Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

LAMBERTO CESARI

La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 13, nº 1-4 (1948), p. 77-117

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1948_2_13_1-4_77_0>

LA NOZIONE DI INTEGRALE SOPRA UNA SUPERFICIE IN FORMA PARAMETRICA

di LAMBERTO CESARI (Bologna).

Introduzione.

In precedenti lavori ([1]) ho caratterizzato le superficie continue in forma parametrica

$$S: \qquad x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v), \quad (u,v)\,\varepsilon\, Q\equiv(0,1,0,1),$$

che hanno area finita secondo LEBESGUE ed ho dimostrato che l'area $L(S)$ secondo LEBESGUE risulta sempre $\geqslant$ all'integrale classico per il calcolo delle aree. Ho poi stabilito una condizione necessaria e sufficiente ([2]) affinchè l'area di una superficie sia data da tale integrale e, recentemente, ho dimostrato ([3]) che ogni superficie continua di area finita ammette sempre almeno una rappresentazione (e quindi infinite) sul quadrato fondamentale Q per la quale l'area risulta effettivamente uguale all'integrale classico. È così stabilita una completa analogia con le curve continue in forma parametrica. Nel presente lavoro introduco la nozione di integrale sopra una qualsiasi superficie continua S in forma parametrica e di area finita secondo LEBESGUE. Analogamente a quanto è stato

([1]) L. CESARI : *a*) *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica*, Boll. U. M. I., Ser. II, Anno IV (1942), pp. 109-117 ; *b*) *Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue*, Annali Scuola Normale Sup. Pisa, Ser. II, Vol. X (1941), pp. 253-294, XI (1942), pp. 1-42 ; *c*) *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*, Memorie Accademia d'Italia, Vol. XIII (1942), pp. 1323-1483 ; *d*) *Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie*, Mem. Accad. d'Italia, Vol. XIV (1944), pp. 891-954 ; *e*) *Rappresentazione quasi conforme delle superficie continue*, Rend. Accad. Lincei, Ser. VIII, Vol. I (1946), pp. 509-514 ; *f*) *Sulla rappresentazione delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue*, Rend. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LXXIX (1945-1946) ; *g*) *Parametrizzazione delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue*. Annali di Matematica pura e applicata, Vol. 26 (1948), 2° sem. ; *h*) *Sulla trasformazione degli integrali doppi* (in corso di stampa presso la Pontificia Accad. delle Scienze) ; *i*) *Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue*, Rend. Accad. Lincei, 1947 ; *l*) *Sopra un teorema di approssimazione per le superficie continue in forma parametrica*, id., id. ; *m*) *Proprietà tangenziali delle superficie continue*, Commentarii Mathem. Helvetici, 1948.

([2]) Loc. cit. in ([1]), *a*), *c*).

([3]) Loc. cit. in ([1]) *e*), *f*), *g*).

fatto a suo tempo per le curve continue ([4]), introduco la nozione di integrale sopra una superficie come un integrale del tipo di WEIERSTRASS, la superficie essendo definita mediante una qualsiasi rappresentazione sopra il quadrato fondamentale (§ 2).

Tale integrale risulta indipendente dalla rappresentazione della superficie S (§ 3) e, per ogni rappresentazione della superficie per la quale l'area $L(S)$ è data dall'integrale classico, anche l'integrale $\mathfrak{I}_S$ risulta uguale al corrispondente integrale di LEBESGUE (§ 5)

$$\mathfrak{I}_S = \iint_S F(x, y, z;\ H_1, H_2, H_3)\, du\, dv.$$

Finalmente, se S, S_n, $n=1, 2, \ldots$, sono superficie continue di area finita secondo LEBESGUE e se $S_n \to S$, $L(S_n) \to L(S)$, allora anche $\mathfrak{I}_{S_n} \to \mathfrak{I}_S$, risultando così assicurato che l'integrale $\mathfrak{I}_S$ può anche calcolarsi come limite dei corrispondenti integrali relativi ad una successione di superficie che approssimano la superficie S ed insieme la sua area (§ 4).

Per la nozione di integrale sopra una curva, TONELLI, ([5]) che si era servito in un primo tempo dell'integrale di WEIERSTRASS, la curva essendo data in una rappresentazione qualsiasi, ha preferito successivamente valersi direttamente dell'integrale di LEBESGUE, la curva essendo rappresentata mediante la lunghezza dell'arco generico s. Anche per le superficie continue si potrebbe procedere in modo analogo, utilizzando della superficie una qualunque rappresentazione per la quale l'area è data dall'integrale classico. Ciò è possibile dato che, come io ho dimostrato ([6]), ogni superficie continua di area finita ammette almeno una rappresentazione (e quindi infinite) aventi tali proprietà. Ma questo risultato è assai riposto e di difficile dimostrazione, perciò ho preferito introdurre la nozione di integrale $\mathfrak{I}_S$ come un integrale del tipo di WEIERSTRASS, la superficie essendo data in una rappresentazione qualsiasi. Sono stato deciso a tenere questa via anche dal fatto di aver potuto dimostrare subito l'equivalenza della definizione in questione con quella di LEBESGUE per ogni rappresentazione per la quale l'area è data dall'integrale classico, e dal fatto che recentemente vari autori (MENGER, BOULIGAND, PAUC ([7])) si sono serviti di tale integrale nelle loro ricerche sul Calcolo delle Variazioni negli spazi astratti.

([4]) L. TONELLI : *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni*, Rend. della Accad. dei Lincei, Ser. V, Vol. XXI (1912), pp. 448-453.

([5]) L. TONELLI : *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, 2 voll., Zanichelli, Bologna, 1921.

([6]) Loc. cit. in ([1]), *e*), *f*), *g*).

([7]) Cfr. C. PAUC : *L'intégral de Weierstrass - Bouligand - Menger et ses applications au Calcul des Variations*. Annali Scuola Normale Sup. di Pisa, Ser. II, Vol. VIII (1939), pp. 51-68, e la bibliografia in esso contenuta. L'integrale $\mathfrak{I}_S$ come integrale di Lebesgue, per larghe classi di superficie, è stato studiato da E. J. MCSHANE : *Integrals over surfaces in parametric form*, Annals of Math. (2), Vol. 34 (1933), pp. 815-838 e da T. RADO : *Double integrals in parametric form*, Trans. Am. Math. Soc., Vol. 51 (1942), pp. 336-361.

§ 1. - La funzione F.

1. - Sia A un insieme chiuso dello spazio (reale) (x, y, z) e sia $F(x, y, z, u, v, w)$ una funzione ad un valore dei sei argomenti x, y, z, u, v, w definita per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni terna (u, v, w) di numeri reali non tutti nulli. La funzione F soddisfi inoltre alle seguenti condizioni:

1ª) La funzione $F(x, y, z, u, v, w)$ è continua in ogni punto (x, y, z) di A e per ogni terna (u, v, w) di numeri reali non nulli;

2ª) La funzione $F(x, y, z, u, v, w)$ è positivamente omogenea di grado 1° rispetto ad u, v, w, vale a dire, soddisfa alla uguaglianza

$$F(x, y, z, ku, kv, kw) = kF(x, y, z, u, v, w)$$

per ogni $k > 0$.

Porremo $F(x, y, z, 0, 0, 0) = 0$ in ogni punto (x, y, z) di A.

In tal modo, in conseguenza della 2ª), la F risulta continua anche in ogni punto $(x, y, z, 0, 0, 0)$ ove (x, y, z) è scelto comunque in A.

§ 2. - L'integrale $\mathfrak{I}_S$.

2. - Sia S una superficie continua, tutti i punti della quale appartengono ad A, e sia

$$(1) \qquad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \,\varepsilon\, Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

una sua rappresentazione. Siano Φ_1, Φ_2, Φ_3 le relative trasformazioni piane nelle quali la superficie S si proietta sui piani coordinati yz, zx, xy e sia $L(S)$ l'area secondo LEBESGUE della superficie S. Sia $[\pi_i,\ i = 1, 2, ..., n]$ un qualsiasi gruppo di poligoni di Q a due a due senza punti interni in comune, siano C_{ri}, $i = 1, 2, ..., n$, $r = 1, 2, 3$, le curve continue e chiuse immagini delle poligonali π_i^*, costituenti la periferia di π_i, rispetto alle trasformazioni Φ_r. Sia inoltre [8]

$$\tau_1(\pi_i) = \iint\limits_{K_1} O(y, z;\ C_{1i})\, dy\, dz, \qquad \tau_2(\pi_i) = \iint\limits_{K_2} O(z, x;\ C_{2i})\, dz\, dx,$$

$$\tau_3(\pi_i) = \iint\limits_{K_3} O(x, y;\ C_{3i})\, dx\, dy, \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

$$t(\pi_i) = [\tau_1^2(\pi_i) + \tau_2^2(\pi_i) + \tau_3^2(\pi_i)]^{1/2}, \quad t_r(\pi_i) = |\, \tau_r(\pi_i)\, |, \qquad (r = 1, 2, 3).$$

---

[8] Per queste, e per le rimanenti notazioni, che qui si richiamano, cfr. loc. cit. in [1], *a*), *b*), *c*). Diciamo K un cubo dello spazio xyz, a spigoli paralleli agli assi, contenente nel suo interno la superficie S. Siano K_1, K_2, K_3 le proiezioni di K sui piani yz, zx, xy. Con $O(x, y;\ C)$ indichiamo l'indice di KRONECKER relativo alla curva C del piano xy.

Inoltre

$$(2)\qquad T(S)=\text{extr. sup.}\sum_{i=1}^{n} t(\pi_i),\quad T(\Phi_r)=\text{extr. sup.}\sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i),\quad (r=1,2,3),$$

l'estremo superiore essendo preso rispetto a tutti i gruppi $[\pi_i,\ i=1,2,\dots,n]$ di poligoni di Q a due a due senza punti interni in comune.

Analoga definizione abbiano le funzioni $T(\pi)$, $T_r(\pi)$, $(r=1,2,3)$, definite come le (2) relativamente ad un qualsivoglia poligono π di Q. Risulta

$$|\tau_r(\pi_i)|=t_r(\pi_i)\leqslant T_r(\pi_i),\qquad (r=1,2,3;\ i=1,2,\dots,n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i)\leqslant T(\Phi_r),\qquad (r=1,2,3),$$

$$\sum_{i=1}^{n} t(\pi_i)\leqslant T(S),\quad \sum_{i=1}^{n} T(\pi_i)\leqslant T(S).$$

Ricordiamo inoltre che, posto

$$g_r(\pi_i)=\iint_{K_r}|O(x,y;C_{ri})|\,dx\,dy,\quad g(\pi_i)=[g_1^2(\pi)+g_2^2(\pi)+g_3^2(\pi)]^{1/2},\quad (r=1,2,3),$$

$$G(S)=\text{extr. sup.}\sum_{i=1}^{n} g(\pi_i),\quad G(\Phi_r)=\text{extr. sup.}\sum_{i=1}^{n} g_r(\pi_i),\quad (r=1,2,3),$$

$$\Psi(x,y;\Phi_r)=\text{extr. sup.}\sum_{i=1}^{n}|O(x,y;C_{ri})|,\ (x,y)\,\varepsilon\,K_r,\quad (r=1,2,3),$$

$$W(\Phi_r)=\iint_{K_r}\Psi(x,y;\Phi_r)\,dx\,dy,\qquad (r=1,2,3).$$

$G(S)$ è l'*area di Geocze* della superficie S, $\Psi(x,y,\Phi_r)$ è la funzione caratteristica e $W(\Phi_r)$ la *variazione totale* della trasformazione Φ_r, $(r=1,2,3)$. La trasformazione Φ_r si dice a variazione limitata se $W(\Phi_r)<+\infty$. Per ogni poligono π_i è

$$t(\pi_i)\leqslant g(\pi_i),\qquad t_r(\pi_i)\leqslant g_r(\pi_i),\qquad (r=1,2,3)$$

e, per ogni superficie S di area finita secondo LEBESGUE, è [9]

$$T(S)=G(S)=L(S),\quad T(\Phi_r)=G(\Phi_r)=W(\Phi_r)=L(\Phi_r),\qquad (r=1,2,3)$$

Se I è un insieme di punti di Q diciamo $\eta(I)$ il diametro dell'insieme $S(I)$ dello spazio xyz formato dai punti che sono immagine di qualche punto di I. Diremo $\eta(I)$ l'*oscillazione* della rappresentazione (1) della superficie S sull'insieme I di Q. Se $\omega(\delta)$ è il massimo della distanza tra le immagini su S dei punti P, P' di Q con $\overline{PP'}\leqslant\delta$, $\omega(\delta)$ dicesi il *modulo di continuità* della rappresentazione (1) della superficie S e tende a zero con δ.

---

[9] Loc. cit. in [1], *a*), *b*), *c*), *d*).

3. - Sia $[\pi_i, i=1, 2, \dots, n]$ un gruppo di poligoni di Q a due a due senza punti interni in comune.

Poniamo

$$\delta = \max_{i=1,2,\dots,n} \eta(\pi_i), \qquad m = \max_{r=1,2,3} |E_r|, \qquad E_r = \sum_{i=1}^{n} C_{ri}, \qquad (r=1,2,3),$$

$$\mu = \max \left[T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i), \quad T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i), \qquad r=1, 2, 3 \right].$$

I numeri δ, m, μ si dicono gli *indici* dei gruppo $[\pi_i]$ di poligoni di Q.

Per ogni gruppo di poligoni $[\pi_i]$ si ha $\delta \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$. Inoltre (10) comunque assegnato un numero $\gamma > 0$ esistono in Q quanti si vogliano gruppi di poligoni $[\pi_i]$ per i quali $\delta < \gamma$, $m < \gamma$, $\mu < \gamma$.

Scegliamo in ciascuno dei poligoni π_i un punto (u_i, v_i) $(i=1, 2, \dots, n)$, al quale corrisponderà su S un punto (x_i, y_i, z_i), $x_i = x(u_i, v_i)$, $y_i = y(u_i, v_i)$, $z_i = z(u_i, v_i)$ che appartiene ad A.

Consideriamo infine la somma

$$\sum_{i=1}^{n} F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)].$$

Dimostreremo nei nn. 4-12 il seguente:

TEOREMA I. - *Se la superficie*

$$S: \qquad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \, \varepsilon \, Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

giace interamente in A ed ha area finita secondo LEBESGUE, *allora esiste finito il limite*

$$\mathfrak{J}_S = \lim_{\substack{\delta \\ m \\ \mu}\Big\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)]. \tag{3}$$

Diremo $\mathfrak{J}_S$ *l'integrale sopra la superficie* S della funzione F.

4. - Sia Φ una trasformazione piana continua

$$\Phi: \qquad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (u, v) \, \varepsilon \, Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

e sia K un quadrato del piano xy a lati paralleli agli assi x, y contenente nel suo interno l'insieme $B = \Phi(Q)$.

---

(10) Loc. cit. in (1), c), p. 1376.

