_{xt} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2}\, v_{tt} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial t'}\, v_{x'} + \frac{\partial^2 a_4}{\partial t^2}\, v_t + \frac{\partial^2 a_5}{\partial t^2}\, v.$$

Come per la (23′) si ha

$$\int_0^c \left\{ L \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right] + 2\, L' \left[\frac{\partial\, v_n}{\partial\, t}\right] + L''\,[v_n] \right\} \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\, d\,x = \int_0^c F_{tt}\, \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\, d\,x$$

e ragionando come nel lemma II si ottiene che la funzione

$$K_n\,(t) = \int_0^c \left\{ a_2 \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\, \partial t^2}\right)^2 \right\} d\,x$$

soddisfa a una equazione differenziale come la (24), dove il coefficiente $\theta_n\,(t)$ è ancora una funzione per cui è $|\,\theta_n\,(t)\,| \leq 2\,\gamma\,(t)$ con $\gamma\,(t)$ continua; il termine noto $\lambda_n\,(t)$ è del tipo

$$\int_0^c B_n\,(x, t)\, \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\, d\,x$$

e

$$A_n\,(t) = \int_0^c B_n^2\,(x, t)^2\, d\,x$$

si può maggiorare per i lemmi precedenti con una funzione indipendente da $n$.

Per avere una maggiorazione, indipendente da $n$, di $K_n(0)$ basta maggiorare

$$\int_0^c \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial x\, \partial t^2}\right)^2_{t=0} d x \qquad \text{e} \qquad \int_0^c \left[ a_2 \left(\frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3}\right)^2 \right]_{t=0} d\,x.$$

Integrando per parti le (13‴) del n. 4, ricordando che è $F(0,0) = F(c,0) = 0$ (v. n. 2), si ottiene

$$\int_0^c \left[ a_2 \frac{\partial^3 v_n}{\partial x\, \partial t^2} \right]_{t=0} \cos \frac{s \pi x}{c}\, d x = \int_0^c \left\{ F_x - \frac{\partial a_2}{\partial x} \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right\}_{t=0} \cos \frac{s \pi x}{c}\, d x$$

e per la disuguaglianza di Bessel [come per la (26)]

$$\int_0^c a_2(x, 0) \left( \frac{\partial^3 v_n}{\partial x\, \partial t^2} \right)^2_{t=0} d x \leq \int_0^c \frac{\left[ F_x - \dfrac{\partial a_2}{\partial x} \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right]^2_{t=0} d x}{a_2(x, 0)} ;$$

il secondo membro si può maggiorare indipendentemente da $n$ per la (21) e perciò essendo $a_2(x, 0) > 0$ si ha la cercata maggiorazione per

$$\int_0^c \left( \frac{\partial^3 v_n}{\partial x\, \partial t^2} \right)^2_{t=0} d x.$$

Derivando rispetto a $t$ le (13″) del n. 2 si ha per $t = 0$

$$\int_0^c a_2(x, 0) \left( \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3} \right)_{t=0} \operatorname{sen} \frac{s \pi x}{c}\, d x =$$

$$= \int_0^c \left\{ F_t - a_1 \frac{\partial^3 v_n}{\partial x\, \partial t^2} - \left( a_4 + \frac{\partial a_2}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \right\}_{t=0} \operatorname{sen} \frac{s \pi x}{c}\, d x$$

e quindi per la disuguaglianza di Bessel si maggiora

$$\int_0^c a_2(x, 0) \left( \frac{\partial^3 v_n}{\partial t^3} \right)^2_{t=0} d x$$

e indipendentemente da $n$ per la (21) e la già trovata maggiorazione per

$$\int_0^c \left( \frac{\partial^3 v_n}{\partial x\, \partial t^2} \right)^2_{t=0} d x.$$

Ragionando quindi come nel lemma II si ottengono le (32) e (33).

Analogamente alla (28) del n. 5 è

$$\int_0 \left\{ L\left[\frac{\partial v_n}{\partial t}\right] + L'[v_n] - F_t \right\} \frac{\partial^3 v_n}{\partial x^2 \partial t} \, d\, x = 0$$

e come per la (27) segue la (34).

