ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LANDOLINO GIULIANO

Sulla continuità degli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 1, nº 1-4 (1949), p. 161-187

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1949_3_1_1-4_161_0>

SULLA CONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI CURVILINEI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa).

In una Nota apparsa nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (1) abbiamo stabilito il seguente:

TEOREMA. — *Se le funzioni* $\mathrm{M}(x,y,z)$, $\mathrm{N}(x,y,z)$ *e* $\mathrm{P}(x,y,z)$ *sono finite e continue insieme alle derivate parziali* $\mathrm{N}_x, \mathrm{P}_x, \mathrm{N}_z, \mathrm{P}_y$, *in tutti i punti interni al campo* A (2), *e se in essi vale l'eguaglianza:*

$$\mathrm{N}_z = \mathrm{P}_y$$

allora l'integrale

$$I_C \equiv \int_C \mathrm{M}(x,y,z)\,dx + \mathrm{N}(x,y,z)\,dy + \mathrm{P}(x,y,z)\,dz \tag{1}$$

è funzione continua della curva assolutamente continua C *su tutte le curve assolutamente continue completamente interne al campo* A.

Ci proponiamo qui di provare la continuità dell'integrale (1) sulla curva assolutamente continua $C_0 : y = y_0(x)$, $z = z_0(x)$, $a_0 \leq x \leq b_0$, *soltanto appartenente* al campo A (e precisamente per intero o in parte sulla frontiera di A) sotto opportune ipotesi relative:

a) al campo A e alla curva C_0

b) alle funzioni $\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{P}$.

---

(1) L. GIULIANO: *Sulla continuità degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni,* Nota I, Rendiconti Acc. dei Lincei, 1948, vol. IV, fasc. I, pp. 39-45. Continuiamo qui a valerci delle notazioni e dei simboli usati in tale Nota

(2) Per campo A intendiamo un insieme di punti dello spazio (x, y, z) il quale contenga tutti i suoi punti di accumulazione posti al finito e sia dotato di punti interni. Per le nozioni di curva assolutamente continua, di integrale I_C continuo su una curva assolutamente continua assegnata, ecc., rimandiamo il lettore alla Nota lincea sopra citata.

1. — Si supponga che le funzioni M, N, P, e le loro derivate parziali N_x, P_x, siano definite e *continue* in *tutti* i punti di A (3), e nei punti interni ad A siano soddisfatte le ipotesi enunciate nel teorema sopra ricordato.

Inoltre (4), detto Λ_x l'insieme dei punti di A appartenenti al piano $\omega_x : x = \text{cost.}$, esista un numero $\varrho_0 > 0$, *indipendente da* x, tale che *qualunque* sia il punto G di Λ_x, l'insieme (chiuso) $E_x(G)$ di Λ_x che appartiene al cerchio (di ω_x) di centro G e raggio ϱ_0 sia semplicemente connesso (5).

Se l'insieme $E_x(G)$ non si riduce a un'unica curva continua e rettificabile (eventualmente al solo punto G) si supponga poi che:

T) considerata una qualunque curva Γ (piana) continua e rettificabile di $E_x(G)$ e fissato comunque. sul piano ω_x, un intorno (ϱ) di Γ, si possa sempre trovare una poligonale del piano ω_x, ordinatamente appartenente a tale intorno (6), avente lunghezza diversa da quella della curva Γ di quanto poco si vuole e tutta costituita di punti *interni* all'insieme $E_x(G)$ (7).

T') per ogni punto K della frontiera di $E_x(G)$ e per ogni numero $\lambda > 0$ esista un numero $r > 0$ (dipendente da G e da K) tale che due punti qualunque del cerchio del piano ω_x di centro K e raggio r e *interni* all'insieme $E_x(G)$ si possono congiungere con una curva continua e rettificabile tutta *interna* all'insieme ora detto e di lunghezza minore di λ (8).

2. — Ciò posto, proveremo che l'integrale (1) è una funzione continua di C su *ogni* curva assolutamente continua (di A) $C_0 : y = y_0(x)$, $z = z_0(x)$, $a_0 \leq x \leq b_0$, tale che, eccetto al più un numero finito di punti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ che diremo *eccezionali*, per ogni suo punto H'_x, di ascissa x, accada che:

---

(3) S'intende che in un punto di A sulla frontiera di A in cui la N_x non risulta di per sè definita, esista il limite corrispondente, e tale limite si assume come valore di N_x in quel punto. Analogamente per la P_x.

(4) Si osservi che le condizioni che seguono vincolano la frontiera di A.

(5) Con questo intendiamo:

α_1) due punti qualunque di $E_x(G)$ si possono unire con una curva continua e rettificabile tutta appartenente all'insieme $E_x(G)$.

α_2) ogni eventuale poligonale chiusa senza punti multipli di $E_x(G)$ non racchiuda che punti di $E_x(G)$.

(6) Per la definizione di intorno (ϱ) e di appartenenza ordinata di una curva continua piana a un intorno (ϱ) di un'altra curva continua piana, v. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* Vol. I, Zanichelli, Bologna 1923, p. 72.

(7) Questa condizione è, naturalmente, espressiva, quando si è sulla frontiera di A.

(8) Le condizioni che qui abbiamo imposte al campo A ci sono state suggerite analizzando le condizioni α), β), γ) ammesse da Tonelli nel caso degli integrali parametrici del piano, per i campi piani che Tonelli prende in considerazione in quel caso Cfr. loc. cit. (6) p. 278. Ci sembra inutile di approfondire la questione di vedere se fra le condizioni imposte al campo A vi sia qualche relazione logica.

i) l'insieme $E_x(H'_x)$ sia dotato di punti interni i quali sono altresì interni al campo A [9].

Poichè dai punti $Q_\nu\,(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ la curva C_0 è spezzata in un numero finito di archi, basterà provare la continuità dell'integrale (1) su ognuno di tali archi. Possiamo perciò supporre che nessun punto di C_0, esclusi al più gli estremi, sia eccezionale, e quindi per ogni punto H'_x di C_0 di ascissa x, che non sia uno dei due estremi di C_0, è soddisfatta la condizione *i*).

Ciò detto, si supponga che, per ogni punto H'_x di C_0, di ascissa x:

ii) si possa determinare un numero $\bar{h}_x > 0$ (dipendente da x) in modo che:

α) se H'_x non è uno dei due estremi di C_0, esista una superficie [10] S_x che soddisfi alle seguenti condizioni:

$1)_\alpha$ essa sia limitata dall'arco di C_0 di estremi $H'_{x-\bar{h}_x}$ e $H'_{x+\bar{h}_x}$, dai due piani (perpendicolari all'asse x) $\omega_{x-\bar{h}_x}$ e $\omega_{x+\bar{h}_x}$ e da un segmento di retta (di lunghezza $2\bar{h}_x$) parallela all'asse x, col punto medio in un punto $\bar{H}_x \equiv (x, \bar{y}, \bar{z})$ interno a $E_x(H'_x)$.

$2)_\alpha$ essa sia, tranne quei punti dell'arco di C_0 di estremi $H'_{x-\bar{h}_x}$ e $H'_{x+\bar{h}_x}$ che stanno sulla frontiera di A, tutta *interna* ad A:

$3)_\alpha$ mettendone in vista le sezioni piane perpendicolari all'asse x, essa sia rappresentata dal sistema di equazioni

$$S_x: \begin{cases} \xi = x + h \\ \eta = \eta(t, x+h) \\ \zeta = \zeta(t, x+h) \end{cases} \qquad \mathfrak{A}: \begin{matrix} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq |h| \leq \bar{h}_x \end{matrix}$$

essendo $\eta(t, x+h)$, $\zeta(t, x+h)$ funzioni continue in tutto $\mathfrak{A}$ con le condizioni:

$$\begin{cases} \eta(0, x+h) = y_0(x+h) \\ \zeta(0, x+h) = z_0(x+h) \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta(1, x+h) = y(1, x) = \bar{y} \\ \zeta(1, x+h) = z(1, x) = \bar{z} \end{cases}$$

---

(9) Ad esempio, abbiasi un campo formato da un cilindro con le basi perpendicolari all'asse x e da un cono circolare retto col vertice V interno ad una delle due basi del cilindro e del resto esterno al cilindro. Consideriamo una curva $\bar{C}$ che abbia una sua parte interna al cilindro e che poi, uscendo attraverso V, si svolga sulla superficie o nell'interno del cono. Per $\bar{C}$ il punto V non soddisfa alla condizione *i*).

(10) Questa superficie, come risulta dalle condizioni che vengono indicate, è una laminetta che, partendo da C_0, nell'intorno di H'_x, penetra nell'interno del campo A. Un'osservazione analoga si faccia quando si è nei casi β) e γ).

e tali che le derivate:

$$\eta'_t(t\,.\,x+h)\,,\quad \eta''_{t,h}(t\,.\,x+h)\,.\quad \zeta'_t(t\,.\,x+h)\,,\quad \zeta'_{t,h}(t\,,x+h)$$

siano definite e limitate in tutto $\mathcal{C}$.

