ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

Condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 14, nº 1-4 (1948), p. 47-79
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_14_1-4_47_0>

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI SOPRA UNA SUPERFICIE IN FORMA PARAMETRICA

di LAMBERTO CESARI (Bologna).

E. J. MAC SHANE (¹), nell'intento di estendere alle superficie continue in forma parametrica

$$(1) \qquad S: \qquad x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\, Q=(0, 1, 0, 1),$$

i risultati stabiliti da TONELLI (²) per le curve continue in forma parametrica, ha dato fin dal 1932 varie condizioni necessarie ed altre sufficienti per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie.

E. J. MC SHANE si è limitato a considerare le superficie in forma parametrica che sono rappresentate da funzioni lipschitziane (³), oppure da funzioni assolutamente continue secondo TONELLI con derivate parziali prime integrabili L^2 (⁴). Per tali superficie esistono quasi ovunque in Q i Jacobiani ordinari delle tre coppie (y, z), (z, x), (x, y) e quindi l'integrale $\mathfrak{J}_S$ viene definito dall'integrale di Lebesgue

$$(2) \qquad \mathfrak{J}_S=\iint_Q F\left[x, y, z, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right] du\, dv.$$

E. J. MC SHANE suppone inoltre che le superficie S siano interamente costituite di punti interni del campo chiuso A dello spazio (x, y, z) nel quale è definita la funzione $F\,[x, y, z, U, V, W]$ soddisfacente alle solite condizioni di continuità ed omogeneità.

(¹) E. J. MC SHANE: *On the necessary condition of Weierstrass in the multiple integral problem of the Calculus of Variations.* Annals of Math. Ser. II, vol. 32 (1931), pp. 723-733; *On the semi-continuity of double integrals in the Calculus of Variations*, id. id. vol. 33 (1932) pp. 460-484; *Integrals over surfaces in parametric form*, id. id. vol. 34 (1933) pp. 815-838.

(²) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Zanichelli, 2 voll., Bologna, 1923.

(³) Loc. cit. in (¹), secondo lavoro citato.

(⁴) Loc. cit. in (¹) terzo lavoro citato.

T. RADÓ ([5]), durante gli anni di guerra, ha esteso i risultati di E. J. MC SHANE, facendo l'ipotesi, più debole, che le superficie siano rappresentabili mediante funzioni dotate quasi ovunque di derivate parziali prime, con Jacobiani ordinari integrabili L. L'estensione di RADÓ è notevole perchè le condizioni dette sono soddisfatte per ogni superficie di area finita secondo Lebesgue che ammetta una rappresentazione per la quale l'area è data dall'ordinario integrale classico calcolato con Jacobiani ordinari. In particolare soddisfano alle condizioni dette, per un teorema di C. B. MORREY ([6]) tutte le superficie « non degeneri » di area finita secondo Lebesgue.

Il presente lavoro estende i risultati di E. J. MC SHANE e di T. RADÓ ([7]) supponendo da una parte che le superficie siano costituite di punti di A e non soltanto di punti interni come ammesso da E. J. MC SHANE, dall'altra supponendo che le superficie siano soltanto di area finita secondo Lebesgue e quindi indipendentemente da ogni particolare ipotesi circa la rappresentabilità delle superficie mediante funzioni dotate quasi ovunque di derivate parziali ordinarie. In proposito rilevo che, in un precedente lavoro ([8]), ho già stabilito che la nozione di integrale $\mathfrak{J}_S$ si può introdurre come integrale di Weierstrass per ogni superficie S di area finita secondo Lebesgue e tale integrale risulta indipendente dalla particolare rappresentazione (1) della superficie S. Inoltre per ogni rappresentazione della superficie S per la quale le tre coppie di funzioni (y, z), (z, x), (x, y) sono « assolutamente continue » ([9]), l'integrale $\mathfrak{J}_S$ così definito risulta dato dall'integrale di Lebesgue

$$\mathfrak{J}_S = \iint_Q F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)\, du\, dv, \tag{3}$$

([5]) T. RADÓ: *On the semicontinuity of double integrals in parametric form.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 51 (1942), pp. 336-361.

([6]) C. B. MORREY: *An analytic characterisation of surfaces of finite Lebesgue area.* Amer. Journ. of Math., Vol. LVII (1935), pp. 692-702. Inoltre L. CESARI: *Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie.* Annali Scuola Normale Sup. Pisa, Ser. II, Vol. XII (1943), pp. 63-84.

([7]) Questo confronto con i risultati di RADÓ è stato aggiunto durante la correzione delle bozze. Il presente lavoro fu redatto durante gli anni di guerra quando i risultati di RADÓ non erano ancora giunti in Italia.

([8]) L. CESARI: *a) La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica.* Annali Scuola Normale Sup. Pisa, Ser. II, Vol. XIII (1944), pp. 77-117. Cf. inoltre i miei precedenti lavori sulla quadratura delle superficie e sui problemi connessi; *b) Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica.* Boll. U. M. I., Ser. II, Anno IV (1942), pp. 109-117; *c) Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica.* Memorie Accademia d'Italia, Vol. XIII (1942), pp. 1323-1483; *d) Sulla trasformazione degli integrali doppi* (in corso di stampa); *e) Proprietà tangenziali delle superficie continue.* Commentarii Mathem. Helvetici. 1948.

([9]) Loc. cit. in ([8]) *a*) *b*).

ove H_1, H_2, H_3 sono i tre Jacobiani generalizzati relativi delle coppie (y, z), (z, x), (x, y). Tali Jacobiani si riducono a quelli ordinari ogniqualvolta le tre funzioni $x. y, z$ sono dotate, quasi ovunque in Q, di derivate parziali prime, o almeno, quasi ovunque in Q, di differenziale asintotico regolare ([10]). L'integrale (3) si riduce così all'integrale (2) ogniqualvolta questo ha un senso. Il presente lavoro è basato sulla mia precedente teoria per l'area delle superficie in forma parametrica ed è notevole rilevare come vari procedimenti dimostrativi di E. J. Mc Shane si possano adoperare anche nelle attuali generali condizioni.

Facendo uso della nozione ora ricordata di integrale $\mathfrak{J}_S$, estendo, nel presente lavoro, le condizioni sufficienti date di E. J. Mc Shane, alle superficie continue in forma parametrica di area finita secondo Lebesgue, costituite di punti di A, in condizioni cioè di pari generalità di quelle stabilite da Tonelli per le curve continue in forma parametrica. Dai teoremi stabiliti risulta in particolare che, anche nelle nuove condizioni, sono semicontinui inferiormente, 1°) gli integrali *definiti positivi quasi regolari* e 2°) gli integrali *semidefiniti positivi regolari,* in ogni classe di superficie, 3°) gli integrali *semidefiniti positivi quasi regolari* in ogni classe di superficie le cui aree sono superiormente limitate.

§ 1. - L'integrale $\mathfrak{J}_S$.

1\. - **La funzione** F. - Sia A un insieme chiuso dello spazio (x, y, z) (reale) e sia $F(x, y, z, u, v, w)$ una funzione ad un valore dei sei argomenti x, y, z, u, v, w, definita per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni terna (u, v, w) di numeri reali non tutti nulli. La funzione F soddisfi inoltre alle seguenti condizioni:

1ª) la funzione $F(x, y, z, u, v, w)$ è continua in ogni punto (x, y, z) di A e per ogni terna (u, v, w) di numeri reali non tutti nulli, come funzione dei sei argomenti x, y, z, u, v, w.

2ª) la funzione $F(x, y, z, u, v, w)$ è positivamente omogenea di grado 1 rispetto ad u, v, w, vale a dire, soddisfa alla uguaglianza

$$F(x, y, z, ku, kv, kw) = kF(x, y, z, u, v, w)$$

per ogni $k > 0$.

([10]) Loc. cit. in ([8]) *b*). Per la nozione di differenziabilità asintotica ed asintotica regolare cfr. H. Stepanoff: *Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale.* Rec. Math. Soc. Moscou, vol. 32 (1925), pp. 511-523; R. Caccioppoli: *Sul carattere infinitesimale delle superficie quadrabili.* Rend. Accad. Lincei, Ser. VI, vol. VII (1928), 1° sem., pp. 901-907; R. Caccioppoli e G. Scorza Dragoni: *Necessità della condizione di Weierstrass,* ecc., Mem. Accademia d'Italia, vol. IX (1938). pp. 251-268; T. Radó: *On the derivative of the Lebesgue area of continuous surfaces.* Fund. Math. Tom. XXX (1938), pp. 34-39.

Porremo $F(x, y, z, 0, 0, 0)=0$ in ogni punto (x, y, z) di A. In tal modo, in conseguenza delle precedenti condizioni, la F risulta continua anche in ogni punto $(x, y, z, 0, 0, 0)$, ove (x, y, z) è scelto comunque in A.

2. - **Le superficie continue** S. - Sia S una superficie continua, tutti i punti della quale appartengono ad A, e sia

$$(1) \qquad S: \quad x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\, Q\equiv(0, 1, 0, 1),$$

una sua rappresentazione. Siano

$$\begin{array}{lll} \Phi_1: & y=y(u, v), & z=z(u. v), \\ \Phi_2: & z=z(u, v), & x=x(u, v), \qquad (u, v)\,\varepsilon\, Q\equiv(0, 1, 0, 1), \\ \Phi_3: & x=x(u, v), & y=y(u, v), \end{array}$$

le relative trasformazioni piane.

Come è noto ([11]) condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie S sia di area finita secondo Lebesgue è che le tre trasformazioni Φ_1, Φ_2, Φ_3 siano a variazione limitata. L'area $L(S)$ della superficie risulta sempre $\geqslant$ all'integrale classico, calcolato con i jacobiani generalizzati. Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'area $L(S)$ sia data dall'integrale classico è che le tre trasformazioni Φ_1, Φ_2, Φ_3 siano assolutamente continue.

Io ho dimostrato inoltre ([12]) che ogni superficie continua di area finita secondo Lebesgue ammette almeno una (e quindi infinite) rappresentazioni sopra il quadrato fondamentale Q per le quali le tre trasformazioni Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono assolutamente continue.

3. - **L'integrale** $\mathfrak{J}_S$. - Nelle condizioni viste nel n. 1 e per ogni superficie continua S di area finita secondo Lebesgue tutta costituita di punti di A, io ho introdotto, in un precedente lavoro ([13]), la nozione di integrale $\mathfrak{J}_S$. Ho dimostrato inoltre i seguenti teoremi:

TEOREMA A. - L'integrale $\mathfrak{J}_S$ è indipendente dalla rappresentazione (1) della superficie S.

TEOREMA B. - Per ogni rappresentazione (1) della superficie S per la quale le tre trasformazioni piane Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono assolutamente continue risulta

$$\mathfrak{J}_S=\iint_Q F[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v),\ H_1(u, v),\ H_2(u, v),\ H_3(u, v)]\,du\,dv,$$

([11]) Loc. cit. in ([8]) *b*). Rimando ai lavori citati per i concetti e le notazioni adoperate.

([12]) L. CESARI: *Parametrizzazione delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue*. Annali di Matematica pura e applicata, Vol. 26 (1948), 2° Sem.

([13]) Loc. cit. in ([8]) *a*).

ove H_1, H_2, H_3 sono i tre Jacobiani generalizzati relativi delle trasformazioni Φ_1, Φ_2, Φ_3 e la funzione sotto il segno è integrabile secondo Lebesgue.