7. — Consideriamo la funzione di Green $G(x, \xi)$ relativa al problema omogeneo $y''(x) + \lambda\, y(x) = 0$ con $y(0) = y(c) = 0$. È

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x\,(c-\xi)}{c} & \text{per } x \leq \xi \\[2ex] \dfrac{\xi\,(c-x)}{c} & \text{per } x \geq \xi \end{cases}$$

e vale lo sviluppo in serie di autofunzioni

$$G(x, \xi) = -\frac{2}{c} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{i\,\pi\, x}{c} \operatorname{sen} \dfrac{i\,\pi\,\xi}{c}}{\left(\dfrac{i\,\pi}{c}\right)^2}. \tag{35}$$

Dimostriamo il

LEMMA V:

« *Nelle ipotesi del Teorema II, se* $\Phi(v)$ *e* $C_5(t)$ *sono le funzioni definite dalla* (30) *e nel Lemma III, per ogni* $t \geq 0$ *e ogni intero* $n$ *sussiste la disuguaglianza*

$$\left| v_n(\xi, t) + \int_0^c \Phi[v_n(x, t)]\, G(x, \xi)\, d\, x \right| \leq \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2\,c^3}{3}\, C_5(t)\right)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}} \text{ ».} \tag{36}$$

Per la (30) e la (1‴) è

$$-\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \Phi[v_n] = L[v_n] - F$$

e moltiplicando per $G(x, \xi)$ e integrando su $(0, c)$ rispetto ad $x$ è

$$v_n(\xi, t) + \int_0^c \Phi[v_n]\, G(x, \xi)\, d\, x = \int_0^c \{L[v_n] - F\}\, G(x, \xi)\, d\, x\,; \tag{37}$$

poichè la serie (35) converge uniformemente è

$$\int_0^c \{L[v_n] - F\}\, G(x, \xi)\, dx = -\frac{2c}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{sen} \frac{i\pi\xi}{c} \int_0^c \{L[v_n] - F\} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{c}\, dx$$

e per le (13″)

$$\int_0^c \{L[v_n] - F\}\, G(x, \xi)\, dx = -\frac{2c}{\pi^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{sen} \frac{i\pi\xi}{c} \int_0^c \{L[v_n] - F\} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{c}\, dx\,;$$

essendo per la (12′) del n. 2

$$\int_0^c \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{c}\, dx = 0 \qquad (i = n+1,\ n+2, \ldots)$$

ne viene

$$\int_0^c \{L[v_n] - F\}\, G(x, \xi)\, dx = -\frac{2c}{\pi^2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \operatorname{sen} \frac{i\pi\xi}{c} \int_0^c \Phi[v_n] \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{c}\, dx.$$

Perciò è

$$\left| \int_0^c \{L[v_n] - F\}\, G(x, \xi)\, dx \right| \leq \frac{2c}{\pi^2} \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \left( \int_0^c \Phi[v_n] \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{c}\, dx \right)^2} \leq$$

$$\leq \frac{(2c^3)^{1/2}}{\pi^2} \sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^4}} \sqrt{\int_0^c \Phi[v_n]^2\, dx}\,;$$

essendo $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^4} < \frac{1}{3} \frac{1}{n^3}$ e per le (31) e (37) è provata la (36).

### § 2. - Dimostrazione del Teorema II.

1. — Fissiamo $T > 0$. Dalle (33) e (34) del lemma IV e per il criterio di uguale continuità del § 1 n. 1 segue che le funzioni

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\, \partial t} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sono ugualmente continue nell'interno di $(\overline{S}_T)$.

Tali funzioni sono inoltre ugualmente continue in tutto $(S_T)$.

Per accertarsi di ciò basta pensare che si possono definire le funzioni $v_n(x,t)$ fuori di $(S_T)$ in modo che in tutto un campo contenente $(S_T)$ nel suo interno le $\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t}$ siano continue e continuino a valere disuguaglianze analoghe alle (33) e (34); ad esempio si può porre

$$\text{per } \quad t < 0, \ 0 \leq x \leq c \qquad v_n(x,t) = -v_n(x, -t);$$

$$\text{per } \quad -c \leq x < 0 \qquad v_n(-x,t) = -v_n(x,t);$$

$$\text{per } \quad c \geq x > 0 \qquad v_n(c+x,t) = -v_n(c-x,t).$$

Essendo

$$\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t}\right)_{t=0} = 0$$

e le $\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial t}$ ugualmente continue in $(S_T)$, esse sono anche ugualmente limitate in $(S_T)$.