Sia $[\pi_i, i=1,2,..., \nu]$ un gruppo di poligoni semplici di Q a due a due senza punti interni in comune. Siano c_i, $i=1,2,..., \nu$, le curve continue e chiuse immagini delle poligonali π_i^* costituenti la periferia dei poligoni π_i. Sia E l'insieme dei punti di B occupati dalle ν curve c_i, sia cioè

$$E=\sum_{i=1}^{\nu} c_i .$$

Poniamo

$$m=|E|, \qquad \mu=T(\Phi)-\sum_{i=1}^{\nu} t(\pi_i) .$$

Dimostriamo il seguente

LEMMA I. ([11]) - *Se Φ è una trasformazione a variazione limitata e $\Psi(x,y;\Phi)$ è la sua funzione caratteristica, se $[\pi_i, i=1,2,..., \nu]$ è un gruppo di poligoni semplici di A a due a due senza punti interni in comune, allora esiste un insieme I di punti di K di misura $<\mu$ tale che, per ogni poligono π di Q senza punti interni in comune con i poligoni π_i, $(i=1,2,..., \nu)$, e per ogni punto (x, y) di $K-I$, si ha*

$$\sum_{i=1}^{\nu} O(x,y;c_i)=\Psi(x,y;\Phi), \qquad O(x,y;c)=0,$$

ove c è la curva continua e chiusa immagine della poligonale π^* costituente la periferia di π.

È infatti

$$T(\Phi)=G(\Phi)=W(\Phi), \qquad t(\pi_i)\leq g(\pi_i), \qquad (i=1,2,..., \nu),$$

e quindi

$$\mu=T(\Phi)-\sum_{i=1}^{\nu} t(\pi_i)\geq W(\Phi)-\sum_{i=1}^{\nu} g(\pi_i)=\iint_K \left[\Psi(x,y;\Phi)-\sum_{i=1}^{\nu}|O(x,y;c_i)|\right] dx\,dy.$$

La funzione entro parentesi quadre assume solo valori *interi* ≥ 0 e perciò l'insieme I dei punti di K in cui si ha

$$\Psi(x,y;\Phi)-\sum_{i=1}^{\nu}|O(x,y;c_i)|>0,$$

ha misura $<\mu$. Se ora π è un qualsiasi poligono semplice di Q senza punti interni in comune con i poligoni π_i, $i=1,2,..., \nu$, allora, in ogni punto di K si ha

$$\sum_{i=1}^{\nu}|O(x,y;c_i)|+|O(x,y;c)|\leq \Psi(x,y;\Phi)$$

e quindi, in tutti i punti di $K-I$,

$$O(x,y;c)=0.$$

([11]) Cfr. loc. cit. in ([1]), *h*), § 2, n. 2.

5. - Ho già dimostrato il seguente :

LEMMA II ([12]). - *Se Φ è una trasformazione a variazione limitata, se $[\pi_i,\ i=1, 2,..., \nu]$, $[\pi_j',\ j=1, 2,..., \nu']$ sono due gruppi di poligoni semplici di Q, se i poligoni π_i, $i=1, 2,..., \nu$, sono a due a due senza punti interni in comune ed analoga proprietà hanno i poligoni π_j', $j=1, 2,..., \nu'$, se $\eta(\pi_j')<\varrho$, $j=1, 2,..., \nu'$, se E, E', I, I' sono gli insiemi dianzi introdotti relativi ai gruppi di poligoni $[\pi_i]$ e $[\pi_j']$, se E_ϱ è l'insieme dei punti di K che distano dall'insieme chiuso E meno di ϱ, allora, indicati con π_{is}', $s=1, 2,..., l_i$, tutti e soli i poligoni π_j' interamente contenuti in π_i, indicati con π_j', $j=1, 2,..., l'$, i rimanenti poligoni, si ha*

$$l'+\sum_{i=1}^{\nu} l_i=\nu',$$

e, in quasi tutti i punti $Q\equiv(x, y)$ di $K-E_\varrho-E'-I-I'$,

$$O(x, y\,;\ c_i)=\sum_{s=1}^{l_i} O(x, y\,;\ c_{is}'), \qquad (i=1, 2,..., \nu),$$

$$0=\sum_{j=1}^{l'} O(x, y\,;\ c_j').$$

6. - Dimostriamo ora il seguente

LEMMA III. - *Nelle condizioni del Lemma II, posto*

$$J=E_\varrho+E'+I+I', \qquad \tau(\pi_i)=\sum_{s=1}^{l_i} \tau(\pi_{is}')+\delta_i, \qquad (i=1, 2,..., \nu),$$

$$\delta=\sum_{j=1}^{l'} g(\pi_j'),$$

risulta

$$\sum_{i=1}^{\nu} |\,\delta_i\,|\leqslant 2\iint_J \Psi(x, y\,;\ \Phi)\,dx\,dy, \qquad \delta<\iint_J \Psi(x, y\,;\ \Phi)\,dx\,dy.$$

Infatti, ricordando il Lemma II, risulta

$$\tau(\pi_i)=\iint_K O(x, y\,;\ c_i)\,dx\,dy=\Big(\iint_{K-J}+\iint_J\Big)\,O(x, y\,;\ c_i)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_J O(x, y\,;\ c_i)\,dx\,dy+\sum_{s=1}^{l_i}\iint_{K-J} O(x, y\,;\ c_{is}')\,dx\,dy=$$

$$=\sum_{s=1}^{l_i}\iint_K O(x, y\,;\ c_{is}')\,dx\,dy-\sum_{s=1}^{l_i}\iint_J O(x, y\,;\ c_{is}')\,dx\,dy+\iint_J O(x, y\,;\ c_i)\,dx\,dy,$$

([12]) Loc. cit. in ([1]), *h*), § 3, 4, 5, 6.

e poichè

$$\tau(\pi'_{is}) = \iint_K O(x, y;\, c'_{is})\, dx\, dy, \quad (s = 1, 2, \ldots, l_i;\ i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

anche

$$\delta_i = -\sum_{s=1}^{l_i} \iint_J O(x, y;\, c'_{is})\, dx\, dy + \iint_J O(x, y;\, c_i)\, dx\, dy.$$

Sempre per il Lemma II si ha inoltre

$$\delta = \sum_{j=1}^{l'} g(\pi_j') = \sum_{j=1}^{l'} \iint_K |\, O(x, y;\, c_j')\,|\, dx\, dy = \sum_{j=1}^{l'} \iint_J |\, O(x, y;\, c_j')\,|\, dx\, dy.$$

Finalmente

$$\sum_{i=1}^{\nu} |\,\delta_i\,| = \sum_{i=1}^{\nu} \left| -\sum_{s=1}^{l_i} \iint_J O(x, y;\, c'_{is})\, dx\, dy + \iint_J O(x, y;\, c_i)\, dx\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \iint_J \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{s=1}^{l_i} |\, O(x, y;\, c'_{is})\,|\, dx\, dy + \iint_J \sum_{i=1}^{\nu} |\, O(x, y;\, c_i)\,|\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant 2 \iint_J \Psi(x, y;\, \Phi)\, dx\, dy,$$

$$\delta = \iint_J \sum_{j=1}^{l'} |\, O(x, y;\, c_j')\,|\, dx\, dy \leqslant \iint_J \Psi(x, y;\, \Phi)\, dx\, dy.$$

Il Lemma III è così dimostrato.

7. - Sia S una superficie continua, sia

$$S: \qquad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \qquad (u, v) \in Q \equiv (0, 1, 0, 1),$$

una sua qualsiasi rappresentazione; siano Φ_1, Φ_2, Φ_3 le relative trasformazioni piane. Sia poi $[\pi_i,\ i = 1, 2, \ldots, \nu]$ un gruppo di poligoni semplici di Q a due a due senza punti interni in comune. Siano C_{ri}, $(r = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, \ldots, n)$, le curve continue chiuse immagini delle poligonali semplici π_i^* rispetto alle trasformazioni Φ_r. Poniamo

$$\delta = \max_{i = 1, 2, \ldots, n} \eta(\pi_i), \quad m = \max_{r = 1, 2, 3} |\, E_r\,|, \quad E_r = \sum_{i=1}^{n} C_{ri}, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

$$\mu = \max \left[T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i), \quad T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i), \quad r = 1, 2, 3 \right].$$

Diciamo inoltre I_r l' insieme dei punti (x, y) del quadrato K_r nei quali

$$\sum_{i=1}^{\nu} | O(x, y\,;\, C_{ri}) | < \Psi(x, y, \Phi_r), \qquad (r=1, 2, 3).$$

Dimostriamo il seguente:

LEMMA IV. - *Se la superficie S ha area finita secondo Lebesgue, allora per ogni gruppo di poligoni semplici di Q, $[\pi_i, i=1, 2,..., n]$, a due a due senza punti interni in comune, si ha*

$$(4) \qquad \begin{cases} 0 \leqslant G(S) - \sum_{i=1}^{n} g(\pi_i) \leqslant T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) \leqslant \mu \\ | I_r | \leqslant \mu, \qquad (r=1, 2, 3). \end{cases}$$

Intanto

$$G(S) = T(S), \qquad t(\pi_i) \leqslant g(\pi_i), \qquad (i=1, 2,..., n),$$

da cui senz' altro la prima delle (4). D' altra parte

$$0 \leqslant G(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} g_r(\pi_i) = \iint_{K_r} \left[\Psi(x, y\,;\, \Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} | O(x, y\,;\, C_{ri}) | \right] dx\,dy =$$
$$= \iint_{I_r} \left[\Psi(x, y\,;\, \Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} | O(x, y\,;\, C_{ri}) | \right] dx\,dy.$$

Ma la funzione sotto il segno integrale che, in K_r, è sempre $\geqslant 0$, è, in I_r, sempre $\geqslant 1$, e quindi

$$| I_r | \leqslant G(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} g_r(\pi_i).$$

Ma

$$G(\Phi_r) = T(\Phi_r), \quad t_r(\pi_i) \leqslant g_r(\pi_i), \qquad (r=1, 2, 3\,;\; i=1, 2,..., n),$$

e finalmente

$$| I_r | \leqslant T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i) \leqslant \mu.$$

Il Lemma IV è così dimostrato.

8. - LEMMA V. - *Se S è una superficie continua di area finita secondo Lebesgue, se la* (1) *è una sua rappresentazione, se $[\pi_i, i=1, 2,..., n]$, $[\pi_j', j=1, 2,..., n']$, sono due gruppi di poligoni semplici di A, se i poligoni π_i, $i=1, 2,..., n$, sono a due a due senza punti interni in comune ed analoga proprietà hanno i poligoni π_j', $j=1, 2,..., n'$, se δ, m, μ e δ', m', μ' sono gli indici dei gruppi di poligoni $| \pi_i |$ e $| \pi_j' |$, se E_r, I_r, E_r', I_r' sono i relativi insiemi di K_r e $(E_r)_{\delta'}$ è l'insieme dei punti di K_r che distano da E_r meno*

di δ', *se* π'_{is}, $s=1, 2,..., l_i$, *sono i poligoni* π_j' *completamente contenuti in* π_i, $i=1, 2,..., n$, *e* π_j', $j=1, 2,..., l'$, *sono i rimanenti poligoni* π_j', *allora, posto*

$$a_{ri}=\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} \qquad (i=1, 2,..., n\,;\; r=1, 2, 3).$$

$$J_r=(E_r)_{\delta'}+E_r'+I_r+I_r', \qquad (r=1, 2, 3),$$

$$D=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_i}\{\, t(\pi_{is})-[a_{1i}\,\tau_1(\pi_{is})+a_{2i}\,\tau_2(\pi_{is})+a_{3i}\,\tau_3(\pi_{is})]\,\},$$

risulta

$$\sum_{j=1}^{l'} g(\pi_j')<\sum_{r=1}^{3}\iint_{J_r}\Psi(x, y\,;\,\Phi_r)\,dx\,dy,$$

$$0\leqslant D\leqslant \mu+2\sum_{r=1}^{3}\iint_{J_r}\Psi(x, y\,;\,\Phi_r)\,dx\,dy.$$

Si rilevi esplicitamente che in questo enunciato si debbono del tutto trascurare i poligoni π per i quali $t(\pi)=0$.

La prima di queste relazioni segue immediatamente dal Lemma III.

Osserviamo ora che

$$t^2(\pi_{is})=\tau_1^2(\pi_{is})+\tau_2^2(\pi_{is})+\tau_3^2(\pi_{is}),\quad 1=a_{1i}^2+a_{2i}^2+a_{3i}^2,\quad (s=1, 2,..., l_i\,;\; i=1, 2,..., n),$$

e quindi, per la disuguaglianza di SCHWARZ,

$$t(\pi_{is})\geqslant|\,a_{1i}\,\tau_1(\pi_{is})+a_{2i}\,\tau_2(\pi_{is})+a_{3i}\tau_3(\pi_{is})\,|,\quad (s=1, 2,..., l_i\,;\; i=1, 2,..., n),$$

da cui $D\geqslant 0$. D' altra parte

$$0\leqslant D=\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is})-\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{l_i}[a_{1i}\,\tau_1(\pi_{is})+a_{2i}\,\tau_2(\pi_{is})+a_{3i}\,\tau_3(\pi_{is})]\leqslant$$

$$\leqslant T(S)-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\tau_1(\pi_i)}{t(\pi_i)}\sum_{s=1}^{l_i}\tau_1(\pi_{is})+\frac{\tau_2(\pi_i)}{t(\pi_i)}\sum_{s=1}^{l_i}\tau_2(\pi_{is})+\frac{\tau_3(\pi_i)}{t(\pi_i)}\sum_{s=1}^{l_i}\tau_3(\pi_{is})\right\}$$

e, in forza del Lemma III,

$$\tau_r(\pi_i)=\sum_{s=1}^{l_i}\tau_r(\pi_{is})+\delta_{ri}, \qquad (i=1, 2,..., n\,;\; r=1, 2, 3),$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\,\delta_{ri}\,|<2\iint_{J_r}\Psi(x, y\,;\,\Phi_r)\,dx\,dy.$$

Ne consegue

$$D\leqslant T(S)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{3}\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}[\tau_r(\pi_i)-\delta_{ri}]=$$

$$=T(S)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_1^2(\pi_i)+\tau_2^2(\pi_i)+\tau_3^2(\pi_i)}{t(\pi_i)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{3}\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\delta_{ri},$$

ed infine

$$D \leqslant T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) + \sum_{r=1}^{3} \sum_{i=1}^{n} |\, \delta_{ri} \,| \leqslant \mu + 2 \sum_{r=1}^{3} \iint_{J_r} \Psi(x, y\,;\, \Phi_r)\, dx\, dy.$$

Il Lemma V è così completamente dimostrato.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

LEMMA VI. - *Nelle condizioni del Lemma V, risulta*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is}) \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} - \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})} \right]^2 \leqslant 2\mu + 4 \sum_{r=1}^{3} \iint_{J_r} \Psi(x, y\,;\, \Phi_r)\, dx\, dy\,.$$

Osserviamo intanto che se α_r, β_r, $r = 1, 2, 3$, sono qualsivogliano numeri reali tali che

$$\sum_{r=1}^{3} \alpha_r^2 = 1\,, \qquad \sum_{r=1}^{3} \beta_r^2 = 1\,,$$

risulta

$$1 - \sum_{r=1}^{3} \alpha_r \beta_r = \frac{1}{2} \left[\sum_{r=1}^{3} \alpha_r^2 + \sum_{r=1}^{3} \beta_r^2 - 2 \sum_{r=1}^{3} \alpha_r \beta_r \right] = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} (\alpha_r - \beta_r)^2.$$

Posto

$$\alpha_r = \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} = \alpha_{ri}\,, \qquad \beta_r = \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\,, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

risulta

$$1 - \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} - \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})} \right]^2, \quad (s = 1, 2, \dots, l_i\,;\ i = 1, 2, \dots, n).$$

Ne segue, moltiplicando per $t(\pi_{is})$,

$$t(\pi_{is}) - \sum_{r=1}^{3} \alpha_{ri}\, \tau_r(\pi_{is}) = \frac{1}{2}\, t(\pi_{is}) \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} - \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})} \right]^2, \quad (s = 1, 2, \dots, l_i\,;\ i = 1, 2, \dots, n)$$

e infine, sommando rispetto ad s e ad i, moltiplicando per 2 e ricordando il Lemma V,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is}) \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} - \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})} \right]^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{l_i} \left\{ t(\pi_{is}) - \sum_{r=1}^{3} \alpha_{ri}\, \tau_r(\pi_{is}) \right\} =$$

$$= 2D \leqslant 2\mu + 4 \sum_{r=1}^{3} \iint_{J_r} \Psi(x, y\,;\, \Phi_r)\, dx\, dy.$$

Il Lemma VI è così dimostrato.