TEOREMA C. - Se S, S_n, $n=1, 2,\ldots$, sono superficie continue di area finita secondo Lebesgue, se

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n, S \| = 0 \quad (^{14}), \qquad \lim_{n\to\infty} L(S_n) = L(S),$$

allora, anche

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{J}_{S_n} = \mathfrak{J}_S .$$

4. - **La funzione $\mathcal{E}$ di Weierstrass.** - In questo e nei successivi numeri supporremo che la funzione F introdotta nel n. 1, soddisfi alle condizioni 1[a]) e 2[a]) di quel numero ed inoltre alla seguente:

3[a]) la funzione $F(x, y, z, u, v, w)$ sia dotata in ogni punto (x, y, z) di A e per ogni terna (u, v, w) di numeri non tutti nulli, delle derivate parziali F_u, F_v, F_w, continue in ognuno dei detti punti.

Dalla relazione

$$F(x, y, z, ku, kv, kw) = kF(x, y, z, u, v, w) \tag{2}$$

valevole per ogni $(x, y, z) \,\varepsilon\, A$, per ogni terna (u, v, w) di numeri non tutti nulli e per ogni $k > 0$, derivando rispetto ad u, oppure a v, o w, e dividendo per k, si ottengono le relazioni

$$F_u(x, y, z, ku, kv, kw) = F_u(x, y, z, u, v, w), \quad F_v = \ldots, \quad F_w = \ldots,$$

e quindi le funzioni F_u, F_v, F_w sono positivamente omogenee di grado 0 rispetto alle variabili u, v, w. Dalla (2) derivando rispetto a k e ponendo poi $k=1$ si ottiene la relazione di Eulero:

$$F(x, y, z, u, v, w) = uF_u + vF_v + wF_w .$$

Per ogni punto $(x, y, z) \,\varepsilon\, A$, per ogni terna (u, v, w) di numeri reali non tutti nulli e per ogni altra terna $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ pure di numeri reali non tutti nulli, poniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, y, z, u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) &= F(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) - \\ &- \bar{u}F_u(x, y, z, u, v, w) - \bar{v}F_v(x, y, z, u, v, w) - \bar{w}F_w(x, y, z, u, v, w),\end{aligned}$$

ossia, con ovvie notazioni,

$$\mathcal{E}(x, u, \bar{u}) = F(x, \bar{u}) - \sum_u \bar{u}F_u(x, u).$$

(14) Se S e S' sono due superficie continue, con $\| S, S' \|$ intendo la distanza secondo FRECHET delle due superficie. Con $\{ P, P' \}$, oppure con $\overline{PP'}$, indico la distanza tra i due punti P, P'.

Dalla relazione di EULERO si ottiene subito :

$$\mathcal{E}(x, u, \bar{u}) = F(x, \bar{u}) - F(x, u) - \sum_u (\bar{u} - u) F_u(x, u). \tag{3}$$

La funzione $\mathcal{E}(x, y, z, u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ è definita e continua per ogni punto (x, y, z) di A, per ogni terna (u, v, w) di numeri non tutti nulli e per ogni altra terna $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ di numeri pure non tutti nulli.

Essa è inoltre positivamente omogenea di grado zero rispetto alle variabili: u, v, w, positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

§ 2. - Un teorema di Franklin e Wiener.

5. - Siano (ξ, η) e (u, v) due piani *orientati* e siano Q un quadrato del piano (u, v) e Q' un quadrato del piano (ξ, η). Se $T: P' \equiv T(P)$, $P \varepsilon Q$, $P' \varepsilon Q'$ è una trasformazione piana, continua e biunivoca, tra Q e Q', allora la periferia Q^* di Q è trasformata da T nella periferia Q'^* di Q' e un dato verso su Q in un dato verso su Q'. Diremo che la trasformazine T continua e biunivoca è di indice positivo ([15]) se il verso positivo su Q^* si trasforma nel verso positivo su Q'^* (e quello negativo su Q^* in quello negativo su Q'^*).

Diremo che una trasformazione piana e continua T, anche non biunivoca, definita sul quadrato Q,

$$T: \qquad \xi = \xi(u, v), \qquad \eta = \eta(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon Q,$$

è *quasi lineare* in Q se è possibile dividere Q in un numero finito di triangoli $[t_i, i = 1, 2, \dots, n]$ in ciascuno dei quali le funzioni $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ sono lineari e pertanto sono date dalle formule

$$\xi = a_i u + b_i v, \quad \eta = c_i u + d_i v, \quad (u, v) \varepsilon t_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ove a_i, b_i, c_i, d_i sono numeri reali. Se poi T è una trasformazione tra Q e Q', continua, biunivoca e quasi lineare, allora i determinanti (Jacobiano) $a_i d_i - b_i c_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, sono tutti $\neq 0$ e di un solo segno e tale segno è positivo se la trasformazione T è di indice positivo.

Siano $m > 0$, $M > 0$, il più piccolo ed il più grande dei numeri $|a_i d_i - b_i c_i|$. Vale la seguente proposizione :

Se T è una trasformazione continua, biunivoca e quasi lineare, ad ogni poligono π di Q corrisponde su Q' un poligono $\pi' = T(\pi)$ e

$$m |\pi| \leq |\pi'| \leq M |T|.$$

([15]) Cfr. E. J. MAC SHANE, loc. cit. in ([1]), secondo lavoro citato.

Si ha infatti :

$$\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi t_i, \qquad \pi' = T(\pi) = \sum_{i=1}^{n} T(\pi t_i),$$

$$|\pi| = \sum_{i=1}^{n} |\pi t_i|, \qquad |\pi'| = |T(\pi)| = \sum_{i=1}^{n} |T(\pi t_i)|$$

$$T(\pi t_i) = |a_i d_i - b_i c_i| |\pi t_i|, \qquad (i=1, 2,..., n),$$

e quindi

$$m |\pi t_i| \leqslant T(\pi t_i) \leqslant M |\pi t_i|$$

da cui, sommando, segue senz'altro l'asserto.

6. - Possiamo dimostrare la seguente elementare proposizione :
Se

$$\Phi : \qquad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \varepsilon Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

è una trasformazione assolutamente continua, se

$$T : \qquad u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \varepsilon Q' \equiv (0, 1, 0, 1),$$

è una trasformazione continua, biunivoca e quasi lineare tra Q e Q', allora anche la trasformazione

$$\Phi' : \qquad x = x[u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)], \quad y = y[u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)], \qquad (\xi \eta) \varepsilon Q',$$

è assolutamente continua.

Sia infatti $[\pi_i', i=1, 2,..., n]$ una qualsiasi suddivisione di Q' in poligoni semplici. La trasformazione T fa corrispondere ad essa una suddivisione $[\pi_i, i=1, 2,..., n]$ di Q in poligoni semplici e si ha :

$$G(\Phi) = G(\Phi'), \quad G(\pi_i) = G'(\pi_i'), \qquad (i=1, 2,..., n),$$

e quindi da

$$G(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} G(\pi_i),$$

segue

$$G(\Phi') = \sum_{i=1}^{n} G'(\pi_i').$$

Siano ora $0 < m < M$ i numeri visti sopra, relativi alla trasformazione T.
Se $\varepsilon > 0$ è un numero arbitrario, esiste un numero $\delta > 0$ tale che per ogni gruppo $[\pi_i, i=1, 2,..., n]$ di poligoni semplici di Q a due a due senza punti in

comune e tali che $\Sigma|\pi_i|<\delta$ risulta $\Sigma g(\pi_i)<\varepsilon$. Se ora $[\pi_i', i=1, 2,..., n']$ è un qualunque gruppo di poligoni semplici di Q', a due a due senza punti interni in comune e tali che $\Sigma|\pi_i'|<\delta m$, allora ad esso corrisponde su Q un gruppo di poligoni $[\pi_i, i=1, 2,..., n]$, a due a due senza punti interni in comune e tali che $|\pi_i|<|\pi_i'|/m$, $i=1, 2,..., n$, $\Sigma|\pi_i|<\delta$ e, poichè $g(\pi_i')=g(\pi_i)$, risulta anche

$$\Sigma g(\pi_i)<\varepsilon.$$

La trasformazione Φ' è dunque assolutamente continua.

7. - OSSERVAZIONE. - Nelle condizioni del teorema precedente si dimostra facilmente che se $H(u, v)$ è lo Jacobiano generalizzato relativo della trasformazione Φ, se $H'(\xi, \eta)$ quello della trasformazione Φ', se $h(\xi, \eta)$ è quello elementare della trasformazione T, allora in quasi tutti i punti (u, v) di Q risulta :

$$H'(\xi, \eta)=H[u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)]\, h(\xi, \eta).$$

8. - P. FRANKLIN e N. WIENER ([16]) hanno dimostrato il seguente importante TEOREMA. - *Se* T: $P'\equiv T(P)$, $P\,\varepsilon\, Q\equiv[0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 1]$, $P'\,\varepsilon\, Q'\equiv$ $\equiv[0\leqslant\xi\leqslant 1,\ 0\leqslant\eta\leqslant 1]$ *è una trasformazione continua, biunivoca e di indice positivo tra i quadrati* Q *e* Q' *dei piani orientati* (u, v) *e* (ξ, η), *allora per ogni intero* n *esiste una trasformazione* T_n: $P'\equiv T_n(P)$, $P\,\varepsilon\, Q$, $P'\,\varepsilon\, Q'$, *la quale è continua, biunivoca, di indice positivo, quasi lineare e tale che, per ogni* $P\,\varepsilon\, Q$, $\{T(P), T_n(P)\}<1/n$.

§ 3. - Alcuni Lemmi preliminari.

9. - LEMMA 1. ([17]) - *Se* Q *e* Q' *sono due quadrati dei piani (orientati)* (u, v) *e* (ξ, η), *se la superficie piatta (trasformazione piana) di area finita secondo Lebesgue*

$$\Phi:\qquad x=x(u, v),\quad y=y(u, v),\qquad (u, v)\,\varepsilon\, Q\equiv(0, 1, 0, 1),$$

è assolutamente continua, allora ad ogni numero $\varepsilon>0$ *arbitrario si può far corrispondere un altro numero* $\delta>0$ *tale che per ogni altra superficie*

([16]) P. FRANKLIN e N. WIENER : *Analytical Approximations of Topological Trasformations.* Trans. Am. Math. Soc., vol. 28 (1926), p. 674.

([17]) Cfr. un analogo Lemma in condizioni particolari di E. J. MAC SAHNE, loc. cit. in ([1]), secondo lavoro citato, pag. 469.

piatta (trasformazione piana) di area finita secondo Lebesgue e pure assolutamente continua

$$\Phi' : \qquad x = x'(\xi, \eta), \quad y = y'(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta)\,\varepsilon\, Q' \equiv (0,\, 1,\, 0,\, 1),$$

con $\| \Phi, \Phi' \| < \delta$, *esiste un insieme chiuso V di punti di Q' per il quale*

$$\left| \iint_V H'(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \iint_Q H(u, v)\, du\, dv \right| < \varepsilon,$$

ove $H(u, v)$ e $H'(\xi, \eta)$ sono i Jacobiani generalizzati relativi delle trasformazioni Φ e Φ'.

Sia K un quadrato del piano (x, y) a lati paralleli agli assi x ed y, contenente interamente nel suo interno l'insieme $\Phi(Q)$.

Siano $\Psi(x, y\,;\, \Phi)$ e $n(x, y\,;\, \Phi)$ le funzioni caratteristiche (assoluta e relativa) della trasformazione Φ ([18]). Si ha $| n(x, y, \Phi) | \leqslant \Psi(x, y, \Phi)$ ed essendo Φ assolutamente continua e quindi anche a variazione limitata, la funzione $\Psi(x, y, \Phi)$, e quindi anche la funzione $n(x, y, \Phi)$, sono integrabili L.