In virtù del teorema di G. Ascoli si può allora estrarre una successione parziale

$$\frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial x \partial t} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

convergente uniformemente in $(S_T)$ a una funzione $V_1(x,t)$, che è assolutamente continua (§ 1, n. 1) e perciò dotata quasi ovunque delle

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}, \ \frac{\partial V_1}{\partial t}$$

sommabili in $(S_T)$.

In modo analogo, per le (32) e (33) ed essendo

$$\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}\right)_{x=0} = 0$$

si può estrarre dalla

$$\left\{\frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial t^2}\right\}$$

una successione parziale

$$\left\{\frac{\partial^2 v_{\nu_k}}{\partial t^2}\right\}$$

convergente uniformemente verso una funzione assolutamente continua $V_2(x,t)$ che possiede quasi ovunque e sommabili in $(S_T)$ le

$$\frac{\partial V_2}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial t}.$$

Analogamente per le (22) e (27) ed essendo

$$\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)_{t=0} = 0$$

si può estrarre dalla

$$\left\{ \frac{\partial v_{\nu_k}}{\partial x} \right\}$$

una successione parziale convergente uniformemente verso una funzione $V_3(x,t)$.

Così proseguendo si ottiene in definitiva una successione di indici, estratta dalla serie naturale,

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$$

tale che si ha con convergenza uniforme in $(S_T)$

$$(38) \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial^2 v_{\mu_n}}{\partial x \, \partial t} = V_1(x,t), \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial^2 v_{\mu_n}}{\partial t^2} = V_2(x,t), \\[2ex] \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial v_{\mu_n}}{\partial x} = V_3(x,t), \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial v_{\mu_n}}{\partial t} = V_4(x,t), \\[2ex] \qquad\qquad \lim\limits_{n\to\infty} v_{\mu,n} = v(x \, . \, t) \end{cases}$$

Per l'uniforme convergenza di queste successioni è inoltre

$$V_1(x,t) = v_{xt}, \quad V_2(x,t) = v_{tt}, \quad V_3(x,t) = v_x, \quad V_4(x,t) = v_t$$

e la funzione $v(x,t)$ — definita dall'ultima delle (38) — possiede quasi ovunque e sommabili in $(S_T)$ le derivate

$$v_{xx}, v_{ttt}, v_{xtt}, v_{xxt}.$$

2. — Dimostriamo ora che la funzione $v(x,t)$, definita dall'ultima delle (38), è una soluzione del problema III.

Consideriamo l'espressione

$$v_{\mu_n}(\xi, t) + \int_0^c \Phi[v_{\mu_n}] G(x, \xi) \, d x ,$$

dove la $\Phi$ è definita dalla (30).

Poichè $G(x, \xi)$ è limitata e $\Phi[v_{\mu_n}]$ per le (38) converge uniformemente, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ v_{\mu_n}(\xi, t) + \int_0^c \Phi[v_{\mu_n}] G(x, \xi) \, d x \right\} = v(\xi, t) + \int_0^c \Phi[v] \, G(x, \xi) \, d x = 0$$

per il lemma $V$.

Da quest'ultima uguaglianza segue che la funzione $v(x, t)$ possiede continua in $(S_T)$ la $v_{xx}$ e che è

$$v_{xx} = \Phi[v] ,$$

che esprime che $v(x, t)$ è una soluzione dell'equazione ($1'''$) del problema III.

Poichè ogni $v_n(x, t)$ soddisfaceva alle ($2'$) e ($3'$) lo stesso accade per la $v(x, t)$ che è quindi soluzione del problema III nel campo $(S_T)$.

Se è $T_1 \neq T_2$ nella parte comune a $(S_{T_1})$ e $(S_{T_2})$ la funzione $v(x, t)$ che si viene a costruire è la stessa per il teorema I.