Da qui si deduce che le sezioni della superficie S_x con i piani ω_{x+h} $(0 \leq |h| \leq \bar{h}_x)$ sono curve j_{x+h} continue e rettificabili. Inoltre si ha che quando $h \to 0$, le lunghezze delle curve j_{x+h} ora dette tendono alla lunghezza della curva j_x, intersezione della superficie S_x con il piano ω_x, curva che unisce il punto H'_x con il punto [interno a $E_x(H'_x)$ e quindi ad A] $\bar{H}_x \equiv (x\,,\bar{y}\,,\bar{z})$ (11)

β) se H'_x coincide con H'_{a_0} cioè col primo estremo di C_0 (di ascissa a_0) esista una superficie S_{a_0} che goda delle stesse proprietà di cui gode quella parte della superficie S_x considerata in α), compresa fra i piani ω_x e $\omega_{x+\bar{h}_x}$, intendendo, nel caso attuale, che l'intersezione di S_{a_0} (che è limitata dai piani ω_{a_0} e $\omega_{a_0+\bar{h}_{a_0}}$) col piano ω_{a_0} sia una curva continua e rettificabile tutta interna all'insieme $E_{a_0}(H'_{a_0})$ nel caso che questo insieme sia dotato di punti interni (i quali sono anche interni ad A, se H'_{a_0} non è un punto eccezionale di C_0, secondo quanto si è supposto in i)) e, altrimenti, sia un arco della (oppure coincida con) unica curva continua e rettificabile che costituisce l'insieme $E_{a_0}(H'_{a_0})$, ciò che può verificarsi, evidentemente, quando H'_{a_0} è un punto eccezionale.

---

(11) Infatti, sia $L > 0$ un numero tale che sia in tutto $\mathcal{C}$:

$$|\eta'_t(t\,,x+h)| \leq L\,,\ |\zeta'_t(t\,,x+h)| \leq L\,,\ |\eta''_{t,h}(t\,,x+h)| \leq L\,,\ |\zeta''_{t,h}(t\,,x+h)| \leq L\,.$$

Si dica l_h la lunghezza della curva j_{x+h} e l quella della curva j_x. Si ha:

$$l_h - l = \int_0^1 \sqrt{1+\eta'^2_t(t\,,x+h)+\zeta'^2_t(t\,,x+h)}\,d\,t - \int_0^1 \sqrt{1+\eta'^2_t(t\,,x)+\zeta'^2_t(t\,,x)}\,d\,t$$

e perciò essendo:

$$\left|\sqrt{1+\eta'^2_t(t\,,x+h)+\zeta'^2_t(t\,,x+h)} - \sqrt{1+\eta'^2_t(t\,.\,x)+\zeta'^2_t(t\,,x)}\right| \leq$$
$$\leq |\eta'_t(t\,,x+h)-\eta'_t(t\,,x)| + |\zeta'_t(t\,,x+h)-\zeta'_t(t\,.\,x)| =$$
$$= |h| \,\{\, |\eta''_{t,h}(t\,,x+\theta_1 h)| + |\zeta''_{t,h}(t\,,x+\theta_2 h)| \,\} \leq 2\,L\,|h|$$

dove

$$0 < |\theta_1| < 1\,,\ 0 < |\theta_2| < 1\,,\ \text{ si trova } |l_h - l| \leq \int_0^1 2\,L\,|h|\,d\,t = 2\,L\,|h|$$

e perciò $l_h \to l$ quando $h \to 0$.

γ) se H'_x coincide con H'_{b_0} cioè col secondo estremo di C_0 (di ascissa b_0) valga una condizione analoga a quella indicata in β) con gli opportuni evidenti cambiamenti di cui il lettore si renderà ben conto.

Inoltre, nel caso α), sia soddisfatta una delle seguenti quattro ipotesi:

I)$_\alpha$ per ogni ξ tale che $x - \bar{h}_x < \xi \leq x$ la parte della superficie S_x limitata dai due piani $\omega_{x-\bar{h}_x}$ e ω_ξ si proietta ortogonalmente su ω_ξ in un insieme di punti interamente appartenente all'insieme $E_\xi(H'_\xi)$ e, analogamente, per ogni ξ tale che $x \leq \xi < x + \bar{h}_x$ la parte della superficie S_x limitata dai piani ω_ξ e $\omega_{x+\bar{h}_x}$ si proietta ortogonalmente su ω_ξ in un insieme di punti interamente appartenente all'insieme $E_\xi(H'_\xi)$.

II)$_\alpha$ per ogni ξ tale che $x - \bar{h}_x \leq \xi < x$ la parte della superficie S_x limitata dai due piani ω_ξ e ω_x si proietta ortogonalmente su ω_ξ in un insieme di punti interamente appartenente all'insieme $E_\xi(H'_\xi)$ e per ogni ξ tale che $x < \xi \leq x + \bar{h}_x$ la parte della superficie S_x limitata dai due piani ω_x e ω_ξ si proietta ortogonalmente su ω_ξ in un insieme di punti interamente appartenente all'insieme $E_\xi(H'_\xi)$.

III)$_\alpha$ per ogni ξ tale che $x - \bar{h}_x < \xi \leq x + \bar{h}_x$ la parte della superficie S_x limitata dai due piani $\omega_{x-\bar{h}_x}$ e ω_ξ si proietta ortogonalmente su ω_ξ in un insieme di punti interamente appartenente all'insieme $E_\xi(H'_\xi)$.

IV)$_\alpha$ per ogni ξ tale che $x - \bar{h}_x \leq \xi < x + \bar{h}_x$ la parte della superficie S_x limitata dai due piani ω_ξ e $\omega_{x+\bar{h}_x}$ si proietta ortogonalmente su ω_ξ in un insieme di punti interamente appartenente all'insieme $E_\xi(H'_\xi)$.

Nel caso β) valga una delle seguenti due ipotesi:

I)$_\beta$ per ogni ξ tale che $a_0 \leq \xi < a_0 + \bar{h}_{a_0}$, la parte della superficie S_{a_0} limitata dai piani ω_ξ e $\omega_{a_0+\bar{h}_{a_0}}$ si proietta ortogonalmente su ω_ξ in un insieme di punti interamente appartenente all'insieme $E_\xi(H'_\xi)$.

II)$_\beta$ per ogni ξ tale che $a_0 < \xi \leq a_0 + \bar{h}_{a_0}$, la parte della superficie S_{a_0} limitata dai due piani ω_{a_0} e ω_ξ si proietta ortogonalmente su ω_ξ in un insieme di punti interamente appartenente all'insieme $E_\xi(H'_\xi)$.

Nel caso γ) valga una delle due ipotesi analoghe a quelle indicate nel caso β), con quei cambiamenti evidenti di cui il lettore si renderà conto.

Finalmente, se in ogni intorno sferico del punto H'_{a_0} esistono punti di A di ascissa minore di a_0, si supponga che il campo A sia tale che:

g_1) esista una curva Γ_1 assolutamente continua

$$\Gamma_1 : \begin{cases} y = y_1(x) \\ z = z_1(x) \end{cases} \qquad \bar{a} \leq x \leq a_0$$

tutta appartenente ad A, avente il secondo estremo coincidente con H'_{a_0}, tale cioè che $y_1(a_0) = y_0(a_0)$, $z_1(a_0) = z_0(a_0)$ e tale che per il campo A e per la curva $\overline{C}_0$ che si ottiene riunendo la Γ_1 e la C_0 siano soddisfatte le stesse condizioni che abbiamo enunciate sopra, relativamente al campo A e alla curva C_0.

E così, se in ogni intorno sferico del punto H'_{b_0} esistono punti di A, di ascissa maggiore di b_0, si supponga il campo A tale che sia verificata una condizione $g_2)$ analoga alla $g_1)$ e il cui enunciato lo lasciamo formulare al lettore [12].

3. — Dimostreremo in questo numero e nei numeri 4, 5, 6 quanto ci siamo proposti, proveremo cioè la continuità dell'integrale (1) sulla curva C_0.

Come è stato sopra osservato, possiamo supporre che per ogni punto H'_x di C_0 di ascissa x, che non sia uno dei due estremi di C_0, l'insieme $E_x(H'_x)$ è dotato di punti interni e questi sono anche punti interni di A. In H'_x è inoltre soddisfatta la condizione $\alpha)$ di $ii)$ del n. 2.

Consideriamo dapprima soltanto le curve $C: y = y(x)$, $z = z(x)$, $a_0 \leq x \leq b_0$ assolutamente continue definite nello stesso intervallo della C_0 e appartenenti propriamente all'intorno (ϱ_0) della C_0.

Si consideri la differenza:

$$I_C - I_{C_0} = \left\{ \int_C \mathrm{M}(x, y, z)\, dx - \int_{C_0} \mathrm{M}(x, y, z)\, dx \right\} +$$

$$+ \left\{ \int_C \mathrm{N}(x, y, z)\, dy + \mathrm{P}(x, y, z)\, dz - \int_{C_0} \mathrm{N}(x, y, z)\, dy + \mathrm{P}(x, y, z)\, dz \right\} =$$

$$= I_1 + I_2 .$$

Per la continuità della funzione $\mathrm{M}(x, y, z)$ in tutti i punti di A, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$ possiamo determinare un numero $\varrho_1 > 0$ (e $< \varrho_0$) tale che, per ogni curva C assolutamente continua che noi qui consideriamo, appartenente propriamente all'intorno (ϱ_1) della C_0 si abbia

$$| I_1 | < \frac{\varepsilon}{2} .$$

---

[12] Si osservi che se la C_0 è completamente interna ad A, essa soddisfa alle condizioni $i)$, $ii)$, sopra indicate; più in generale, queste condizioni sono soddisfatte su ogni arco di C_0 completamente interno ad A. Evidentemente il caso che qui interessa è quello in cui tutta la C_0 o alcuni archi di essa siano sulla frontiera di A.

Occupiamoci ora di I_2. Se H'_x è un punto di C_0 per cui $a_0 < x < b_0$ e $E_x(H'_x)$ è l'insieme ad esso relativo (che è dotato di punti interni i quali, si ricordi, sono anche punti interni di A), se π è una poligonale chiusa. senza punti multipli, completamente interna ad $E_x(H'_x)$, per la supposta condizione $N_z = P_y$ in tutti i punti interni ad A, l'integrale di $N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$ lungo π è nullo. Se ne deduce che detto integrale è nullo lungo ogni poligonale come la precedente, avente o no punti multipli e anche, tenendo presente la condizione T) del n. 1, per un teorema di TONELLI [13], il detto integrale è nullo lungo ogni curva continua, rettificabile, chiusa, appartenente ad $E_x(H'_x)$. Ne viene che la funzione

$$\varphi(x, y, z) = \int_{\widehat{H'_x H_x}} N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$$

dove $H_x \equiv (x, y, z)$ è un punto di $E_x(H'_x)$ e l'integrale è calcolato lungo una *qualunque* curva continua e rettificabile appartenente ad $E_x(H'_x)$ e congiungente i due punti H'_x e H_x è per ogni x tale che $a_0 < x < b_0$, univocamente definita nell'insieme $E_x(H'_x)$.