9. - Dimostrazione del teorema I.

Consideriamo l'insieme I di tutti i punti (x, y, z, u, v, w) per i quali (x, y, z) appartiene ad S e $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Tale insieme è limitato e chiuso e perciò la funzione $F(x, y, z, u, v, w)$ è, su di esso, limitata ed uniformemente continua. Sia $M>0$ un numero tale che, per ogni (x, y, z, u, v, w) di I si abbia $|F(x, y, z, u, v, w)|<M$.

Possiamo inoltre supporre M abbastanza grande affinchè si abbia pure $L(S)<M$. Sia $\varepsilon>0$ un numero arbitrario e sia $\sigma=\varepsilon/314M$.

Sia poi $\varrho>0$ un numero tale che per ogni coppia (x, y, z, u, v, w), (x', y', z', u', v', w') di punti di I tali che $|x-x'|<\varrho$, $|y-y'|<\varrho$, $|z-z'|<\varrho$, $|u-u'|<\varrho$, $|v-v'|<\varrho$, $|w-w'|<\varrho$, si abbia $|F(x, y, z, u, v, w)-F(x', y', z', u', v', w')|<\sigma$.

Per ipotesi la superficie S ha area finita secondo LEBESGUE e quindi le trasformazioni Φ_r, $r=1, 2, 3$, sono a variazione limitata e pertanto le loro funzioni caratteristiche $\Psi(x, y; \Phi_r)$, $r=1, 2, 3$, sono integrabili L.

Esiste perciò un numero $\tau>0$ tale che per ogni insieme misurabile h, $h\subset K_r$, $(r=1, 2, 3)$, con $|h|<\tau$, risulti

$$\iint_h \Psi(x, y; \Phi_r)\, dx\, dy<\sigma\varrho^2, \qquad (r=1, 2, 3).$$

Sia $[p_i,\ i=1, 2, \dots, \nu]$ un gruppo di poligoni di Q, a due a due senza punti interni in comune, tali che, indicate con C_{ri}, $i=1, 2, \dots, \nu$, $r=1, 2, 3$, le curve continue e chiuse immagini delle poligonali p_i rispetto alle trasformazioni Φ_r, risulti

$$\delta_0=\max_{i=1,2,\dots,\nu}\eta(p_i)<\varrho,$$

$$m_0=\max_{r=1,2,3}|E_r|<\tau, \quad |E_r|=\sum_{i=1}^{\nu} C_{ri}, \qquad (r=1, 2, 3),$$

$$\mu_0=\max\left[T(S)-\sum_{i=1}^{\nu} t(p_i),\ T(\Phi_r)-\sum_{i=1}^{\nu} t_r(p_i),\ r=1, 2, 3\right]<\min[\sigma, \sigma\varrho^2, \tau] \quad (^{13}).$$

Scegliamo in ciascun poligono p_i, $(i=1, 2, \dots, \nu)$, un punto (u_i, v_i), sia (x_i, y_i, z_i) il punto corrispondente su S e consideriamo la somma

$$\sum_{i=1}^{\nu} F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(p_i), \tau_2(p_i), \tau_3(p_i)].$$

Diciamo I_r l'insieme dei punti (x, y) di K_r nei quali

$$\sum_{i=1}^{\nu} |O(x, y; C_{ri})|<\Psi(x, y; \Phi_r), \qquad (r=1, 2, 3).$$

---

(13) L'esistenza di un gruppo di poligoni soddisfacente a queste condizioni segue dal teorema già citato in (10).

Come sappiamo $|I_r|<\mu$, $(r=1, 2, 3)$, (Lemma IV). L'insieme E_r è chiuso e tutto costituito di punti di K_r, quindi, per ogni numero reale $t>0$, l'insieme $(E_r)_t$ dei punti di K_r che distano da E_r meno di t è aperto e inoltre

$$\lim_{t \to 0} (E_r)_t = E_r, \qquad \lim_{t \to 0} |(E_r)_t| = |E_r| .$$

Esiste perciò un numero $t=\varrho_1$ tale che

$$|(E_r)_{\varrho_1}| < |E_r| + \tau < \tau + \tau = 2\tau, \qquad (r=1, 2, 3).$$

Poniamo

$$\gamma = \min. [\varrho, \varrho_1, \tau, \sigma, \sigma\varrho^2].$$

10. - Sia $[\pi_i, i=1, 2,..., n]$ un qualsiasi gruppo di poligoni di Q, a due a due senza punti interni in comune, tali che, indicate con C'_{ri}, $(i=1, 2,..., n;$ $r=1, 2, 3)$, le curve continue e chiuse immagini delle poligonali π_i^* rispetto alle trasformazioni Φ_r, risulti

$$(5) \quad \begin{cases} \delta = \max\limits_{i=1,2,...,\nu} \eta(n_i) < \gamma, \\ m = \max\limits_{r=1,2,3} |E'_r| < \gamma, \qquad E'_r = \sum\limits_{i=1}^{n} C'_{ri}, \qquad (r=1, 2, 3), \\ \mu = \max \left[T(S) - \sum\limits_{i=1}^{n} t(\pi_i),\ T(\Phi_r) - \sum\limits_{i=1}^{n} t_r(\pi_i), \quad r=1, 2, 3 \right] < \gamma . \end{cases}$$

Scegliamo su ciascun poligono π_i un punto (u'_i, v'_i), sia (x'_i, y'_i, z'_i) il punto corrispondente su S e consideriamo la somma

$$\sum_{i=1}^{n} F[x'_i, y'_i, z'_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)] .$$

11. - Sia I'_r l'insieme dei punti (x, y) di K_r nei quali

$$\sum_{i=1}^{n} |O(x, y; C_{ri})| < \Psi(x, y; \Phi_r), \qquad (r=1, 2, 3).$$

Come sappiamo $|I'_r|<\mu$, $r=1, 2, 3$. Posto $J_r=(E_r)_{\varrho_1} + E'_r + I_r + I'_r$, risulta

$$|\mathfrak{J}_r| < |(E_r)_{\varrho_1}| + |E'_r| + |I_r| + |I'_r| < 2\tau + \gamma + \mu_0 + \mu \leqslant 2\tau + \tau + \tau + \tau + \tau = 5\tau.$$

Indichiamo con π_{is}, $(s=1, 2,... l_i)$, i poligoni π_i che sono completamente interni al poligono p_i, $(i=1, 2,..., \nu)$, e con π'_i, $(i=1, 2,..., l')$, i rimanenti poligoni π_i. Indicheremo perciò con (u_{is}, v_{is}), (x_{is}, y_{is}, z_{is}), $(s=1, 2,..., l_i;$ $i=1, 2,..., \nu)$, oppure con (u'_i, v'_i), (x'_i, y'_i, z'_i), $(i=1, 2,..., l')$, i punti (u'_i, v'_i)

di Q e i punti (x_i', y_i', z_i') di S, secondochè il punto (u_i', v_i') appartiene ad un poligono π_{is}, oppure ad un poligono π_i'.

Dal Lemma V risulta

$$\sum_{i=1}^{l'} t(\pi_i') \leqslant \sum_{i=1}^{l'} g(\pi_i') \leqslant \sum_{r=1}^{3} \iint_{J_r} \Psi(x, y\,;\ \Phi_r)\, dx\, dy < 3 \cdot 5\, \sigma\varrho^2 = 15\, \sigma\varrho^2 < 15\, \sigma.$$

Dal Lemma VI risulta inoltre

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is}) \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right]^2 \leqslant 2\mu_0 + 4 \sum_{r=1}^{3} \iint_{J_r} \Psi(x, y\,;\ \Phi_r)\, dx\, dy \leqslant$$
$$\leqslant 2\, \sigma\varrho^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5\, \sigma\varrho^2 = 62\, \sigma\varrho^2.$$

Dividiamo ora i poligoni π_{is}, $(s = 1, 2, \ldots, l_i;\ i = 1, 2, \ldots, \nu)$, in due categorie, ponendo nella prima quelli per i quali, per ogni r, risulta

$$(7) \qquad \left|\frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right| < \varrho, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

e ponendo nella seconda tutti gli altri, cioè quelli per i quali, per almeno un r, risulta

$$(8) \qquad \left|\frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right| \geqslant \varrho.$$

Indicheremo con $\sum_{i,s}'$ e $\sum_{i,s}''$ le somme relative ai poligoni π_{is} rispettivamente della prima e della seconda categoria.

Dalla (8) segue ora, ricordando la (6),

$$\varrho^2 \sum_{i,s}'' t(\pi_{is}) \leqslant \sum_{i,s}'' t(\pi_{is}) \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right]^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is}) \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right]^2 \leqslant 62\, \sigma\varrho^2,$$

ossia

$$\varrho^2 \sum_{i,s}'' t(\pi_{is}) \leqslant 62\, \sigma\varrho^2$$

e quindi

$$(9) \qquad \sum_{i,s}'' t(\pi_{is}) \leqslant 62\, \sigma.$$

12. - Con ovvie notazioni possiamo scrivere

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(p_i), \tau_2(p_i), \tau_3(p_i)] - \sum_{i=1}^{n} F[x_i', y_i', z_i', \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i, \tau_r(p_i)] - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{s=1}^{l_i} F[x_{is}, \tau_r(\pi_{is})] - \sum_{i=1}^{l'} F[x_i', \tau_r(\pi_i')] =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} \left\{ F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] t(p_i) - \sum_{s=1}^{l_i} F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] t(\pi_{is}) - \sum_{i=1}^{l'} F\left[x_i', \frac{\tau_r(\pi_i')}{t(\pi_i')}\right] t(\pi_i') \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} \left\{ F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] t(p_i) - \sum_{s=1}^{l_i} F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] t(\pi_{is}) \right\} +$$

$$+ \left\{ \sum_{i,s}{}' + \sum_{i,s}{}'' \right\} \left\{ F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] t(\pi_{is}) - F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] t(\pi_{is}) \right\} -$$

$$- \sum_{i=1}^{l'} F\left[x_i', \frac{\tau_r(\pi_i')}{t(\pi_i')}\right] t(\pi_i') = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 .$$

Si ha ora

$$| s_1 | \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} \left| F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] \right| \left| t(p_i) - \sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{i=1}^{\nu} \left| T(p_i) - \sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is}) \right| + M \sum_{i=1}^{\nu} \left| T(p_i) - t(p_i) \right| =$$

$$= M \sum_{i=1}^{\nu} \left[T(p_i) - \sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is})\right] + M \sum_{i=1}^{\nu} \left[T(p_i) - t(p_i)\right] \leqslant$$

$$\leqslant M \left[T(S) - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is})\right] + M \left[T(S) - \sum_{i=1}^{\nu} t(p_i)\right] =$$

$$= M \left[T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i)\right] + M \sum_{i=1}^{l'} t(\pi_i') + M \left[T(S) - \sum_{i=1}^{\nu} t(p_i)\right].$$

In forza del numero precedente e delle definizioni di μ e μ_0, risulta infine

(10) $$| s_1 | < M[\mu + \mu_0 + 15\sigma] \leqslant M[\sigma + \sigma + 15\sigma] = 17 M\sigma .$$

Osserviamo ora che

$$s_2 = \sum_{i,s}{}' \left\{ F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] - F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] \right\} t(\pi_{is}) ,$$

$$| s_2 | \leqslant \sum_{i,s}{}' \left| F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] - F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] \right| t(\pi_{is}) .$$

Ma tanto il punto (x_i, y_i, z_i) che il punto (x_{is}, y_{is}, z_{is}) sono punti di S immagini sulla superficie S dei punti (u_i, v_i), (u_{is}, v_{is}) appartenenti allo stesso poligono π_i e, d' altra parte, $\eta(\pi_i) < \varrho$ e quindi $|x_i - x_{is}| < \varrho$, $|y_i - y_{is}| < \varrho$, $|z_i - z_{is}| < \varrho$. Inoltre per i poligoni π_{is} della prima categoria valgono le (7) e quindi, per i poligoni della prima categoria, si ha

$$\left| F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] - F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] \right| < \varrho .$$

Pertanto

$$|s_2| < \sum_{i,s}{}' \sigma t(\pi_{is}) \leqslant \sigma \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is}) < \sigma T(S) = \sigma L(S) \leqslant \sigma M . \tag{11}$$

Si ha ancora

$$s_3 = \sum_{i,s}{}'' \left\{ F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] - F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] \right\} t(\pi_{is}),$$

$$|s_3| \leqslant \sum_{i,s}{}'' \left\{ \left| F\left[x_i, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] \right| + \left| F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] \right| \right\} t(\pi_{is}) \leqslant 2M \sum_{i,s}{}'' t(\pi_{is})$$

e quindi, ricordando la (9),

$$|s_3| \leqslant 2M \cdot 62\sigma = 124\, M\sigma . \tag{12}$$

Finalmente, ricordando la (5),

$$|s_4| = \left| \sum_{i=1}^{l'} F\left[x_i', \frac{\tau_r(\pi_i')}{t(\pi_i')}\right] t(\pi_i') \right| \leqslant \sum_{i=1}^{l'} \left| F\left[x_i', \frac{\tau_r(\pi_i')}{t(\pi_i')}\right] \right| t(\pi_i') \leqslant M \sum_{i=1}^{l'} t(\pi_i') < 15\, M\sigma . \tag{13}$$

Dalle (10), (11), (12), (13) segue infine

$$|\Delta| \leqslant |s_1| + |s_2| + |s_3| + |s_4| < (17 + 1 + 124 + 15) M\sigma = 157\, M\sigma = \varepsilon/2 .$$

È così dimostrato che, per ogni gruppo di poligoni π_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, di Q a due a due senza punti interni in comune ed i cui indici δ, m, μ verificano le relazioni (5), risulta

$$\left| \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i, \tau_r(p_i)] - \sum_{i=1}^{n} F[x_i', \tau_r(\pi_i)] \right| < \frac{\varepsilon}{2} . \tag{14}$$

Se ora $[\pi_i', i = 1, 2, \ldots, n']$, $[\pi_i'', i = 1, 2, \ldots, n'']$ sono due gruppi di poligoni di Q, soddisfacenti alle stesse condizioni (5), risulta

$$\left| \sum_{i=1}^{n'} F[x_i', \tau_r(\pi_i')] - \sum_{i=1}^{n''} F[x_i'', \tau_r(\pi_i'')] \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Pertanto, essendo $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario, per il teorema fondamentale di CAUCHY risulta dimostrato che il limite (3) esiste ed è finito. Il teorema I è così completamente dimostrato.