Essendo $T$ arbitrario, la funzione $v(x, t)$ si viene così a definire in tutta $(S)$ ed appartiene alla classe $C$; essa è soluzione del problema III.

Allora la funzione

$$u = v + w ,$$

[dove $w$ è definita dalla (15) del Cap. II, n. 4] è una funzione della classe $C$ che risolve il problema I e che è unica per il teorema I.

### § 3. - Dimostrazione del teorema III.

1. — Dimostriamo che non solo sussistono le (38) ma che è anche uniformemente in ogni $(S_T)$

$$(39) \quad \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} v_n(x, t) = v(x, t) , \quad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\partial v_n}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{d t} , \\ \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\partial v_n}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x} , \quad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} , \\ \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x \, \partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial t} . \end{cases}$$

Supponiamo che una qualunque di tali uguaglianze non sussista per $x = \bar{x}$, $t = \bar{t}$, ad esempio che non sia

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \, \partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial t} \qquad (x = \bar{x}\,,\ t = \bar{t})\,.$$

Allora si può determinare un $\sigma > 0$ ed una successione infinita di indici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ per cui è sempre

$$\left| \frac{\partial^2 v_{\omega_n}}{\partial x \, \partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial t} \right|_{x=\bar{x},\ t=\bar{t}} > \sigma\,.$$

Partendo dalla successione $\{v_{\omega_n}\}$ e ragionando come nel § 2, n. 1, si verrebbe a costruire una funzione $\bar{v}(x, t)$ che in $(\bar{x}, \bar{t})$ e in un opportuno intorno è certamente distinta da $v(x, t)$ e che è ancora soluzione del problema III in $(S_T)$. Ma ciò contraddice il teorema I di unicità.

Che la convergenza delle (39) sia uniforme in $(S_T)$ segue poi dalla uguale continuità in $(S_T)$ delle funzioni ivi considerate.

2. - Dimostriamo ora che la successione $\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}$ converge in media, in $(0, c)$, alla $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ per ogni $t \geq 0$.

La soluzione $v(x, t)$ del problema III, che abbiamo dimostrato esistere, è sviluppabile in serie di Fourier

$$v(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s(t) \operatorname{sen} \frac{s \pi x}{c}\,;$$

questa serie, per le (3′), derivata una o due volte termine a termine, converge almeno in media in $(0, c)$ alla corrispondente derivata di $v(x, t)$ (S. Faedo [4], pag. 109).

Poniamo

$$\bar{v}_n(x, t) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s(t) \operatorname{sen} \frac{s \pi x}{c}\,;$$

moltiplicando la (13″) del § 1 n. 2 per

$$-\left(\frac{s\pi}{c}\right)^2 [c_{s,n}(t) - \lambda_s(t)]$$

e sommando per $s = 1, 2, \ldots n$, si ottiene

$$\int_0^c \{ L[v_n] - F \} \frac{\partial^2 [v_n - \bar{v}_n]}{\partial x^2}\, dx = 0\,.$$

Avendosi

$$L[v_n - \overline{v}_n] = L[v_n] - F + L[v - \overline{v}_n],$$

ne segue

$$\int_0^c \{L[v_n - \overline{v}_n] - L[v - \overline{v}_n]\} \frac{\partial^2 [v_n - \overline{v}_n]}{\partial x^2} dx = 0$$

e per la (30) del § 1, n. 5

$$\int_0^c \left|\frac{\partial^2 (v_n - \overline{v}_n)}{\partial x^2}\right|^2 dx = \int_0^c \{\Phi[v_n - \overline{v}_n] + F - L[v - \overline{v}_n]\} \frac{\partial^2 (v_n - \overline{v}_n)}{\partial x^2} dx$$

da cui

$$\sqrt{\int_0^c \left(\frac{\partial^2 (v_n - \overline{v}_n)}{\partial x^2}\right)^2 dx} \leq \sqrt{\int_0^c \{\Phi[v_n - \overline{v}_n] + F - L[v - \overline{v}_n]\}^2 dx}.$$