Inoltre ([19])

$$\iint_Q H(u, v)\, du\, dv = \iint_K n(x, y\,;\, \Phi)\, dx\, dy. \tag{4}$$

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e sia $\sigma = \varepsilon/6$. Sia $\tau > 0$ un numero tale che, per ogni insieme misurabile h di punti di K con $| h | < \tau$, risulti

$$\iint_h \Psi(x, y\,;\, \Phi)\, dx\, dy < \sigma.$$

In forza di un mio precedente Teorema ([20]) esiste un gruppo di poligoni semplici $[\pi_i,\, i = 1, 2, \ldots, n]$ di Q a due a due senza punti interni in comune e tali che, indicata con c_i la curva continua e chiusa immagine della poligonale π_i^*, $i = 1, 2, \ldots, n$, risulti

$$| E | < \tau, \quad E = \sum_{i=1}^{n} c_i, \qquad T(\Phi) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) < \tau.$$

Sia I l'insieme dei punti (x, y) di K nei quali

$$\sum_{i=1}^{n} | O(x, y\,;\, c_i) | < \Psi(x, y\,;\, \Phi).$$

([18]) Loc. cit. in ([8]) *a*), *d*).
([19]) Loc. cit. in ([8]), *d*), § 5.
([20]) Cfr. loc. cit. in ([8]) *c*), p. 1367.

Come sappiamo (21) $|I|<\tau$ e, in quasi tutti i punti di $K-E-I$, risulta

$$\sum_{i=1}^{n} O(x, y\,;\, c_i) = n(x, y\,;\, \Phi).$$

Pertanto, da $|I|<\tau$, $|E|<\tau$, $|n(x, y\,;\, \Phi)| \leqslant \Psi(x, y\,;\, \Phi)$, segue

$$\begin{aligned}(5)\qquad &\left|\iint_K n(x, y\,;\, \Phi)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{n} \iint_K O(x, y\,;\, c_i)\, dx\, dy\right| = \\ &= \left|\iint_{E+I} n(x, y\,;\, \Phi)\, dx\, dy - \iint_{E+I} O(x, y\,;\, c_i)\, dx\, dy\right| \leqslant \\ &\leqslant \iint_{E+I} |n(x, y\,;\, \Phi)|\, dx\, dy + \iint_{E+I} \sum_{i=1}^{n} |O(x, y\,;\, c_i)|\, dx\, dy \leqslant \\ &\leqslant 2 \iint_{E+I} \Psi(x, y\,;\, \Phi)\, dx\, dy < 4\sigma.\end{aligned}$$

L'insieme $K-E$ è aperto e quindi esiste un gruppo finito di quadrati $[q_j, j=1, 2, \ldots, m]$, a due a due senza punti interni in comune, interamente costituiti, periferia compresa, di punti di $K-E$, e tali che

$$\sum_{j=1}^{m} |q_j| > |K-E| - \tau,$$

e quindi

$$\left|K - \sum_{j=1}^{m} q_j\right| < |E| + \tau < 2\tau.$$

Pertanto, posto $J = \sum_{j=1}^{m} q_j$ (i quadrati q_j sono considerati chiusi e perciò J è chiuso), risulta

$$\begin{aligned}(6)\qquad &\left|\sum_{i=1}^{n} \iint_J O(x, y\,;\, c_i)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{n} \iint_K O(x, y\,;\, c_i)\, dx\, dy\right| = \\ &= \left|\iint_{K-J} \sum_{i=1}^{n} O(x, y;\, c_i)\, dx\, dy\right| \leqslant \iint_{K-J} \Psi(x, y\,;\, \Phi)\, dx\, dy < 2\sigma.\end{aligned}$$

Sia 3δ la minima distanza dei quadrati q_j da E e sia

$$(7)\qquad \Phi' : \quad x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \qquad (\xi, \eta)\, \varepsilon\, Q',$$

(21) Cfr. loc. cit. in (8) *d*), § 3, Teorema II.

una qualsiasi superficie piatta (trasformazione piana) assolutamente continua e tale che $\| \Phi, \Phi' \| < \delta$. Esiste pertanto una trasformazione piana continua biunivoca e di indice positivo

$$T: \qquad \xi = \xi(u, v), \quad \eta = \eta(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

tale che, per ogni punto $P \equiv (u, v)$ di Q, posto

$$P' = T(P), \;\; P' \equiv (\xi, \eta)$$

risulti

$$\{ \Phi'(P'), \; \Phi(P) \} < 2\delta.$$

Diciamo $\omega(\delta)$ il modulo di continuità ([22]) della trasformazione (7) e sia $\varrho > 0$ un numero tale che $\omega(\varrho) < \delta$. Sia p il più piccolo intero tale che $1/p < \varrho$. In forza del Teorema di FRANKLIN e WIENER (§ 2, n. 8) esiste una trasformazione tra Q e Q',

$$T_p: \qquad \xi = \xi_p(u, v), \quad \eta = \eta_p(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

piana, continua, biunivoca di indice positivo e quasi lineare tale che, per ogni punto $P \equiv (u, v) \varepsilon Q$, risulta

$$\{ T_p(P), \; T(P) \} < 1/p < \varrho,$$

e quindi

$$\{ \Phi(P), \Phi'[T_p(P)] \} \leqslant \{ \Phi(P), \Phi'[T(P) \} + \{ \Phi'[T(P)], \, \Phi'[T_p(P)] \} \leqslant 2\delta + \delta = 3\delta.$$

Pertanto se diciamo Φ'' la trasformazione piana definita dalle equazioni:

$$\Phi'' = \Phi' T_p: \qquad x = x''(u, v), \quad y = y''(u, v), \qquad (u, v) \xi \, Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

ove

$$x''(u, v) = x'[\xi_p(u, v), \, \eta_p(u, v)], \;\; y''(u, v) = y'[\xi_p(u, v), \, \eta_p(u, v)],$$

risulta, per ogni $P \varepsilon (u, v)$ di Q,

$$(8) \qquad \{ \Phi''(P), \; \Phi(P) \} < 3\delta.$$

In forza del Teorema del § 2, n. 6, la Φ'' è assolutamente continua.

Diciamo c_i' le curve continue e chiuse immagini delle poligonali π_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, rispetto alla trasformazione Φ''. Dalla (8) segue che, per ogni punto (x, y) di J, risulta

$$O(x, y; c_i) = O(x, y; c_i'), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

e quindi

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{n} \iint_J O(x, y; c_i) \, dx \, dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_J O(x, y; c_i') \, dx \, dy.$$

([22]) Cfr. cit. in ([6]) *a*) § 2, n. 2.

Consideriamo le n trasformazioni piane assolutamente continue

$$\varphi_i: \quad x = x''(u, v), \quad y = y''(u, v), \quad (u, v) \,\varepsilon\, \pi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ed osserviamo che in quasi tutti i punti di $K - c_i$, e perciò a maggior ragione, in quasi tutti i punti (x, y) di J, risulta

$$(10) \qquad n(x, y; \varphi_i) = O(x, y; c_i'), \ (^{23}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Poniamo:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \,\varepsilon\, J, \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ non } \varepsilon\, J, \end{cases}$$

$$F_i(u, v) = f[x''(u, v), y''(u, v)], \quad (u, v) \,\varepsilon\, \pi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La funzione $F_i(u, v)$ è la funzione caratteristica di un insieme V_i di punti (u, v) di π_i e precisamente dell'insieme di tutti i punti (u, v) di π_i la cui immagine rispetto alla trasformazione Φ'' (o alla φ_i'') cade nell'insieme chiuso J. Ne segue che anche l'insieme V_i è chiuso e la funzione $F_i(u, v)$ è quasi continua. In forza di un mio teorema sulla trasformazione degli integrali doppi ([24]) risulta, ricordando anche la (10),

$$\iint_{V_i} H''(u, v)\, du\, dv = \iint_{\pi_i} H''(u, v) F_i(u, v)\, du\, dv =$$

$$= \iint_K f(x, y)\, n(x, y; \varphi_i)\, dx\, dy = \iint_J n(x, y; \varphi_j)\, dx\, dy = \iint_J O(x, y; c_i')\, dx\, dy$$

e quindi, sommando rispetto ad i e ponendo $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$,

$$(11) \qquad \iint_V H''(u, v)\, du\, dv = \iint_J \sum_{i=1}^{n} O(x, y; c_i')\, dx\, dy.$$

La trasformazione T_p trasforma l'insieme chiuso V in un insieme chiuso V' di Q' e, essendo quasi lineare in Q, è assolutamente continua.

Diciamo $h(u, v)$ il Jacobiano della trasformazione elementare T_p, diciamo $H'(\xi, \eta)$ il Jacobiano generalizzato relativo della trasformazione Φ' e ricordiamo che con $H''(u, v)$ abbiamo già indicato quello della trasformazione prodotto $\Phi'' = \Phi' T_p$. Essendo T_p una trasformazione elementare risulta (osservazione, § 2, n. 7)

$$H''(u, v) = H'[\xi_p(u, v), \eta_p(u, v)] h(u, v)$$

([23]) Loc. cit. in ([8]) *d*), § 3, n. 5, teor. III.

([24]) Loc. cit. in ([8]) *d*), § 7, n. 5, Teor. V.

e quindi

$$\iint_{V} H''(u, v)\, du\, dv = \iint_{V} H[\xi_p(u, v), \eta_p(u, v)] h(u, v)\, du\, dv. \tag{12}$$

In forza del mio teorema già citato sulla trasformazione degli integrali doppi ([25]) risulta

$$\iint_{V} H'[\xi_p(u, v), \eta_p(u, v)]\, h(u, v)\, du\, dv = \iint_{V'} H(\xi, \eta)\, n(\xi, \eta\,;\, T_p)\, d\xi\, d\eta,$$

e poichè T_p è biunivoca e $n(x, y\,;\, T_p) \equiv 1$, anche

$$\iint_{V} H'[\xi_p(u, v), \eta_p(u, v)]\, h(u, v)\, du\, dv = \iint_{V'} H'(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Finalmente, ricordando la (12),

$$\iint_{V} H''(u, v)\, du\, dv = \iint_{V'} H'(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{13}$$

Dalla identità

$$\begin{aligned}
\iint_{Q} H(u, v)\, du\, dv - \iint_{V'} H'(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta &= \left[\iint_{Q} H(u, v)\, du\, dv - \iint_{K} n(x, y\,;\, \Phi)\, dx\, dy\right] + \\
&+ \left[\iint_{K} n(x, y\,;\, \Phi)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{n} \iint_{K} O(x, y\,;\, c_i)\, dx\, dy\right] + \\
&+ \left[\sum_{i=1}^{n} \iint_{K} O(x, y\,;\, c_i)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{n} \iint_{J} O(x, y\,;\, c_i)\, dx\, dy\right] + \\
&+ \left[\sum_{i=1}^{n} \iint_{J} O(x, y\,;\, c_i)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{n} \iint_{J} O(x, y\,;\, c_i')\, dx\, dy\right] + \\
&+ \left[\sum_{i=1}^{n} \iint_{J} O(x, y\,;\, c_i')\, dx\, dy - \iint_{V} H''(u, v)\, du\, dv\right] + \\
&+ \left[\iint_{V} H''(u, v)\, du\, dv - \iint_{V'} H'(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right]
\end{aligned}$$

e dalle (4), (5), (6), (9), (11), (13), segue

$$\left|\iint_{Q} H(u, v)\, du\, dv - \iint_{V'} H'(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right| \leqslant 0 + 4\sigma + 2\sigma + 0 + 0 + 0 = 6\sigma = \varepsilon.$$

Il Lemma 1 è così completamente dimostrato.

([25]) Loc. cit. in ([24]).