§ 3. - Indipendenza dell'integrale $\mathfrak{J}_S$ dalla rappresentazione della superficie S

13. - Dimostreremo nei nn. 14-18 il seguente

TEOREMA II. - *L'integrale $\mathfrak{J}_S$ è indipendente dalla rappresentazione della superficie S.*

14. - Siano Q e Q' due quadrati del piano (u, v) e siano:

$$(15) \qquad S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \, \varepsilon \, Q,$$

$$(16) \qquad S': \quad x = x'(u, v), \quad y = y'(u, v), \quad z = z'(u, v), \quad (u, v) \, \varepsilon \, Q',$$

due rappresentazioni di una superficie $S \equiv S'$ di area finita secondo LEBESGUE. Siano Φ_r, $(r = 1, 2, 3)$, Φ'_r, $(r = 1, 2, 3)$, le relative trasformazioni piane. Siano τ_r, t_r, T_r, $(r = 1, 2, 3)$, t, T, etc. le solite funzioni relative alla trasformazione (15) e τ'_r, $(r = 1, 2, 3)$, t', T', etc. quelle relative alla trasformazione (16). Come sappiamo (§ 2, n. 2)

$$T(S) = L(S) = T'(S') = L'(S'), \qquad T(\Phi_r) = T(\Phi'_r), \qquad (r = 1, 2, 3),$$

e, per ogni punto (x, y) di K_r,

$$\Psi(x, y; \Phi_r) = \Psi(x, y; \Phi'_r), \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Sia $\varepsilon > 0$ un numero scelto ad arbitrio. Gli integrali $\mathfrak{J}_S$ e $\mathfrak{J}_{S'}$ esistono entrambi e sono finiti. Pertanto esiste un numero $\gamma > 0$ tale che, per ogni gruppo di poligoni semplici di Q, $[\pi_i, i = 1, 2, \dots, n]$, a due a due senza punti interni in comune e di indici δ, m, μ tutti $< \gamma$, risulti

$$(17) \qquad \left| \mathfrak{J}_S - \sum_{i=1}^{n} F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)] \right| < \varepsilon/3.$$

Analogamente esiste un numero $\gamma' > 0$ tale che, per ogni gruppo di poligoni semplici di Q', $[\pi'_i, i = 1, 2, \dots, n']$ a due a due senza punti interni in comune e di indici δ', m', μ' tutti $< \gamma'$, risulti

$$\left| \mathfrak{J}_{S'} - \sum_{i=1}^{\nu} F[x'_i, y'_i, z'_i, \tau'_1(\pi'_i), \tau'_2(\pi'_i), \tau'_3(\pi'_i)] \right| < \varepsilon/3.$$

Sia I l'insieme dei punti (x, y, z, u, v, w) per i quali $(x, y, z) \varepsilon S$ e $u^2+v^2+w^2=1$. Sia $M>0$ un numero tale che per ogni punto (x, y, z, u, v, w) di I si abbia $F| < M$ e inoltre tale che $L(S) < M$ (n. 3, a). Sia $\sigma = \min[\varepsilon/195M, \gamma'/13]$.

Sia $\varrho > 0$ un altro numero tale che, per ogni coppia (x, y, z, u, v, w), (x', y', z', u', v', w') di punti di I tali che $|x-x'|<\varrho, \ldots, |w-w'|<\varrho$, risulti

$$|F(x, u) - F(x', u')| < \sigma.$$

Finalmente sia $0<\tau\leqslant\sigma$ un numero tale che per ogni insieme h misurabile, $h \subset K_r$, $|h|<\tau$, risulti

$$\iint_h \Psi(x, y;\ \Phi_r)\, dx\, dy < \min[\sigma\varrho^2, \sigma], \qquad (r=1, 2, 3).$$

15. - Sia ora $\{\pi_i, i=1, 2, \ldots, n\}$ un gruppo di poligoni semplici di Q di indici, δ, m, μ tali che

$$\delta, m, \mu < \min[\gamma, \sigma, \tau, \varrho/2, \sigma\varrho^2].$$

In ciascuno dei poligoni π_i scegliamo un punto (u_i, v_i) e sia (x_i, y_i, z_i) l'immagine di (u_i, v_i) sopra la superficie S. Deve essere

$$\left| \mathfrak{I}_S - \sum_{i=1}^{n} F[x_i, \tau_r(\pi_i)] \right| < \varepsilon/3.$$

Posto

$$E_r = \sum_{i=1}^{n} C_{ri}, \qquad (r=1, 2, 3),$$

come sappiamo risulta

$$E_r \subset K_r,\ |E_r| \leqslant m, \qquad (r=1, 2, 3).$$

Sia $\lambda>0$ un numero tale che, indicato con $(E_r)_{2\lambda}$ l'insieme dei punti di K_r che distano da E_r meno di 2λ, risulti, per ogni r, $|(E_r)_{2\lambda}| < |E_r| + \tau$ e quindi $|(E_r)_{2\lambda}| < m+\tau \leqslant 2\tau$.

Possiamo supporre $\lambda \leqslant \varrho/2$, $\lambda \leqslant \sigma$.

Come sappiamo esiste tra Q e Q' una corrispondenza biunivoca e continua T che fa corrispondere ai punti di Q i punti di Q', ai punti di Q^* i punti di Q'^*, al verso positivo su Q^* il verso positivo su Q'^* e viceversa. Inoltre se $(u, v) \varepsilon Q$ e $(u', v') \varepsilon Q'$ si corrispondono in T, se $P \equiv (x, y, z)$, $P' \equiv (x', y', z')$ sono le immagini su S e $S' \equiv S$ dei punti (u, v) e (u', v'), risulta $\overline{PP'} < \lambda$.

Pertanto agli n poligoni $\pi_i \subset Q$ corrispondono, per la T, n regioni di JORDAN $r_i \subset Q'$, $(i=1, 2, \ldots, n)$, a due a due senza punti interni in comune. Di più se diciamo r_i^* la curva continua, chiusa e semplice costituente la frontiera di r_i, $\bar{C}_{ri}$ la curva continua e chiusa immagine di r_i^* rispetto alla trasformazione Φ_r, risulta

$$\|C_{ri}, \bar{C}_{ri}\| < \lambda, \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ r=1, 2, 3).$$

Sia $\omega'(\delta)$ il modulo di continuità della rappresentazione (16) della superficie $S' \equiv S$ e sia δ_0 il massimo numero reale tale che $\omega(\delta_0) \leqslant \lambda$. Per ogni i sia π_i' un poligono di Q', interamente contenuto in r_i e tale che $\| \pi_i'^*, r_i^* \| \leqslant \delta_0$. Allora se C'_{ri} sono le immagini delle poligonali $\pi_i'^*$ rispetto alle trasformazioni Φ'_r risulta

$$\| \bar{C}_{ri}, \ C'_{ri} \| \leqslant \lambda, \qquad (i=1, 2, \dots, n; \ r=1, 2, 3),$$

e quindi in definitiva

$$\| C_{ri}, \ C'_{ri} \| \leqslant \| C_{ri}, \ \bar{C}_{ri} \| + \| \bar{C}_{ri}, \ C'_{ri} \| < \lambda + \lambda = 2\lambda. \tag{18}$$

16. - Consideriamo ora il gruppo $\{\pi_i', \ i=1, 2, \dots, n\}$ di poligoni semplici di Q', i quali, essendo $\pi_i' \subset r_i$, $(i=1, 2, \dots, n)$, risultano a due a due senza punti, nè interni nè del contorno, in comune.

Siano δ', m', μ' gli indici del gruppo $\{\pi_i'\}$ e siano E_r i relativi insiemi

$$E_r' = \sum_{i=1}^{n} C'_{ri}, \qquad E_r' \subset K_r, \qquad (r=1, 2, 3).$$

Anzitutto da $\pi_i' \subset r_i'$ segue $\eta'(\pi_i') \leqslant \eta'(r_i)$. D'altra parte r_i corrisponde per la T a π_i e quindi $\eta'(r_i) \leqslant \eta(\pi_i) + 2\lambda$. Dunque

$$\eta'(\pi_i') \leqslant \eta'(r_i) \leqslant \eta(\pi_i) + 2\lambda \leqslant \delta + 2\lambda \leqslant \sigma + 2\sigma = 3\sigma < \gamma'$$

ed infine

$$\delta' = \max_{i=1,2,\dots,n} \eta'(\pi_i') < \gamma'.$$

Le curve C'_{ri} sono interamente contenute in $(E_r)_{2\lambda}$ e quindi

$$E_r' \subset (E_r)_{2\lambda}, \qquad | E_r' | \leqslant | (E_r)_{2\lambda} | < 2\tau, \qquad (r=1, 2, 3).$$

Pertanto

$$m' = \max_{r=1,2,3} | E_r' | < 2\tau \leqslant 2\sigma < \gamma'.$$

Inoltre in tutti i punti (x, y) di $K_r - (E_r)_{2\lambda}$ risulta ([14]), ricordando la (18),

$$O(x, y; \ C_{ri}) = O(x, y; \ C'_{ri}), \qquad (i=1, 2, \dots, n; \ r=1, 2, 3),$$

e quindi, posto

$$\tau_r(\pi_i) - \tau_r'(\pi_i') = \delta_{ri}, \tag{19}$$

$$\delta_{ri} = \iint_{K_r} O(x, y; \ C_{ri}) \, dx \, dy - \iint_{K_r} O(x, y; \ C'_{ri}) \, dx \, dy =$$

$$= \iint_{(E_r)_{2\lambda}} [O(x, y; \ C_{ri}) - O(x, y; \ C'_{ri})] \, dx \, dy.$$

([14]) Cfr. loc. cit. in ([1]), *b*), p. 257, Lemma 1.

Infine

$$(20)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left|\delta_{ri}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\iint_{(E_r)_{2\lambda}}|\,O(x,y;\,C_{ri})\,|\,dx\,dy + \sum_{i=1}^{n}\iint_{(E_r)_{2\lambda}}|\,O(x,y;\,C'_{ri})\,|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{(E_r)_{2\lambda}}\sum_{i=1}^{n}|\,O(x,y;\,C_{ri})\,|\,dx\,dy + \iint_{(E_r)_{2\lambda}}\sum_{i=1}^{n}|\,O(x,y;\,C'_{ri})\,|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant 2\iint_{(E_r)_{2\lambda}}\Psi(x,y;\,\Phi_r)\,dx\,dy < \begin{cases} 2\cdot 2\,\sigma\varrho^2 = 4\,\sigma\varrho \\ 2\cdot 2\,\sigma = 4\,\sigma . \end{cases}$$

Si ha ora

$$T'(\Phi'_r)-\sum_{i=1}^{n}t'_r(\pi'_i)=T'(\Phi'_r)-\sum_{i=1}^{n}|\,\tau'_r(\pi'_i)\,|=T(\Phi_r)-\sum_{i=1}^{n}|\,\tau_r(\pi_i)-\delta_{ri}\,|,\quad (r=1,2,3)$$

$$T'(S')-\sum_{i=1}^{n}t'(\pi'_i)=T(S')-\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{3}\tau'^2_r(\pi_i)\right\}^{1/2}=T(S)-\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{3}[\tau_r(\pi_i)-\delta_{ri}]^2\right\}^{1/2}.$$

D' altra parte

$$|\,\tau_r(\pi_i)-\delta_{ri}\,| \geqslant \Big|\,|\,\tau_r(\pi_i)\,|-|\,\delta_{ri}\,|\,\Big| \geqslant |\tau_r(\pi_i)\,|-|\,\delta_{ri}\,|,\qquad (i=1,2,\dots,n;\ r=1,2,3),$$

$$\left\{\sum_{r=1}^{3}[\tau_r(\pi_i)-\delta_{ri}]^2\right\}^{1/2} \geqslant \left|\left\{\sum_{r=1}^{3}\tau_r^2(\pi_i)\right\}^{1/2}-\left\{\sum_{r=1}^{3}\delta_{ri}^2\right\}^{1/2}\right| \geqslant \text{ [15]}$$

$$\geqslant \left\{\sum_{r=1}^{3}\tau_r^2(\pi_i)\right\}^{1/2}-\left\{\sum_{r=1}^{3}\delta_{ri}^2\right\}^{1/2},\qquad (i=1,2,\dots,n),$$

e quindi (Lemma IV)

$$T'(\Phi'_r)-\sum_{i=1}^{n}t'_r(\pi'_i) \leqslant T(\Phi_r)-\sum_{i=1}^{n}|\,\tau_r(\pi_i)\,|+\sum_{i=1}^{n}|\,\delta_{ri}\,| =$$

$$=\left[T(\Phi_r)-\sum_{i=1}^{n}t_r(\pi_i)\right]+\sum_{i=1}^{n}|\,\delta_{ri}\,| < \mu+4\,\sigma,\qquad (r=1,2,3),$$

$$T'(S')-\sum_{i=1}^{n}t'_r(\pi'_i) \leqslant T(S)-\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{3}\tau_r^2(\pi_i)\right\}^{1/2}+\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{r=1}^{3}\delta_{ri}^2\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left[T(S)-\sum_{i=1}^{n}t(\pi_i)\right]+\sum_{r=1}^{3}\sum_{i=1}^{n}\delta_{ri} < \mu+12\,\sigma .$$

---

[15] Si ricordi la nota disuguaglianza

$$\left[\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)^2\right]^{1/2} \geqslant \left|\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^2\right)^{1/2}-\left(\sum_{i=1}^{m}b_i^2\right)^{1/2}\right| .$$

Finalmente

$$\mu' = \max\left[T'(S') - \sum_{i=1}^{n} t'(\pi_i'),\ T'(\Phi_r') + \sum_{i=1}^{n} t_r'(\pi_i'),\ r=1,2,3\right] <$$
$$< \mu + 12\,\sigma \leqslant 13\,\sigma \leqslant \gamma'$$

Dunque il gruppo dei poligoni $\{\pi_i'\}$ di Q' ha indici δ', m', μ' tutti minori di γ'

Scelto su ogni poligono π_i' un punto (u_i', v_i') ed indicato con (x_i', y_i', z_i') la sua immagine su $S' \equiv S$, risulta

$$\left| \mathcal{J}_{S'} - \sum_{i=1}^{n} F[x_i', \tau_r(\pi_i')] \right| < \varepsilon/3. \tag{21}$$