Per le proprietà delle $\{v_n\}$ e $\{\overline{v}_n\}$ e per la (30) il secondo membro $\rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ ed è così provato che è

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^c \left(\frac{\partial^2 (v_n - \overline{v}_n)}{\partial x^2}\right)^2 dx = 0;$$

poichè $\left\{\frac{\partial^2 \overline{v}_n}{\partial x^2}\right\}$ converge in media in $(0, c)$ a $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ è così dimostrato che è

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^c \left|\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|^2 dx = 0.$$

3. — Senza ulteriori ipotesi non si può avere la convergenza puntuale in tutta $(S)$ di $\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}$ a $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$. Ad es. se nel problema III è

$$a_1(0, t) = a_3(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad F(0, t) \neq 0 \text{ per } t > 0$$

l'equazione (1''') dà per le (2')

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{x=0} = -F(0, t)$$

mentre per ogni $n$ è

$$\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0.$$

§ 4. - **Dimostrazione del teorema IV.**

Stabiliamo ora le limitazioni (5) per la soluzione e le sue derivate, enunciate nel teorema IV.

Da

$$v_n(x, t) = \int_0^x \frac{\partial v_n}{\partial x} d x$$

segue, per la disuguaglianza di Schwarz e per la (17)

$$| v_n(x, t) | \leq \sqrt{x\, C_2(t)}$$

da cui

$$| v(x, t) | \leq \sqrt{x\, C_2(t)};$$

analogamente si trova,

$$| v(x, t) | \leq \sqrt{(c - x)\, C_2(t)}$$

e perciò

$$| v(x, t) | \leq \sqrt{\frac{2}{c} x (c - x)\, C_2(t)}.$$

Nello stesso modo si ricava

$$| v_t | \leq \sqrt{\frac{2}{c} x (c - x)\, C_4(t)},$$

$$| v_{tt} | \leq \sqrt{\frac{2}{c} x (c - x)\, C_7(t)}.$$

Quanto alle $v_x$ e $v_{xt}$ otteniamo dapprima delle maggiorazioni che dipendono dal valore che le dette derivate hanno per un particolare $x = m$, con $0 \leq m \leq c$.

Si ha

$$\frac{\partial v_n}{\partial x} = \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)_{x=m} + \int_m^x \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} d x,$$

$$\left| \frac{\partial v_n}{\partial x} \right| \leq \left| \frac{\partial v_n}{\partial x} \right|_{x=m} + \sqrt{| m - x |\, C_5(t)}$$

e per $n \to \infty$

$$| v_x | \leq | v_x |_{x=m} + \sqrt{| m - x |}\, C_5(t).$$

Analogamente è

$$| v_{xt} | \leq | v_{xt} |_{x=m} + \sqrt{| m - x |}\, C_8(t).$$

Da queste disuguaglianze se ne possono ottenere altre che non dipendono da

$$| v_x |_{x=m} \quad \text{e} \quad | v_{xt} |_{x=m}$$

e che valgono in tutta la striscia $(S)$, osservando che per le (17) e (22) si possono trovare dei valori $m$ di $x$, che dipendono in generale da $n$ e $t$, per cui è

$$\left| \frac{\partial v_n}{\partial x} \right|_{x=m} \leq \sqrt{\frac{1}{c}\, C_2(t)}\,, \qquad \left| \frac{\partial v_n}{\partial x \, \partial t} \right|_{x=m} \leq \sqrt{\frac{1}{c}\, C_4(t)}.$$

Ne segue che in tutta la striscia $(S)$ si ha

$$| v_x | \leq \sqrt{\frac{1}{c}\, C_2(t)} + \sqrt{c\, C_5(t)}$$

$$| v_{xt} | \leq \sqrt{\frac{1}{c}\, C_4(t)} + \sqrt{c\, C_8(t)}.$$

Si ponga

$$\Gamma_1(t) = \sqrt{\frac{2}{c}\, C_2(t)},$$

$$\Gamma_2(t) = \sqrt{\frac{2}{c}\, C_4(t)},$$

$$\Gamma_3(t) = \sqrt{\frac{2}{c}\, C_7(t)},$$

$$\Gamma_4(t) = \sqrt{\frac{1}{c}\, C_2(t)} + \sqrt{c\, C_5(t)}$$

$$\Gamma_5(t) = \sqrt{\frac{1}{c}\, C_4(t)} + \sqrt{c\, C_8(t)}\,;$$

per (16′) e (17′) è $\Gamma_1(0) = 0$.