10. - LEMMA 2. - *Se*

$$S: \quad x=x(u, v), \qquad y=y(u, v), \qquad z=z(u, v), \qquad (u, v)\, \varepsilon Q \equiv (0, 1, 0, 1)$$

è una superficie continua di area finita secondo Lebesgue e le relative trasformazioni piane Φ_r, $r=1, 2, 3$, *sono assolutamente continue, allora ad ogni terna di numeri reali* a_1, a_2, a_3, *e ad ogni numero* $\varepsilon>0$ *si può far corrispondere un altro numero* $\delta>0$ *tale che, per ogni altra superficie di area finita secondo Lebesgue*

$$S': \quad x=x'(u, v), \qquad y=y'(u, v), \qquad z=z'(u, v), \qquad (u, v)\, \varepsilon Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

le cui tre trasformazioni piane Φ'_r, $r=1, 2, 3$, *siano pure assolutamente continue e tali che* $\| S', S \| < \delta$, *esiste un insieme chiuso* V *di punti in* Q' *per il quale*

$$\left| \iint_Q (a_1 H_1 + a_2 H_2 + a_3 H_3)\, du\, dv - \iint_V (a_1 H'_1 + a_2 H'_2 + a_3 H'_3)\, du\, dv \right| < \varepsilon,$$

ove H_r, H'_r, $r=1, 2, 3$, *sono i Jacobiani generalizzati relativi delle trasformazioni* Φ_r, Φ'_r, $r=1, 2, 3$.

Se $a_1=a_2=a_3=0$ il Lemma è banale. Possiamo dunque supporre i numeri a_1, a_2, a_3 non tutti nulli e di più tali che $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$.

Sia $O\xi\eta\xi$ una terna di assi cartesiani ortogonali, orientata come la terna $Oxyz$ e tali che i coseni direttori dell'asse ζ, rispetto alla terna $Oxyz$, siano a_1, a_2, a_3. Le superficie S e S' ammettono, nei nuovi assi, rappresentazioni che si ottengono immediatamente. Di più se diciamo $\overline{\Phi}_r$ e $\overline{\Phi}'_r$, $r=1, 2, 3$, le nuove trasformazioni piane, anche queste sono tutte assolutamente continue ([26]). Se diciamo $\overline{H}_r$, $\overline{H}'_r$, $r=1, 2, 3$, i Jacobiani generalizzati relativi delle nuove trasformazioni piane, in forza di un mio precedente teorema ([27]), risulta

$$\overline{H}_1(u, v) = a_1 H_1 + a_2 H_2 + a_3 H_3, \qquad H'_1(u, v) = a_1 H'_1 + a_2 H'_2 + a_3 H'_3.$$

Basta ora applicare il Lemma 1 alle trasformazioni piane $\overline{\Phi}_3$ e $\overline{\Phi}'_3$.

§ 4. - Condizioni sufficienti per la semicontinuità inferiore dell'integrale $\mathfrak{J}_S$.

11. - Sia S_0 una superficia di area finita secondo Lebesgue tutta costituita di punti di A; sia $\{ S \}$ una classe di superficie, pure di area finita e tutte costituite di punti di A. Diremo che l'integrale $\mathfrak{J}_S$ è *semicontinuo inferior-*

([26]) Loc. cit. in ([8]) *e*), § 4, n. 5. Osservazione.

([27]) Loc. cit. in ([8]) *e*), § 4, n. 5, Teor. I.

mente su S_0 rispetto alla classe $\{S\}$ se, ad ogni numero $\varepsilon > 0$, si può far corrispondere un altro numero $\delta > 0$ tale che, per tutte le superficie S della classe $\{S\}$ per le quali $\| S, S_0 \| < \delta$, risulta $\mathfrak{I}_S > \mathfrak{I}_{S_0} - \varepsilon$.

Dimostreremo nei num. 12-14 il seguente:

TEOREMA I [28]. - *Sia S_0 una superficie continua costituita di punti di A e di area finita secondo* LEBESGUE. *Sia*

$$S_0: \quad x = x_0(u, v), \quad y = y_0(u, v), \quad z = z_0(u, v), \quad (u, v) \varepsilon Q \equiv (0, 1, 0, 1), \tag{14}$$

una rappresentazione della superficie S_0 tale che le relative trasformazioni piane Φ_r, $r = 1, 2, 3$, siano assolutamente continue. Siano $N > 0$, $\varrho > 0$ due numeri assegnati. Se:

1) *per tutti i punti (x, y, z) di A che distano da S_0 meno di ϱ e per tutte le terne (U, V, W) di numeri non tutti nulli risulta $F[x, U] \geq 0$;*

2) *per quasi tutti i punti (u, v) di Q nei quali i tre Jacobiani generalizzati relativi $H_r(u, v)$, $r = 1, 2, 3$, esistono e non sono tutti nulli e per tutte le terne (U, V, W) di numeri non tutti nulli, $\mathcal{E}[x_0(u, v), H_r(u, v), U] \geq 0$;*

allora l'integrale $\mathfrak{I}_S$ è semicontinuo inferiormente su S_0 nella classe di tutte le superficie S per le quali $L(S) \leq N$ ed i cui punti appartengono ad A.

12. - Diciamo A_0 l'insieme limitato e chiuso di tutti i punti di A che distano da S_0 non più di $\varrho/2$, diciamo I l'insieme di tutti i punti (x, y, z, u, v, w) per i quali $(x, y, z) \varepsilon A_0$, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. L'insieme I è limitato e chiuso e quindi le funzioni $F(x, y, z, u, v, w)$, F_u, F_v, F_w, sono limitate ed uniformemente continue in I. Intanto esiste un numero M tale che in tutti i punti di I risulta

$$|F| < M, \qquad |F_u| < M, \qquad |F_v| < M, \qquad |F_w| < M. \tag{15}$$

Poichè le funzioni F_u, F_v, F_w sono omogenee di grado zero in (u, v, w) le relazioni $|F_u| < M$, $|F_v| < M$, $|F_w| < M$ valgono per ogni punto (x, y, z) di A_0 e per ogni terna u, v, w di numeri reali non tutti nulli.

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario. Esiste un numero $\delta > 0$ tale che per ogni coppia (x, y, z, u, v, w), (x', y', z', u', v', w') di punti di I tali che $|x - x'| < 3\delta$, $|y - y'| < 3\delta, \ldots$ $|w - w'| < 3\delta$, risulta

$$|F(x, y, z, u, v, w) - F(x', y', z', u', v', w')| < \varepsilon/8N.$$

Esiste infine un numero $\gamma > 0$ tale che per ogni coppia di punti $P \equiv (u, v)$, $P' \equiv (u' v')$ di Q con $\overline{PP'} < \gamma$, risulta

$$\{ [x(u, v) - x(u', v')]^2 + [y(u, v) - y(u', v')]^2 + [z(u, v) - z(u', v')]^2 \}^{1/2} < \delta.$$

---

[28] Estensione di analogo teorema di E. J. MAC SHANE, loc. cit. in [1], secondo lavoro citato, pag. 471.

Le funzioni $H_r(u, v)$, $r=1, 2, 3$, sono quasi continue ed integrabili L in Q ed altrettanto vale per la funzione $F[x(u, v), H_r(u, v)]$. Si noti che quest'ultima funzione soddisfa, in quasi tutti i punti (u, v) di Q la relazione $|F| < M[H_1^2 + H_2^2 + H_3^2]^{1/2}$. Quasi tutti i punti (u_0, v_0) di Q sono quindi punti di continuità asintotica per le funzioni

$$H_r(u, v), \quad r=1, 2, 3, \quad F[x_0(u, v), \quad H_r(u, v)]$$

e pertanto godono della seguente proprietà:

$\mathfrak{F}$) per ogni quadrato q di centro (u_0, v_0) a lati paralleli agli assi, contenuto in Q e di lato sufficientemente piccolo, si ha

$$\left| \iint_q H_r(u, v)\, du, dv - \iint_q H_r(u_0, v_0)\, du, dv \right| \leqslant \frac{\varepsilon |q|}{24M}, \qquad (r=1, 2, 3), \tag{16}$$

$$\left| \iint_q F[x_0(u, v), \ H_r(u, v)]\, du\, dv - \iint_q F[x_0(u_0, v_0), \ H_r(u_0, v_0)]\, du\, dv \right| < \frac{\varepsilon |q|}{4}, \tag{17}$$

ove

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = D^2(u_0, v_0).$$

Sia $\tau > 0$ un numero tale che, per ogni insieme misurabile h, $h \subset K_r$, $|h| < \tau$, risulti

$$\iint_h F[x_0(u, v), \ H_r(u, v)]\, du\, dv < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{18}$$

Per il teorena di **VITALI** esiste un numero finito di punti $P_j \equiv (u_j, v_j)$, $j=1, 2, \ldots, m$, interni a Q e di continuità asintotica per le funzioni $H_r(u\ v)$, $F[x, H_r]$, ed altrettanti quadrati q_j, $j=1, 2, \ldots, m$, di lato $< \gamma$, a due a due senza punti interni in comune, di centro P_j, a lati paralleli agli assi u, v, tali che $\sum |q_j| > 1 - \tau$ e per ciascuno dei quali valgono le (16) e (17). Dalle (17) e (18) abbiamo:

$$\left| \iint_Q F[x_0(u, v), \ H_r(u, v)]\, du\, dv - \sum_{i=1}^{m} \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j), \ H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

13. - Consideriamo ora le m superficie continue

$$\sigma_j: \quad x=x_0(u, v), \quad y=y_0(u, v), \quad z=z_0(u, v), \quad (u, v)\, \varepsilon q_j, \quad (j=1, 2, \ldots, m),$$

per ciascuna delle quali le relative trasformazioni piane sono assolutamente continue. Per ogni j poniamo

$$a_{j_1} = F_u[x_0(y_j, v_j), \quad H_r(u_j, v_j)], \quad a_{j_2} = F_v, \quad a_{j_3} = F_w, \quad (j=1, 2, \ldots, m),$$

e, sempre per ogni j, sia $\delta_j > 0$ il numero definito nel Lemma 2 del n. 10, relativo alla superficie σ_j, ai numeri $a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}$ e al numero $\varepsilon \mid q_j \mid /8$. Poniamo

$$3\delta_0 = \min \left[\varrho/2, \ \delta, \ \delta_j, \ (j = 1, 2, ..., m) \right]$$

e sia

$$(20) \qquad S: \quad x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta), \qquad z = z(\xi, \eta), \qquad (\xi, \eta) \, \varepsilon \, Q' \equiv (0, 1, 0, 1),$$

una qualsiasi superficie continua costituita di punti A, di area $L(S) \leqslant N$, tale che $\| S, S_0 \| < \delta_0$ e le relative trasformazioni piane siano assolutamente continue.

Esiste intanto una trasformazione piana, continua, biunivoca e di indice positivo tra Q e Q':

$$T: \quad \xi = \xi(u, v), \qquad \eta = \eta(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon Q,$$

tale che per ogni punto $P \equiv (u, v)$ di Q, risulta

$$\{ S_0(P), \ S[T(P)] \} < \delta_0 .$$

Diciamo $\omega(\lambda)$ il modulo di continuità della superficie (20) e sia $\lambda > 0$ un numero tale che $\omega(\lambda) < \delta_0$. Sia p il più piccolo intero tale che $1/p < \lambda$.