La funzione $\varphi(x, y, z)$, ha in ogni punto *interno* ad $E_x(H'_x)$ come differenziale totale, rispetto a y e z:

$$N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz.$$

Se poi $H_x \equiv (x, y, z)$ è un punto della frontiera di $E_x(H'_x)$, la funzione $\varphi(x, y, z)$ è differenziabile in H_x, rispetto a y e z, quando ci si limiti a considerare gli incrementi Δy e Δz tali che il punto $(x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ appartenga a una qualunque curva continua e rettificabile di $E_x(H'_x)$ e congiungente i due punti H'_x e H_x. In H_x il differenziale, rispetto a y e z, di $\varphi(x, y, z)$ è ancora dato da

$$N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz$$

lungo le curve ora dette.

La funzione $\varphi(x, y, z)$ risulta così definita nell'insieme A'_0 dei punti (x, y, z) di A ognuno dei quali dista da $(x, y_0(x), z_0(x))$ non più di ϱ_0, essendo $a_0 < x < b_0$. Essa è poi uniformemente continua come funzione

---

([13]) loc. cit (6) p. 277.

delle tre variabili (x, y, z) nell'insieme $\tilde{A}_0$ dei punti *interni* di A'_0 (e quindi interni ad A) ([14]).

Infatti, sia $H_x \equiv (x, y, z)$ $(a_0 < x < b_0)$ un punto di $\tilde{A}_0$ e, se $\bar{h}_x$ è il numero che corrisponde al punto H'_x di C_0 di ascissa x, secondo la condizione *ii*), del n⁰. 2, sia $H_{h,k,l} \equiv (x + h, y + k, z + l)$ un altro punto di $\tilde{A}_0$ per cui $0 \leq |h| \leq \bar{h}_x$. Sia poi S_x la superficie corrispondente al punto H'_x, secondo quanto è stato supposto nel n. 2 *i i'*, α).

Dall'ipotesi T' del n. 1, a cui soddisfa il campo A, si deduce che esiste sul piano ω_x almeno una poligonale π_x di un numero finito di lati paralleli agli assi y e z, che congiunge i due punti $\bar{H}_x \equiv (x, \bar{y}, \bar{z})$ (secondo estremo di j_x, intersezione di S_x con ω_x e di cui il primo estremo è H'_x) e $H_x \equiv (x, y, z)$, punti entrambi interni all'insieme $E_x(H'_x)$, nell'ordine da $\bar{H}_x$ a H_x. Si ha:

$$\varphi(x, y, z) = \int_{j_x} \mathrm{N}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x, y, z)\, d z + \int_{\pi_x} \mathrm{N}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x, y, z)\, d z$$

Così, analogamente, si consideri sul piano ω_{x+h}, una poligonale π_{x+h} di un numero finito di lati paralleli agli assi y e z, che unisca i due punti,

---

([14]) Questa affermazione è identica a quella fatta nella nota lincea citata in ([1]) e che riguarda la funzione $\varphi(x, y, z)$ ivi introdotta. Per esigenze tipografiche omettemmo allora la semplicissima verifica di tale affermazione. Riteniamo opportuno, per una migliore intelligibilità, accennare qui a tale verifica, provando, in questo caso, la continuità uniforme di $\varphi(x, y, z)$ come funzione delle tre variabili (x, y, z) nell'insieme Λ_0 dei punti (x, y, z) distanti da $(x, y_0(x), z_0(x))$ meno di ϱ_0, quando sia $a_0 \leq x \leq b_0$. Quanto si vuole provare risulta facilmente se si osserva che, nel caso considerato nella nota lincea, è:

$$\varphi(x + h, y + k, z + l) - \varphi(x, y, z) = \int_{y_0(x+h)}^{y+k} \mathrm{N}(x + h, y, z + l)\, d y +$$

$$+ \int_{z_0(x+h)}^{z+l} \mathrm{P}[x + h, y_0(x + h), z]\, d z - \int_{y_0(x)}^{y} \mathrm{N}(x, y, z)\, d y - \int_{z_0(x)}^{z} \mathrm{P}[x, y_0(x), z]\, d z =$$

$$= \int_{y_0(x+h)}^{y_0(x)} \mathrm{N}(x + h\ y, z + l)\, dy + \int_{y_0(x)}^{y} \{\mathrm{N}(x + h, y, z + l) - \mathrm{N}(x, y, z)\}\, d y + \int_{y}^{y+k} \mathrm{N}(x + h, y, z + l)\, dy + \ldots$$

e si tiene conto della continuità uniforme, nell'insieme Λ_0 considerato, (il quale è costituito tutto di punti interni ad A, v. loc. cit. ([1]) p. 42) delle funzioni N e P.

interni all'insieme $E_{x+h}(H'_{x+h})$, $\overline{H}_{x+h} \equiv (x+h, \overline{y}, \overline{z})$ (secondo estremo di j_{x+h}, intersezione di S_x col piano ω_{x+h}, e di cui il primo estremo è H'_{x+h}) e $H_{h,k,l} \equiv (x+h, y+k, z+l)$. nell'ordine da $\overline{H}_{x+h}$ a $H_{h,k,l}$. Si ha:

$$\varphi(x+h, y+k, z+l) = \int_{j_{x+h}} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x+h, y, z)\, d z +$$

$$+ \int_{\pi_{x+h}} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x+h, y, z)\, d z.$$

Perciò:

$$\left| \varphi(x+h. y+k, z+l) - \varphi(x, y, z) \right| \leq \left| \int_{j_{x+h}} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, dy + \mathrm{P}(x+h. y, z)\, d z - \right.$$

$$\left. - \int_{j_x} \mathrm{N}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x, y, z)\, d z \right| + \left| \int_{\pi_{x+h}} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x+h, y, z)\, d z - \right.$$

$$\left. - \int_{\pi_x} \mathrm{N}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x, y, z)\, d z \right|$$

intendendo, naturalmente, che se il punto $H_{h,k,l}$ coincide col punto H_{x+h} l'$\int_{\pi_{x+h}} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x+h, y, z)\, d z$ manchi e così, se il punto H_x coincide col punto $\overline{H}_x$, l'$\int_{\pi_x} \mathrm{N}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x, y, z)\, d z$ manchi.

Ricordando (v. nota ([11])) che quando $h \to 0$, le lunghezze delle curve j_{x+h} tendono alla lunghezza della curva j_x, per un teorema di TONELLI ([15]), si ha che, fissato un numero $\varepsilon_1 > 0$, per h sufficientemente piccolo, è:

$$\left| \int_{j_{x+h}} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x+h. y, z)\, d z - \int_{j_x} \mathrm{N}(x, y, z)\, dy + \mathrm{P}(x, y, z)\, d z \right| < \varepsilon_1$$

Ripetendo considerazioni analoghe a quelle sviluppate nella nota ([14]) si ha, per h, k, l, sufficientemente piccoli:

$$\left| \int_{\pi_{x+h}} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x+h, y, z)\, d z - \int_{\pi_x} \mathrm{N}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P}(x, y, z)\, d z \right| < \varepsilon_1$$

([15]) loc. cit. (6) p. 277.

Dal ragionamento sviluppato segue anche che, fissato il punto H'_x di C_0 $(a_0 < x < b_0)$ per ogni $\sigma > 0$, si può determinare un numero $\delta_x > 0$ tale che, qualunque siano i due punti (x', y', z), $(x' + h, y' + k, z' + l)$ appartenenti ad $\tilde{A}_0$, purchè $x - \bar{h}_x \leq x' \leq x + \bar{h}_x$ e $|h| < \delta_x$, $|k| < \delta_x$, $|l| < \delta_x$, si abbia

$$| \varphi(x' + h, y' + k, z' + l) - \varphi(x', y', z') < \sigma$$

E così, se H'_{a_0} (H'_{b_0}) è il primo (il secondo) estremo di C_0, tenendo presente le ipotesi ammesse nel n. 2 nel caso $\beta)(\gamma)$) si può determinare, per ogni $\sigma > 0$, un numero $\delta_{a_0} > 0$ $(\delta_{b_0} > 0)$ tale che se (x', y', z'), $(x' + h, y' + k, z' + l)$ sono due punti di $\tilde{A}_0$ per cui $a_0 < x' \leq a_0 + \bar{h}_{a_0}$ $(b_0 - \bar{h}_{b_0} \leq x' < b_0)$, purchè $0 \leq h \leq \delta_{a_0}$, $|k| \leq \delta_{a_0}$, $|l| \leq \delta_{a_0}$ $(0 \leq -h \leq \delta_{b_0}$, $|k| \leq \delta_{b_0}$, $|l| \leq \delta_{b_0})$, si abbia

$$| \varphi(x' + h, y' + k, z' + l) - \varphi(x', y', z') | < \sigma.$$

Applicando il teorema di PINCHERLE-BOREL si deduce che si può determinare, in corrispondenza al numero $\sigma > 0$, un numero $\delta > 0$ tale che se (x', y', z') e $(x' + h, y' + k, z' + l)$ sono due punti *qualunque* di $\tilde{A}_0$, purchè $|h| \leq \delta$, $|k| \leq \delta$, $|l| \leq \delta$, si ha:

$$| \varphi(x' + h, y' + k, z' + l) - \varphi(x', y', z') | < \sigma.$$

La continuità uniforme di $\varphi(x, y, z)$ nell'insieme $\tilde{A}_0$ è così provata. Si può perciò definire la funzione $\varphi(x, y, z)$ anche nei punti di $E_{a_0}(H'_{a_0})$ e di $E_{b_0}(H'_{b_0})$ in modo che essa sia uniformemente continua nell'insieme A_0 dei punti (x, y, z) $(a_0 \leq x \leq b_0)$ ognuno dei quali dista da $(x, y_0(x), z_0(x))$ non più di ϱ_0.