Ricordando che se indichiamo con $u(x, t)$ la soluzione del problema I e con $v(x, t)$ quella del problema III, si ha $u = v + w$ [dove $w$ è data dalla (15) del Cap. II, n. 4] dalle disuguaglianze ora stabilite seguono immediatamente le (5), salvo l'ultima; questa si ottiene subito dalle rimanenti (5) e dal fatto che la $u(x, t)$ verifica l'equazione (1).

Il teorema IV è così dimostrato.

## Capitolo IV.

## Teorema generale di convergenza per il metodo dei momenti.

Il Teorema III è un criterio di convergenza per il metodo dei momenti in cui si sia scelto il sistema

$$\varphi_i(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi i x}{c} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Il Teorema V dà invece un teorema generale di convergenza per il metodo dei momenti nella sua formulazione più larga, ossia supponendo soltanto che il sistema $\{\varphi_i(x)\}$ prescelto soddisfi alle (11) del Cap. II e sia un sistema ammesso per il metodo variazionale.

1. — *Dimostrazione del teorema V.*

Poichè si è ammesso che il problema I abbia la soluzione $u(x, t)$, le funzioni $f_1(t)$ e $f_2(t)$ sono continue con le loro derivate prime e seconde e si può quindi passare al problema II (Cap. II, n. 1), che ha pure una soluzione $v(x, t) = u(x, t) - z(x, t)$.

Inoltre le funzioni

$$G(x) = v(x, 0), \qquad G_1(x) = v_t(x, 0)$$

sono continue in $(0, c)$ con le derivate seconda e prima rispettivamente ed è

$$G(0) = G(c) = 0, \qquad G_1(0) = G_1(c) = 0.$$

*Le proprietà richieste al sistema* $\{\varphi_i(x)\}$ *per essere ammesso per il metodo variazionale sono:*

a) *Si possono determinare le costanti* $G_{i,n}$ *e* $G'_{i,n}$ *in modo che sia con convergenza uniforme in* $(0, c)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} G_{i,n}\, \varphi_i(x) = G(x), \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} G'_{i,n}\, \varphi_i(x) = G_1(x).$$

b) *Sia* $\alpha(x, t)$ *una qualunque funzione della classe* C *con*

$$\alpha(0, t) = \alpha(c, t) = 0, \qquad \alpha(x, 0) = G(x), \qquad \alpha_t(x, 0) = G_1(x).$$

*Si possono determinare le funzioni* $h_{i,n}(t)$ $(n = 1, 2, \ldots; \; i = 1, 2, \ldots n)$ *continue con le derivate prima e seconda per* $t \geq 0$, *con*

$$h_{i,n}(0) = G_{i,n}, \qquad h'_{i,n}(0) = G'_{i,n},$$

*e tali che, posto*

$$\overline{\alpha}_n(x, t) = \sum_{i=1}^{n} h_{i,n}(t)\, \varphi_i(x),$$

*la successione* $\overline{\alpha}_n(x, t)$ *e quelle ottenute derivandola parzialmente una o due volte rispetto a* x *e* t *convergano in media su ogni* $(S_T)$ *alla* $\alpha(x, t)$ *e alle corrispondenti derivate.*

Se il sistema $\{\varphi_i(x)\}$ soddisfa alle (11) (Cap. II) è $\overline{\alpha}_n(0, t) = 0$ e quindi

$$\alpha(x, t) - \overline{\alpha}_n(x, t) = G(x) - \sum_{i=1}^{n} G_{i,n}\, \varphi_i(x) + \int_0^x \int_0^t \frac{\partial^2 (\alpha - \overline{\alpha}_n)}{\partial x \, \partial t}\, d x \, d t;$$

per la proprietà *a*) e per la convergenza in media su ogni $(S_T)$ di $\dfrac{\partial^2 \overline{\alpha}_n}{\partial x \, \partial t}$ si ha uniformemente in ogni $(S_T)$