In forza del teorema di Franklin e Wiener (§ 2, n. 8) esiste una trasformazione piana continua, biunivoca, di indice positivo e quasi lineare tra Q e Q':

$$T_p: \quad \varepsilon = \varepsilon_p(u, v), \qquad \eta = \eta_p(u, v), \qquad (u, v) \, \varepsilon Q,$$

tale che per ogni punto $P \equiv (u, v)$ di Q risulta:

$$\{ T_p(P), \ T(P) \} < 1/p < \lambda .$$

Ne segue

$$\{ S_0(P), \ S[T_p(P)] \} \leqslant \{ S_0(P), \ S[T(P)] \} + \{ S[T(P)], \ S[T_p(P)] \} \leqslant 2\delta_0 + \delta_0 = 3\delta_0$$

Pertanto le equazioni

$$(21) \quad S' \equiv S: \quad x = x[\xi_p(u, v), \ \eta_p(u, v)] \equiv x'(u, v), \ y = y[\xi_p(u, v), \ \eta_p(u, v)] \equiv$$
$$\equiv y'(u, v), \quad (u, v) \, \varepsilon Q,$$

danno una rappresentazione della superficie S sul quadrato Q avente le seguenti proprietà:

α) per ogni punto $P = (u, v)$ di Q si ha

$$\{ S_0(P), \ S'(P) \} < 3\delta_0 ;$$

β) le trasformazioni piane Φ_1', Φ_2', Φ_3' ralative alla rappresentazione (21) della superficie $S' = S$, sono assolutamente continue. Diciamo $H_r'(u, v)$ gli Jacobiani generalizzati relativi delle trasformazioni Φ_r', $r = 1, 2, 3$;

γ) le equazioni σ_j': $x = x'(u, v)$, $y = y'(u, v)$, $z = z'(u, v)$ $(u, v) \, \varepsilon q_j$, definiscono delle superficie σ_j' tali che $\| \sigma_j', \sigma_j \| < 3\delta_0 < \delta_j$ e le trasformazioni piane relative alle superficie σ_j sono tutte assolutamonte continue.

14. - Ricordando che i quadrati q_j hanno diametro $<\gamma$ risulta, per ogni punto $(u, v)\,\varepsilon q_j$,

$$|F[x_0(u, v),\ H_r'(u, v)] - F[x_0(u_j, v_j),\ H_r'(u, v)]| < \frac{\varepsilon}{8N} D'(u, v).$$

D'altra parte vale la α) e $3\delta_0 \leqslant 3\delta$ e perciò, per ogni punto $(u, v)\,\varepsilon q_j$,

$$|F[x'(u, v),\ H_r'(u, v)] - F[x_0(u, v),\ H_r'(u, v)]| < \frac{\varepsilon}{8N} D'(u, v),$$

e quindi, per ogni punto $(u, v)\,\varepsilon q_j$,

$$|F[x'(u, v),\ H_r'(u, v)] - F[x_0(u_j, v_j) H_r'(u, v)]| < \frac{\varepsilon}{4N} D'(u, v).$$

Ne segue, ricordando anche l'ipotesi 1) del teorema,

$$\begin{aligned}(22)\qquad \iint\limits_Q F[x'(u, v),\ H_r'(u, v)\, du\, dv &\geqslant \sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{q_j} F[x'(u, v),\ H_r'(u, v)]\, du\, dv \geqslant \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H_r'(u, v)]\, du\, dv - \sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{q_j} \frac{\varepsilon}{4N} D'(u, v) du\, dv \geqslant \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H_r'(u, v)\, du\, dv - \frac{\varepsilon}{4N} \iint\limits_Q D'(u, v)\, du\, dv,\end{aligned}$$

ove

$$D'(u, v) = [H_1'^2 + H_2'^2 + H_3'^2]^{1/2}.$$

Ma, per la proprietà β), si ha

$$\iint\limits_Q D'(u, v)\, du\, dv = L(S), \qquad L(S) \leqslant N$$

e quindi, dalla (22),

$$(23)\quad \iint\limits_Q F[x'(u, v),\ H_r'(u, v)]\, du\, dv \geqslant \sum_{j=1}^{m} \iint\limits_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H_r'(u, v)\, du\, dv - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dalla proprietà γ) e dal Lemma 2 del n. 10 segue ora:

$$\begin{aligned}\Big| \iint\limits_{V_j} [a_{j_1} H_1'(u, v) + a_{j_2} H_2'(u, v) + a_{j_3} H_3'(u, v)]\, du\, dv - \\ - \iint\limits_{q_j} [a_{j_1} H_1(u, v) + a_{j_2} H_2(u, v) + a_{j_3} H_3(u, v)]\, du\, dv \Big| < \frac{\varepsilon\, |q_j|}{8},\end{aligned}$$

ove V_j, $(j = 1, 2, \dots, n)$, sono opportuni insieme chiusi di punti di q_j. Questa relazione si può anche scrivere:

$$(24) \qquad \left| \iint_{V_j} \sum_{r=1}^{3} H_r'(u, v) F_r[x_0(u_j, v_j), H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv - \right.$$

$$\left. - \iint_{q_j} \sum_{r=1}^{3} H_r(u, v) F_r[x_0(u_j, v_j), H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv \right| < \frac{\varepsilon |q_j|}{8} \quad (^{29}).$$

Poniamo

$$\overline{H}_r'(u, v) = \begin{cases} H_r'(u, v) & \text{se } (u, v)\, \varepsilon\, V_j,\ j = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ottiene

$$(25) \qquad \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j), H_r'(u, v)]\, du\, dv \geqslant \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j), \overline{H}_r'(u, v)]\, du\, dv$$

e, dalla (24),

$$(26) \qquad \left| \iint_{q_j} \sum_{r=1}^{3} [\overline{H}_r'(u, v) - H_r(u, v)] F_r[x_0(u_j, v_j), H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv \right| < \frac{\varepsilon |q_j|}{8}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Per ogni quadrato q_j dobbiamo ora distinguere due casi.

1° Caso: $D(u_j, v_j) > 0$. Dimostriamo che $E[x_0(u_j, v_j), H_r(u_j, v_j), U] \geqslant 0$ per ogni terna (U, V, W) di numeri non tutti nulli. Infatti se per una data terna di numeri reali $\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$ non tutti nulli fosse:

$$\mathcal{E}[x_0(u_j, v_j), H_r(u_j, v_j), \overline{U}] < 0,$$

allora, essendo le funzioni $H_r(u, v)$ continue asintoticamente nel punto (u_j, v_j), le funzioni $x_0(u, v)$ continue e la funzione E pure continua, su tutto un insieme di punti (u, v) di misura positiva dovrebbe pure aversi:

$$\mathcal{E}[x_0(u, v), H_r(u, v), \overline{U}] < 0$$

contro l'ipotesi 2) del teorema. Pertanto (§ 1, n. 4, formula n. 3)

$$\iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j), \overline{H}_r'(u, v)]\, du\, dv = \iint_{q_j} \mathcal{E}[x_0(u_j, v_j), H_r(u_j, v_j), \overline{H}_r(u, v)]\, du\, dv +$$

$$+ \iint_{q_j} \sum_{r=1}^{3} [\overline{H}_r'(u, v) - H_r(u, v)] F_r[x_0(u_j, v_j), H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv +$$

$$+ \iint_{q_j} \sum_{r=1}^{3} [H_r(u, v) - H_r(u_j, v_j)] F_r[x_0(u_j, v_j), H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv +$$

$$+ \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j), H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv.$$

(29) Per comodità di scrittura abbiamo indicato con F_1, F_2, F_3 rispettivamente le derivate parziali F_u, F_v, F_w.

Come si è visto il primo integrale a secondo membro è $\geqslant 0$. Dalla (26) segue poi che il secondo integrale è $\geqslant -\varepsilon \frac{|q_j|}{8}$. Dalle (15) e (16) segue che anche il terzo è $\geqslant -\varepsilon \frac{|q_j|}{8}$. Pertanto

$$(27) \quad \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ \overline{H}'_r(u, v)]\, du\, dv \geqslant \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv - \frac{\varepsilon\, |q_j|}{4}.$$

2° Caso: $D'(u_j, v_j) = 0$ e quindi $H'_r(u_j, v_j) = 0$, $F[x_0(u_j, v_j),\ H_r(u_j, v_j)] = 0$, $(r = 1, 2, 3)$. Pertanto

$$\iint_{q_j} F[x_0(u, v),\ \overline{H}'_r(u, v)]\, du\, dv \geqslant 0 = \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv.$$

La (27) vale perciò anche in questo caso, a maggior ragione.

Dalla (27), sommando rispetto a j, si ottiene:

$$(28) \quad \sum_{j=1}^{m} \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ \overline{H}'_r(u, v)]\, du\, dv \geqslant \sum_{j=1}^{m} \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dalle (23), (25), (19) segue infine

$$\begin{aligned} \iint_{Q} F[x'(u, v),\ H'_r(u, v)]\, du\, dv &\geqslant \sum_{j=1}^{m} \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H'_r(u, v)]\, du\, dv - \frac{\varepsilon}{4} \geqslant \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{m} F[x_0(u_j, v_j),\ \overline{H}'_r(u, v)]\, du\, dv - \frac{\varepsilon}{4} \geqslant \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{m} \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \\ &\geqslant \iint_{Q} F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]\, du\, dv - \varepsilon. \end{aligned}$$

Ma le rappresentazioni (14) e (21) delle superficie S_0 e S sono tali che le relative trasformazioni piane sono assolutamente continue e quindi (Teor. B, n. 3)

$$\mathfrak{I}_{S_0} = \iint_{Q} F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]\, du\, dv, \qquad \mathfrak{I}_{S} = \iint_{Q} F[x'(u, v),\ H'_r(u, v)]\, du\, dv$$

ed infine

$$\mathfrak{I}_S > \mathfrak{I}_{S_0} - \varepsilon.$$

Questa relazione vale per ogni superficie S tutta costituita di punti di A, di area $L(S) \leqslant N$ e tale che $\| S, S_0 \| < \delta_0$. Per l'arbitrarietà di ε il Teorema I è completamente dimostrato.

15. - Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA II. - *Sia S_0 una superficie continua costituita di punti di A e di area finita secondo Lebesgue. Sia*

$$S_0: \quad x=x_0(u, v), \quad y=y_0(u, v), \quad z=z_0(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

una rappresentazione della superficie S_0 tale che le relative trasformazioni piane Φ_r, $r=1, 2, 3$, siano assolutamente continue. Sia $\varrho>0$ un numero assegnato. Se

1) *per tutti i punti (x, y, z) di A che distano da S_0 meno di ϱ e per tutte le terne (U, V, W) di numeri non tutti nulli risulta $F[x, U]>0$;*

2) *per quasi tutti i punti (u, v) di Q nei quali i tre Jacobiani generalizzati relativi $H_r(u, v)$, $r=1, 2, 3$, esistono e non sono tutti nulli e per tutte le terne (U, V, W) di numeri non tutti nulli, risulta*

$$\mathcal{E}[x_0(u, v), \ H_r(u, v), \ U] \geqslant 0;$$

allora l'integrale $\mathfrak{J}_S$ è semicontinuo inferiormente su S_0 nella classe di tutte le superficie S di area finita i cui punti appartengono ad A.

La funzione $F[x, y, z, U, V, W]$ è continua nell'insieme I_0 chiuso e limitato, costituito da tutti i punti (x, y, z, U, V, W) per i quali

$$(x, y, z) \varepsilon S_0, \quad U^2+V^2+W^2=1.$$

Pertanto la funzione F ha ivi un minimo m e. per le ipotesi, deve essere $m>0$. Esisterà allora un numero $0<\varrho'\leqslant\varrho$ tale che per ogni (x, y, z) di A che dista da S_0 non più di ϱ' e per ogni terna di numeri U, V, W tali che $U^2+V^2+W^2=1$, risulta

$$F[x, y, z, U, V, W] \geqslant m/2.$$

Inoltre se S è una qualunque superficie continua tutta costituita di punti di A e tale che $\| S, S_0 \| < \varrho'$ tutti i suoi punti distano da S_0 meno di ϱ'.

D'altra parte la superficie S ammetterà una rappresentazione:

$$S: \quad x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

per la quale, le trasformazioni piane Φ'_r, $r=1, 2, 3$, sono assolutamente continue ([30]). Siano $H'_r(u, v)$, $r=1, 2, 3$, i Jacobiani generalizzati relativi, $J'_r(u, v)$ i Jacobiani generalizzati assoluti e

$$D'(u, v)=[J_1'^2+J_2'^2+J_3'^2]^{1/2}.$$

([30]) Loc. cit. in ([12]).