17. - Nel § 2, n. 8 abbiamo già osservato l'uguaglianza

$$1 - \sum_{r=1}^{3} \alpha_r \beta_r = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} (\alpha_r - \beta_r)^2$$

valevole qualunque siano i numeri α_r, β_r, $(r=1, 2, 3)$, tali che

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1.$$

Posto

$$\alpha_r = \tau_r(\pi_i)/t(\pi_i), \qquad \beta_r = \tau_r'(\pi_i')/t'(\pi_i'),$$

risulta

$$1 - \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} \frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} - \frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right]^2$$

e quindi, moltiplicando per $2t'(\pi_i')$ e sommando rispetto ad i, si ha

$$\sum_{i=1}^{n} t'(\pi_i') \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} - \frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right]^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \left[t'(\pi_i') - \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} \tau_r'(\pi_i')\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2\left[T(S) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} \tau_r'(\pi_i')\right].$$

Ricordando le (19) e (20) risulta

$$\sum_{i=1}^{n} t'(\pi_i') \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} - \frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right]^2 \leqslant 2 \left\{ T(S) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} [\tau_r(\pi_i) - \delta_{ri}] \right\} = \tag{22}$$
$$= 2 \left\{ T(S) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau_1^2(\pi_i) + \tau_2^2(\pi_i) + \tau_3^2(\pi_i)}{t(\pi_i)} + \sum_{r=1}^{3} \sum_{i=1}^{n} \delta_{ri} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\left[T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i)\right] + 2 \sum_{r=1}^{3} \sum_{i=1}^{n} |\delta_{ri}| < 2\mu + 2 \cdot 12\,\sigma\varrho^2 < 26\,\sigma\varrho^2.$$

Dividiamo ora i poligoni π_i' in due categorie ponendo nella prima quelli per i quali, per tutti gli r, risulta

$$\left| \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)} - \frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')} \right| < \varrho, \qquad (r=1, 2, 3), \tag{23}$$

e ponendo nella seconda tutti gli altri, cioè quelli per i quali, per almeno un r, risulta

$$\left|\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}-\frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right|\geqslant\varrho\,.$$

Indicheremo con $\sum\limits_i{}'$ e $\sum\limits_i{}''$ le somme relative ai poligoni π_i' della prima e, rispettivamente, della seconda categoria. Dalla (22) risulta

$$\varrho^2\sum_i{}''\,t'(\pi_i')\leqslant\sum_i{}''\,t'(\pi_i')\sum_{r=1}^{3}\left[\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}-\frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right]^2\leqslant 26\,\sigma\varrho^2,$$

e quindi

$$\varrho^2\sum_i{}''\,t'(\pi_i')<26\,\sigma\varrho^2$$

ed infine

$$\sum_i{}''\,t'(\pi_i')<26\,\sigma\,. \tag{24}$$

18. - Si ha ora

$$\begin{aligned}\Delta&=\sum_{i=1}^{n}F[x_i,\ \tau_r(\pi_i)]-\sum_{i=1}^{n}F[x_i',\ \tau_r'(\pi_i')]=\\&=\sum_{i=1}^{n}F\left[x_i,\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\right]t(\pi_i)-\sum_{i=1}^{n}F\left[x_i',\frac{\tau_r'(\pi_i')}{t(\pi_i')}\right]t'(\pi_i)=\\&=\sum_{i=1}^{n}\left\{F\left[x_i,\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\right]t(\pi_i)-F\left[x_i,\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\right]t'(\pi_i')\right\}+\\&+\left\{\sum_i{}'+\sum_i{}''\right\}\left\{F\left[x_i,\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\right]t'(\pi_i')-F\left[x_i',\frac{\tau_r(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right]t'(\pi_i')\right\}=s_1+s_2+s_3\,.\end{aligned}$$

D'altra parte, ricordando la (19) e la (20), [16]

$$\begin{aligned}|s_1|&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|F\left[x_i,\frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\right]\right|\,|t(\pi_i)-t'(\pi_i')|\leqslant\\&\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\left|\left\{\sum_{r=1}^{3}\tau_r^2(\pi_i)\right\}^{1/2}-\left\{\sum_{r=1}^{3}\tau_r'^2(\pi_i')\right\}^{1/2}\right|\leqslant\\&\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{3}|\tau_r(\pi_i)-\tau_r'(\pi_i')|=M\sum_{r=1}^{3}\sum_{i=1}^{n}|\delta_{ri}|<12M\sigma\,.\end{aligned}$$

---

[16] Cfr. nota [15] e la relazione $\left[\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2\right]^{1/2}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{m}|x_i|\,.$

Inoltre

$$s_2 = \sum_i{}' \left\{ F\left[x_i, \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\right] - F\left[x_i', \frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right] \right\} t'(\pi_i'),$$

$$|s_2| \leqslant \sum_i{}' \left| F\left[x_i, \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\right] - F\left[x_i', \frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right] \right| t'(\pi_i').$$

Si osservi che il punto (u_i', v_i') appartiene al poligono $\pi_i' \subset Q'$ e perciò anche alla regione di JORDAN r_i e quindi la T fa corrispondere al punto (u_i', v_i') un punto (u_i'', v_i'') di $\pi_i \subset Q$, in modo che, se (x_i'', y_i'', z_i'') è l'immagine di (u_i'', v_i'') sulla superficie S, allora, avendo indicato con (x_i', y_i', z_i') l'immagine del punto (u_i', v_i') sulla superficie S', risulta

$$|x_i' - x_i''| < \lambda, \qquad |y_i' - y_i''| < \lambda, \qquad |z_i' - z_i''| < \lambda.$$

D'altra parte i punti (u_i, v_i) e (u_i'', v_i'') appartengono entrambi al poligono $\pi_i \subset Q$ e $\eta(\pi_i) < \delta$. Pertanto

$$|x_i - x_i''| < \delta, \qquad |y_i - y_i''| < \delta, \qquad |z_i - z_i''| < \delta$$

e quindi

$$|x_i - x_i'| \leqslant |x_i - x_i''| + |x_i'' - x_i'| < \delta + \lambda \leqslant \varrho/2 + \varrho/2 = \varrho, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ed analogamente

$$|y_i - y_i'| < \varrho, \quad |z_i - z_i'| < \varrho, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Per ogni poligono π_i della prima categoria, valgono inoltre le (23) e quindi

$$\left| F\left[x_i, \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\right] - F\left[x_i', \frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right] \right| < \sigma.$$

Pertanto

$$|s_2| \leqslant \sigma \sum_i{}' t'(\pi_i') < \sigma \sum_{i=1}^{n} t'(\pi_i') < \sigma T'(S') = \sigma L(S) < M\sigma.$$

Finalmente si ha

$$s_3 = \sum_i{}'' \left\{ F\left[x_i, \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\right] - F\left[x_i', \frac{\tau_r'(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right] \right\} t'(\pi_i'),$$

$$|s_3| \leqslant \sum_i{}'' \left\{ \left| F\left[x_i, \frac{\tau_r(\pi_i)}{t(\pi_i)}\right] \right| + \left| F\left[x_i', \frac{\tau_r(\pi_i')}{t'(\pi_i')}\right] \right| \right\} t'(\pi_i') \leqslant 2M \sum_i{}'' t'(\pi_i')$$

e, ricordando la (24),

$$|s_3| < 2M \cdot 26\sigma = 52 M\sigma.$$

In definitiva

$$|\Delta| \leqslant |s_1| + |s_2| + |s_3| < (12 + 1 + 52) M\sigma = 65 M\sigma < \varepsilon/3,$$

ossia

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F[x_i,\ \tau_r(\pi_i)] - \sum_{i=1}^{n} F[x_i',\ \tau_r'(\pi_i')]\right| < \varepsilon/3 . \tag{25}$$

Ricordando le (17), (21) e (25) risulta

$$|\mathfrak{I}_S - \mathfrak{I}_{S'}| \leqslant \left|\mathfrak{I}_S - \sum_{i=1}^{n} F[x_i,\ \tau_r(\pi_i)]\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} F[x_i,\ \tau_r(\pi_i)] - \sum_{i=1}^{n} F[x_i',\ \tau_r'(\pi_i')]\right| +$$
$$+ \left|\mathfrak{I}_{S'} - \sum_{i=1}^{n} F[x_i',\ \tau_r'(\pi_i')]\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Per l'arbitrarietà di ε, segue senz'altro

$$\mathfrak{I}_S = \mathfrak{I}_{S'} .$$

Il teorema II è così completamente dimostrato.

§ 4. - Approssimazione dell' integrale $\mathfrak{I}_S$.

19. - Siano

$$\left\{\begin{array}{lllll} S: & x=x(u,v), & y=y(u,v), & z=z(u,v), & (u,v)\,\varepsilon\, Q \equiv (0,1,0,1), \\ S_p: & x=x_p(u,v), & y=y_p(u,v), & z=z_p(u,v), & (u,v)\,\varepsilon\, Q \equiv (0,1,0,1), \end{array}\right. \tag{26}$$
$$(p=1, 2,\dots),$$

superficie continue di area finita secondo LEBESGUE interamente costituite di punti dell'insieme chiuso A. Siano Φ_r, Φ_{pr}, $(r=1, 2, 3;\ p=1, 2,\dots)$, le relative trasformazioni piane.

Sia $[\pi_i,\ i=1, 2,\dots, n]$ un gruppo di poligoni semplici di Q, a due a due senza punti interni in comune; siano C_{ri} $C_{ri}^{(p)}$, $(r=1, 2, 3;\ i=1, 2,\dots, n;\ p=1, 2,\dots)$, le curve continue e chiuse immagini delle poligonali π_i^* rispetto alle trasformazioni Φ, Φ_{pr}. Se I è un insieme di punti di Q diciamo $\eta(I)$, $\eta^{(p)}(I)$ le oscillazioni delle (26) nell'insieme I. Infine siano $\tau_r(\pi_i)$, $t_r(\pi_i),\dots$, $G(\pi_i)$, ecc. le solite funzioni relative alla superficie S, e $\tau_r^{(p)}(\pi_i)$, $t_r^{(p)}(\pi_i),\dots$, $G^{(p)}(\pi_i)$, ecc. quelle relative alla superficie S_p. Sia $(u_i,\ v_i)$ un qualsiasi punto di π_i e siano $(x_i,\ y_i,\ z_i)$ l'immagine di $(u_i,\ v_i)$ sopra la superficie S, e $(x_i^{(p)},\ y_i^{(p)},\ z_i^{(p)})$ l'immagine di $(u_i,\ v_i)$ sopra la superficie S_p, $(p=1, 2,\dots)$.

Possiamo considerare le sommatorie

$$\sum_{i=1}^{n} F[x_i,\ \tau_r(\pi_i)], \quad \sum_{i=1}^{n} F[x_i^{(p)},\ \tau_r^{(p)}(\pi_i)], \qquad (p=1, 2,\dots).$$

Diciamo δ_0, m_0, μ_0 gli indici del gruppo di poligoni $\{\pi_i\}$ rispetto alla superficie S e δ_p, m_p, μ_p gli indici dello stesso gruppo rispetto alla superficie S_p, cioè poniamo:

$$\delta_0 = \max_{i=1,2,\dots n} \eta(\pi_i), \quad m_0 = \max_{r=1,2,3} |E_r|, \quad E_r = \sum_{i=1}^{n} C_{ri}, \qquad (r=1, 2, 3),$$

$$\mu_0 = \max \left[T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i), \quad T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi), \quad r = 1, 2, 3 \right],$$

$$\delta_p = \max_{i=1,2,\dots,n} \eta^{(p)}(\pi_i), \quad m_p = \max_{r=1,2,3} |E_r^{(p)}|, \quad E_r^{(p)} = \sum_{i=1}^{n} C_{ri}^{(p)}, \qquad (r=1, 2, 3),$$

$$\mu_p = \max \left[T(S_p) - \sum_{i=1}^{n} t^{(p)}(\pi_i), \quad T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} t_i^{(p)}(\pi_i), \quad r = 1, 2, 3 \right], \quad (p=1, 2,\dots).$$

Come sappiamo

$$\lim_{\substack{\delta_0 \\ m_0 \\ \mu_0}\Big\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} F[x_i, \tau_r(\pi_i)] = \mathfrak{I}_S, \quad \lim_{\substack{\delta_p \\ m_p \\ \mu_p}\Big\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} F[x_i^{(p)}, \tau_r^{(p)}(\pi_i)] = \mathfrak{I}_{S_p}, \qquad (p=1, 2,\dots).$$

Dimostreremo nei nn. 20-22 il seguente

TEOREMA III. - *Se le superficie* (26) *hanno area finita secondo Lebesgue se* $\lim_{p\to\infty} L(S_p) = L(S)$ *e, uniformemente in* Q,

$$\lim_{p\to\infty} x_p(u, v) = x(u, v), \quad \lim_{p\to\infty} y_p(u, v) = y(u, v), \quad \lim_{p\to\infty} z_p(u, v) = z(u, v),$$

allora la convergenza dei limiti

$$\lim_{\substack{\delta_p \\ m_p \\ \mu_p}\Big\} \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} F[x_i^{(p)}, \tau_r^{(p)}(\pi_i)] = \mathfrak{I}_{S_p}, \qquad (p=1, 2,\dots),$$

è uniforme rispetto a p *ed inoltre*

$$\lim_{p\to\infty} \mathfrak{I}_{S_p} = \mathfrak{I}_S.$$

20. - Poniamo

$$\bar{\delta}_p = \max_{(u,v)\,\varepsilon\, Q} \{ [x_p(u, v) - x(u, v)]^2 + [y_p(u, v) - y(u, v)]^2 + [z_p(u, v) - z(u, v)]^2 \}^{1/2}$$

ed osserviamo che $\lim_{p\to\infty} \bar{\delta}_p = 0$. Sia N una costante tale che per ogni p risulti $\bar{\delta}_p < N$, $(p=1, 2,\dots)$. Tutte le superficie S_p, $(p=1, 2,\dots)$, sono interamente contenute nell'insieme $I_0 \subset A$ dei punti (x, y, z) di A che distano da S non più di N. Se diciamo I l'insieme di tutti i punti (x, y, z, u, v, w) per i quali $(x, y, z)\ \varepsilon\ I_0$, $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, l'insieme I è limitato e chiuso e quindi la funzione $F(x, y, z, u, v, w)$ è, in I, limitata ed uniformemente continua. Sia M un numero tale che $|F| < M$

in ogni punto (x, y, z, u, v, w) di I. Possiamo inoltre supporre M abbastanza grande affinchè si abbia $L(S) < M$, $L(S_p) < M$, $(p = 1, 2, \ldots)$.

Dalle ipotesi e da un mio precedente teorema [17] segue

$$\lim_{p\to\infty} L(\Phi_{pr}) = L(\Phi_r), \qquad (r = 1, 2, 3),$$

o anche (§ 2, n. 2)

$$\lim_{p\to\infty} W(\Phi_{pr}) = W(\Phi_r), \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Pertanto le funzioni

$$\Psi(x, y;\ \Phi_r), \quad \Psi(x, y;\ \Phi_{pr}), \qquad (r = 1, 2, 3;\ p = 1, 2, \ldots).$$

sono equiassolutamente integrabili [18].

21. - Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario. Sia $\sigma = \varepsilon/314\,M$; sia $\varrho > 0$ un numero tale che per ogni coppia (x, y, z, u, v, w), (x', y', z', u', v', w') di punti di I tali che $|x - x'| < \varrho, \ldots, |w - w'| < \varrho$, risulti $|F(x, u) - F(x', u')| < \sigma$.