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\alpha}_n(x, t) = \alpha(x, t). \tag{40}$$

Inoltre per la proprietà *b*) è per ogni $T > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^T \int_0^c \{L[\overline{\alpha}_n - \alpha]\}^2\, d x \, d t = 0. \tag{41}$$

La (41) è di importanza fondamentale nel metodo variazionale. Indicata con $v_n^*$ l'$n^{ma}$ approssimazione fornita da questo metodo per il problema II e con $\overline{v}_n$ la successione di funzioni determinata in base alle proprietà ora dette del sistema $\{\varphi_i(x)\}$ relativamente alla soluzione $v(x, t)$ del problema II, si ha per la definizione di $v_n^*$

$$0 \leq I[v_n^*] = \int_0^T \int_0^c \{L[v_n^*] - \overline{f}\}^2\, d x \, d t \leq$$

$$\leq \int_0^T \int_0^c \{L[\overline{v}_n] - \overline{f}\}^2\, d x \, d t = \int_0^T \int_0^c \{L[\overline{v}_n - v]\}^2\, d x \, d t$$

che tende a zero per $n \to \infty$ per la (41); così si prova che l'errore quadratico medio $I[v_n^*] \to 0$.

La tendenza a zero dell'errore quadratico medio è, per ora, il solo risultato di convergenza che legittima l'approssimazione del metodo variazionale.

Sia $v_n$ l'approssimazione $n^{\text{ma}}$ del metodo dei momenti per il problema II e $\overline{v}_n$ la successione di funzioni definita in base alle proprietà dette del sistema $\{\varphi_i(x)\}$, relativamente alla soluzione $v$ del problema II; per le (14) del Cap. II n. 3 risulta in $(0, c)$

$$(42) \qquad v_n(x, 0) - \overline{v}_n(x, 0) = 0 \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [v_n(x, t) - \overline{v}_n(x, t)] \right\}_{t=0} = 0 .$$

Consideriamo la differenza $v_n(x, t) - \overline{v}_n(x, t)$. Moltiplicando le (13) del Cap. II n. 3 per $c'_{s,n}(t) - h'_{s,n}(t)$ e sommando per $s = 1, 2, \ldots, n$ si ottiene

$$(43) \qquad \int_0^c \{ L[v_n] - \overline{f} \} \frac{\partial [v_n - \overline{v}_n]}{\partial t} d x = 0 .$$

Dalle (42) e

$$L[v_n - \overline{v}_n] = L[v_n] - \overline{f} + L[v - \overline{v}_n]$$

segue

$$(44) \qquad \int_0^c L[v_n - \overline{v}_n] \frac{\partial [v_n - \overline{v}_n]}{\partial t} d x = \int_0^c L[v - \overline{v}_n] \frac{\partial [v_n - \overline{v}_n]}{\partial t} d x .$$

Si ragioni ora sulla (44) come si è fatto nel lemma I sulla (18), sostituendo rispettivamente alle funzioni $v_n$ e $F$ le funzioni $v_n - \overline{v}_n$ e $L[v - \overline{v}_n]$.

Si ha ora la funzione

$$K_n(t) = \int_0^c \left\{ a_2 \left( \frac{\partial [v_n - \overline{v}_n]}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial [v_n - \overline{v}_n]}{\partial x} \right)^2 \right\} d x .$$

Essendo per le (42) $K_n(0) = 0$, sussiste ora in luogo della (17) del lemma I la

$$(45) \qquad \int_0^c \left( \frac{\partial [v_n - \overline{v}_n]}{\partial x} \right)^2 d x \leq \frac{4 t}{A(t)} e^{4 \int_0^t \gamma(t) dt} \int_0^t \int_0^c \{ L[v - \overline{v}_n] \}^2 d x \, d t ,$$

dove le funzioni $A(t)$ e $\gamma(t)$ sono ancora quelle definite nella dimostrazione del lemma I.