Come sappiamo, quasi ovunque in Q è anche

$$H'_r = \pm J_r, \quad r=1, 2, 3, \quad [H_1'^2 + H_2'^2 + H_3'^2]^{1/2} = D'(u, v),$$

e

$$L(S) = \iint_Q D'(u, v)\, du\, dv.$$

Pertanto (Teorema B, n. 3)

$$\mathfrak{I}_S = \iint_Q F[x(u, v),\ H'_r(u, v)]\, du\, dv = \iint F\left[x(u, v),\ \frac{H'_r(u, v)}{D'(u, v)}\right] D'(u, v) du\, dv \geqslant \text{([31])}$$

$$\geqslant \frac{m}{2} \iint_Q D'(u, v),$$

ed infine

$$\mathfrak{I}_S \geqslant \frac{m}{2} L(S).$$

Poniamo

$$N = \frac{2}{m} [\mathfrak{I}_{S_0} + 1].$$

Per dimostrare il teorema, basta dimostrare che l'integrale $\mathfrak{I}_S$ è semicontinuo inferiormente su S_0 rispetto alla classe $\{S\}$ di tutte le superficie S di area finita secondo Lebesgue, i cui punti appartengono ad A e per le quali $\| S, S_0 \| < \varrho'$. Dividiamo le superficie della classe $\{S\}$ in due categorie, ponendo nella prima quelle per le quali $L(S) > N$, e nella seconda quelle per le quali $L(S) \leqslant N$.

Per ogni superficie S della prima categoria si ha

$$\mathfrak{I}_S \geqslant \frac{m}{2} L(S) > \frac{m}{2} N = \mathfrak{I}_{S_0} + 1.$$

D'altra parte, in forza del teorema I l'integrale $\mathfrak{I}_S$ è semicontinuo inferiormente rispetto alla superficie S di $\{S\}$ della seconda categoria. Si può quindi inferire che l'integrale $\mathfrak{I}_S$ è semicontinuo inferiormente su S_0 rispetto all'intera classe $\{S\}$..

Il teorema II è così dimostrato.

16. - Diremo che l'integrale $\mathfrak{I}_S$ è *semidefinito positivo*, oppure *semidefinito positivo*, se per ogni (x, y, z) di A e per ogni terna (u, v, w) di numeri non tutti nulli risulta

$$F(x, y, z, u, v, w) > 0, \quad \text{oppure} \quad F(x, y, z, u, v, w) \geqslant 0.$$

Diremo che l'integrale $\mathfrak{I}_S$ è *regolare positivo*, oppure *quasi regolare positivo* se per ogni punto (x, y, z) di A, per ogni terna (u, v, w) di numeri

([31]) Con la convenzione di porre $F = 0$ ove sia $D' = 0$.

non tutti nulli e per ogni altra terna $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ di numeri pure non tutti nulli, risulta

$$\mathcal{E}[x, y, z, u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] > 0, \quad \text{oppure} \quad \mathcal{E}[x, y, z, u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] \geqslant 0.$$

In modo analogo si definiscono gli integrali definiti e semidefiniti negativi, regolari e quasi regolari negativi.

Dimostriamo la seguente proposizione:

se $\mathfrak{I}_S$ è semidefinito e quasi regolare, allora se esso è quasi regolare positivo (negativo), esso è semidefinito positivo (negativo) e viceversa.

Si ha infatti

$$F(x, \bar{u}) = \mathcal{E}(x, u, \bar{u}) + \sum_u \bar{u} F_u(x, u)$$

e quindi, se $\mathfrak{I}_S$ è quasi regolare positivo

$$F(x, \bar{u}) \geqslant \bar{u} F_u(x, u) + \bar{v} F_v(x, u) + \bar{w} F_w(x, u). \tag{29}$$

Se per un dato punto (x, y, z) e per ogni terna $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ di numeri non tutti nulli è

$$F_u = 0, \qquad F_v = 0, \qquad F_w = 0,$$

allora dalla (29) segue $F(x, \bar{u}) \geqslant 0$ per ogni terna $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$. di numeri non tutti nulli.

Se per un dato punto (x, y, z) e per una data terna (u, v, w) di numeri non tutti nulli, almeno una delle derivate F_u, F_v, F_w è $\neq 0$, allora si può sempre trovare una particolare terna $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ di numeri non tutti nulli, per la quale la combinazione lineare che è a secondo membro della (29) risulti > 0. Per quella particolare terna $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ risulta pertanto $F(x, \bar{u}) > 0$ e dovendo essere, o sempre $F(x, u) \geqslant 0$, o sempre $F(x, \bar{u}) \leqslant 0$, l'integrale $\mathfrak{I}_S$ sarà semidefinito positivo. In modo analogo si ragiona in tutti gli altri casi.

17. - Dal Teorema II segue come corollario, il seguente:

TEOREMA III. - *Se l'integrale $\mathfrak{I}_S$ è definito positivo e quasi regolare, esso è semicontinuo inferiormente su ogni superficie S di area finita secondo Lebesgue i cui punti appartengono ad A, rispetto alla classe delle superficie di area finita i cui punti appartengono ad A.*

18. - Dimostreremo nn. 19-25 il seguente:

TEOREMA IV. - *Sia S_0 una superficie continua costituita di punti di A e di area finita secondo Lebesgue. Sia*

$$S_0: \quad x = x_0(u, v), \quad y = y_0(u, v), \quad z = z_0(u, v), \quad (u, v)\, \varepsilon Q \equiv (0, 1, 0, 1), \tag{30}$$

una rappresentazione della superficie S_0 tale che le relative trasformazioni piane Φ_1, Φ_2, Φ_3 siano assolutamente continue. Sia $\varrho > 0$ un numero assegnato. Se

1) *per tutti i punti (x, y, z) di A che distano da S_0 meno di ϱ e per tutte le terne (U, V, W) di numeri non tutti nulli risulta $F[x, U] \geqslant 0$;*

2) *per quasi tutti i punti (u, v) di Q nei quali i tre Jacobiani generalizzati relativi $H_r(u, v)$, $r = 1, 2, 3$, esistono e non sono tutti nulli, e per tutte le terne (U, V, W) di numeri non tutti nulli e proporzionali ai numeri $H_1(u, v)$, $H_2(u, v)$, $H_3(u, v)$, risulti*

$$\mathcal{E}[x_0(u, v),\ H_r(u, v),\ U] > 0; \tag{31}$$

allora l'integrale $\mathfrak{I}_S$ è semicontinuo inferiormente su S_0 nella classe di tutte le superficie S di area finita secondo Lebesgue, costituita di punti di A.

19. - Diciamo A_0 l'insieme limitato e chiuso di tutti i punti (x, y, z) di A che distano da S_0 non più di $\varrho/2$; diciamo I l'insieme di tutti i punti (x, y, z, u, v, w) per i quali $(x, y, z)\,\varepsilon A_0$, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. L'insieme I è limitato e chiuso e quindi le funzioni $F(x, y, z, u, v, w)$, F_u, F_v, F_w, sono ivi limitate ed uniformemente continue. Esiste perciò un numero $M > 0$ tale che in tutti i punti di I risulta $|F| < M$ e inoltre

$$|F_u| < M, \qquad |F_v| < M, \qquad |F_w| < M. \tag{32}$$

Poichè le funzioni F_u, F_v, F_w sono omogenee di grado zero in u, v, w, le relazioni (32) valgono per ogni punto (x, y, z) di A_0 e per ogni terna u, v, w di numeri reali non tutti nulli.

Siano $H_r(u, v)$, $r = 1, 2, 3$, i Jacobiani generalizzati relativi delle trasformazioni Φ_r; siano $J_r(u, v)$ i Jacobiani generalizzati assoluti, e sia, al solito

$$D(u, v) \equiv [J_1^2 + J_2^2 + J_3^2]^{1/2}.$$

Come sappiamo quasi ovunque in Q si ha

$$H_r = \pm J_r, \qquad r = 1, 2, 3, \qquad D(u, v) = [H_1^2 + H_2^2 + H_3^2]^{1/2}. \tag{33}$$

Le funzioni $D(u, v)$, $J_r(u, v)$, $H_r(u, v)$, $r = 1, 2, 3$, sono tutte quasi continue ed integrabili L in Q.

Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario, sia $\sigma = \varepsilon/16$ e sia $\tau > 0$ un numero tale che per ogni insieme misurabile h, $h \subset Q$, $|h| < \tau$, risulti

$$\iint_h D(u, v)\, du\, dv < \frac{\sigma}{M}.$$

Sia $N > 0$ un intero tale che l'insieme E_1 dei punti (u, v) di Q nei quali, valgono le (33) e nei quali $D(u, v) > N$ abbia misura $|E_1| < \tau$. Sia E_2 l'insieme di tutti i punti (u, v) nei quali valgono le (33), che non appartengono ad E_1 e nei quali

$$F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)] < \sigma, \qquad D(u, v) > 0.$$

Sia E_3 l'insiemo di tutti i punti (u, v) di Q nei quali $D=0$, nonchè di tutti i punti (u, v) di Q nei quali non valgono le (33). Sia infine

$$E = Q - (E_1 + E_2 + E_3).$$

Dall'ipotesi 1) del teorema segue:

$$0 \leqslant \iint_{E_1} F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]\, du\, dv = \iint_{E_1} F\left[x_0(u, v)\ \frac{H_r(u, v)}{D(u, v)}\right] D(u, v)\, du\, dv <$$
$$< M \iint_{E_1} D(u, v)\, du\, dv < \sigma,$$

$$0 \leqslant \iint_{E_2} F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]\, du\, dv \leqslant \sigma \iint_{E_2} du\, dv < \sigma,$$

$$\iint_{E_3} F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]\, du\, dv = 0,$$

e quindi

$$\iint_Q F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]\, du\, dv = \iint_E + \iint_{E_1} + \iint_{E_2} + \iint_{E_3} < \iint_E + \sigma + \sigma + 0$$

e infine

$$(34) \qquad \iint_Q F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]\, du\, dv < \iint_E F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]\, du\, dv + 2\sigma.$$

20. - Per ogni punto (u, v) di E si ha

α) $D(u, v) = [H_1^2 + H_2^2 + H_3^2]^{1/2}$;
β) $0 < D(u, v) \leqslant N$;
γ) $F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)] \geqslant \sigma$.

Poniamo, in tutti i punti (u, v) di E,

$$A_1(u, v) = F_u[x_0(u, v),\ H_r(u, v)],\ A_2(u, v) = F_v,\ A_3(u, v) = F_w,$$
$$A(u, v) = [A_1^2 + A_2^2 + A_3^2]^{1/2}, \qquad (u, v) \varepsilon E.$$

In tutti i punti (u, v) di E i numeri H_1, H_2, H_3 sono non tutti nulli. Dimostriamo che negli stessi punti anche i numeri A_1, A_2, A_3 sono non tutti nulli. Infatti se in un punto (u, v) di Q fosse $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, dalla relazione

$$F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)] = H_1 A_1 + H_2 A_2 + H_3 A_3$$

seguirebbe $F=0$ che contrasta la γ).