Finalmente sia $\tau > 0$ un numero tale che, per ogni insieme misurabile h, $h \subset K_r$, con $|h| < \tau$, risulti

$$\iint_h \Psi(x, y;\ \Phi_r)\, dx\, dy < \sigma\varrho^2, \qquad \iint_h \Psi(x, y;\ \Phi_{pr})\, dx\, dy < \sigma\varrho^2,$$
$$(r = 1, 2, 3;\ p = 1, 2, \ldots).$$

In forza di un mio precedente teorema [19] esiste un intero $\bar{p}$ ed un gruppo di poligoni semplici $[p_i,\ i = 1, 2, \ldots, \nu]$ di Q, a due a due senza punti interni in comune tali che:

$$(27) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\delta_0 = \max_{i=1,2,\ldots,\nu} \eta(p_i) < \varrho \\ &m_0 = \max_{r=1,2,3} |E_r| < \tau, \quad E_r = \sum_{i=1}^{\nu} C_{ri}, \qquad (r = 1, 2, 3), \end{aligned} \right.$$

$$\mu_0 = \max\left[T(S) - \sum_{i=1}^{\nu} t(p_i),\ T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{\nu} t_r(p_i),\ \ r = 1, 2, 3\right] < \min[\sigma, \sigma\varrho^2, \tau]$$

e, per ogni $p \geq \bar{p}$, anche

$$\delta_p = \max_{i=1,2,\ldots,\nu} \eta^{(p)}(p_i) < \varrho$$

$$m_p = \max_{r=1,2,3} |E_r^{(p)}| < \tau, \quad E_r^{(p)} = \sum_{i=1}^{\nu} C_{ri}^{(p)}, \qquad (r = 1, 2, 3)$$

$$\mu_p = \max\left[T(S_p) - \sum_{i=1}^{\nu} t^{(p)}(p_i),\ T(\Phi_{pr}) - \sum_{i=1}^{\nu} t_r^{(p)}(p_i),\ r = 1, 2, 3\right] < \min[\sigma, \sigma\varrho^2, \tau].$$

---

[17] Loc. cit. in [1], *i*).

[18] Loc. cit. in [1], *c*), p. 1348.

[19] Loc. cit. in [1], *c*), p. 1385. Un'altra dimostrazione dello stesso teorema vedasi in [1], *l*.

Inoltre, per ogni $p \geqslant \bar{p}$,

$$(28)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{\nu} \mid \tau_r^{(p)}(p_i) - \tau_r(p_i) \mid < \sigma\varrho^2, & (r=1, 2, 3). \\ \sum_{i=1}^{\nu} \mid t^{(p)}(p_i) - t(p_i) \mid < \min [\sigma, \sigma\varrho^2]. \end{cases}$$

Scegliamo in ciascun poligono p_i, $(i=1, 2,..., \nu)$, un punto (u_i, v_i) e siano (x_i, y_i, z_i), $(x_i^{(p)}, y_i^{(p)}, z_i^{(p)})$ le immagini di (u_i, v_i) sopra le superficie S, S_p, $(p=1, 2,...)$. Consideriamo infine le somme

$$\sum_{i=1}^{\nu} F[x_i, \tau_r(p_i)], \quad \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i^{(p)}, \tau_r^{(p)}(p_i)], \qquad (p=1, 2,...).$$

Sia $0 < \varrho_1 \leqslant \varrho$ un numero reale tale che:

$$\mid (E_r)_{2\varrho_1} \mid < \mid E_r \mid + \tau < \tau + \tau = 2\tau, \qquad (r=1, 2, 3),$$

e quindi a maggior ragione

$$(E_r)_{\varrho_1} \mid < 2\tau, \qquad (r=1, 2, 3).$$

Sia $\bar{\bar{p}} \geqslant \bar{p}$ un intero tale che per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$, risulti

$$\bar{\delta}_p < \varrho_1, \quad \mid L(S_p) - L(S) \mid < \sigma\varrho^2, \quad \mid L(\Phi_{pr}) - L(\Phi_r) \mid < \sigma\varrho^2$$

e quindi anche

$$(29)\quad \mid T(S_p) - T(S) \mid < \sigma\varrho^2, \quad \mid T(\Phi_{pr}) - T(\Phi_r) \mid < \sigma\varrho^2, \qquad (r=1, 2, 3).$$

Dimostriamo che, per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$, è anche

$$\mid (E_r^{(p)})_{\varrho_1} \mid < 2\tau, \qquad (r=1, 2, 3;\ p \geqslant \bar{\bar{p}}).$$

Infatti se P è un punto di $(E_r^{(p)})_{\varrho_1}$ esiste in $E_r^{(p)}$ un punto Q tale che $\overline{PQ} < \varrho_1$. D' altra parte Q appartiene ad una delle curve $C_{ri}^{(p)}$ e quindi ad esso corrisponde sulla curva C_{ri}, di uguali indici r ed i, un punto R tale che $\overline{QR} \leqslant \delta_p \leqslant \varrho_1$.

Pertanto $\overline{PR} \leqslant \overline{PQ} + \overline{QR} < \varrho_1 + \varrho_1 = 2\varrho_1$ e quindi

$$(E_r^{(p)})_{\varrho_1} < (E_r)_{2\varrho_1}, \quad \mid E_r^{(p)})_{\varrho_1} \mid < \mid (E_r)_{2\varrho_1} \mid < 2\tau, \qquad (r=1, 2, 3;\ p \geqslant \bar{\bar{p}}).$$

Poniamo ora

$$\gamma = \min [\varrho, \varrho_1, \tau, \sigma, \sigma\varrho^2].$$

Confrontando quanto precede col n. 9, si vede che l' attuale gruppo di poligoni $[p_i]$, possiede, sia nei riguardi della superficie S, sia nei riguardi di ciascuna delle infinite superficie S_p con $p \geqslant \bar{p}$, tutte le proprietà che il gruppo $[p_i]$ del n. 9, possiede nei riguardi della sola superficie S. Pertanto, sia nei riguardi della superficie S, che nei riguardi di ciascuna delle superficie S_p, valgono le considerazioni dei nn. 9 e 10 e se ne conclude quanto segue:

α) per ogni gruppo di poligoni $[\pi_i,\ i=1, 2,..., n]$ di Q aventi indici δ, m, μ rispetto ad S tutti minori di γ e per ogni scelta in π_i dei punti (u_i', v_i') risulta, indicato con (x_i', y_i', z_i') l' immagine di (u_i, v_i) rispetto alla superficie S,

$$(30) \qquad \left| \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i,\ \tau_r(p_i)] - \sum_{i=1}^{n} F[x_i',\ \tau_r(\pi_i)] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi anche

$$\left| \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i',\ \tau_r(\pi_i)] - \mathfrak{I}_S \right| < \varepsilon\,;$$

β) per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$ e per ogni gruppo di poligoni $[\pi_i,\ i=1, 2,..., n]$ di Q aventi indici δ_p, m_p, μ_p, rispetto alla superficie S_p, tutti minori di γ e per ogni scelta in π_i dei punti (u_i', v_i') risulta, indicato con $(x_i'^{(p)}, y_i'^{(p)}, z_i'^{(p)})$ l' immagine di (u_i', v_i') rispetto alla superficie S_p,

$$(31) \qquad \left| \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i^{(p)},\ \tau_r^{(p)}(p_i)] - \sum_{i=1}^{n} F[x_i'^{(p)},\ \tau_r^{(p)}(\pi_i')] \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi anche

$$(32) \qquad \left| \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i'^{(p)},\ \tau_r^{(p)}(\pi_i')] - \mathfrak{I}_{S_p} \right| < \varepsilon .$$

D' altra parte esiste un $\gamma_1 > 0$, per il quale vale la tesi β) per ogni $p = 1, 2,..., \bar{\bar{p}}-1$ (in numero finito) e quindi, posto $\gamma' = \min[\gamma, \gamma_1]$, vale la (32) per ogni p. Per l' arbitrarietà di ε, l' uniforme convergenza affermata nel teorema III è così dimostrata.

22. - Dalle α) e β) segue inoltre, per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$,

$$(33) \qquad \left| \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i,\ \tau_r(p_i)] - \mathfrak{I}_S \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left| \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i^{(p)},\ \tau_r^{(p)}(p_i)] - \mathfrak{I}_{S_p} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

e inoltre, sempre per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$, valgono le (31).

Abbiamo più volte osservato l' uguaglianza

$$1 - \sum_{r=1}^{3} \alpha_r \beta_r = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} (\alpha_r - \beta_r)^2$$

valevole qualunque siano i numeri reali α_r, β_r, $(r = 1, 2, 3)$, tali che $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$. Posto $\alpha_r = \tau_r(p_i)/t(p_i)$, $\beta_r = \tau_r^{(p)}(p_i)/t^{(p)}(p_i)$, otteniamo

$$1 - \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} \frac{\tau_r^{(p)}(p_i)}{t^{(p)}(p_i)} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r^{(p)}(p_i)}{t^{(p)}(p_i)} \right]^2 .$$

Procedendo come nel n. 17, otteniamo

$$\sum_{i=1}^{\nu} t^{(p)}(p_i) \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r^{(p)}(p_i)}{t^{(p)}(p_i)}\right]^2 \leqslant 2 \left[T(S_p) - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} \tau_r^{(p)}(p_i)\right]$$

e posto

$$\delta_{ri}^{(p)} = \tau_r(p_i) - \tau_r^{(p)}(p_i), \qquad (i=1, 2,..., \nu;\ r=1, 2, 3;\ p \geqslant p),$$

risulta

$$\sum_{i=1}^{\nu} t^{(p)}(p_i) \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r^{(p)}(p_i)}{t^{(p)}(p_i)}\right]^2 \leqslant 2 \left[T(S_p) - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{3} \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} [\tau_r(p_i) - \delta_{ri}^{(p)}]\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2 \mid T(S_p) - T(S) \mid + 2 \left[T(S) - \sum_{i=1}^{\nu} t(p_i)\right] + 2 \sum_{r=1}^{3} \sum_{i=1}^{\nu} \mid \delta^{(p)} \mid .$$

Dalle (27), (28) e (29) segue infine, per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$,

$$(34) \qquad \sum_{i=1}^{\nu} t^{(p)}(p_i) \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r^{(p)}(p_i)}{t^{(p)}(p_i)}\right]^2 < 2\sigma\varrho^2 + 2\sigma\varrho^2 + 6\sigma\varrho^2 = 10\sigma\varrho^2.$$

Dividiamo, per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$, i poligoni p_i in due categorie, mettendo nella prima quelli per i quali, per ogni r, risulta

$$(35) \qquad \left| \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r^{(p)}(p_i)}{t^{(p)}(p_i)} \right| < \varrho, \qquad (r=1, 2, 3),$$

e ponendo nella seconda tutti gli altri, cioè quelli per i quali, per almeno un r risulta

$$\left| \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} - \frac{\tau_r^{(p)}(p_i)}{t^{(p)}(p_i)} \right| \geqslant \varrho.$$

Indichiamo con $\sum'$ e $\sum''$ le somme relative ai poligoni p_i della prima e rispettivamente, della seconda categoria. Utilizzando la (34) e ragionando come nel n. 11, otteniamo:

$$\sum_i{}'' t^{(p)}(p_i) < 10\sigma.$$

Si ha ora, per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$,

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i, \tau_r(p_i)] - \sum_{i=1}^{\nu} F[x_i^{(p)}, \tau_r^{(p)}(p_i)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] t(p_i) - F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] t^{(p)}(p_i) \right\} +$$

$$+ \left\{ \sum_i{}' + \sum_i{}'' \right\} \left\{ F\left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)}\right] t^{(p)}(p_i) - F\left[x_i^{(p)}, \frac{\tau_r^{(p)}(p_i)}{t^{(p)}(p_i)}\right] t^{(p)}(p_i) \right\} = s_1 + s_2 + s_3.$$

e inoltre, per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$,

$$| s_1 | \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} \left| F \left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} \right] \right| \, | t(p_i) - t^{(p)}(p_i) | < M\sigma,$$

$$| s_2 | \leqslant \sum_i{}' \left| F \left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} \right] - F \left[x_i^{(p)}, \frac{\tau_r^{(p)}(p_i)}{t^{(p)}(p_i)} \right] \right| t^{(p)}(p_i).$$

Ma i punti (x_i, y_i, z_i), $(x_i^{(p)}, y_i^{(p)}, z_i^{(p)})$ sono le immagini sopra le superficie S, S_p del medesimo punto (u_i, v_i) di p_i e quindi per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$, risulta

$$| x_i - x_i^{(p)} | \leqslant \bar{\delta}_p < \varrho_1 \leqslant \varrho,$$

ed analogamente

$$| y_i - y_i^{(p)} | < \varrho, \qquad | z_i - z_i^{(p)} | < \varrho.$$

D' altra parte per ogni poligono p_i della prima categoria, valgono le (35) e quindi

$$| s_2 | < \sigma \sum_i{}' t^{(p)}(p_i) < \sigma \sum_{i=1}^{\nu} t^{(p)}(p_i) \leqslant \sigma T(S_p) = \sigma L(S_p) < M\sigma.$$

Finalmente

$$| s_3 | \leqslant \sum_i{}'' \left\{ \left| F \left[x_i, \frac{\tau_r(p_i)}{t(p_i)} \right] \right| + F \left| x_i^{(p)}, \frac{\tau_r^{(p)}(p_i)}{t^{(p)}(p_i)} \right| \right\} t^{(p)}(p_i) < 2M \cdot 10\sigma = 20M\sigma.$$

In definitiva

$$| \varDelta | \leqslant | s_1 | + | s_2 | + | s_3 | < (1 + 1 + 20) M\sigma = 22 M\sigma = \frac{22}{314} \varepsilon < \varepsilon,$$

ossia, per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$,

$$\left| \sum_{i=1}^{\nu} F [x_i, \tau_r(p_i)] - \sum_{i=1}^{\nu} F [x_i^{(p)}, \tau_r^{(p)}(p_i)] \right| < \varepsilon.$$

Dalla (33) segue finalmente, per ogni $p \geqslant \bar{\bar{p}}$,

$$| \mathfrak{J}_S - \mathfrak{J}_{S_p} | < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Per l' arbitrarietà di ε il teorema III è così completamente dimostrato.

§ 5. - L'integrale $\mathfrak{J}_S$ come integrale di Lebesgue.