Ne segue

$$
46)\quad \begin{aligned} | v_n(x,t) - \overline{v}_n(x,t) | &\leq \sqrt{c} \sqrt{\int_0^c \left( \frac{\partial [v_n - \overline{v}_n]}{\partial x} \right)^2 dx} \leq \\ &\leq 2 \sqrt{\frac{ct}{A(t)}} e^{2\int_0^t \gamma(t) dt} \sqrt{\int_0^t \int_0^c \{ L[v - \overline{v}_n] \}^2 dx\, dt} \end{aligned}
$$

e quindi per la (41) è uniformemente in ogni $(S_T)$

$$
\lim_{n \to \infty} \{ v_n(x,t) - \overline{v}_n(x,t) \} = 0 .
$$

Dalla (40) segue allora che è uniformemente in ogni $(S_T)$

$$
\lim_{n \to \infty} v_n(x,t) = v(x,t) .
$$

Ritornando dal problema II al I il teorema V è così dimostrato.

2. — *Osservazione.*

Nel Teorema III, dove si era assunto $\varphi_i(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi i x}{c}$, si aveva anche la convergenza delle derivate delle $u_n(x,t)$ alle corrispondenti derivate della soluzione.

Ciò si può ottenere in generale.

Infatti come il ragionamento del lemma I ci ha permesso di ottenere la (45), così con quelli fatti nei Lemmi II, III, IV si ottengono delle maggiorazioni per le derivate successive della differenza $(v_n - \overline{v}_n)$. Per poter far ciò occorrono ulteriori ipotesi di derivabilità dei coefficienti.

Quanto al sistema $\{\varphi_i(x)\}$ dovrà rendere soddisfatte non solo le (40) e (41), ma essere tale che le derivate occorrenti delle $\overline{\alpha}_n(x,t)$ convergano a quelle di $\alpha(x,t)$.

Se ci si pone nelle ipotesi del teorema II è assicurata l'esistenza della soluzione e quindi il teorema V dà un criterio generale di convergenza, senza che il sistema $\{\varphi_i(x)\}$ sia obbligato ad essere quello del Teorema III.

[*Pervenuto alla Redazione il 10 marzo 1949*]

## BIBLIOGRAFIA


R. COURANT-D HILBERT

[1] *Methoden der Mathematischen Phisik,* Vol. I.

S. FAEDO

[1] *Contributo alla sistemazione teorica del metodo varazionale,* « Ann. Sc. Normale di Pisa », 1941.

[2] *Sul metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione,* « Pont. Ac. Scient. Comm. », 1942.

[3] *L'unicità delle successive approssimazioni nel metodo variazionale,* « Mem. R. Acc. Italia », 1942.

[4] *Ulteriori contributi alla teoria del metodo variazionale,* « Ann. Sc Normale Pisa », 1943.

[5] *Sul metodo di Ritz e su quelli fondati sul principio dei minimi quadrati per la risoluzione approssimata dei problemi della Fisica-Matematica,* « Rend. Mat Roma », 1947.

[6] *Alcuni nuovi criteri di uguale continuità per le funzioni di più variabili,* « Rend. Mat. Roma », 1947.

N. KRYLOFF-N. BOGOLIOUBOFF

[1] *Sur certains théorèmes concernant l'existence d'équations différentielles aux dérivées partielles du type hyperbolique,* « Bull. Ac Sc. U.R S S. », 1931.

B. MANIÀ

[1] *Sopra una questione di compatibilità nel metodo variazionale,* « Ann Sc. Normale di Pisa » 1940.

M. PICONE

[1] *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della Fisica-Matematica,* « Rend. Circ. Mat. Palermo », 1928.

[2] *Nuovi contributi all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione,* « Rend. Acc. Sc. Fis.-Mat. Soc. R. Napoli S. IV, Vol. VI, 1936 ».

[3] *Analisi quantitativa ed esistenziale nei problemi di propagazione,* « Atti I° Congr. U.M I. », 1937.

[4] *Appunti di Analisi Superiore,* Napoli, 1940.

W. RITZ

[1] *Gesammelte Werke, Gauthier Villars,* Paris, 1911

L TONELLI

[1] *L'estremo assoluto degli integrali doppi,* « Ann. Sc. Normale di Pisa », 1933.