4. Proviamo ora che la funzione $\varphi(x, y, z)$ è derivabile parzialmente rispetto a x, in ogni punto *interno* $H_x \equiv (x, y, z)$ di A_0 la cui ascissa x non appartiene a un eventuale insieme di misura nulla di $({}_0a, b_0)$ (v. nota (16) di questo lavoro) e tale che esistano finite le derivate $y'_0(x)$ e $z'_0(x)$ e tale inoltre che se H'_x è il punto di C_0 di ascissa x, in H'_x sia, per fissare le idee, soddisfatta la condizione $I)_\alpha$ del n. 2).

a) Supponiamo, in primo luogo, che la tangente t_x alla curva C_0 orientata secondo le x crescenti, non sia parallela all'asse x. Dimostriamo intanto che nel punto $\bar{H}_x \equiv (x, \bar{y}, \bar{z})$ considerato nel n. 2, *i i*), α), esiste la derivata parziale destra rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$. Sia $\bar{H}_{x+h} \equiv (x + h, \bar{y}, \bar{z})$ un punto (sulla parallela all'asse x condotta per il punto $\bar{H}_x$) appartenente alla superficie S_x introdotta nel n. 2, *i i*), α). Indicando, come facemmo, con

j_{x+h} la curva intersezione di S_x con il piano ω_{x+h} e con j_x la curva intersezione di S_x con il piano ω_x, si ha:

$$\frac{\varphi(x+h, \bar{y}, \bar{z}) - \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})}{h} = \frac{1}{h}\left\{\int_{j_{x+h}} N(x+h; y, z)\,dy + \right.$$

$$\left. + P(x+h, y, z)\,dz - \int_{j_x} N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz\right\}$$

Indichiamo ora con $\bar{j}_{x+h}$ la curva (piana) continua e rettificabile, proiezione ortogonale sul piano ω_x della j_{x+h}. Per quanto è stato ammesso $(I)_\alpha$ n. 2) si ha che la curva $\bar{j}_{x+h}$ appartiene all'insieme $E_x(H'_x)$ e congiunge i due punti $H_{x,h} \equiv [x, y_0(x+h), z_0(x+h)]$ e $\bar{H}_x$ nel verso da $H_{x,h}$ a $\bar{H}_x$. Si osservi che quando $h \to 0$ è: $H_{x,h} \to H'_x$ e che il luogo dei punti $H_{x,h}$, al variare di h, è la curva (continua e rettificabile) $\mu_{x,\bar{h}_x}$ di estremi H'_x e $H_{x,\bar{h}_x} \equiv [x, y_0(x+\bar{h}_x), z_0(x+\bar{h}_x)]$, curva che è la proiezione ortogonale sul piano ω_x dell'arco di C_0 di estremi H'_x e $H'_{x+\bar{h}_x}$. Inoltre si ha che la curva $\mu_{x,\bar{h}_x}$ ha tangente, τ_x, in H'_x che è data dalla proiezione ortogonale su ω_x della tangente t_x alla curva C_0 nel punto H'_x. Si può scrivere:

$$\frac{\varphi(x+h, \bar{y}, \bar{z}) - \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})}{h} = \frac{1}{h}\left\{\int_{j_{x+h}} N(x+h, y, z)\,dy + P(x+h, y, z)\,dz - \right.$$

$$\left. - \int_{\bar{j}_{x+h}} N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz + \int_{\bar{j}_{x+h}} N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz - \int_{j_x} N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz\right\}$$

Consideriamo:

$$\frac{1}{h}\left\{\int_{j_{x+h}} N(x+h, y, z)\,dy + P(x+h, y, z)\,dz - \int_{\bar{j}_{x+h}} N(x, y, z)\,dy + P(x, y, z)\,dz\right\} =$$

$$= \int_0^1 \frac{N[x+h, \eta(t, x+h), \zeta(t, x+h)] - N[x, \eta(t, x+h), \zeta(t, x+h)]}{h} \cdot \eta'_t(t, x+h)\,dt +$$

$$+ \int_0^1 \frac{P[x+h, \eta(t, x+h), \zeta(t, x+h)] - P[x, \eta(t, x+h), \zeta(t, x+h)]}{h} \cdot \zeta'_t(t, x+h)\,dt$$

Si ha:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{N}\,[x+h, \eta\,(t,x+h), \zeta\,(t,x+h)] - \mathrm{N}\,[x, \eta\,(t,x+h), \zeta\,(t,x+h)]}{h}\,\eta'_t\,(t,x+h)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{N_x}\,[x, \eta\,(t,x), \zeta\,(t,x)]\,\eta'_t\,(t,x)\,dt + \int_0^1 \varepsilon(h,t)\,\eta'_t\,(t,x+h)\,dt +$$

$$+ \int_0^1 \mathrm{N_x}\,[x, \eta\,(t,x), \zeta\,(t,x)]\,\{\eta'_t\,(t,x+h) - \eta'_t\,(t,x)\}\,dt$$

con $\varepsilon\,(h\,,t) \to 0$ uniformemente rispetto a t, quando $h \to 0$.

Sia $L > 0$ un numero tale che si abbia in tutto $\mathcal{A}$:

$$|\,\eta'_t\,(t,x+h)\,| \leq L, \;|\,\zeta'_t\,(t,x+h)\,| \leq L\,, \;|\,\eta''_{t,h}\,(t,x+h)\,| \leq L, \;|\,\zeta''_{t,h}\,(t,x+h)\,| \leq L$$

e $\Phi > 0$ un numero tale che sia in tutto A:

$$|\,\mathrm{N_x}\,(x\,,y\,,z)\,| \leq \Phi\,.$$

Sia $\bar{\sigma} > 0$ un numero fissato. Sia $h^* > 0$ tale che per $0 < |\,h\,| \leq h^*$ si abbia, qualunque sia t di $(0,1)$: $|\,\varepsilon(h,t)\,| < \bar{\sigma}$.

È, per $0 \leq |\,h\,| \leq h^*$:

$$\left|\int_0^1 \varepsilon\,(h\,,t)\,\eta'_t\,(t\,,x+h)\,dt\right| < \bar{\sigma}\,L$$

$$\left|\int_0^1 \mathrm{N_x}\,[x\,,\eta\,(t\,,x)\,,\zeta\,(t\,,x)]\,\{\eta'_t\,(t\,,x+h) - \eta'_t\,(t\,,x)\}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \Phi \cdot \int_0^1 |\,\eta''_{t,h}\,(t\,,x+\theta\,h)\,|\;|\,h\,|\,dt < \Phi\,L\,|\,h\,| < L\,\Phi\,\bar{\sigma}$$

dove $0 < |\,\Theta\,| < 1$ e $|\,h\,| < \bar{\sigma}$.

Si ha perciò, ragionando in modo analogo sulla funzione P,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{j_{x+h}} \mathrm{N}\,(x+h\,,y\,,z)\,dy + \mathrm{P}\,(x+h\,,y\,,z)\,dz - \right.$$

$$\left. - \int_{\bar{j}_{x+h}} \mathrm{N}\,(x\,,y\,,z)\,dy + \mathrm{P}\,(x\,,y\,,z)\,dz \right\} = \int_{j_x} \mathrm{N_x}\,(x\,,y\,,z)\,dy + \mathrm{P_x}\,(x\,,y\,,z)\,dz$$

Consideriamo ora

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_{j_{x+h}} N(x,y,z)\,dy+P(x,y,z)\,dz-\int_{j_x} N(x,y,z)\,dy+P(x,y,z)\,dz\right\}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{-\frac{1}{h}\int_{\mu_{x,h}} N(x,y,z)\,dy+P(x,y,z)\,dz\right\}$$

dove $\mu_{x,h}$ è l'arco (di μ_x, $_{hx}$) di estremi H'_x e $H_{x,h}$, cioè la proiezione ortogonale su ω_x dell'arco di C_0 di estremi H'_x e H'_{x+h}. $\mu_{x,h}$ congiunge i due punti H'_x e $H_{x,h}$ ed ha tangente nel punto H'_x data dalla τ_x.