Usando notazioni vettoriali possiamo anche dire che in tutti i punti (u, v) di E i due vettori $[H_1, H_2, H_3]$, $[A_1, A_2, A_3]$ sono entrambi non nulli. Diciamo perciò $\alpha = \alpha(u, v)$, $(u, v)\varepsilon E$, l'angolo tra questi due vettori, sia cioè:

$$\cos\,\alpha(u, v) = \frac{1}{AD}(H_1A_1 + H_2A_2 + H_3A_3),\quad 0 \leqslant \alpha(u, v) \leqslant \pi,\quad (u, v)\varepsilon E.$$

In tutti i punti (u, v) di E si ha così:

$$\sigma \leqslant F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)] = \sum_{r=1}^{3} H_rA_r = AD\cos\,\alpha(u, v),\quad (u, v)\varepsilon E.$$

Ma $0 \leqslant A \leqslant M$, $0 \leqslant D \leqslant N$, $0 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ e quindi

$$\frac{\sigma}{MN} \leqslant \cos\,\alpha(u, v) \leqslant 1,\qquad \frac{\sigma}{N} \leqslant A(u, v) \leqslant M.$$

Esistono pertanto due numeri $0 < \vartheta < \pi/4$, $L = \sigma/N > 0$ tali che, per ogni punto (u, v) di E, risulta

$$\vartheta \leqslant \alpha(u, v) \leqslant \pi/2 - 2\vartheta,\qquad 0 < L \leqslant A(u, v) \leqslant M.$$

La funzione $\mathcal{E}(x, y, z, u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ è una funzione continua dei suoi argomenti e perciò essa è limitata ed uniformemente continua nell'insieme chiuso e limitato costituito da tutti i punti $(x, y, z, \ldots, \bar{w})$ per i quali $(x, y, z)\varepsilon S_0$, $y^2 + v^2 + w^2 = 1$, $\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 = 1$ e per i quali l'angolo tra i due vettori non nulli $[u, v, w]$, $[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}]$ è $\geqslant \vartheta$. La funzione $\mathcal{E}$ ha pertanto in tale insieme un minimo m, e tale minimo, per l'ipotesi 2) del teorema è > 0. — Riprendiamo l'insieme I limitato e chiuso di tutti i punti (x, y, z, u, v, w) per i quali $(x, y, z)\varepsilon A_0$, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. In tale insieme la funzione F è uniformemente continua e quindi esiste un numero $\delta > 0$ tale che per ogni coppia $(x, y, \ldots, w)$, $(x', y', \ldots, w')$ di punti di I, tali che $|x - x'| < 3\delta$, $|y - y'| < 3\delta, \ldots$, $|w - w'| < 3\delta$, risulta:

$$(35)\qquad |F(x, y, z, u, v, w) - F(x', y', z', u', v', w')| < \min\left[\frac{m}{2},\ \frac{\sigma L \operatorname{sen}\vartheta}{MN+1}\right].$$

Esiste infine un numero $\gamma > 0$ tale che per ogni coppia di punti $P \equiv (u, v)$ $P' \equiv (u', v')$ di Q con $\overline{PP'} < \gamma$ risulta

$$\{[x_0(u, v) - x_0(u', v')]^2 + [y_0(u, v) - y_0(u', v')]^2 + [z_0(u, v) - z_0(u', v')]^2\}^{1/2} < \delta.$$

21. - Le funzioni $D(u, v)$, $H_r(u, v)$, $r = 1, 2, 3$, sono quasi continue ed integrabili L in Q ed altrettanto accade per la funzione $F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]$ per la quale inoltre vale la relazione $|F| < MD(u, v)$ in tutti i punti (u, v) di Q. Pertanto quasi tutti i punti $P_0 \equiv (u_0, v_0)$ di E godono della seguente proprietà:

δ) il punto $P_0 \equiv (u_0, v_0)$ è punto di continuità asintotica per le funzioni $H_r(u, v)$, $r = 1, 2, 3$, $F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]$, cioè se q indica un qualsivoglia quadrato a lati paralleli agli assi u, v, di centro P_0, contenuto in Q e di diametro $\delta=\delta(q)$, risulta:

$$\lim_{\delta(q)\to 0}\frac{1}{|q|}\iint_q H_r(u,v)\,du\,dv=H_r(u_0,v_0),\quad r=1,2,3,$$

$$\lim_{\delta(q)\to 0}\frac{1}{|q|}\iint_q F[x_0(u,v),\ H_r(u,v)]\,du\,dv=F[x_0(u_0,v_0),\ H_r(u_0,v_0)].$$

Inoltre quasi tutti i punti $P_0\equiv(u_0,v_0)$ di E sono punti di densità per E, cioè

$$\varepsilon)\qquad \lim_{\delta(q)\to 0}\frac{|Eq|}{q}=1.$$

Per il teorema di copertura di Vitali esiste un numero finito di punti

$$P_1,\ P_2,\dots,\ P_m,\qquad P_j\equiv(u_j,v_j),\qquad (j=1,2,\dots,m),$$

e di quadrati $q_1, q_2,\dots, q_m$, q_j di centro P_j, $(j=1,2,\dots,m)$, a lati paralleli agli assi u, v, a due a due senza punti interni in comune e tali che:

a) $P_j\varepsilon E$, $q_j\subset Q$, $j=1,2,\dots,m$; $\delta(q_j)<\gamma$;

b) $0<D(u_j,v_j)=[H_1^2+H_2^2+H_3^2]^{1/2}\leqslant N$; $0<L\leqslant A(u_j,v_j)\leqslant M$,
$0\leqslant \alpha(u_j,v_j)\leqslant \pi/2-2\vartheta$,

c) P_j punto di continuità asintotica per le funzioni F, H_r, $r=1,2,3$;

d) $$\left|\iint_{q_j} H_r(u,v)\,du\,dv-\iint_{q_j} H_r(u_j,v_j)\,du\,dv\right|<$$
$$<\min\left[\frac{\sigma\,|q_j|}{M},\ \frac{L\operatorname{sen}\vartheta\, D(u_j,v_j)\,|q_j|}{6M}\right],\quad r=1,2,3;$$

e) $$\left|\iint_{q_j} F[x_0(u,v),\ H_r(u,v)]\,du\,dv-\iint_{q_j} F[x_0(u_j,v_j),\ H_r(u_j,v_j)]\,du\,dv\right|<\sigma\,|q_j|;$$

f) $|q_jE|>|q_j|\,(1-\tau)$.

g) $\sum_{j=1}^{m}|q_j|>|E|-\tau$.

Poniamo

$$J=\sum_{j=1}^{m}q_j\,.$$

Dalle f) e g) segue:

$$E-EJ=E-E\sum_{j=1}^{m} q_j=E-\sum_{j=1}^{m} Eq_j, \quad J-JE=\sum_{j=1}^{m} q_j-E\sum_{j=1}^{m} q_j=\sum_{j=1}^{m}[q_j-Eq_j],$$

$$|E-EJ|=|E|-\sum_{j=1}^{m}|Eq_j|<|E|-(1-\tau)\sum_{j=1}^{m}|q_j|<|E|-(1-\tau)(|E|-\tau)<2\tau,$$

$$|J-JE|=\sum_{j=1}^{m}[|q_j|-|Eq_j|]<\sum_{j=1}^{m}[|q_j|-(1-\tau)|q_j|]=\tau\sum_{j=1}^{m}|q_j|<\tau.$$

Pertanto

$$\iint_E F[x_0(u,v),\ H_r(u,v)]\,du\,dv-\iint_J F[x_0(u,v),\ H_r(u,v)]\,du\,dv=\iint_{E-EJ}-\iint_{J-JE},$$

$$\left|\iint_E-\iint_J\right|\leqslant M\left\{\iint_{E-EJ}+\iint_{J-JE}\right\}D(u,v)\,du\,dv<M\,\frac{3\sigma}{M}=3\sigma$$

e infine

$$\text{(36)}\qquad \iint_E F[x_0(u,v),\ H_r(u,v)]\,du\,dv<\sum_{j=1}^{m}\iint_{q_j} F[x_0(u,v),\ H_r(u,v)]\,du\,dv+3\sigma.$$

Dalla e) segue inoltre

$$\sum_{j=1}^{m}\iint_{q_j} F[x_0(u,v),\ H_r(u,v)]\,du\,dv<\sum_{j=1}^{m}\iint_{q_j} F[x_0(u_j,v_j),\ H_r(u_j,v_j)]\,du\,dv+\sigma,$$

e quindi, confrontando con la (36) e la (34),

$$\text{(37)}\qquad \iint_Q F[x_0(u,v),\ H_r(u\ v)]\,du\,dv<\sum_{j=1}^{m}\iint_{q_j} F[x_0(u_j,v_j),\ H_r(u_j,v_j)]\,du\,dv+6\sigma.$$

22. - Poniamo

$$a_{j_r}=A_r(u_j,v_j),\ r=1,2,3, \qquad \varepsilon_j=L\ \mathrm{sen}\ \vartheta D(u_j,v_j)\,|q_j|/2,$$

e dimostriamo che, per ogni j, si ha

$$\text{(38)}\qquad \iint_{q_j}\sum_{r=1}^{3} a_{j_r} H_r(u,v)\,du\,dv>\varepsilon_j>0, \quad j=1,2,\ldots,m.$$

Dalla $d)$ e dalla $b)$ si ha infatti

$$(39)\qquad \left|\iint_{q_j}\sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\, H_r(u, v)\, du\, dv-\iint_{q_j}\sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\, H_r(u_j, v_j)\, du\, dv\right| \leqslant$$

$$\leqslant [\,|a_{j_1}|+|a_{j_2}|+|a_{j_3}|\,]\,\frac{L \operatorname{sen} \vartheta D(u_j, v_j)\,|q_j|}{6M}<\frac{L \operatorname{sen} \vartheta D(u_j, v_j)\,|q_j|}{2}.$$

D' altra parte dalla $a)$ e dalla $b)$

$$\sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\, H_r(u_j, v_j)=A(u_j, v_j)\, D(u_j, v_j) \cos \alpha(u_j, v_j) \geqslant$$

$$\geqslant LD(u_j, v_j) \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\vartheta\right)> LD(u_j, v_j) \operatorname{sen} \vartheta$$

e quindi

$$\iint_{q_j}\sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\, H_r(u_j, v_j)\, du\, dv > LD(u_j, v_j) \operatorname{sen} \vartheta\, |q_j|.$$

Da questa e dalla (39) segue

$$\iint_{q_j}\sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\, H_r(u, v)\, du\, dv > L \operatorname{sen} \vartheta D(u_j, v_j)\, |q_j|/2.$$

La (38) è così dimostrata.

23. - Consideriamo ora le m superficie continue

$$\sigma_j:\quad x=x_0(u, v),\qquad y=y_0(u, v),\qquad z=z_0(u, v),\qquad (u, v)\varepsilon q_j,\qquad j=1, 2,\ldots, m,$$

per ciascuna delle quali le relative trasformazioni piane sono assolutamente continue. Per ogni j diciamo δ_j il numero che risulta definito dal Lemma 2 del n. 10 relativamente alla superficie σ_j, ai numeri a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3} e al più piccolo dei numeri $\sigma|q_j|$ ed ε_j.

Sia

$$3\delta_0=\min\,[\varrho/2,\ \delta,\ \delta_j,\ j=1, 2,\ldots, m],$$

e sia

$$(40)\qquad S:\quad x=x(\xi, \eta),\qquad y=y(\xi, \eta),\qquad z=z(\xi, \eta),\qquad (\xi, \eta)\varepsilon Q' \equiv (0, 1, 0, 1),$$

una qualsiasi superficie continua costituita di punti di A di area finita secondo Lebesgue tale che $\| S, S_0\|<\delta_0$ e tale che le relative trasformazioni piane siano assolutamente continue. Esiste intanto una trasformazione piana, continua, biunivoca, di indice positivo tra Q e Q'

$$T':\quad \xi=\xi(u, v),\qquad \eta=\eta(u, v),\qquad (u, v)\varepsilon Q,$$

tale che, per ogni punto $P\equiv(u, v)$ di Q, risulta $\{S_0(P),\ S[T(P)]\}<2\delta_0$.

Diciamo $\omega(\lambda)$ il modulo di continuità della superficie (40) e sia $\lambda > 0$ un numero tale che $\omega(\lambda) < \delta_0$. Sia p il più piccolo intero tale che $1/p < \lambda$.