23. - Dimostreremo nei nn. 24 e seguenti il

TEOREMA IV. - *Se S è una superficie continua di area finita secondo Lebesgue e*

(1) S: $\qquad x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\qquad (u,v)\,\varepsilon\, Q\equiv(0,1,0,1),$

è una rappresentazione della superficie S per la quale le trasformazioni piane Φ_1, Φ_2, Φ_3 risultano assolutamente continue, allora, indicati con $H_1(u,v)$, $H_2(u,v)$, $H_3(u,v)$ i Jacobiani generalizzati relativi delle trasformazioni Φ_1, Φ_2, Φ_3 [20], *l'integrale $\mathfrak{J}_S$ è dato dal seguente integrale di Lebesgue*

$$\mathfrak{J}_S=\iint_Q F[x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v),\; H_1(u,v),\; H_2(u,v),\; H_3(u,v)]\,du\,dv. \tag{36}$$

Per semplicità indicheremo detto integrale anche con le notazioni più semplici

$$\mathfrak{J}_S=\iint_Q F[x,y,z,\; H_1,\, H_2,\, H_3]\,du\,dv,$$

$$\mathfrak{J}_S=\iint_Q F[x,\, H_r]\,du\,dv,\qquad \mathfrak{J}_S=\iint_Q F\,du\,dv.$$

24. - Sia I l'insieme di tutti i punti (x,y,z,u,v,w) per i quali $(x,y,z)\,\varepsilon\, S$, $u^2+v^2+w^2=1$. L'insieme I è limitato e chiuso e pertanto la funzione $F(x,y,z,u,v,w)$ è, su I, limitata ed uniformemente continua. Sia $M>1$ un numero tale che per ogni (x,y,z,u,v,w) di I risulti $|F|<M$. Inoltre M sia scelto in modo che sia anche $|L(S)|<M$.

Siano $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ i Jacobiani generalizzati assoluti e H_1, H_2, H_3 i Jacobiani generalizzati relativi delle trasformazioni Φ_1, Φ_2, Φ_3; sia $D(u,v)=[\mathfrak{J}_1^2+\mathfrak{J}_2^2+\mathfrak{J}_3^2]^{1/2}$. Le funzioni $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, H_1, H_2, H_3, sono tutte integrabili secondo LEBESGUE in Q. Inoltre in *tutti* i punti di Q si ha $H_1^2+H_2^2+H_3^2\leq D^2$, e, in *quasi tutti* i punti di Q, si ha

$$D^2(u,v)=\mathfrak{J}_1^2+\mathfrak{J}_2^2+\mathfrak{J}_3^2=H_1^2+H_2^2+H_3^2 \quad [21]. \tag{37}$$

---

[20] Per la definizione dei Jacobiani generalizzati assoluti e relativi, si veda loc. cit. in [1], *a*), *c*), *h*). Per la definizione di trasformazione assolutamente continua, si veda loc. cit. [1], *a*).

[21] È infatti sempre $|H_r(u,v)|\leq\mathfrak{J}_r(u,v)$, $r=1,2,3$, e, in quasi tutti i punti (u,v) di Q, $H_r(u,v)=\pm\,\mathfrak{J}_r(u,v)$; loc. cit. in [1], *c*), p. 1492.

In tutti i punti di Q in cui $D=0$, si ha $H_1=H_2=H_3=0$ e quindi $F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)=0$. In tutti i punti in cui vale la (37) e $D \neq 0$, risulta

$$(38) \qquad | F(x, y, z, H_1, H_2, H_3) | = \left| F\left(x, y, z, \frac{H_1}{D}, \frac{H_2}{D}, \frac{H_3}{D}\right) \right| | D | < M | D | .$$

Finalmente, in tutti i punti in cui $D \neq 0$ e non vale la (37) potrà aversi $H_1^2+H_2^2+{}_3^2<D^2$ e quindi la (38) vale a maggior ragione ricordando la omogeneità della funzione $F(x, y, z, u, v, w)$ rispetto ad u, v, w.

Pertanto in *tutti* i punti (u, v) di Q vale la relazione

$$| F(x, y, z, H_1, H_2, H_3) | \leqslant MD(u, v).$$

Poichè la funzione $D(u, v)$ è integrabile L, altrettanto accade per la funzione F e quindi l'integrale (36) è un integrale di LEBESGUE, come si è affermato.

Sia $P \equiv (u, v)$ un qualsiasi punto interno a Q, sia $q \subset Q$ un quadrato a lati paralleli agli assi u e v, di centro P e sia $\delta=\delta(q)$ il diametro di q. Sia $[\pi_i, i=1, 2, \ldots, n]$ un qualunque gruppo di poligoni semplici di q, a due a due senza punti interni in comune; siano C_{ri}, $(i=1, 2, \ldots, \nu;\ r=1, 2, 3)$, le curve continue e chiuse immagini delle poligonali π_i rispetto alle trasformazioni Φ_r.

Sia

$$m = \max_{r=1,2,3} \left| \frac{1}{|q|} \sum_{i=1}^{n} C_{ri} \right| ,$$

$$\mu = \max \left[\frac{1}{|q|} \left[T(q) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i) \right] , \quad \frac{1}{|q|} \left[T_r(q) - \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i) \right] , \qquad r=1, 2, 3 \right] .$$

Quasi tutti i punti $P \equiv (u, v)$ di Q godono delle seguenti proprietà :

α) $\displaystyle \lim_{\delta \to 0} \frac{T_r(q)}{|q|} = \mathfrak{J}_r(u, v), \quad (r=1, 2, 3), \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{T(q)}{q} = \mathfrak{D}(u, v), \quad D^2 = \mathfrak{J}_1^2 + \mathfrak{J}_2^2 + \mathfrak{J}_3^2 = \mathfrak{D}^2;$

β) $\displaystyle \lim_{\substack{\delta \\ m \\ \mu}\Big\} \to 0} \frac{1}{|q|} \sum_{i=1}^{n} \tau_r(\pi_i) = H_r, \quad (r=1, 2, 3), \quad H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \mathfrak{D}^2 ;$

γ) $\displaystyle \lim_{\substack{\delta \\ m \\ \mu}\Big\} \to 0} \frac{1}{|q|} \sum_{i=1}^{n} \Big\{ a_1 \tau_1(\pi_i) + a_2 \tau_2(\pi_i) + a_3 \tau_3(\pi_i) \Big\} = D(u, v),$ [22]

---

[22] La prima delle α) è la definizione di Jacobiano generalizzato assoluto (loc. cit. in [1], a)) ; l'esistenza quasi ovunque del secondo limite α) è provata in [1], c), p. 1455, 1451 ; l'ultima uguaglianza α) è provata in [1], c), p. 1456, quasi ovunque in Q. La prima delle β) è la definizione di Jacobiano generalizzato relativo (loc. cit. in [1], c), p. 1432 e h), § 1, n. 10. La seconda delle β) segue dalle precedenti e dal fatto che quasi ovunque in Q è $H_r(u, v) = \pm \mathfrak{J}_r(u, v)$, $(r = 1, 2, 3)$. La γ) segue da un mio precedente teorema, loc. cit. in [1] c), p. 1469.

ove $a_r = H_r(u, v)/D(u, v)$, $r = 1, 2, 3$, se $D(u, v) \neq 0$, ed altrimenti a_1, a_2, a_3, sono numeri arbitrari tali che $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$.

25. - Sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario e sia $\sigma = \varepsilon/31\, M^2$.

Come sappiamo (Teor. I) esiste un numero $\gamma > 0$ tale che, per ogni gruppo di poligoni semplici $[\pi_i, i = 1, 2, ..., n]$ di Q a due a due senza punti interni in comune e tali che

$$\delta_0 = \max_{i=1,2,...,n} \eta(\pi_i) < \gamma,$$

$$m_0 = \max_{r=1,2,3} \left| \sum_{i=1}^{n} C_{ri} \right| < \gamma,$$

$$\mu_0 = \max \left[T(S) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i), \quad T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{n} t_r(\pi_i), \quad r = 1, 2, 3 \right] < \gamma,$$

risulta

$$\left| \sum_{i=1}^{n} F[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)] - \mathcal{I}_S \right| < \sigma,$$

ove (x_i, y_i, z_i) è l'immagine di un punto (u_i, v_i) comunque scelto su π_i, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Sia $\varrho > 0$ un numero tale che per ogni coppia (x, y, z, u, v, w), (x', y', z', u', v', w') di punti di I tali che $| x - x' | < \varrho, ..., | w - w' | < \varrho$, si abbia $| F(x, y, z, u, v, w) - F(x', y', z', u', v', w') | < \sigma$. Sia $\tau > 0$ un numero tale che per ogni insieme h, $h \subset Q$, con $| h | < \tau$, risulti

$$\iint_h D(u, v)\, du\, dv < \min\, [\sigma, \sigma\varrho^2, \gamma/4].$$

Possiamo supporre $\tau \leqslant \sigma$. Osserviamo inoltre che le funzioni $H_r(u, v)$ sono quasi continue in Q, $r = 1, 2, 3$, e quindi esiste un insieme aperto Δ di punti di Q, di ampiezza $| \Delta | < \tau$, tale che le funzioni $H_r(u, v)$ risultino continue nell'insieme chiuso e limitato $Q - \Delta$. Tali funzioni sono pertanto uniformemente continue in $Q - \Delta$ e quindi esiste un numero $\lambda > 0$ tale che, per ogni coppia di punti $P \equiv (u, v)$, $P'(u', v')$ di $Q - \Delta$ con $\overline{PP'} < \lambda$, risulti $| H_r(u, v) - H_r(u', v') | < \varrho$, $(r = 1, 2, 3)$. Se $\omega(\delta)$ è il modulo di continuità della rappresentazione (1) della superficie S, supporremo inoltre λ così piccolo che si abbia pure $\omega(\lambda) < \min\, [\varrho, \gamma]$.

Diciamo J l'insieme di tutti i punti (u, v) di $Q - \Delta$ nei quali valgono le $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, e nei quali inoltre

$\delta)$ $D(u, v) \neq 0$.

Sia K l'insieme complementare, $K = Q - J$, dell'insieme J.

Si ha $K = K\Delta + K(Q-\Delta)$. In quasi tutti i punti (u, v) di $K(Q-\Delta)$ risulta $D(u, v) = 0$. Si ha inoltre $|K\Delta| \leqslant |\Delta| < \tau$.

Si noti finalmente che quasi tutti i punti $P \equiv (u, v)$ di J godono della seguente ulteriore proprietà :

ε) $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{|qJ|}{|q|} = 1$, ove q è un qualunque quadrato di centro P a lati paralleli agli assi u, v e δ è il diametro di q.

26. - Per il teorema di copertura di VITALI esiste un gruppo finito di punti di Q :

$$P_1, P_2, \dots, P_N, \qquad P_i \equiv (u_i, v_i), \qquad (i = 1, 2, \dots, N),$$

e di altrettanti quadrati

$$q_1, q_2, \dots, q_N, \qquad q_i \text{ di centro } P_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, N),$$

a lati paralleli agli assi u, v, interamente contenuti in Q, a due a due senza punti interni in comune, e contenenti, ciascuno, un gruppo, pure finito, di poligoni semplici $[\pi_{is}, s = 1, 2, \dots, n_i]$,

$$\pi_{is} \subset q_i, \qquad (s = 1, 2, \dots, n_i;\ i = 1, 2, \dots, N),$$

a due a due senza punti interni in comune e tali che, indicate con C_{isr} ($i = 1, 2, \dots, N$; $s = 1, 2, \dots, n_i$; $r = 1, 2, 3$), le curve continue e chiuse, immagini delle poligonali π^*_{is} rispetto alle trasformazioni Φ_r, risulta :

1ª) $P_i \in J, \qquad (i = 1, 2, \dots, N)$;

2ª) $\delta(q_i) < \lambda, \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad \sum\limits_{i=1}^{N} |q_i| > |J| - \tau$;

3ª) $\dfrac{|q_i J|}{|q_i|} > 1 - \tau, \qquad (i = 1, 2, \dots, N)$;

4ª) $\left| \dfrac{T(q_i)}{|q_i|} - D(u_i, v_i) \right| < \min [\sigma, \sigma\varrho^2], \quad D(u_i, v_i) \neq 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, N)$;

5ª) $\left| \dfrac{1}{|q_i|} \sum\limits_{s=1}^{n_i} \sum\limits_{r=1}^{3} a_{ir}\, \tau_r(\pi_{is}) - D(u_i, v_i) \right| < \sigma\varrho^2, \qquad (i = 1, 2, \dots, N)$;

ove

$$a_{ir} = \frac{H_r(u_i, v_i)}{D(u_i, v_i)}, \quad (r = 1, 2, 3), \quad \sum_{r=1}^{3} H_r^2(u_i, v_i) = D^2(u_i, v_i), \qquad (i = 1, 2, \dots, N);$$

6ª) $\left| \dfrac{1}{|q_i|} \sum\limits_{s=1}^{n} C_{isr} \right| < \gamma, \qquad (r = 1, 2, 3;\ i = 1, 2, \dots, N)$;

7ª) $\dfrac{1}{|q_i|} \left[T(q_i) - \sum\limits_{s=1}^{n_i} t(\pi_{is}) \right] < \min \left[\sigma, \dfrac{\gamma}{4} \right], \qquad (i = 1, 2, \dots, N)$.

27. - Consideriamo il gruppo finito $[\pi_{is}, s=1, 2,..., l_i; i=1, 2,..., N]$ di poligoni semplici di Q a due a due senza punti interni in comune ed osserviamo che

$$\eta(\pi_{is}) \leqslant \eta(q_i) \leqslant \omega[\delta(q_i)] \leqslant \omega(\lambda) < \gamma, \quad (s=1, 2,..., l_i; i=1, 2,..., N),$$

e quindi

$$\delta_0 = \max_{i,s} \eta(\pi_{is}) < \gamma. \tag{39}$$

D'altra parte, ricordando la (6ª),

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_i} C_{isr} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{s=1}^{n_i} C_{isr} \right| < \gamma \sum_{i=1}^{N} |q_i| < \gamma, \qquad (r=1, 2, 3),$$

e quindi

$$m_0 = \max_{r=1,2,3} \left| \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_i} C_{isr} \right| < \gamma. \tag{40}$$

Per ipotesi le trasformazioni piane Φ_r sono assolutamente continue e quindi, in forza di un mio precedente teorema ([23]) e ricordando il § 2, n. **2**,

$$T(S) = L(S) = \iint_Q D(u, v)\, du\, dv, \quad T(\Phi_r) = L(\Phi_r) = \iint_Q \mathfrak{J}_r(u, v)\, du\, dv, \quad (r=1, 2, 3).$$

Analogamente, indicate con S_i le superficie definite dalle (1) su q_i e con Φ_{ri} le relative trasformazioni piane,

$$T(q_i) \equiv T(S_i) = L(S_i) = \iint_{q_i} D(u, v)\, du\, dv,$$

$$T_r(q_i) \equiv T(\Phi_{ri}) = L(\Phi_{ri}) = \iint_{q_i} \mathfrak{J}_r(u, v)\, du\, dv, \quad (r=1, 2, 3; i=1, 2,..., N).$$

Indichiamo con R l'insieme

$$R = Q - \sum_{i=1}^{N} q_i.$$

Si ha

$$R = RJ + RK = RJ + RK\Delta + RK(Q - \Delta)$$

e d'altra parte, ricordando anche la (3ª),

$$RJ = \left(Q - \sum_{i=1}^{N} q_i\right) J = J - \sum_{i=1}^{N} q_i J$$

$$|RJ| = |J| - \sum_{i=1}^{N} |q_i J| < |J| - \sum_{i=1}^{N} (1-\tau)|q_i| =$$

$$= \left[|J| - \sum_{i=1}^{N} |q_i J| \right] + \tau \sum_{i=1}^{N} |q_i| < \tau + \tau = 2\tau.$$

([23]) Loc. cit. in ([1]), *a*), teor. VI.