Si dica s la lunghezza di $\mu_{x,h}$, k la lunghezza del segmento $\overline{H'_x H_{x,h}}$, c quella del segmento $\overline{H'_x H'_{x+h}}$. Quando $h\to 0$ è: $s\to 0$, $k\to 0$, $c\to 0$. Si trova che il limite ora scritto è uguale a

$$-\lim_{s\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\mu_{x,h}} N(x,y,z)\,dy+P(x,y,z)\,dz}{s}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{s}{k}\cdot\lim_{c\to 0}\frac{k}{c}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{c}{h}=$$

$$=-\left(\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial\tau_x}\right)_{H'_x}\cdot\cos\widehat{t_x\tau_x}\cdot\frac{1}{\cos\widehat{t_x x}}=-\{N[x,y_0,(x),z_0(x)]\cos\widehat{y\,\tau_x}+$$

$$+P[x,y_0,(x),z_0(x)]\cos\widehat{z\,\tau_x}\}\frac{\cos\widehat{t_x\tau_x}}{\cos\widehat{t_x x}}$$

Ora è:

$$\cos\widehat{t_x x}=\frac{1}{\sqrt{1+y_0'^2(x)+z_0'^2(x)}},\ \cos\widehat{t\,\tau_x}=\operatorname{sen}\widehat{t_x x}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{t_x x}}$$

$$\cos\widehat{y\,\tau_x}=\frac{\cos\widehat{t_x y}}{\sqrt{1-\cos^2\widehat{t_x x}}}=\frac{y_0'(x)}{\sqrt{1+y_0'^2(x)+z_0'^2(x)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\widehat{t_x x}}}$$

$$\cos\widehat{z\,\tau_x}=\frac{\cos\widehat{t_x z}}{\sqrt{1-\cos^2\widehat{t_x x}}}=\frac{z_0'(x)}{\sqrt{1+y_0'^2(x)+z_0'^2(x)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\widehat{t_x x}}}$$

e perciò in definitiva si trova:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_{j_{x+h}} N(x,y,z)\,dy+P(x,y,z)\,dz-\int_{j_x} N(x,y,z)\,dy+P(x,y,z)\,dz\right\}=$$

$$=\{-N[x,y_0(x),z_0(x)]\,y_0'(x)-P[x,y_0(x),z_0(x)]\,z_0'(x)\}$$

Esiste dunque la derivata parziale destra rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ nel punto $\overline{H}_x \equiv (x, \overline{y}, \overline{z})$ considerato ed essa è data da:

$$\frac{\partial \varphi(x, \overline{y}, \overline{z})}{\partial x} = \int_{j_x} \mathrm{N_x}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P_x}(x, y, z)\, d z - \mathrm{N}[x, y_0(x) z_0(x)]\, y_0'(x) -$$

$$(2) \qquad - \mathrm{P}[x, y_0(x), z_0(x)]\, z_0'(x) = \psi(x, y, z) + \chi(x),$$

avendo posto:

$$\psi(x, y, z) = \int_{j_x} \mathrm{N_x}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P_x}(x, y, z)\, d z$$

$$\chi(x) = - \mathrm{N}[x, y_0(x), z_0(x)]\, y_0'(x) - \mathrm{P}[x, y_0(x), z_0(x)]\, z_0'(x)$$

Analogamente si prova che esiste la derivata parziale sinistra rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ nel punto $\overline{H}_x \equiv (x, \overline{y}, \overline{z})$, derivata che è ancora data dalla (2). Esiste dunque la derivata parziale rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ nel punto $\overline{H}_x$ considerato, derivata che è data dalla (2).

b) Si supponga ora che la tangente t_x nel punto H_x' alla C_0 sia parallela all'asse x.

Dette ancora k e s rispettivamente la lunghezza del segmento $\overline{H_x' H_{x,h}}$ e della curva $\mu_{x,h}$, intendendo di contare gli archi sulla curva $\mu_{x,\overline{h}_x}$ (di cui $\mu_{x,h}$ è un arco) a partire dal suo primo estremo H_x', supponiamo che sia ([16]):

$$\lim_{h \to 0} \frac{s}{k} = 1$$

([16]) Si tenga presente che su una curva rettificabile, quasi dappertutto il limite del rapporto della lunghezza di un arco alla corda corrispondente, è uguale a 1 Si osservi ora che per la curva $\mu_{x,\overline{h}_x}$ continua e rettificabile di estremi H_x' e $H_{x,\overline{h}_x} \equiv [x. y_0(x + \overline{h}_x), z_0(x + \overline{h}_x)]$ può non sussistere, nel punto H_x', l'uguaglianza $\lim\limits_{h \to 0} \frac{s}{k} = 1$. Per ogni punto $\overline{X}$ di $\mu_{x,\overline{h}_x}$ che non appartiene a un insieme di misura nulla (su $\mu_{x,\overline{h}_x}$) accade che il limite del rapporto della lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{\overline{X} X}$, dove X è un punto di $\mu_{x,\overline{h}_x}$, alla corda corrispondente, quando $X \to \overline{X}$ lungo la curva ora detta, è uguale a 1. Si consideri allora il punto $\overline{X}'$ di C_0 la cui proiezione ortogonale su ω_x è il punto $\overline{X}$ considerato. Supposto, pure, che la tangente in $\overline{X}'$ alla C_0 sia parallela all'asse x, si può affermare, però, tenendo presente che è verificata, per quanto abbiamo ammesso all'inizio del n. 4, la condizione $I)_\alpha$ del n 2, che nel punto $\overline{X}'$ è verificata la condizione richiesta. Dunque, escluso al più un insieme di punti di misura nulla (su C_0), dell' arco di C_0 di estremi

Per le condizioni in cui ora ci si è posti, è:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{k}{c} \cdot \frac{c}{h} \right) = 0$$

Dunque si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{s}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{s}{k} \lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = 0$$

Siano ora $\eta = \eta(s)$, $\zeta = \zeta(s)$, $0 \leq s \leq \bar{s}$ le equazioni della curva $\mu_{x, \bar{h}_x}$, avendo scelto l'arco s come parametro e intendendo, come è stato detto, di contare gli archi, sulla curva ora detta, a partire dal suo primo estremo. Sia s_h il valore del parametro corrispondente al punto $H_{x,h}$. Come è stato osservato, quando $h \to 0$, è $s_h \to 0$. Detti $\bar{\mathrm{N}} > 0$ e $\bar{P} > 0$ due numeri tali che sia, in tutto A_0:

$$| \mathrm{N}(x, y, z) | < \bar{\mathrm{N}}, \qquad | P(x, y, z) | < \bar{P},$$

si ottiene:

$$\left| \frac{1}{h} \int_{\mu_{x,h}} \mathrm{N}(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_0^{s_h} \{ \mathrm{N}[x, \eta(s), \zeta(s)]\, \eta'(s) + P[x, \eta(s), \zeta(s)]\, \zeta'(s) \}\, ds \right| <$$

$$< \{ \bar{\mathrm{N}} + \bar{P} \} \frac{1}{h} \int_0^{s_h} \{ | \eta'(s) | + | \zeta'(s) | \}\, ds \leq \{ \bar{\mathrm{N}} + \bar{P} \} \frac{1}{h} \sqrt{2}\, s_h$$

e perciò, per quanto sopra si è osservato:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{J_{x+h}} \mathrm{N}(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz - \int_{J_x} \mathrm{N}(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz \right\} = 0.$$

$H'_{x-\bar{h}_x}$ e $H'_{x+\bar{h}_x}$ se H'_x è un punto di C_0 distinto degli estremi, oppure di estremi H'_{a_0} e $H'_{a_0+\bar{h}_{a_0}}$ (di estremi $H'_{b_0-h_{b_0}}$ e H'_{b_0}) nel caso che si tratti del primo (secondo) estremo di C_0, in ognuno dei punti rimanenti in cui la tangente alla C_0 esiste ed è parallela all'asse x, è soddisfatta la condizione richiesta. Applicando il teorema di Pincherle-Borel si deduce che i punti della C_0 in cui esiste la tangente alla C_0 la quale risulti parallela all'asse x e nei quali non vale la proprietà in discorso, costituiscono un insieme di misura nulla (sulla C_0).

Anche nel caso attuale si conclude perciò che esiste la derivata parziale rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ nel punto $\overline{H}_x \equiv (x, \overline{y}, \overline{z})$ derivata che è ancora data dalla (2).

5. — Supponiamo ora che $H_x \equiv (x, y, z)$ sia un qualunque punto interno di $E_x(H'_x)$ (e quindi di A) e dimostriamo che nel punto H_x esiste la derivata parziale rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$. Si congiunga $\overline{H}_x$ con H_x mediante una curva ν_x continua e rettificabile tutta *interna* a $E_x(H'_x)$ e rappresentata dalle equazioni $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$, $0 \leq \tau \leq \overline{\tau}$ con le $y(\tau)$, $z(\tau)$ funzioni continue aventi derivate limitate in tutto $(0, \overline{\tau})$.

Nel caso che il punto H_x appartiene a j_x, come curva ν_x si prenda l'arco j_x che unisce i punti H_x e $\overline{H}_x$, percorso nel senso da $\overline{H}_x$ a H_x.

Si conducano per i punti di ν_x le parallele all'asse x. Si ottiene così una superficie cilindrica di direttrice ν_x e generatrici parallele all'asse x. Esiste allora un numero $h'_x > 0$ tale che la riunione di quella parte di superficie cilindrica ora detta compresa fra i piani $\omega_{x-h'_x}$ e $\omega_{x+h'_x}$ e di quella parte di superficie S_x (n. 2, *i i*), α)) compresa fra questi stessi piani, dà luogo a una superficie S'_x avente le proprietà indicate nel n. 2, *ii*), α). Si prova pertanto la derivabilità rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ nel punto $H_x \equiv$ $\equiv (x, y, z)$ assegnato, come prima è stata provata la derivabilità rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ nel punto $\overline{H} \equiv (x, \overline{y}, \overline{z})$, quando la superficie S'_x prende il posto della S_x.

6. — Si trova, dunque, supposta sempre verificata la condizione $I)_\alpha$ del n. 2 che, prescindendo dai punti interni di A_0 che si trovano su un insieme di piani ω_x pei quali i valori di x costituiscono un insieme di misura nulla su (a_0, b_0), in ogni altro punto $H_x \equiv (x, y, z)$ interno di A_0 esiste la derivata parziale rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$:

$$\varphi'_x(x, y, z) = \psi(x, y, z) + \chi(x) \tag{3}$$

dove:

$$\psi(x, y, z) = \int_{\lambda_x} \mathrm{N_x}(x, y, z)\, dy + \mathrm{P_x}(x, y, z)\, dz$$

$$\chi(x) = -\mathrm{N}[x, y_0(x), z_0(x)]\, y'_0(x) - \mathrm{P}[x, y_0(x), z_0(x)]\, z'_0(x)$$

essendo, come ora faremo vedere, λ_x una qualunque curva (piana) continua e rettificabile, che unisce i punti H'_x e H_x nel verso da H'_x a H_x e tutta interna, tranne al più H'_x, all'insieme $E_x(H'_x)$ [17].