In forza del teorema di Franklin e Wiener (§ 2, n. 8) esiste una trasformazione piana, continua, biunivoca, di indice positivo e quasi lineare tra Q e Q'

$$T_p: \quad \xi = \xi_p(u, v), \qquad \eta = \eta_p(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon Q,$$

tale che per ogni punto $P \equiv (u, v)$ di Q risulti

$$\{ T_p(P),\ T(P) \} < 1/p < \lambda.$$

Ne segue:

$$(41) \quad \{ S_0(P),\ S[T_p(P)] \} \leqslant \{ S_0(P),\ S[T(P)] \} + \{ S[T(P)],\ S[T_p(P)\} \leqslant 2\delta_0 + \delta_0 = 3\delta_0.$$

Pertanto le equazioni

$$(42) \qquad S' \equiv S: \quad x = x[\xi_p(u, v),\ \eta_p(u, v)] \equiv x'(u, v),\ y = y[\xi_p(u, v),\ \eta(u, v)] \equiv$$
$$\equiv y'(u, v),\ z = z[\xi_p(u, v),\ \eta_p(u, v)] \equiv y'(u, v,),\ (u, v) \varepsilon Q,$$

danno una rappresentazione della superficie S sul quadrato Q avente le seguenti proprietà:

α') per ogni punto $P \equiv (u, v)$ di Q si ha $\{ S_0(P),\ S(P) \} < 3\delta_0$,

β') le trasformazioni piane Φ_1', Φ_2', Φ_3', relative alla rappresentazione (42) della superficie S, sono assolutamente continue.

Diciamo $H_r'(u, v)$ i Jacobiani generalizzati relativi delle trasformazioni Φ_r', $r = 1, 2, 3$,

γ') le equazioni

$$\sigma_j': \quad x = x'(u, v), \qquad y = y'(u, v), \qquad z = z'(u, v), \qquad (u, v) \varepsilon q_j,$$

definiscono delle superficie σ_j' tali che $\| \sigma_j',\ \sigma_j \| < 3\delta_0 < \delta_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, ed anche le trasformazioni piane relative a queste superficie sono assolutamente continue.

24. - Dal Lemma 2 del n. 10 e dalla definizione dei numeri δ_j segue pertanto:

δ') per ogni j, esiste un insieme chiuso $V_j \subset q_j$ per il quale

$$(43) \qquad \left| \iint\limits_{V_j} \sum_{r=1}^{3} a_{j_r} H_r'(u, v)\, du\, dv - \iint\limits_{q_j} \sum_{r=1}^{3} a_{j_r} H_r(u, v)\, du\, dv \right| <$$
$$< \min [\sigma \mid q_j \mid,\ \varepsilon_j], \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Poniamo

$$\overline{H}_r'(u, v) = H_r'(u, v) \quad \text{se } (u, v) \varepsilon V_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$
$$\overline{H}_r'(u, v) = 0 \qquad \text{se } (u, v) \text{ non } \varepsilon V_j.$$

Dall'ipotesi 1) del teorema segue, osservando che tutti i punti della superficie S distano da S_0 meno di δ_0 e perciò meno di $\varrho/2$,

$$(44) \qquad \iint_Q F[x'(u, v),\ H'_r(u, v)]\, du\, dv \geqslant \sum_{j=1}^{n} \iint_{q_j} F[x'(u, v),\ H'_r(u, v)]\, du\, dv \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} \iint_{q_j} F[x'(u, v),\ \overline{H}'_r(u, v)]\, du\, dv.$$

Sia T_{1_j} l'insieme dei punti (u, v) di V_j per i quali l'angolo tra i vettori

$$[H'_1(u, v),\ H'_2(u, v),\ H'_3(u, v)], \qquad [H_1(u_j, v_j),\ H_2(u_j, v_j),\ H_3(u_j, v_j)]$$

è $\leqslant \vartheta$.

Sia T_{2_j} l'insieme $q_j - V_{1_j}$. Si ricordi che i punti (u_j, v_j) appartengono ad E e che (proprietà b) l'angolo $\alpha(u_j, v_j)$ fra i vettori

$$[H_1(u_j, v_j),\ H_2(u_j, v_j),\ H_3(u_j, v_j)],$$
$$[a_{j_1} = A_1(u_j, v_j),\ a_{j_2} = A_2(u_j, v_j),\ a_{j_3} = A_3(u_j, v_j)],$$

è $\leqslant \frac{\pi}{2} - 2\vartheta$. Pertanto, per ogni punto $(u, v)\varepsilon T_j$, l'angolo tra i vettori

$$[H'_1(u, v),\ H'_2(u, v),\ H'_3(u, v)], \qquad [a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}]$$

è $\leqslant \frac{\pi}{2} - \vartheta$ e quindi, per ogni punto (u, v) di T_{1_j},

$$(45) \qquad \Sigma a_{j_r} H'_r(u, v) \geqslant D'(u, v)\ A(u, v) \operatorname{sen} \vartheta >$$
$$> L \operatorname{sen} \vartheta D'(u, v), \quad (u, v)\varepsilon T_{1_j}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

D'altra parte, come sappiamo dalla (38) e dalla (43),

$$\iint_{q_j} \sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\ H_r(u, v) > \varepsilon_j > 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\left| \iint_{V_j} \sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\ H'_r(u, v)\, du\, dv - \iint_{q_j} \sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\ H_r(u, v)\, du\, dv \right| < \varepsilon_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

e quindi

$$2 \iint_{q_j} \sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\ H_r(u, v)\, du\, dv \geqslant \iint_{V_j} \sum_{r=}^{3} a_{j_r}\ H'_r(u, v)\, du\, dv.$$

Da questa e dalla (45) segue

$$2 \iint_{q_j} \sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\ H_r(u, v)\, du\, dv \geqslant \iint_{T_{1_j}} L \operatorname{sen} \vartheta\ D'(u, v)\, du\, dv$$

e quindi

$$(46)\qquad \iint_{T_{1_j}} D'(u, v)\,du\,dv \leqslant \frac{2}{L \operatorname{sen}\vartheta}\iint_{q_j}\sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\, H_r(u, v)\,du\,dv =$$

$$= \frac{2}{L \operatorname{sen}\vartheta}\left\{\iint_{q_j}\sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\,[H_r(u, v) - H_r(u_j, v_j)] + \iint_{q_j}\sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\, H_r(u_j, v_j)\right\} du\,dv <$$

$$< \frac{2}{L \operatorname{sen}\vartheta}\{3\sigma\,|\,q_j\,| + 3MN\,|\,q_j\,|\} < \frac{6(MN+1)}{L \operatorname{sen}\vartheta}\,|\,q_j\,|, \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Per ogni punto (u, v) di T_{2_j} si ha per definizione,

$$(47)\qquad \mathcal{E}[x_0(u_j, v_j),\ H_r(u_j, v_j),\ H_r'(u, v)] \geqslant mD'(u, v), \quad (u, v)\varepsilon T_{2_j}.$$

25. - Osserviamo l'identità (§ 1, n. 4, formula n. 3):

$$\iint_{q_j} F[x'(u, v),\ \overline{H}_r(u, v)]\,du\,dv - \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H_r(u_j, v_j)]\,du\,dv =$$

$$= \left\{\iint_{T_{1_j}} + \iint_{T_{2_j}}\right\}\{F[x'(u, v),\ \overline{H}_r(u, v)] - F[x_0(u_j, v_j),\ \overline{H}_r(u, v)]\}\,du\,dv +$$

$$+ \left\{\iint_{T_{1_j}} + \iint_{T_{2_j}}\right\}\mathcal{E}\,[x_0(u_j, v_j),\ H_r(u_j, v_j),\ H(u, v)]\,du\,dv +$$

$$+ \iint_{q_j}\sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\,[\overline{H}_r'(u, v) - H_r(u, v)]\,du\,dv +$$

$$+ \iint_{q_j}\sum_{r=1}^{3} a_{j_r}\,[H_r(u, v) - H_r(u_j, v_j)]\,du\,dv = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6.$$

Dalle (35) e (46) segue

$$s_1 = \iint_{T_{1_j}}\left\{F\left[x'(u, v), \frac{\overline{H}_r(u, v)}{D'(u, v)}\right] - F\left[x_0(u_j, v_j), \frac{\overline{H}_r(u, v)}{D'(u, v)}\right]\right\} D'(u, v)\,du\,dv;$$

$$s_1 \geqslant -\frac{\sigma L \operatorname{sen}\vartheta}{MN+1}\iint_{T_{1_j}} D'(u, v)\,du\,dv > -\frac{\sigma L \operatorname{sen}\vartheta}{MN+1}\,\frac{6(MN+1)}{L \operatorname{sen}\vartheta}\,|\,q_j\,| = 6\sigma\,|\,q_j\,|.$$

Dalla (35) segue ancora

$$s_2 = \iint_{T_{2_j}}\left\{F\left[x'(u, v), \frac{\overline{H}_r\ u, v)}{D'(u, v)}\right] - F\left[x_0(u_j, v_j), \frac{\overline{H}_r(u, v)}{D'(u, v)}\right]\right\} D'(u, v)\,du\,dv$$

$$s_2 \geqslant -\frac{m}{2}\iint_{T_{2_j}} D'(u, v)\,du\,dv;$$

mentre dalla (47) si deduce

$$s_4 \geqslant m \iint_{T_{2j}} D'(u, v)\, du\, dv$$

e quindi $s_2 + s_4 > 0$. Dall'ipotesi 2) del teorema segue $s_3 \geqslant 0$. Infine dalla (43), tenendo conto della definizione delle funzioni $\overline{H}_r$, segue:

$$s_5 \geqslant -\sigma\, | q_j |$$

e dalla d):

$$s_6 \geqslant -3\sigma\, | q_j |.$$

Pertanto

$$(48) \qquad \sum_{j=1}^{m} \iint_{q_j} F[x'(u, v),\ \overline{H}_r(u, v)]\, du\, dv \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{m} \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv - 10\sigma.$$

Dalle (44), (48), (37) segue ora

$$\iint_{Q} F[x'(u, v),\ H_r'(u, v)]\, du\, dv \geqslant \sum_{j=1}^{m} \iint_{q_j} F[x'(u, v),\ \overline{H}_r'(u, v)]\, du\, dv \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{m} \iint_{q_j} F[x_0(u_j, v_j),\ H_r(u_j, v_j)]\, du\, dv - 10\sigma \geqslant$$
$$\geqslant \iint_{Q} F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]\, du\, dv - 16\sigma.$$

Ma $16\sigma = \varepsilon$ e poichè tanto per la rappresentazione (30) della superficie S_0 che per la rappresentazione (42) della superficie S, le relative trasformazioni piane sono assolutamente continue, risulta

$$\mathfrak{I}_S = \iint_{Q} F[x'(u, v),\ H_r'(u, v)]\, du\, dv, \qquad \mathfrak{I}_{S_0} = \iint_{Q} F[x_0(u, v),\ H_r(u, v)]\, du\, dv,$$

e quindi

$$\mathfrak{I}_S \geqslant \mathfrak{I}_{S_0} - \varepsilon.$$

Questa relazione vale per ogni superficie S di area finita secondo Lebesgue, costituita di punti A e tale che $\| S, S_0 \| < \delta_0$ ove $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$. Per l'arbitrarietà di ε è dimostrata la semicontinuità inferiore dell'integrale $\mathfrak{I}_S$ su S_0.

26. - Dal teorema IV segue come corollario il seguente:

Teorema V. ***Se l'integrale $\mathfrak{I}_S$ è semidefinito, positivo e regolare, esso è semicontinuo inferiormente su ogni superficie S di area finita secondo Lebesgue i cui punti appartengono ad A, rispetto alla classe delle superficie pure di area finita ed i cui punti appartengono ad A.***