Analogamente $|RK\Delta| \leq |\Delta| < \tau$ e finalmente, in quasi tutti i punti (u, v) di $RK(Q-\Delta)$, $D(u, v)=0$. Pertanto

$$(41)\quad 0 \leq T(S) - \sum_{i=1}^{N} T(q_i) = \iint_R D(u, v)\, du\, dv = \left\{ \iint_{RJ} + \iint_{RKD} + \iint_{RK(Q-\Delta)} \right\} D(u, v)\, du\, dv < \\ < \begin{cases} 2\gamma/4 + \gamma/4 + 0 = 3\gamma/4 \\ 2\sigma\varrho^2 + \sigma\varrho^2 + 0 = 3\sigma\varrho^2 . \end{cases}$$

Analogamente

$$(42)\quad 0 \leq T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{N} T_r(q_i) = \iint_R J_r(u, v)\, du\, dv \leq \iint_R D(u, v)\, du\, dv < \begin{cases} 3\gamma/4 \\ 3\sigma\varrho^2 . \end{cases}$$

Dalle (41) e (7ª) segue ora

$$(43)\quad 0 \leq T(S) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_i} t(\pi_{is}) = \left[T(S) - \sum_{i=1}^{N} T(q_i) \right] + \sum_{i=1}^{N} \left[T(q_i) - \sum_{s=1}^{n_i} t(\pi_{is}) \right] < \\ \leq 3\gamma/4 + \gamma/4 \sum_{i=1}^{N} |q_i| \leq 3\gamma/4 + \gamma/4 = \gamma,$$

ed analogamente

$$(44)\qquad 0 \leq T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_i} t_r(\pi_{is}) < \gamma, \qquad (r=1, 2, 3).$$

Dalle (39), (40), (43), (44) segue che il gruppo di poligoni $[\pi_{is}, s=1, 2,..., l_i;$ $i=1, 2,..., N]$ ha indici $\delta_0 < \gamma$, $m_0 < \gamma$, e $\mu_0 = \max \left[T(S) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{l_i} t(\pi_{is}),\right.$ $\left. T(\Phi_r) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{l_i} t_r(\pi_{is}),\ r=1, 2, 3 \right] < \gamma$ e quindi, scelto su ciascuno dei poligoni π_{is}, $(s=1, 2,..., l_i, i=1, 2,..., N)$, un punto (u_{is}, v_{is}) e indicato con (x_{is}, y_{is}, z_{is}) la sua immagine su S, risulta:

$$(45)\qquad \left| \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_i} F[x_{is}, \tau_r(\pi_{is})] - \mathfrak{I}_S \right| < \sigma < M\sigma.$$

28. - Dalla relazione già più volte adoperata,

$$1 - \sum_{r=1}^{3} \alpha_r \beta_r = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} (\alpha_r - \beta_r)^2,$$

valevole qualunque siano i numeri α_r, β_r, $(r=1, 2, 3)$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$, otteniamo, ponendo $\alpha_r = \alpha_{ir} = H_r(u_i, v_i)/D(u_i, v_i)$, $\beta_r = \beta_{ir} =$ $= \tau_r(\pi_{is})/t(\pi_{is})$,

$$1 - \sum_{r=1}^{3} \alpha_{ir} \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{3} \left[\alpha_{ir} - \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})} \right]^2, \quad (s=1, 2,..., n_i;\ i=1, 2,..., N).$$

Moltiplicando queste relazioni per $2t(\pi_{is})$ e sommando rispetto ad s e ad i otteniamo:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_i} t(\pi_{is})\sum_{r=1}^{3}\left[a_{ir}-\frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right]^2=2\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_i}\left[t(\pi_{is})-\sum_{r=1}^{3}a_{ir}\,\tau_r(\pi_{is})\right],$$

ove, per ogni i ed s, risulta:

$$t(\pi_{is})-\sum_{r=1}^{3}a_{ir}\,\tau_r(\pi_{is})\geqslant 0, \qquad (s=1,2,\ldots,n_i\,;\ i=1,2,\ldots,N).$$

Si ha ora ricordando le (41) e (45),

$$(46)\quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_i} t(\pi_{is})\sum_{r=1}^{3}\left[a_{ir}-\frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right]^2=2\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_i}t(\pi_{is})-\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_i}\sum_{r=1}^{3}a_{ir}\tau_r(\pi_{is})\right]\leqslant$$

$$\leqslant 2\left[T(S)-\sum_{i=1}^{N}T(q_i)\right]+2\sum_{i=1}^{N}\left[T(q_i)-D(u_i,v_i)|\,q_i\,|\right]+$$

$$+2\sum_{i=1}^{N}\left[D(u_i,v_i)\,|\,q_i\,|-\sum_{s=1}^{n_i}\sum_{r=1}^{3}a_{ir}\,\tau_r(\pi_{is})\right]\leqslant$$

$$\leqslant 6\,\sigma\varrho^2+2\sum_{i=1}^{N}|\,q_i\,|\,\sigma\varrho^2+2\sum_{i=1}^{N}|\,q_i\,|\,\sigma\varrho^2\leqslant 10\,\sigma\varrho^2.$$

Dividiamo i poligoni π_{is} in due categorie, ponendo nella prima quelli per i quali, per ogni r, risulta

$$(47)\qquad \left|a_{ir}-\frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right|<\varrho, \qquad (r=1,2,3),$$

e ponendo nella seconda i rimanenti, cioè quei poligoni π_{is} per i quali, per almeno un r, risulta

$$\left|a_{ir}-\frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right|\geqslant\varrho.$$

Indichiamo con $\sum'_{i,s}\ \sum''_{i,s}$ le sommatorie estese rispettivamente ai poligoni π_{is} della prima e della seconda categoria. Risulta

$$\varrho^2\sum{}'' t(\pi_{is})\leqslant\sum{}'' t(\pi_{is})\sum_{r=1}^{3}\left[a_{ir}-\frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_i}t(\pi_{is})\sum_{r=1}^{3}\left[a_{ir}-\frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right]^2<10\sigma\varrho^2$$

e quindi

$$(48)\qquad \sum{}'' t(\pi_{is})<10\sigma.$$

Si ha ora

$$\sum_{i=1}^{N} F[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)] \mid q_i \mid - \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_i} F[x_{is}, \tau_r(\pi_{is})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{ F[x_i, a_{ir}] D(u_i, v_i) | q_i | - \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_i} F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] t(\pi_{is}) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} F[x_i, a_{ir}] [D(u_i, v_i) \mid q_i \mid - T(q_i)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} F[x_i, a_{ir}] \left[T(q_i) - \sum_{s=1}^{n_i} t(\pi_{is})\right] +$$

$$+ \left\{ \sum{}' + \sum{}'' \right\} \left\{ F[x_i, a_{ir}] - F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] \right\} t(\pi_{is}) = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 .$$

Dalla (4^a) e dalla (7^a) segue:

$$| s_1 | \leqslant M \sum_{i=1}^{N} | D(u_i, v_i) | q_i | - T(q_i) | \leqslant M \sum_{i=1}^{N} \sigma | q_i | < M\sigma,$$

$$| s_2 | \leqslant M \sum_{i=1}^{N} \left| T(q_i) - \sum_{s=1}^{n_i} t(\pi_{is}) \right| < M \sum_{i=1}^{N} \sigma | q_i | < M\sigma.$$

Osserviamo che i poligoni π_{is}, $(s=1, 2,..., n_i)$, sono interamente contenuti nel quadrato q_i e pertanto i punti (u_{is}, v_{is}), $(s=1, 2,..., n_i)$, appartengono tutti, insieme con (u_i, v_i) al quadrato q_i di diametro $\delta(q_i) < \lambda$. Pertanto

$$| x_{is} - x_i | \leqslant | x(u_{is}, v_{is}) - x(u_i, v_i) | \leqslant \eta(q_i) \leqslant \omega [\delta(q_i)] \leqslant \omega(\lambda) < \varrho,$$
$$(s=1, 2,..., l_i ;\ i=1, 2,..., N),$$

ed analogamente $| y_{is} - y_i | < \varrho$, $| z_{is} - z_i | < \varrho$. Per tutti i poligoni π_{is} della prima categoria valgono inoltre le (47) e quindi, per gli stessi poligoni,

$$\left| F [x_i, a_{ir}] - F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] \right| < \sigma.$$

Ne segue

$$| s_3 | \leqslant \sum{}' \left| F [x_i, a_{ir}] - F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] \right| t(\pi_{is}) \leqslant \sigma \sum{}' t(\pi_{is}) \leqslant \sigma T(S) = \sigma L(S) < M\sigma.$$

Infine, ricordando la (48),

$$| s_4 | \leqslant \sum{}'' \left| F [x_i, a_{ir}] - F\left[x_{is}, \frac{\tau_r(\pi_{is})}{t(\pi_{is})}\right] \right| t(\pi_{is}) < 2M \sum{}'' t(\pi_{is}) < 2M \cdot 10\sigma = 20M\sigma.$$

In definitiva

$$(49)\qquad \left| \sum_{i=1}^{N} F\,[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)] \mid q_i \mid - \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=1}^{n_i} F\,[x_{is}, \tau_r(\pi_{is})] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mid s_1 \mid + \mid s_2 \mid + \mid s_3 \mid + \mid s_4 \mid < (1+1+1+20)M\sigma = 23M\sigma.$$

29. - Abbiamo già posto

$$Q - \sum_{i=1}^{N} q_i \equiv R = RJ + RK = RJ + RK\Delta + RK(Q-\Delta).$$

Osserviamo ora che si ha:

$$\iint_{Q} F\,[x(u, v), H_r(u, v)]\, du\, dv - \sum_{i=1}^{N} F\,[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)] \mid q_i \mid =$$

$$= \iint_{R} F\,[x, H_r]\, du\, dv + \sum_{i=1}^{N} \iint_{q_i} F\,[x, H_r]\, du\, dv - \sum_{i=1}^{N} F\,[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)] \mid q_i \mid =$$

$$= \left\{ \iint_{RJ} + \iint_{RK\Delta} + \iint_{RK(Q-\Delta)} \right\} F\,[x(u, v), H_r(u, v)]\, du\, dv +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \iint_{q_i(Q-\Delta)} \{ F\,[x(u, v), H_r(u, v)] - F\,[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)] \}\, du\, dv +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \iint_{q_i\Delta} \{ F\,[x(u, v), H_r(u, v)] - F\,[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)] \}\, du\, dv = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 .$$

Si ha

$$\mid RJ \mid < 2\tau, \qquad \mid RK\Delta \mid < \tau.$$

Perciò

$$\mid \sigma_1 \mid \leqslant M \iint_{RJ} D(u, v)\, du\, dv < 2M\sigma, \qquad \mid \sigma_2 \mid \leqslant M \iint_{RK\Delta} D(u, v)\, du\, dv < M\sigma.$$

In quasi tutti i punti di $K(Q-\Delta)$, e perciò anche in quasi tutti i punti di $RK(Q-\Delta)$, si ha $D(u, v) = 0$ e quindi anche $H_1 = H_2 = H_3 = 0$, $F = 0$.
Quindi

$$\sigma_3 = 0.$$

Osserviamo ancora che $(u_i, v_i) \varepsilon J \subset Q - \Delta$ e che $\delta(q) < \lambda$. Pertanto per ogni altro punto (u, v) di q, appartenente a $Q - \Delta$, si deve avere

$$\mid H_r(u, v) - H_r(u_i, v_i) \mid < \varrho, \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Per tutti i punti (u, v) di q si ha poi

$$|x(u, v)-x(u_i, v_i)|<\varrho, \qquad |y(u, v)-y(u_i, v_i)|<\varrho, \qquad |z(u, v)-z(u_i, v_i)|<\varrho.$$

Pertanto, per ogni punto $(u, v)\,\varepsilon\, q(Q-\Delta)$ si deve avere

$$|F[x(u, v), H_r(u, v)]-F[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)]|<\sigma$$

e quindi

$$|\sigma_4|\leqslant \sum_{i=1}^{N} \iint_{q_i(Q-\Delta)} |F[x(u, v), H_r(u, v)]-F[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)]|\, du\, dv<$$

$$<\sigma \sum_{i=1}^{N} \iint_{q_i(Q-\Delta)} du\, dv=\sigma\left|\sum_{i=1}^{N} q_i(Q-\Delta)\right|\leqslant\sigma\sum_{i=1}^{N}|q_i|\leqslant\sigma.$$

Finalmente

$$|\sigma_5|\leqslant \sum_{i=1}^{N} \iint_{q_i\Delta} \{|F[x(u, v), H_r(u, v)]|+|F[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)]|\}\, du\, dv<$$

$$<M\sum_{i=1}^{N} \iint_{q_i\Delta} D(u, v)\, du\, dv+M\sum_{i=1}^{N}|q_i\Delta|\, D(u_i, v_i),$$

ove

$$M\sum_{i=1}^{N} \iint_{q_i\Delta} D(u, v)\, du\, dv<M\iint_{\Delta} D(u, v)\, du\, dv<M\sigma.$$

D'altra parte $J\subset Q-\Delta$, $q_iJ\subset q_i-q_i\Delta$ e perciò $|q_iJ|\leqslant|q_i|-|q_i\Delta|$. Per la (3ª) è $|q_iJ|\geqslant|q_i|(1-\tau)$ e quindi, per confronto, $|q_i\Delta|\leqslant\tau|q_i|\leqslant\sigma|q_i|$. Risulta, ricordando anche la (4ª),

$$M\sum_{i=1}^{N}|q_i\Delta|\, D(u_i, v_i)<M\sum_{i=1}^{N}\sigma|q_i|\, D(u_i, v_i)<M\sigma\sum_{i=1}^{N}[T(q_i)+\sigma|q_i|]<$$

$$<M\sigma[T(S)+\sigma]<M\sigma(M+\sigma)<2M^2\sigma.$$

Dunque $\sigma_5<M\sigma+2M^2\sigma<3M^2\sigma$ e quindi

$$\left|\iint_{Q} F[x(u, v), H_r(u, v)]\, du\, dv-\sum_{i=1}^{N} F[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)]\,|q_i|\right|\leqslant \tag{50}$$

$$\leqslant|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|+|\sigma_4|+|\sigma_5|<2M\sigma+M\sigma+\sigma+3M^2\sigma<7M^2\sigma.$$

30. - Dalla relazione

$$\mathfrak{I}_S - \iint_Q F\,du\,dv = \left[\mathfrak{I}_S - \sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_i} F[x_{is}, \tau_r(\pi_{is})]\right] +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{s=1}^{n_i} F[x_{is}, \tau_r(\pi_{is})] - \sum_{i=1}^{N} F[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)]\,|\,q_i\,|\right] +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{N} F\,[x(u_i, v_i), H_r(u_i, v_i)]\,|\,q_i\,| - \iint_Q F\,du\,dv\right]$$

e ricordando le (45), (49), (50), risulta

$$\left|\,\mathfrak{I}_S - \iint_Q F\,du\,dv\,\right| < M\sigma + 23M\sigma + 7M^2\sigma < 31M^2\sigma = \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε segue:

$$\mathfrak{I}_S = \iint_Q F\,du\,dv\,.$$

Il **Teorema** IV è così completamente dimostrato.

EZIO DELLA MONICA - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 29 febbraio 1948.