---

[17] La formula (3) trovata è identica a quella stabilita nel n. 3 *a*) Nota lincea (loc. cit [1]), nel caso lì considerato, in cui la curva C_0 è completamente interna al campo A. Per maggior chiarezza si ritiene conveniente sviluppare i calcoli che allora, per esigenze

Dimostriamo quanto si è ora affermato.

Sia dunque x tale che $a_0 < x < b_0$ e tale che esista la derivata parziale rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ in ogni punto interno ad A_0 e appartenente

---

tipografiche, furono omessi. Supponiamo che x sia tale che $a_0 < x < b_0$ e tale che esistano le derivate $y_0'(x)$ e $z_0'(x)$.

Poichè è, adoperando le notazioni introdotte nel n. 3 *a)* della Nota suddetta:

$$\varphi(x, y, z) = \int_{y_0(x)}^{y} \mathrm{N}(x, y, z)\, d y + \int_{z_0(x)}^{z} \mathrm{P}[x, y_0(x), z]\, d z$$

applicando la regola di derivazione per gli integrali dipendenti dal parametro x, si ha:

$$\varphi_x'(x, y, z) = \int_{y_0(x)}^{y} \mathrm{N_x}(x, y, z)\, d y - \mathrm{N}[x, y_0(x), z]\, y_0'(x) +$$

$$+ \int_{z_0(x)}^{z} \{\mathrm{P_x}[x, y_0(x), z] + \mathrm{P_y}[x, y_0(x), z]\, y_0'(x)\}\, d z - \mathrm{P}[x, y_0(x), z_0(x)]\, z_0'(x) =$$

$$= \int_{H'H} \mathrm{N_x}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P_x}(x, y, z)\, d z + \int_{z_0(x)}^{z} \mathrm{P_y}[x, y_0(x), z]\, y_0'(x)\, d z -$$

$$- \mathrm{N}[x, y_0(x), z]\, y_0'(x) - \mathrm{P}[x, y_0(x), z_0(x)]\, z_0'(x)$$

e poichè è:

$$\int_{z_0(x)}^{z} \mathrm{P_y}[x, y_0(x), z]\, y_0'(x)\, d z - \mathrm{N}[x, y_0(x), z]\, y_0'(x) =$$

$$= \int_{z_0(x)}^{z} \mathrm{P_y}[x, y_0(x), z]\, y_0'(x)\, d z - y_0'(x) \Big\{ \mathrm{N}[x, y_0(x), z_0(x)] + \int_{z_0(x)}^{z} \mathrm{N_z}[x, y_0(x), z]\, d z =$$

$$= y_0'(x) \int_{z_0(x)}^{z} \{\mathrm{P_y}[x, y_0(x), z] - \mathrm{N_z}[x, y_0(x), z]\}\, d z - y_0'(x)\, \mathrm{N}[x, y_0(x), z_0(x)]$$

ed essendo, in tutti i punti interni ad A: $\mathrm{N_z} = \mathrm{P_y}$ si trova la formula che si voleva provare, intendendo, come si può vedere in modo analogo a quanto ora sarà provato nel testo, nel caso considerato in questo lavoro, che $H'H$ sia una qualunque curva continua e rettificabile che sul piano $x = \text{cost}$, unisce i due punti H' e H nel verso da H' a H. La formula vale dunque in ogni punto di A interno all'insieme dei punti (x, y, z) distanti da C_0 non più di ϱ_0 e per cui $a_0 < x < b_0$ e tale inoltre che esistano le derivate $y_0'(x)$ e $z_0'(x)$

al piano ω_x. Si consideri la superficie S_x corrispondente al punto H'_x di C_0 di ascissa x e si dica, come al solito, j_x la curva intersezione di S_x con il piano ω_x. Sia ora λ_x una curva (del resto qualunque) continua e rettificabile che unisce, sul piano ω_x, i due punti H'_x e $H_x \equiv (x, y, z)$ nel verso da H'_x a H_x e tutta interna, tranne al più H'_x, all'insieme $E_x(H'_x)$. Se ν_x è una curva piana continua e rettificabile tutta interna a $E_x(H'_x)$ che unisce i punti $\overline{H}_x$ (secondo estremo di j_x) e H_x nel verso da $\overline{H}_x$ a H_x, la quale sia rappresentata dalle equazioni $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$ $(0 \leq \tau \leq \bar{\tau})$ con le $y(\tau)$, $z(\tau)$, funzioni continue, con derivate limitate in tutto $(0, \bar{\tau})$, per quanto fu detto, si ha:

$$\psi(x, y, z) = \int_{j_x} \mathrm{N_x}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P_x}(x, y, z)\, d z +$$

$$+ \int_{\nu_x} \mathrm{N_x}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P_x}(x, y, z)\, d z$$

E analogamente, se si unisce un punto qualunque $\tilde{H}_x$ di j_x (che non sia H'_x) con il punto H_x mediante una curva $\tilde{\nu}_x$ (piana) continua e rettificabile analoga alla ν_x si ha, se $\tilde{j}_x$ è l'arco di j_x di estremi H'_x e $\tilde{H}_x$, tenendo presente il ragionamento sviluppato per dimostrare la derivabilità parziale rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ nel punto H_x, che è:

$$\psi(x, y, z) = \int_{\tilde{j}_x} \mathrm{N_x}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P_x}(x, y, z)\, d z + \int_{\tilde{\nu}_x} \mathrm{N_x}(x, y, z)\, d y + \mathrm{P_x}(x, y, z)\, d z\,.$$

Ciò detto, supposto che H'_x sia un punto frontiera di $E_x(H'_x)$, fissato un numero $\lambda > 0$, si determini, in base alla condizione T' del n. 1, il numero $r > 0$ corrispondente al punto H'_x, tale cioè che due punti qualunque interni a $E_x(H'_x)$ del cerchio del piano ω_x di centro H'_x e raggio r si possano congiungere con una curva continua e rettificabile di lunghezza minore di λ e tutta interna a $E_x(H'_x)$. Se poi H'_x è un punto interno di $E_x(H'_x)$ quanto si è ora affermato è immediato.

Ne viene che si possono trovare un punto J_x di j_x e un punto L_x di λ_x, sufficientemente prossimi al punto H'_x, in modo che essi siano congiunti con una curva σ_x continua e rettificabile di lunghezza minore di λ, tutta interna a $E_x(H'_x)$ e in modo che i due archi $j_{x,1}$ (di j_x) di estremi H'_x e J_x-

e $\lambda_{x,1}$ (di λ_x) di estremi H'_x e L_x, siano entrambi di lunghezza minore di λ. Poichè è, detto $\lambda_{x,2}$ l'arco di λ_x di estremi L_x e H_x:

$$\psi(x,y,z)=\int_{j_x} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z+\int_{\nu_x} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z=$$

$$=\int_{j_{x,1}} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z+\int_{\sigma_x} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z+$$

$$+\int_{\lambda_{x,2}} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z+\int_{\lambda_{x,1}} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z-$$

$$-\int_{\lambda_{x,1}} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z$$

e poichè è:

$$\int_{\lambda_{x,1}} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,dy+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z+\int_{\lambda_{x,2}} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z=$$

$$=\int_{\lambda_x} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z$$

si deduce:

$$\left|\psi(x,y,z)-\int_{\lambda_x} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z\right|\leq$$

$$\leq\left|\int_{j_{x,1}} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z\right|+\left|\int_{\sigma_x} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z\right|+$$

$$+\left|\int_{\lambda_{x,1}} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z\right|$$

e poichè il numero $\lambda > 0$ è arbitrario, i tre integrali al secondo membro si possono rendere ciascuno in valore assoluto, arbitrariamente piccoli. Come si voleva è dunque:

$$\psi(x,y,z)=\int_{\lambda_x} \mathrm{N_x}(x,y,z)\,d\,y+\mathrm{P_x}(x,y,z)\,d\,z\,.$$

Facciamo ora vedere che, detto E l'insieme di misura nulla, su (a_0, b_0), dei valori x di (a_0, b_0) tali che nei punti (x, y, z), con x appartenente ad E, interni ad A_0, la φ'_x non risulta definita, la $\psi(x, y, z)$ è funzione delle tre variabili x, y, z, uniformemente continua nell'insieme dei punti interni di A_0, per cui x appartiene a un insieme chiuso F di misura prossima quanto si vuole alla misura dell'insieme complementare di E rispetto ad (a_0, b_0). In altre parole facciamo vedere che per ogni numero $\bar{\varepsilon} > 0$ si può determinare un numero $d > 0$ tale che, se x è un qualunque punto di $(a_0, b_0$ che appartiene ad F, se $|h| \leq d$, $|k| \leq d$, $|l| \leq d$, qualunque sia) il punto (x, y, z) di $E_x(H'_x)$, purchè il punto $(x+h, y+k, z+l)$ appartenga ad $E_x(H'_x)$, si ha:

$$|\psi(x+h, y+k, z+l) - \psi(x, y, z)| < \bar{\varepsilon}.$$

Ora quanto si vuole provare risulta con considerazioni analoghe a quelle sviluppate sopra quando si è provata la continuità uniforme della $\varphi(x, y, z)$ nell'insieme di punti interni di A_0.

7. — *a*) Nel caso che nel punto H'_x $(a_0 < x < b_0)$ esista la tangente t_x alla C_0 che non risulti parallela all'asse x e sia, in H'_x, soddisfatta l'ipotesi 2)$_\alpha$ del n. 2, *ii*), per provare, anche in questo caso, la derivabilità parziale rispetto a x a destra di $\varphi(x, y, z)$ nel punto $\bar{H}_x \equiv (x, \bar{y}, \bar{z})$, si proietti, ortogonalmente, la curva j_x, intersezione della superficie S_x con il piano ω_x, sul piano ω_{x+h} $(0 < h \leq \bar{h}_x)$ e si dica $\bar{j}_x$ la curva proiezione e $H'_{x,h} \equiv [x+h, y_0(x), z_0(x)]$ la proiezione ortogonale di H'_x su ω_{x+h}. Il luogo dei punti che sono le proiezioni ortogonali su ω_{x+h} dei punti dell'arco di C_0 di estremi H'_x e H'_{x+h} è la curva $\mu'_{x,h}$ che unisce i punti $H'_{x,h}$ e H'_{x+h} nell'ordine da $H'_{x,h}$ a H'_{x+h}, la quale possiede tangente, τ_x, nel punto $H'_{x,h}$ data dalla proiezione ortogonale su ω_{x+h} di t_x. Se $\bar{H}_{x+h} \equiv (x+h, \bar{y}, \bar{z})$ è la proiezione ortogonale di $\bar{H}_x$ su ω_{x+h} si ha:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h, \bar{y}, \bar{z}) - \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{j_{x+h}} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, dy + \mathrm{P}(x+h, y, z)\, dz - \right.$$

$$\left. - \int_{j_x} \mathrm{N}(x, y, z)\, dy + \mathrm{P}(x, y, z)\, dz \right\} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{j_{x+h}} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, dy + \mathrm{P}(x+h, y, z)\, dz - \int_{\bar{j}_x} \mathrm{N}(x+h, y, z) dy + \mathrm{P}(x+h, y, z) dz + \right.$$

$$+\int_{j_x} N(x+h, y, z)\, dy + P(x+h, y, z)\, dz - \int_{j_x} N(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz \Big\} .$$

Ora è:

$$\frac{1}{h}\Big\{\int_{j_{x+h}} N(x+h, y, z)\, dy + P(x+h, y, z)\, dz - \int_{j_x} N(x+h, y, z)\, dy + P(x+h, y, z)\, dz\Big\} =$$

$$= -\frac{1}{h}\int_{\mu'_{x,h}} N(x+h, y, z)\, dy + P(x+h, y, z)\, dz .$$

Si definiscano, secondo un lemma di LEBESGUE (18), le funzioni N e P in tutto lo spazio (x, y, z) in modo che esse risultino continue in tutto il suddetto spazio.

Proiettando ortogonalmente la curva $\mu'_{x,h}$ sul piano ω_x si ottiene una curva $\mu_{x,h}$ e si ha:

$$\int_{\mu'_{x,h}} N(x+h, y, z)\, dy + P(x+h, y, z)\, dz =$$

$$= \int_{\mu_{x,h}} N(x, y, z)\, dy + P(x, y, z)\, dz + \int_{\mu_{x,h}} \varepsilon_N(h)\, dy + \varepsilon_P(h)\, dz$$

dove $\varepsilon_N(h)$, $\varepsilon_P(h)$ tendono a zero uniformemente, quando $h \to 0$.

Si ha:

$$\left| \int_{\mu_{x,h}} \varepsilon_N(h)\, dy + \varepsilon_P(h)\, dz \right| < \sqrt{2} \,.\, \sigma' \,.\, s$$

avendo indicato con s la lunghezza dell'arco $\mu_{x,h}$ e avendo supposto h sufficientemente piccolo in modo che risulti $|\, \varepsilon_N(h) \,| < \sigma'$, $|\, \varepsilon_P(h) \,| < \sigma'$, essendo $\sigma' > 0$ un numero arbitrario prefissato.

---

(18) H. LEBESGUE: *Sur le problème de Dirichlet*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIV, 1907, pp. 371-402, p. 379; vedi anche L. TONELLI, loc. cit. (6) p. 383.

Si ha perciò, essendo, per quanto ora è stato detto, (si tenga presente che $\lim_{h \to 0} \frac{s}{h}$ esiste finito)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\mu_{x,h}} \varepsilon_N(h)\, d\, y + \varepsilon_P(h)\, d\, z = 0 :$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{j_{x+h}} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, d\, y + P(x+h, y\, z)\, d\, z - \right.$$

$$\left. - \int_{\bar{j}_x} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, d\, y + P(x+h, y, z)\, d\, z \right\} =$$

$$= - \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\mu_{x,h}} \mathrm{N}(x, y, z)\, d\, y + P(x, y, z)\, d\, z.$$

Con considerazioni analoghe a quelle sviluppate nel caso dell'ipotesi $I)_\alpha$ del n. 2, si trova che tale limite è eguale a:

$$\chi(x) = - \mathrm{N}[x, y_0(x), z_0(x)]\, y_0'(x) - P[x, y_0(x), z_0(x)]\, z_0'(x).$$

Si ha poi, analogamente a quanto è stato provato nel caso dell'ipotesi $I)_\alpha$ del n. 2:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_{\bar{j}_x} \mathrm{N}(x+h, y, z)\, d\, y + P(x+h, y, z)\, d\, z - \right.$$

$$\left. - \int_{j_x} \mathrm{N}(x, y, z)\, d\, y + P(x, y, z)\, d\, z \right\} = \int_{j_x} \mathrm{N}_x(x, y, z)\, d\, y + P_x(x, y, z)\, d\, z.$$

Si prova dunque che esiste la derivata parziale destra rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ nel punto $\bar{H}_x$ data ancora dalla (2). E così, analogamente, esiste la derivata parziale sinistra rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ nel punto $\bar{H}_x$ data sempre dalla (2). Come è stato fatto, nel caso dell'ipotesi $1)_\alpha$ del n. 2, si prova finalmente che esiste la derivata parziale rispetto a x di $\varphi(x, y, z)$ in ogni punto interno di A_0, derivata data dalla (3) col significato ivi indicato per la curva λ_x.

b) Il lettore si renderà ben conto di come va modificato il ragionamento, nel caso attuale, quando la tangente t_x alla curva C_0 nel punto H_x' è parallela all'asse x, analogamente a quanto è stato fatto nel caso che sia verificata l'ipotesi $I)_\alpha$ del n. 2.

Si conclude dunque che anche nel caso che stiamo considerando esiste la derivata parziale $\varphi'_x(x, y, z)$ di $\varphi(x, y, z)$ in ogni punto interno di A_0 eccetto in quei punti (x, y, z) per cui $a_0 < x < b_0$ e tali che x non appartiene a un insieme di misura nulla di (a_0, b_0). La φ'_x ha poi le proprietà indicate sopra nel caso dell'ipotesi $I)_\alpha$ del n. 2.

8. — Nel caso che siano verificate le ipotesi $III)_\alpha$ oppure $IV)_\alpha$ il lettore noterà da sè che valgono gli stessi ragionamenti sviluppati sopra, a seconda che si tratti di provare la derivabilità parziale a destra oppure a sinistra di $\varphi(x, y, z)$.

9. — Si osservi ora che, per la quasi continuità della funzione $\chi(x)$ nell'intervallo (a_0, b_0) si può trovare, in corrispondenza a un numero $\eta > 0$, un insieme chiuso E' di (a_0, b_0) tale che $m E' < \eta$ e in modo che nel complementare di E' rispetto ad (a_0, b_0) la $\chi(x)$ risulta continua. Ne viene allora, tenendo presente quanto fu detto alla fine del n. 6, che la funzione $\varphi'_x(x, y, z)$ risulta uniformemente continua nell'insieme dei punti (x, y, z) di A_0 per cui x non appartiene a un opportuno insieme E^* misurabile di (a_0, b_0) di misura minore di η. In ogni punto di ciascuna curva C: $y = y(x)$, $z = z(x)$, $a_0 \leq x \leq b_0$, appartenente ad A_0 e per cui l'ascissa x non appartiene all'insieme ora detto, e così in ogni punto di C_0 dello stesso tipo, si ha [19]:

$$(4) \qquad d\,\varphi(x, y, z) = \varphi'_x(x, y, z)\,d\,x + \mathrm{N}(x, y, z)\,d\,y + P(x, y, z)\,d\,z.$$

Basta d'ora in avanti modificare leggermente il ragionamento [20] della Nota lincea citata in [1] per provare la continuità dell'integrale (1) sulla curva C_0 considerata.

10. — Si passa ora al caso generale, al caso cioè in cui le curve C sufficientemente prossime a C_0 non siano definite nello stesso intervallo della C_0, con considerazioni analoghe a quelle sviluppate nel n. 3. *b*) della Nota lincea sopra ricordata, tenendo presente quanto abbiamo provato nei n^i. precedenti e anche le ipotesi g_1) e g_2) del n. 2 di questa Nota.

11. — Se la curva C_0 possiede infiniti punti eccezionali, se essa cioè non soddisfa alla condizione *i*) del n. 2 in una infinità numerabile di punti, *si supponga, oltre a quanto è stato ammesso all'inizio del n. 1, relativamente*

---

(19) La (4) che è valida nei punti delle curve C e C_0 indicati è identica a quella che compare a pag. 43 della Nota lincea citata in (1) e che vale anch'essa nei punti delle curve C e C_0 dello stesso tipo di quelli indicati nel testo, nel caso attuale.

(20) La (6) di p. 43 della Nota lincea cit. in (1) si stabilisce tenendo presente la continuità uniforme della funzione $\psi(x, y, z)$ nell'insieme dei punti (x, y, z) di A_0 per cui x non appartiene a E^*, e inoltre che è $m E^* < \eta$.

alle funzioni M, N, P *e al campo* A, *che esistano in tutti i punti di* A (anche sulla frontiera, dunque), *le derivate parziali* N_z *e* P_y *ivi continue.*

In tal caso, tenendo presente che è $N_z = P_y$ anche nei punti frontiera di A, si può ripetere il ragionamento sviluppato nei n[i]. 3, 4, 5, 6 e si ha che anche nelle condizioni attuali l'integrale (1) è continuo sulla curva C_0.

12. — ESEMPIO (21). L'esempio seguente mostra che mancando qualcuna delle condizioni imposte al campo A nel n. 1, l'integrale I_c *può non essere continuo* su tutte le curve assolutamente continue di A soddisfacenti alle condizioni indicate nel n. 2.

Nel campo A dei punti (x, y, z) tali che $y^2 + z^2 \geq x^2$ siano definite tre funzioni $M(x, y, z) \equiv 0$, $N(x, y, z) = -\dfrac{x^3 z}{y^2+z^2}$ se $y^2 + z^2 > 0$ e $N(x, y, z) = 0$ se $y^2 + z^2 = 0$, $P(x, y, z) = \dfrac{x^3 y}{y^2+z^2}$ se $y^2 + z^2 > 0$ e $P(x, y, z) = 0$ se $y^2 + z^2 = 0$.

Si noti che il campo A *contiene, dell'asse* x, *il solo punto* $(0, 0, 0)$ *e non soddisfa alle condizioni indicate nel n. 1.*

Le funzioni N *e* P *sono continue in* A. Infatti esse sono continue in tutti i punti (x, y, z) di A fuori dell'asse x. In tutti i punti di A, fuori di $(0, 0, 0)$ è poi:

$$|N|, |P| \leq \frac{|x|^3 \sqrt{y^2+z^2}}{y^2+z^2} = \frac{|x|^3}{\sqrt{y^2+z^2}} \leq \frac{|x|^3}{|x|} = |x|^2$$

e perciò $N(x, y, z)$ e $P(x, y, z)$ tendono a zero quando (x, y, z) tende a $(0, 0, 0)$. Ciò assicura che le funzioni N e P sono continue anche nel punto $(0, 0, 0)$. *Le derivate* N_x, P_x *sono continue in* A. Infatti è:

$$N_x = -\frac{3x^2 z}{y^2+z^2}, \quad P_x = \frac{3x^2 y}{y^2+z^2}$$

e perciò N_x, P_x sono continue in tutti i punti di A fuori dell'asse x. È poi, in tutti i punti di A fuori di $(0, 0, 0)$:

$$|N_x|, |P_x| \leq \frac{3|x|^2 \sqrt{y^2+z^2}}{y^2+z^2} = \frac{3|x|^2}{\sqrt{y^2+z^2}} \leq \frac{3|x|^2}{|x|} = 3|x|$$

e percio N_x e P_x tendono a zero quando (x, y, z) tende a $(0, 0, 0)$. Dunque, N_x e P_x sono continue anche nel punto $(0, 0, 0)$.

---

(21) Ringrazio il prof. Cesari che ha attirato la mia attenzione sull'esempio che segue.

Le derivate N_z *e* P_y *sono continue in* A *ed è, in tutti i punti di* A, $N_z = P_y$. Infatti è:

$$N_z = -x^3\left[\frac{1}{y^2+z^2} - \frac{z \cdot 2z}{(y^2+z^2)^2}\right] = x^3 \frac{z^2-y^2}{(y^2+z^2)^2}$$

$$P_y = x^3\left[\frac{1}{y^2+z^2} - \frac{y \cdot 2y}{(y^2+z^2)^2}\right] = x^3 \frac{z^2-y^2}{(y^2+z^2)^2}$$

e anche queste funzioni sono continue in tutti i punti di A fuori dell'asse x. È poi, in tutti i punti di A, fuori di $(0, 0, 0)$:

$$|N_z|, |P_y| \leq |x|^3 \frac{y^2+z^2}{(y^2+z^2)^2} = \frac{|x|^3}{y^2+z^2} \leq \frac{|x|^3}{|x|^2} = |x|$$

e quindi N_z e P_y tendono a zero quando (x, y, z) tende a $(0, 0, 0)$. Dunque tali derivate sono continue anche nel punto $(0, 0, 0)$.

Sia C_0 la curva (assolutamente continua) costituita dal punto $(0, 0, 0)$ e $\{C_n\}$ la successione di curve (assolutamente continue) tale che:

$$C_n : y = \frac{1}{n}\cos 3\,n^4\left(x - \frac{1}{3\,n}\right), z = \frac{1}{n}\operatorname{sen} 3\,n^4\left(x - \frac{1}{3\,n}\right), \frac{1}{3\,n} \leq x \leq \frac{2}{3\,n}.$$

La curva C_0 appartiene al campo A e poichè è, sulla curva C_n,

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{n^2} > \frac{4}{9\,n^2} \geq x^2 \geq \frac{1}{9\,n^2}$$

ne viene che le curve C_n sono tutte *interne* ad A. Per tutti i punti di C_n è poi:

$$x^2 + y^2 + z^2 < \frac{4}{9\,n^2} + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{n^2}$$

e quindi C_n tende a C_0 quando $n \to \infty$.

Sulla curva C_n è:

$$M + N\,y' + P\,z' = x^3\,n^2\,\frac{1}{n}\operatorname{sen} 3\,n^4\left(x - \frac{1}{3\,n}\right) \cdot \frac{1}{n} \cdot 3\,n^4 \operatorname{sen} 3\,n^4\left(x - \frac{1}{3\,n}\right) +$$

$$+ x^3\,n^2\frac{1}{n}\cos 3\,n^4\left(x - \frac{1}{3\,n}\right) \cdot \frac{1}{n} \cdot 3\,n^4 \cos 3\,n^4\left(x - \frac{1}{3\,n}\right) = 3\,n^4\,x^3 \geq 3\,n^4\frac{1}{27\,n^3} = \frac{n}{9}$$

e perciò :

$$I_{C_n} = \int_{C_n} (\mathrm{M} + \mathrm{N}\, y' + \mathrm{P}\, z')\, d\, x > \int_{\frac{1}{3n}}^{\frac{2}{3n}} \frac{n}{9}\, d\, x = \frac{n}{9}\, \frac{1}{3\, n} = \frac{1}{27}\, .$$

Dunque, per ogni n, è:

$$I_{C_n} > \frac{1}{27} \qquad\qquad n = 1\, , 2\, , \ldots$$

mentre $I_{C_0} = 0$. L'integrale I_C *non* è dunque *continuo sulla curva* C_0.

Ne viene che se C_0^* è una curva assolutamente continua appartenente ad A avente il primo estremo nel punto $(0\, , 0\, , 0)$ e soddisfacente alle condizioni indicate nel n. 2, l'integrale I_C non è continuo su C_0^*.

13. — Facciamo ora vedere che la continuità dell'integrale I_C stabilita nella Nota lincea più volte citata sotto le condizioni ivi indicate, per le curve assolutamente continue *completamente interne* al campo A, può essere estesa a *tutte* le curve assolutamente continue di A con l'aggiunta di qualche condizione complementare relativa alle funzioni M, N, P. Più precisamente si può affermare che, supposte verificate le condizioni del teorema del n. 3 della Nota lincea e, ammesso che la M sia definita e continua in *tutti* i punti di A, *l'integrale* I_C *è una funzione continua su ogni curva assolutamente continua di* A *se è soddisfatta la seguente condizione :*

« le funzioni N e P possono definirsi in un nuovo campo A' contenente tutti i punti del campo A come punti *interni* e in modo che in A' le due funzioni godano delle stesse proprietà ammesse per il campo A e coincidano, in quest'ultimo campo, con le funzioni date ».

Poichè, per il lemma di LEBESGUE [22], la funzione $\mathrm{M}(x\, , y\, , z)$ può ritenersi definita e continua in A', quanto abbiamo affermato risulta evidente.

14. OSSERVAZIONE I. -- Prima di terminare osserviamo che a proposito dell'integrale I_C si possono ripetere considerazioni analoghe a quelle sviluppate da S. FAEDO in un suo lavoro [23].

OSSERVAZIONE II. — L'ipotesi che le derivate parziali N_z e P_y esistano finite e continue in tutti i punti interni ad A, quando si è nelle condizioni indicate nel n. 1 e in quelle del n. 2, oppure, se ci si mette nelle condi-

---

(22) loc. cit. (18) p. 383

(23) S. FAEDO: *Un nuovo tipo di funzionali continui* Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, s. v. Vol. IV, 1943, pp. 223-249. pp. 223-233

zioni del n. 6, in tutti i punti di A e soddisfacenti, là dove esistono, sempre all'uguaglianza $N_z = P_y$, in base a un teorema enunciato da MONTEL e dimostrato da LOOMAN, MENCHOFF e, rigorosamente, da WILKOSZ ([24]), puo essere sostituita, in tutte le nostre considerazioni sviluppate in questo lavoro e nella Nota lincea citata in ([1]), con quella, più generale, che esse soddisfino quasi dappertutto alla relazione $N_z = P_y$. In tale ipotesi, infatti, secondo il risultato di LOOMAN MENCHOFF-WILKOSZ, per ogni x, l'espressione $N(x, y, z)\, d\, y + P(x, y, z)\, d\, z$ è un differenziale totale in tutti i punti interni al campo piano Ω considerato nel n. 3 *a*) della Nota lincea, oppure se si è nelle condizioni del n. 1 e del n. 2, oppure del n 6 di questo lavoro, in tutti i punti interni al campo piano $E_x(H'_x)$ essendo, al solito, H'_x il punto della curva C_0 di ascissa x.

([24]) H. LOOMAN: *Ueber die Cauchy Riemannschen Differentialgleichungen*. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1923 pp. 97-108. W. WILKOSZ: *Sur le theorème integral de Cauchy*. Annales Soc. Polonaise, 11 (1932) pp 19-27. Vedi anche MENCHOFF *Les conditions de monogénéité*. Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann. Paris, p 9

[*Pervenuto alla Redazione il 1 Giugno 1949*]

ALDO GHIZZETTI - *Direttore responsabile*. Finito di stampare il 16 Agosto 1949.